Rapport INRIA 1993 — Programme 6

# Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les Mathématiques financières

PROJET OMEGA

3 mai 1995

PROJET OMEGA

# Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les Mathématiques financières

**Localisation :** *Sophia-Antipolis*

**Mots-clés :**

## 1 Composition de l'équipe

**Responsable scientifique**

Denis Talay, directeur de recherche, Inria

**Secrétariat**

Ina Castrogiovanni

**Conseiller scientifique**

Bernard Roynette, professeur, université de Nancy

**Personnel université**

Axel Grorud, maître de conférences, université de Provence et Ura-Cnrs 225

**Personnel Ceram**

Nathalie Pistre, professeur, groupe Ceram, établissement d'enseignement de la chambre de commerce et d'industrie de Nice et Côte d'Azur

**Ingénieur expert**

Agnès Merlo, du $1^{er}$ avril au 31 octobre

**Chercheurs doctorants**

Mireille Bossy, boursier MESR, université de Provence
David Chevance, assistant moniteur normalien, université de Nice-Sophia-Antipolis
Patrick Seumen Tonou, boursier Inria, université de Provence

**Visiteurs**

Volker Wihstutz, professeur, université de Caroline du Nord, du $1^{er}$ septembre au 30 novembre
Shigeyushi Ogawa, professeur, Kyoto Institute of Technology, du $1^{er}$ septembre au 30 novembre

**Stagiaires**

Hervé Régnier, stagiaire de DEA, université de Provence, du $1^{er}$ mai au 31 juillet

# 2 Présentation du projet

L'action Omega est devenue projet au début de cette année. Les thèmes scientifiques abordés par Omega concernent l'analyse mathématique et numérique d'algorithmes probabilistes (méthodes de Monte-Carlo, méthodes particulaires stochastiques, méthodes ergodiques) pour la résolution approchée d'équations aux dérivées partielles ou intégro-différentielles linéaires ou non linéaires, et pour le calcul de quantités complexes en mathématiques financières. L'outil mathématique essentiel est la théorie de l'intégration stochastique, notamment l'interprétation probabiliste de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires. D'un point de vue algorithmique, Omega s'intéresse à l'implémentation des méthodes étudiées sur des architectures parallèles.

En ce qui concerne la partie “analyse numérique d'algorithmes probabilistes”, on cherche à effectuer des études d'erreur non asymptotiques, c'est–à–dire à donner des bornes de l'erreur pour des valeurs des paramètres numériques fixées : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. Les problèmes abordés concernent essentiellement certaines équations aux dérivées partielles non linéaires, en particulier des équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier-Stokes, ...), ainsi que des équations de transport ; en outre, certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques apportées par les conditions-limite, les dégénérescences des opérateurs différentiels sous-jacents, les phénomènes de fausses convergences, etc.

En Mathématiques financières, Omega s'intéresse plus particulièrement au calcul numérique de prix d'actifs complexes (options exotiques par exemple) ainsi qu'à la mise au point de modèles du marché et de procédures d'estimation paramétrique ou non paramétrique adaptées aux situations économiques. Omega s'intéresse aussi au développement de méthodes de Monte–Carlo appropriées à certains calculs typiques en gestion (adossement, risques de défaut de trésorerie). Enfin, Omega étudie certains problèmes liés à la théorie de l'équilibre général. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données du marché.

# 3 Actions de recherche

## 3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

### 3.1.1 Méthodes particulaires stochastiques

*Participants* : Mireille Bossy, Hervé Régnier, Denis Talay

On appelle *équation de McKean-Vlasov* les E.D.P. non linéaires du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_t}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U_t \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} s(x,y)U_t(dy)\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(U_t \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} b(x,y)U_t(dy)\right), \\ \qquad\qquad\qquad (x,t) \in R \times [0,T], \\ U_{t=0} \ = \ U_0. \end{cases}$$

La condition initiale $U_0$ est de type densité de loi de probabilité. Au sens faible, la solution $U_t$ de cette équation peut être reliée à la loi limite de particules en interaction faible de dynamique décrite par des *"noyaux d'interaction"* $b(\cdot,\cdot)$, $s(\cdot,\cdot)$ et un système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dX_t^i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b\left(X_t^i, X_t^j\right) dt + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N s\left(X_t^i, X_t^j\right) dw_t^i, \\ X_0^i = X_0^i, \qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Les résultats de "propagation du chaos" montrent que quand le nombre de particules tend vers l'infini, la mesure empirique $\mu^N(t)$ converge en probabilité vers $U_t$. A partir de cette interprétation probabiliste, M. Bossy et D. Talay ont développé un algorithme d'approximation de $U_t$, fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ; on approche la mesure initiale $U_0$ par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui donne les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$, obtenue à l'aide d'une discrétisation en temps du système différentiel stochastique ci-dessus.

L'an dernier, nous avions traité le cas des noyaux lipschitziens. Cette année, nous nous sommes intéressés au cas où $b(x, y) = H(x - y)$, $H$ étant la fonction de Heaviside : si $V(t, x)$ est la fonction de répartition de la loi $U_t$, on vérifie que $V$ est solution forte de l'équation de Burgers

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - C\frac{\partial}{\partial x}(V^2) \\ V(0, x) = \int_{-\infty}^x U_0(dy). \end{cases}$$

Nous approchons donc $V$ par la fonction de répartition empirique des particules, et nous avons pu montrer que, comme dans le cas des noyaux réguliers (mais au prix de calculs techniques bien plus lourds), l'erreur d'approximation en norme $L^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ est d'ordre $O(\sqrt{\Delta t} + 1/\sqrt{N})$. Nous avons ensuite étendu la méthode et l'estimation théorique à des condition initiales bornées mais non monotones.

Des essais numériques ont été réalisé sur ce cas test, montrant que la vitesse de convergence théorique est en accord avec le comportement numérique de l'algorithme et également le très bon comportement de la méthode lorsque que le coefficient de diffusion tend vers zéro.

Notre objectif est d'étendre notre analyse à certains noyaux singuliers, ce qui nous permettra d'obtenir des résultats attendus sur les méthodes de vortex aléatoire pour l'équation de Navier-Stokes incompressible 2-D écrite en terme de vorticité. Ainsi, nous avons commencé à explorer le cas $b(x,y) = \delta(x-y)$ : l'équation de McKean-Vlasov correspondante est l'équation de Burgers elle même, si bien que la solution est alors approchée par une régularisation de la mesure empirique des particules. L'étude de la convergence est en cours.

Durant son stage de DEA, Hervé Régnier a commencé à étudier une autre famille de méthodes particulaires, fondées quant à elles sur la simulation de processus stochastiques de branchement, ce qui permet de traiter des équations de convection-réaction-diffusion avec un terme de réaction non linéaire (par exemple, un polynôme en la solution).

### 3.1.2 Méthode de Monte-Carlo pour des équations de transport

*Participants* : Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

Le but est d'effectuer l'analyse numérique d'algorithmes probabilistes pour la résolution approchée d'équations intégro-différentielles associées à des problèmes de transport de particules, en particulier des problèmes de transport neutronique. Ce travail s'effectue dans le cadre d'une collaboration avec l'E.D.F. sur les méthodes de Monte-Carlo pour certaines équations aux dérivées partielles.

Les équations de transport permettent de modéliser l'évolution d'une population de particules évoluant dans un champ de forces connu et subissant des chocs à des instants aléatoires. Elles sont du type

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) &= b(x,y)\nabla_x u(t,x,y) + c(x,y)u(t,x,y)\\ &\quad + \lambda(x,y)\left\{\int u(t,x,z)\pi(x,y;dz) - u(t,x,y)\right\}\\ &\quad + s(t,x,y),\end{aligned}$$

avec des conditions aux limites qui peuvent être de type Dirichlet, Neumann ou absorption ; $\lambda$ est une fonction mesurable, bornée, positive, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\pi(x,y;.)$ une mesure de probabilité et $s(t,x,y)$ est un terme source. On peut interpréter l'équation ci-dessus de manière probabiliste, à l'aide d'un processus stochastique dit "de transport" ; $u(t)$ est égal à l'espérance d'une fonctionnelle de ce processus. La simulation d'un grand nombre de trajectoires d'un processus approché permet de calculer l'espérance par une méthode de Monte-Carlo ; en pratique, on discrétise l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t, Y_t)$$

où $(Y_t)$ est un processus markovien de sauts modélisant l'évolution de la vitesse : $(X_t)$ décrit l'évolution de la position, et on simule des trajectoires arrêtées ou refléchies sur la frontière.

En dimension 1, pour des problèmes dans tout l'espace, nous avons construit un algorithme de calcul de $u(t)$ lorsque la loi des instants de saut du processus $(Y_t)$ dépend uniquement du processus $(X_t)$ et analysé l'erreur correspondante en fonction du pas de discrétisation en temps. Il apparaît que la vitesse de convergence de l'erreur est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Par ailleurs, nous avons effectué une étude numérique approfondie sur quatre cas-tests en dimension 2 proposés par l'E.D.F. : calcul du flux scalaire moyen de neutrons par zone. Nous avons pu vérifier que nos résultats sont compatibles avec ceux obtenus par les méthodes déterministes utilisées à l'E.D.F..

### 3.1.3 Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles

*Participants* : Shigeyushi Ogawa, Bernard Roynette, Denis Talay, Volker Wihstutz

B. Roynette, en collaboration avec S. Benachour et P. Vallois ont considéré le problème de Cauchy non linéaire

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u| \text{ dans } I\!R_+ \times I\!R^d \\ u(0,.) = \mu \end{cases}$$

où $\mu$ est une mesure de masse totale finie. Ils ont obtenu une représentation explicite de la solution, par des méthodes probabilistes ; cette formule est "algébrique" lorsque $d = 1$ et elle est fonction d'un processus de Bessel lorsque $d \geq 2$; elle permet de déduire le comportement, quand $t \to \infty$, de $||u(t,.)||_p$.

En collaboration avec P. Chassaing et P. Vallois, B. Roynette a également étudié l'existence et le comportement d'une solution à l'équation différentielle stochastique

$$dX_s = u(s, X_s)^m dB_s \quad , \quad m > 0$$

où $u(s,.)$ désigne la densité de probabilité de la loi de $X_s$. L'intérêt de cette équation tient au fait que $u(s,.)$ satisfait l'équation des milieux poreux

$$\begin{cases} u_t = 1/2\Delta(u^{2m+1}), \\ u(s,.) \underset{s\to 0^+}{\longrightarrow} \mu \end{cases},$$

$\mu$ désignant la loi de $X_0$. De même, B. Roynette et P. Vallois ont représenté de manière probabiliste la solution de

$$(F_q) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = u^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,.) = \delta_0$$

et étudié les propriétés du processus correspondant. A partir de ces résultats, il est possible de développer des méthodes particulaires stochastiques pour les E.D.P. ci-dessus.

S. Ogawa, D. Talay et V. Wihstutz étudient quant à eux le comportement asymptotique de systèmes de particules en temps grand, dans le but de développer des méthodes particulaires pour certains problèmes non linéaires stationnaires.

### 3.1.4 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

*Participants* : Axel Grorud, David Chevance, Denis Talay

V. Bally (université du Mans et laboratoire de Probabilités (Paris 6)) et D. Talay ont étendu leurs résultats précédents portant sur l'approximation de la loi de $X_T$ par celle de $X_T^n$, où $(X_t)$ est la solution of d'une équation différentielle stochastique gouvernée par un processus de Wiener et $(X_t^n)$ est défini par une perturbation astucieuse du schéma d'Euler de pas $\frac{T}{n}$: sous l'hypothèse que le générateur infinitésimal de $(X_t)$ satisfait une condition d'hypoellipticité de type Hörmander, et en utilisant les outils du calcul de variations stochastique de Malliavin, on a pu établir un développement asymptotique de l'ecart entre les densités de la loi de $X_T^n$ et de la loi de $X_T$.

Par ailleurs, P. Protter (Purdue University) et D. Talay ont achevé leur travail sur l'approximation de solutions d'équations différentielles stochastiques gouvernées par des processus de Lévy assez généraux : les résultats de l'an dernier sont obtenus sous des hypothèses encore plus faibles sur la mesure de Lévy des sauts ; ceci permet de construire des méthodes de Monte-Carlo efficaces pour certaines équations intégro-différentielles.

D. Chevance a poursuivi son travail sur la discrétisation des équations différentielles stochastiques en temps rétrograde introduites par Peng et Pardoux, qui fournissent une interprétation probabiliste originale à certains sytèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques quasi-linéaires par exemple, et qui ont un lien naturel avec certains problèmes d'évaluation d'options en mathématiques financières. Le but est de résoudre numériquement une équation différentielle stochastique rétrograde du type :

$$p_t = \psi(y_T) + \int_t^T f(s, y_s, p_s)\, ds - \int_t^T q_s\, dW_s \quad (0 \le t \le T) \qquad (1)$$

où le processus $(y_t)_{0 \le t \le T}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(s, y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, y_s)\, dW_s \quad (0 \le t \le T) \ ,$$

la solution $(p_t, q_t)_{0 \le t \le T}$ étant adaptée par rapport à la filtration brownienne. Une telle équation constitue une interprétation probabiliste de l'équation aux dérivées partielles parabolique quasi-linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}_{t,x} u(t,x) + f(t, x, u(t,x)) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times I\!R \\ u(T,x) = \psi(x), \qquad x \in I\!R \end{cases}$$

où

$$\mathcal{L}_{t,x} u(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

L'algorithme développé par David Chevance fournit une approximation de la solution de cette E.D.P. en $nN \log N$ opérations, $N$ étant le nombre de trajectoires approchées de $(y_t)$ simulées. En dimension 1, en supposant notamment la fonction $\psi$ de variation finie sur $I\!R$ et $f$ lipschitzienne, il a obtenu le résultat de convergence suivant :

$$\left\| \hat{p}_0^{n,N} - p_0 \right\|_p \le C_p \left( \frac{1}{n} + \frac{n}{N} \right).$$

A. Grorud et D. Talay ont poursuivi l'étude de la vitesse de convergence d'équations différentielles stochastiques avec condition initiale anticipante en collaboration avec P. Vallois (université de Nancy), en utilisant à présent la méthode dite de grossissement de filtration pour disposer d'estimations classiques sur les semimartingales.

## 3.2 Mathématiques financières

*Participants* : Nathalie Pistre, Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

### 3.2.1 Calcul de prix d'options exotiques

*Participants* : Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

Il s'agit d'approcher la quantité $\mathbb{E}F(X_T, \sup_{0\leq t\leq T} X_t)$ par $\mathbb{E}F(X^n_{t_n}, \sup_{0\leq k\leq n} X^n_{t_k})$, où $(X_t)$ est un processus de diffusion homogène à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(X^n_{t_k})$ est un schéma de discrétisation de pas $\frac{T}{n}$, et $F(\cdot,\cdot)$ représente le profit que permet l'exercice d'une option lookback ou d'une option avec barrière.

Pour une option de vente lookback, i.e $F(x,z) = (z-x)_+$, nous avons obtenu que l'erreur pour le schéma d'Euler ou pour le schéma de Milhstein est d'ordre $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$.

Pour une option avec barrière de prix d'exercice $K$ et de barrière fixe $c > 0$, i.e $F(x,z) = (x-K)_+ 1_{z\in I}$ où $I = [c,\infty[$ ou $I = ]-\infty, c]$, en supposant que $(X_t)$ est un processus de diffusion linéaire (modèle de Black et Scholes), nous avons montré que l'erreur est d'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\frac{1}{n}})$ pour une option up-and-out, i.e $I = ]-\infty, c]$, et d'ordre $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} - \epsilon\right)$, $\epsilon \geq 0$ pour une option down-and-out, i.e $z = \min_{0\leq t\leq T} X_t$ et $I = [c,\infty[$.

### 3.2.2 Modélisation du marché

*Participants* : Nathalie Pistre, Denis Talay

En collaboration avec C. Hénin (CERAM), N. Pistre a étudié les options dont la valeur à l'échéance est fonction de la différence entre le prix courant de l'actif sous-jacent à l'option et le prix d'exercice ; une évaluation de ces options a été développée à l'aide d'arguments liés à la notion d'absence de dominance stochastique plutôt qu'à la notion d'arbitrage, en évitant donc l'hypothèse habituelle, très restrictive, des marchés complets.

Par ailleurs, N. Pistre et D. Talay ont poursuivi leur travail de modélisation du mécanisme de transactions boursières.

# 4 Actions industrielles

*Participants*: Mireille Bossy, Agnès Merlo, Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

Le contrat d'étude avec l'E.D.F. s'est poursuivi sur le thème des méthodes de Monte-Carlo pour certains problèmes de transport neutronique (en particulier l'étude de deux cas-tests pour lesquels l'E.D.F. avait développé des algorithmes déterministes) et sur une approche numérique probabiliste (méthode particulaire stochastique) pour l'équation de Burgers.

Un contrat avec la Caisse Autonome de Refinancement, filiale de la Caisse des Dépôts, a débuté cette année. Agnès Merlo a réalisé des programmes de calcul numérique de prix d'options pour des modèles plus complexes que les modèles usuels.

# 5 Actions nationales et internationales

D. Talay est le coordinateur scientifique et administratif d'un jumelage de laboratoires, dans le cadre du programme Science de la CEE.

Il est également responsable pour l'Inria d'une collaboration Inria/N.S.F. sur le thème de la convergence en loi des processus stochastiques (le responsable américain en est P. Protter).

Enfin, D. Talay est membre de l'"Editorial Board" de la revue "Monte Carlo Methods and Applications".

Omega est partenaire du réseau H.C.M. "Statistics of Stochastic Processes and Martingales" dont J. Jacod (université Paris 6) est le coordinateur.

Le séminaire de Théorie et Applications numériques des processus stochastiques organisé par D. Talay a accueilli les orateurs suivants : Serge Cohen (université de Versailles), Jean-Pierre Fouque (Ecole Polytechnique), Jean Lacroix (Paris 6), Bernard Lapeyre (E.N.P.C.), Dominique Lépingle (université d'Orléans), Grigori Milshtein (Université de l'Oural), Etienne Pardoux (université de Provence et I.U.F.).

Le séminaire Ceram/Inria de Mathématiques financières organisé par N. Pistre et D. Talay a accueilli les orateurs suivants : Renzo Avesani (Universite de Brescia), Pierre Bertrand (université des Antilles), Nicole

Beiner (université de Genève), Monique Jeanblanc-Picqué (université d'Evry), Octave Jokung (université de Lille), Robert Kast (GREQE-CNRS Marseille), Henri Loubergé (université de Genève), Agnès Sulem-Bialobroda (Inria).

Outre V. Wihstutz et S. Ogawa, Omega a reçu la visite de L. Tubaro (université de Trento), V. Bally (université du Maine), G. Milshtein (université de l'Oural), P. Protter (Purdue University).

# 6 Diffusion des résultats

## 6.1 Actions d'enseignement

### 6.1.1 Enseignement universitaire

A. Grorud enseigne à l'université de Provence.

N. Pistre enseigne au Ceram et assure un cours de magistère sur la "théorie financière appliquée à la firme" (université de Bordeaux), ainsi qu'un cours à HEC sur la "théorie des options appliquée aux choix d'investissements réels".

B. Roynette enseigne à l'université de Nancy I, notamment un cours de DEA sur le calcul stochastique.

D. Talay a effectué les enseignements suivants : "Equations différentielles stochastiques", cours de DEA de Mathématiques appliquées, université de Provence (30h) ; "Statistiques et simulation des processus de diffusion", cours de DEA de Probabilités (option Finance), université Paris 6 (12h) ; "Calcul numérique de prix d'options", cours au Mastère de finance internationale d'HEC (12h).

### 6.1.2 Jurys de thèse

B. Roynette été rapporteur de la thèse de D. Roux (université de Clermont-Ferrand) et de la thèse de D. Condorcet (université de Toulouse).

D. Talay a été rapporteur de la thèse d'Y. Rozenholc (université Paris 7) et de la thèse de X. Zhang (Ecole des Ponts).

## 6.2 Participation aux manifestations

M. Bossy a exposé au Workshop "Stochastics and Finance" (Berlin), au Colloque "Jeunes Probabilistes" (Aussois), aux séminaires de l'E.N.P.C et de l'université de Provence, et aux journées "Modèles stochastiques pour les E.D.P. non linéaires" (Paris 6).

D. Chevance et P. Seumen Tonou ont exposé au Workshop "Stochastics and Finance" (Berlin).

A. Grorud a exposé au Congrès "Stochastic Analysis" (Silivri, Turquie), au congrès "Stochastic Analysis and Random Fields" (Ascona) et à l'université d'Orléans.

N. Pistre a exposé au Congrès de Finance mathématique et Economie mathématique (Tunis), au G.D.R. "Banque et Monnaie" et au Club de la Bourse de la S.B.F. sur les marchés émergents.

B. Roynette a exposé aux journeés "Modèles stochastiques pour les E.D.P. non linéaires" (Paris 6), au Congrès "Potential Theory and Markov Processes" (Ascona), à des séminaires des universités d'Erlangen, de Rennes, de Paris 7, au séminaire d'Analyse Harmonique en l'honneur de P. Eymard (Nancy), au congrès sur le Calcul Stochastique (Metz) et au Séminaire de Probabilités (Luminy).

D. Talay a donné un cours à l'Ecole d'Hiver de Probabilités et Statistiques du Chili, des conférences au Colloque "Stochastics and Finance" (Berlin), au Workshop "Statistics for Stochastic Processes" (Paris 6), aux journées "Modèles stochastiques pour les E.D.P. non linéaires" (Paris 6), et donné un exposé séminaire à l'E.N.P.C.

## 6.3 Activités extérieures

- D. Talay a évalué une proposition au "Long Term Research Grants Program" de l'International Science Foundation,
- D. Talay a évalué un dossier de candidature à une "tenure" pour l'université de Fordham (U.S.A.).

# 7 Publications

## Articles et chapitres de livre

[1] P. Bernard, D. Talay, L. Tubaro, « Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients », *Mathematics of Computation 63*, 1994, p. 555–587.

[2] A. Grorud, D. Nualart, M. Sanz, « Hilbert-Valued anticipating stochastic differential equations », *Annales de l'Institut Henri Poincaré 30*, 1, 1994, p. 133–161.

[3] N. Pistre, « Réalisation d'une allocation Pareto-optimale de la consommation : le cas de préférences intertemporellement dépendantes », *Finance*, juin 1994.

[4] N. Pistre, « Varsovie : une bourse aux normes internationales », *Marchés et Techniques Financières 60*, 1994.

[5] B. Roynette, « Approximation en norme de Besov de la solution d'une équation différentielle stochastique », *Stochastics and Stochastic Reports 49*, 1994, p. 191–209.

[6] K. Sabelfeld, D. Talay, « Integral formulation of the boundary value problems and the method of random walk on spheres », *Monte-Carlo Methods and Applications 1*, 1994.

[7] D. Talay, « Book review on "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations" by P.E. Kloeden and E. Platen », *Stochastics and Stochastic Reports 47*, 1994.

[8] D. Talay, « Presto: a software package for the simulation of diffusion processes », *Statistics and Computing Journal 4*, 4, 1994.

## Rapports de recherche et publications internes

[9] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations : 1. convergence rate of the distribution function », *Rapport de Recherche n°2244*, Inria, février 1994, Soumis pour publication.

[10] S. Benachour, P. Vallois, B. Roynette, « Comportement asymptotique des solutions de $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ », *Rapport de recherche*, Institut Elie Cartan, 1994, Soumis pour publication.

[11] S. Benachour, P. Vallois, B. Roynette, « Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$ », *Rapport de recherche*, Institut Elie Cartan, 1994, Accepté pour publication dans le numéro spécial d'Astérisque dédié au soixantième anniversaire de P.A. Meyer et J. Neveu.

[12] M. Bossy, D. Talay, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles – 2: application to the Burgers equation », *Rapport de Recherche n° 2410*, Inria, novembre 1994, Soumis pour publication.

[13] M. Bossy, D. Talay, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles – 1: Smooth interacting kernels », *Rapport de Recherche n° 2180*, Inria, février 1994, Soumis pour publication.

[14] C. Hénin, N. Pistre, « Bounding the generalized convex option price », *Document de Recherche n° 53*, Ceram, 1994, Soumis pour publication.

[15] N. Pistre, « La bourse de Varsovie : qualité et performance d'un marché emergent », *Document de Recherche n° 43*, Ceram, 1994.

[16] B. Roynette, « Un phénomène d'instabilité pour l'équation différentielle stochastique non linéaire $X_t^\epsilon = \epsilon B_t - \int_0^t u_x^\epsilon(s, X_s^\epsilon)ds$ », *Rapport de recherche*, Institut Elie Cartan, 1994, Accepté pour publication dans Stochastics and Stochastic Reports.

[17] B. Roynette, P. Vallois, « Instabilité ce certaines équations différentielles stochastiques non linéaires », *Rapport de recherche*, Institut Elie Cartan, 1994, Accepté pour publication dans Journal of Functional Analysis.

### Divers

[18] A. Merlo, « Résolution numérique d'inéquations variationnelles ; applications à la finance », 1994, Rapport de contrat Car-Inria.

[19] P. Seumen Tonou, D. Talay, « Méthodes de Monte-Carlo pour le transport neutronique », 1994, Rapport de contrat E.D.F.-Inria.

## 8 Abstract

The activities of Omega concern two different families of problems, unified by the theory of stochastic processes : the numerical solving of partial differential equations, in particular nonlinear, with probabilistic algorithms (Monte-Carlo methods, stochastic particles methods, ergodic methods); modelling problems and the computation of complex quantities in financial mathematics.

In 1994, Omega investigated the convergence rate of the distribution of stochastic particles systems with a degenerate interaction kernel induced

by the Burgers equation ; we developed and analysed Monte-Carlo methods for problems of transport equations, in cooperation with the French power company Electricité de France ; we improved our previous results about the approximation in law of solutions of stochastic differential equations, in particular equations driven by general Levy processes.

In financial mathematics, a new evaluation procedure has been introduced for certain options, which does not suppose that the market is complete, we developed and obtained the convergence rate of a discretization method for backward stochastic differential equations, we analysed Monte-Carlo procedures to compute european path-dependent options.

# Table des matières

**1 Composition de l'équipe** **1**

**2 Présentation du projet** **2**

**3 Actions de recherche** **3**

3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles . . . 3

3.1.1 Méthodes particulaires stochastiques . . . 3

3.1.2 Méthode de Monte-Carlo pour des équations de transport . . . 5

3.1.3 Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles . . . 6

3.1.4 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques . . . 7

3.2 Mathématiques financières . . . 9

3.2.1 Calcul de prix d'options exotiques . . . 9

3.2.2 Modélisation du marché . . . 9

**4 Actions industrielles** **10**

**5 Actions nationales et internationales** **10**

**6 Diffusion des résultats** **11**

6.1 Actions d'enseignement . . . 11

6.1.1 Enseignement universitaire . . . 11

6.1.2 Jurys de thèse . . . 11

6.2 Participation aux manifestations . . . 12

6.3 Activités extérieures . . . 12

**7 Publications** **13**

**8 Abstract** **14**