

---

# Projet FRACTALES

## Approche Fractale pour l'Analyse et la Modélisation des Signaux

---

**Localisation :** *Rocquencourt*

**Mots-clés :** actif financier, algèbre max-plus, algorithme génétique, analyse d'images, analyse multifractale, analyse de texture, compression d'image, détection de changements, fonction höldérienne, fractales, grandes déviations, IFS, loi stable, mouvement brownien fractionnaire, multifractales, ondelettes, optimisation, problème inverse, processus de Lévy, synthèse de la parole, système de fonctions itérées, trafic sur les réseaux d'ordinateurs, traitement de la parole, traitement du signal, traitement de signal biomedical.

### 1 Composition de l'équipe

#### Responsable scientifique

Jacques Lévy Véhel, directeur de recherche, Inria

#### Responsable permanent

Evelyne Lutton, chargée de recherche, Inria

#### Secrétariat (avec A3)

Nathalie Gaudechoux, en commun avec A3  
Brigitte Mignonet, (du 01/01/96 au 09/08/96)

#### Personnel Inria

Paulo Gonçalves, chargé de recherche depuis le 01/10/96  
Jean-Paul Chièze, IR (avec A3 et SYNTIM)  
Jean-Baptiste Giorgi, IR (avec A3 et SYNTIM)

#### Chercheurs doctorants

Lotfi Belkacem, boursier Inria, Université Paris 9  
Christophe Canus, boursier CIFRE, Université Paris 11  
Khalid Daoudi, boursier Inria, Université Paris 9  
Bertrand Guiheneuf, boursier Inria, Université Paris 9  
Pascal Mignot, boursier Inria jusqu'au 30/04/96, Université Paris 11

#### Chercheur post-doctorant

Rolf Riedi

### Stagiaires

Julie Bestel, stagiaire de DEA, ENS Cachan  
 Guillaume Cretin, stagiaire de DEA, Université Paris 9  
 Benoît Leblanc, stagiaire ESIEA

### Conseillers scientifiques

Benoît Mandelbrot, Yale University  
 Yves Meyer, CEREMADE, Université Paris 9

### Collaborateurs extérieurs

Christian Walter, Crédit Lyonnais

### Professeur invité

Claude Tricot, École Polytechnique de Montréal, depuis le 01/09/96

## 2 Présentation du projet

Le projet *FRACTALES* a pour objectif le développement des **outils théoriques** appartenant au domaine de l'**analyse fractale** pour effectuer le traitement et la modélisation de **signaux complexes**.

Un des buts à moyen terme de *FRACTALES* est de constituer une "boîte à outils" de programmes de traitements fractals du signal comparable à ce qui existe dans le domaine de l'analyse de Fourier ou en ondelettes.

La géométrie fractale a connu un essor important ces dernières années tant au plan théorique (mise au point de l'analyse multifractale, approfondissement de la théorie des systèmes de fonctions itérées, étude des liens avec les ondelettes, ...) que pratique (on dénombre aujourd'hui environ mille "systèmes fractals" identifiés dans les domaines de la croissance non linéaire, de la percolation, des milieux poreux, de la géophysique, des sciences économiques, de la médecine, et du traitement du signal).

Au plan théorique, le projet *FRACTALES* se concentre sur les domaines suivants :

- **Analyse multifractale** : définition de nouveaux spectres, estimation, étude des corrélations multifractales, caractérisations de capacités à travers leurs propriétés multifractales, spectres conditionnels.
- **Analyse de la régularité ponctuelle de fonctions** : théorie des IFS, fonctions faiblement auto-affines, étude de fonctions à régularité prescrite, optimisation de fonctions irrégulières par algorithmes génétiques.
- **Processus stables et fractionnaires** : simulation et capacité à modéliser certains types de signaux, mouvement brownien fractionnaire et ses généralisations.

Les résultats de ces études théoriques sont validés sur des applications en traitement du signal qui en sont des prolongements naturels. Ces dernières induisent à leur tour de nouveaux développements en fonction des problèmes rencontrés dans la pratique. Les applications peuvent être classées en deux catégories :

- Traitement de signaux 1D : synthèse de la parole, modélisation du trafic sur les réseaux d'ordinateurs, analyse de signaux biomédicaux et modélisation de cours financiers.
- Traitement de signaux 2D : segmentation et compression d'images.

### 3 Actions de recherche

#### 3.1 Aspects théoriques

##### 3.1.1 Fonctions faiblement auto-affines (FAA)

*Participants* : Khalid Daoudi, Jacques Lévy Véhel

*Mots-clés* : IFS, multifractales.

Nous avons construit une nouvelle classe de fonctions multifractales, que nous avons appelées “fonctions faiblement auto-affines (FAA)”, plus riche que la classe des fonctions auto-affines classiques. Les fonctions FAA sont essentiellement des fonctions auto-affines sauf que nous autorisons l’opérateur d’échelle à varier lors du processus de génération de ces fonctions. Les fonctions FAA s’écrivent sous la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \prod_{j=1}^n \lambda_{i_j}^j g(S_{i_n}^{-1} \circ \dots \circ S_{i_1}^{-1}(x))$$

où les  $S_i$  sont des similitudes contractantes et  $g$  est une fonction qui a une certaine régularité globale. Lorsque les suites  $(\lambda_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont constantes, on retrouve le cadre des fonctions auto-affines classiques. Nous avons calculé le spectre multifractal des fonctions FAA et nous avons établi un nouveau formalisme multifractal valide pour ces fonctions. Plus précisément, sous certaines faibles conditions sur les suites  $(\lambda_i^j)$ , nous avons montré que le spectre multifractal  $d(\alpha)$  d’une fonction FAA est obtenu comme la transformée de Legendre de la fonction  $\tau(q)$  définie par :

$$\tau(q) = \liminf_{n \rightarrow \infty} - \frac{\sum_{j=1}^n \log_d \left( |\lambda_0^j|^q + \dots + |\lambda_{d-1}^j|^q \right)}{n}.$$

##### 3.1.2 Estimation de la dimension de Hausdorff

*Participants* : Christophe Canus, Jacques Lévy Véhel

*Mots-clés* : analyse multifractale.

Nous cherchons à définir un estimateur de la dimension de Hausdorff, avec pour application principale, le calcul du spectre multifractal de Hausdorff. S’il existe de nombreux estimateurs de la dimension de boîtes, nous n’avons rien trouvé dans la littérature concernant l’estimation de la dimension de Hausdorff. Nous sommes partis d’un résultat de Lyons, qui relie la dimension de Hausdorff d’un sous-ensemble fermé  $E$  de l’intervalle  $[0, 1]$  à la limite  $F(\omega_p)$  d’une suite de recouvrements aléatoires indépendants  $(F^n(\omega_p))_{n \geq 0}$  construits à partir de la suite des partitions diadiques de  $[0, 1]$  tirés aléatoirement selon une loi de Bernouilli de paramètre  $p \in [0, 1]$ . Le théorème de Lyons est le suivant :

$$\dim_{\mathcal{H}} E = \inf_p \left\{ -\frac{\log q}{\log b} : 0 \leq p \leq 1, E \subseteq F(\omega_p) \text{ p.s.} \right\}.$$

Construire un estimateur à partir de ce théorème s’avère relativement délicat puisqu’à la finitude de la résolution de l’ensemble  $E$  sur lequel on travaille s’ajoute celle de l’ensemble des recouvrements aléatoires  $F^n(\omega_p)$ . Cependant, il est possible de dériver des résultats intéressants dans un cadre semi-paramétrique. Ainsi, pour un ensemble de *Cantor* triadique aléatoire, on obtient :

$$x_n(p) = p + (1-p)x_{n-1}^2(p), n \geq 1,$$

où  $x_n(p) := \Pr[E \subseteq F^n(\omega_p)]$ . Plus généralement, pour un sous-ensemble fermé quelconque de l’intervalle  $[0, 1]$ , on cherche la suite de fonctions  $(f_{p,n})$  telle que :

$$\begin{aligned} f_{p,n} : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x_{n-1}(p) &\mapsto x'_n(p) = f_{p,n}(x_{n-1}(p)) \end{aligned}$$

où  $x'_n(p) := \Pr[E \subseteq F'^n(\omega_p)]$  et  $F'^n(\omega_p) := F^n(\omega_p) \setminus F^0(\omega_p)$ . La connaissance de  $f_{p,n}(x)$  permet d'estimer

$$p^* = \inf_p \{0 \leq p \leq 1, \Pr[E \subseteq F(\omega_p)] = 1\}$$

et finalement  $\dim_{\mathcal{H}}$ .

### 3.1.3 Spectre multifractal conditionnel

*Participants* : Jacques Lévy Véhel, Rudolf Riedi

*Mots-clés* : analyse multifractale, multifractales.

Jusqu'à présent, l'analyse multifractale a été essentiellement orientée vers l'étude des propriétés fines de mesures par rapport à la mesure Lebesgue. Pour plusieurs raisons, il est naturel de développer une analyse multifractale par rapport à une mesure de référence arbitraire. Par exemple, si deux mesures exhibent des spectres "classiques" presque identiques, le spectre conditionnel de la première mesure par rapport à la seconde permet en général de les distinguer du point de vue multifractal. Une application typique est l'étude du trafic sur des réseaux, où les mesures sont données "par paquets" et où l'on est intéressé par un comportement "en temps".

Les recherches effectuées [57] ont permis d'établir le formalisme multifractal pour ces spectres dans un cadre assez général, ce qui est important dans l'étude de mesures supportées par des ensembles de Cantor. Dans ce cas, le spectre relatif fournit une information sur la 'corrélation' des singularités des deux mesures. Une application directe se présente dans l'étude de la vie symbiotique de deux colonies de bactéries et des questions connexes.

### 3.1.4 Formalisme multifractal pour les mesures inverses

*Participants* : Benoît Mandelbrot, Rudolf Riedi

*Mots-clés* : analyse multifractale.

Les mesures inverses ont été introduites il y a quelques années par B. Mandelbrot, qui a aussi conjecturé une formule qui relie les spectres multifractals d'une mesure et de son inverse.

Dans [55, 56] nous avons démontré que la formule proposée est correcte en toute généralité pour le spectre multifractal de Hausdorff  $f_h$ . Nous avons aussi obtenu une formule pour le spectre  $f_h$  d'une classe de mesures auto-similaires plus large que celles considérées jusqu'à présent.

Pour le spectre de grande déviation  $f_g$ , la formule ne se démontre que dans le cas des mesures continues : l'étude des mesures inverses peut alors être vue comme un cas spécial d'une analyse multifractale conditionnelle (voir 3.1.3). La formule n'est pas valable pour les mesures discontinues, comme le démontre l'exemple des mesures auto-similaires généralisées : le spectre  $f_h$  n'est pas concave alors que  $f_g$  est égal à la régularisée concave  $f_h^{**}$  de  $f_h$ . On a trouvé ainsi une limite à la validité du formalisme multifractal.

### 3.1.5 Le spectre des Grandes déviations et le semi-anneau Max-Plus

*Participants* : Julie Bestel, Jacques Lévy Véhel

*Mots-clés* : algèbre max-plus, multifractales.

Dans la continuité des travaux effectués en 1995 sur l'estimation du spectre des grandes déviations  $f_g$ , nous avons prouvé, en collaboration avec Marianne Akian (Projet META2), que ce spectre peut être considéré comme une densité dans l'algèbre  $(\max, +)$ .

C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la définition de  $f_g$  dans cette algèbre:

$$\tilde{f}_g^{n,\epsilon,K}(\alpha) = \frac{1}{n} \sup_{\beta \in \mathbb{R}} (\log_2 N_n^0(\beta) + \tilde{K}_\epsilon(\alpha - \beta))$$

avec  $N_n^0(\beta) = 2^n \rho_n(\beta)$ , où  $\rho_n$  désigne la densité empirique des exposants de grain, et  $\tilde{K}_\epsilon(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} \tilde{K}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ .

$\tilde{K}$  est l'équivalent dans  $(\max, +)$  d'un noyau régularisant à support compact. En choisissant le correspondant de la gaussienne tronquée ( $\tilde{K}(x) = -\frac{1}{2}x^2$  si  $x \in [-1/2; 1/2]$ ,  $-\infty$  sinon) on retrouve la régularisation de **Moreau-Yosida** [61]. Cette dernière consiste formellement en une inf-convolution entre une fonction  $f$ , et le noyau convexe  $-\tilde{K}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ .

Dans certains cas simples (mélange ou somme de mesures binomiales), nous avons montré que l'on peut trouver  $\epsilon = \epsilon(n)$ , tel que  $|\tilde{f}_g^{n, \epsilon, K} - f_g|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il est parfois possible d'exhiber la suite  $\epsilon(n)$  optimale dans un certain sens.

Dans le cas où l'on traite des mesures bruitées, on estime la densité  $\rho_n$  par la méthode du noyau de convolution. Pour étendre l'estimation aux spectres de signaux, on définit un exposant de grain pour les fonctions à partir du comportement en loi de puissance dans les échelles des coefficients de la transformée en ondelettes.

Ces méthodes ont été appliquées à des données de trafic et des signaux biomédicaux (voir 3.3.3). Les développements futurs vont consister à essayer d'obtenir des vitesses de convergence pour les estimateurs, ainsi que des formules explicites pour  $\epsilon(n)$  dans des cas plus généraux.

### 3.1.6 Résolution du problème inverse pour les automates finis à l'aide d'un algorithme génétique

*Participants* : Benoît Leblanc, Evelyne Lutton, en collaboration avec Jean-Paul Allouche, du LRI d'Orsay

*Mots-clés* : algorithme génétique, problème inverse.

Le problème posé est de savoir s'il est possible, à partir d'une séquence de caractères, de remonter, d'un point de vue algorithmique, à l'automate fini qui a pu la générer.

Par exemple, l'automate :

$A \rightarrow BAA$   
 $B \rightarrow AC$   
 $C \rightarrow ABC$

produit les séquences suivantes à partir du caractère  $A$  :

Itération 0  $A$   
 Itération 1  $BAA$   
 Itération 2  $ACBAABAA$   
 Itération 3  $BAAABCACBAABAAACBAABAA$

Nous avons actuellement réussi à résoudre le problème dans le cas où l'on suppose que la séquence est issue d'un automate à point fixe, c'est-à-dire d'un automate qui produit des chaînes dont le début reste inchangé au fur et à mesure des itérations.

Par exemple, l'automate :

1  $\rightarrow$  21  
 2  $\rightarrow$  231  
 3  $\rightarrow$  13

produit les séquences suivantes à partir de 2 :

Itération 0 2  
 Itération 1 231  
 Itération 2 2311321  
 Itération 3 2311321211323121

Dans ce cas, la lettre initiale de l'automate est la première lettre de la séquence, et l'algorithme génétique peut se contenter de manipuler des chromosomes qui codent les longueurs des mots associés aux lettres présentes dans la chaîne à analyser. La fonction associée aux chromosomes (que l'on cherche à optimiser) représente la longueur de la séquence-cible correctement identifiée à l'aide des mots induits

par les longueurs codées. Pour une séquence de 200 à 300 caractères sur un alphabet de 6 lettres, une solution est trouvée en environ un millier d'évaluations de la fonction à optimiser, ce qui représente une exploration de moins de 2% de l'espace de recherche ( qui est de taille  $6^6 = 46656$ , si on considère que l'automate a des mots de taille au maximum 6 caractères).

Un article est en préparation sur ce sujet.

## 3.2 Boîtes à outils

### 3.2.1 Boîte à outils fractale

Comme mentionné dans l'introduction, un objectif à moyen terme du projet est la fabrication d'une "boîte à outils" de programmes fractals d'analyse du signal.

Cette année, la boîte à outils s'est enrichie des logiciels suivants :

- Fraclettes (transformée en ondelettes et paquets d'ondelettes pour l'analyse, la synthèse et l'estimation d'exposants de Hölder),
- débruitage de signaux et d'images par manipulation du spectre multifractal,
- FAA, analyse fractale de signaux à l'aide des fonctions faiblement auto-affines.

### 3.2.2 ALGON : un logiciel modulaire d'algorithmes génétiques

*Participants* : Benoît Leblanc, Evelyne Lutton

*Mots-clés* : algorithme génétique, optimisation.

Nous avons souhaité disposer au projet Fractales d'une boîte à outils "Algorithmes Génétiques" pour pouvoir traiter facilement divers problèmes d'optimisation complexes. Le stage d'ingénieur de Benoît Leblanc a consisté dans un premier temps à réunir et rendre cohérents les logiciels d'algorithmes génétiques développés en C jusqu'à maintenant dans le projet. Des opérateurs et des méthodes nouvelles ont ensuite été incorporés, et ont permis d'améliorer les performances de ces algorithmes. Nous avons notamment étendu les structures pour permettre l'utilisation de chromosomes de longueurs variables et de plusieurs chromosomes par individu. Les différents opérateurs génétiques ont été adaptés en conséquence. Plusieurs méthodes de création de niches (pour l'optimisation de fonctions multimodales) ont été implantées. Enfin une interface graphique sous Tixwish coiffe l'ensemble du logiciel, permettant des choix interactifs de paramètres et de méthodes ainsi qu'un suivi graphique de la progression de l'algorithme.

Ce logiciel sera placé en libre accès sur la page WEB du projet à la fin 1996.

## 3.3 Applications : signaux 1D

### 3.3.1 Synthèse vocale

*Participants* : Khalid Daoudi, Jacques Lévy Véhel, en collaboration avec le CNET

*Mots-clés* : fractales, ondelettes, système de fonctions itérées, synthèse de la parole, traitement de la parole.

L'objet de notre étude est de développer une méthode permettant la synthèse de nouvelles voix à partir de voix existantes. Nous avons, l'année dernière, codé chaque logatome par un IFS. Les IFS étant un cas particulier de fonctions FAA (voir la section 3.1.1), nous avons développé un algorithme, fondé sur l'analyse de la transformée en ondelettes, pour coder un logatome par une fonction FAA. Celui-ci

permet d'améliorer la qualité de la synthèse, tout en gardant un modèle compact. La figure 1 montre une synthèse sur le son /SEUTEUTEU/. La qualité auditive de signal synthétique est très satisfaisante.

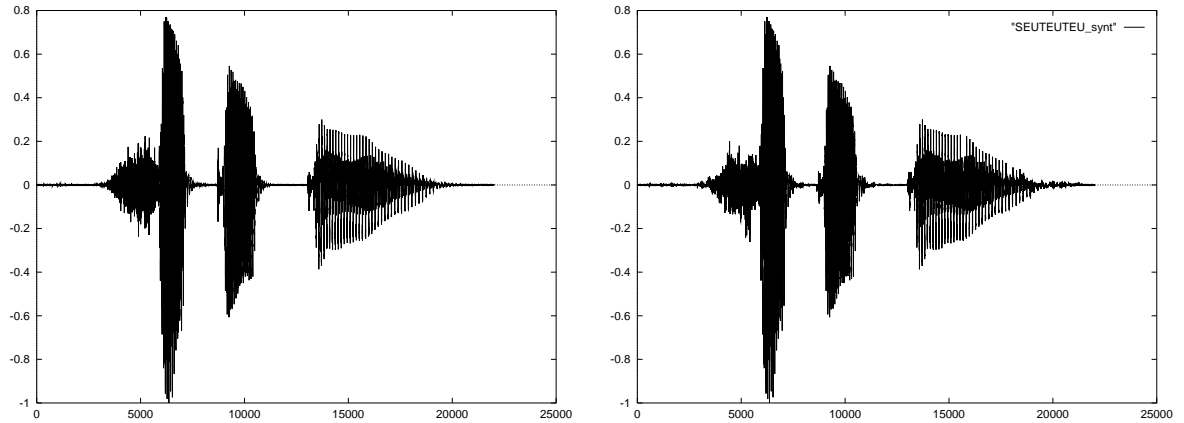


Figure 1: son /SEUTEUTEU/ original à gauche et reconstruit à droite.

### 3.3.2 Analyse et modélisation de la turbulence

*Participants* : Khalid Daoudi, Jacques Lévy Véhel

*Mots-clés* : multifractales, ondelettes.

Nous nous sommes intéressés au problème inverse associé aux fonction FAA. Autrement dit, soit  $f$  une fonction continue à support dans  $[0; 1]$ , on cherche à obtenir une fonction  $g$ , un entier  $d$ , des similitudes contractantes  $S_0, \dots, S_{d-1}$  et  $d$  suites  $(\lambda_0^j), \dots, (\lambda_{d-1}^j)$  tels que :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \prod_{j=1}^n \lambda_{i_j}^j g(S_{i_n}^{-1} \circ \dots \circ S_{i_1}^{-1}(x))$$

où  $(i_1, \dots, i_n) \in \{0, \dots, d-1\}^n$ .

Nous avons développé une approche fondée sur la décomposition en ondelettes qui permet de résoudre

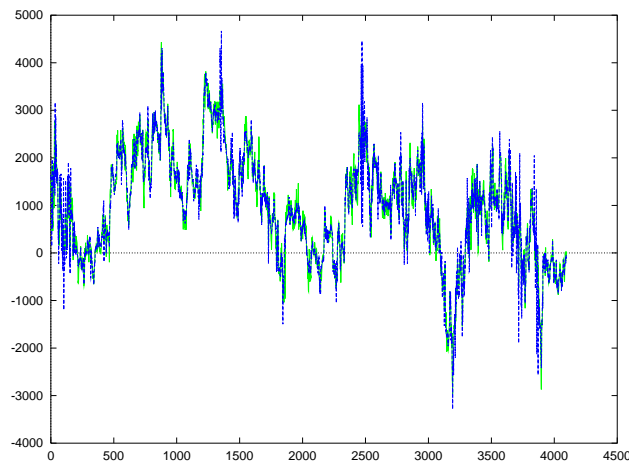


Figure 2: Signal original de vitesse de turbulence et son approximation par FAA.

de manière relativement efficace ce problème. Cette approche a été appliquée sur des signaux de turbulence enregistrés par Gagne et Hopfinger dans la soufflerie S1 de l'ONERA à Modane. Ces signaux correspondent à un enregistrement ponctuel de la composante longitudinale du champ de vitesse par une sonde à fil chaud. La figure 2 représente un signal enregistré de cette façon. La fonction FAA qui approxime ce signal est montrée en pointillés. Le nombre des  $\lambda_i^j$  qui permettent de définir le signal approximé est en  $O(\log N)$ , si  $N$  est le nombre d'échantillons du signal, ce qui semble indiquer que la modélisation par FAA a une certaine pertinence. La suite des  $\lambda_i^j$  ainsi obtenue permet de calculer le spectre de Hausdorff du signal approximé (figure 3, en trait continu). L'exposant de Hölder presque sûr est voisin de  $h = 1/3$  qui est la valeur prédite par la théorie K41 de Kolmogorov. Le spectre est approximativement le même que celui obtenu par Arnéodo et al. en utilisant le formalisme multifractal fondé sur la transformée en ondelettes (figure 3, en pointillés). Nos résultats confirment donc ceux d'Arnéodo et al. en ce qui concerne les propriétés multifractales de ces signaux de turbulence.

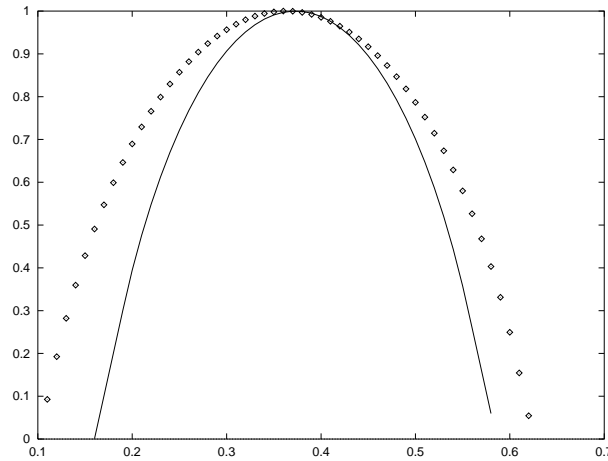


Figure 3: Spectre multifractal de la fonction FFS (en trait continu) et celui obtenu par le formalisme multifractal sur le signal original (en pointillés).

### 3.3.3 Analyse de signaux biomédicaux

*Participants* : Julie Bestel, Jacques Lévy Véhel, en collaboration avec Claire Médigue et Jean Clairambault (projet SOSSO)

*Mots-clés* : analyse multifractale, traitement de signal biomedical.

Nous avons appliqué la méthode d'estimation de spectre décrite en 3.1.5 sur des signaux issus de protocoles expérimentaux développés chez Renault, dans le cadre de l'étude de la vigilance au volant. Les signaux traités sont le potentiel et la résistance cutanés, eux-mêmes révélateurs du niveau de vigilance. La figure 4 montre une analyse globale des singularités pour deux sujets soumis à des conditions expérimentales différentes. Deux conclusions ressortent de cette étude :

- il semble exister une structure auto-similaire dans ce type de signaux, comme l'indique l'invariance dans les échelles des spectres estimés,
- une analyse multifractale simple ne permet pas de discriminer les deux individus, probablement à cause du caractère global de l'information fournie par le spectre.

Les spectres obtenus sur le signal de potentiel cutané et celui de résistance cutanée sont identiques à une translation près sur l'axe des  $\alpha$ .



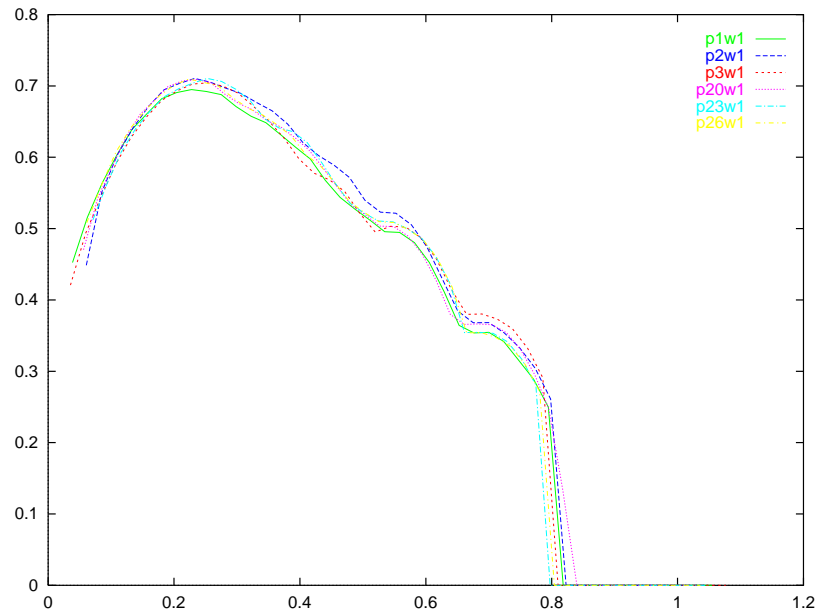


Figure 4: Spectre  $\tilde{f}_g$  du signal de potentiel cutané sur deux individus.

### 3.3.4 Analyse multifractale de trafic sur un LAN

*Participants* : Jacques Lévy Véhel, Rudolf Riedi, en collaboration avec le CNET

*Mots-clés* : analyse multifractale, trafic sur les réseaux d'ordinateurs.

Les modèles conventionnels de trafic supposent généralement que les processus d'arrivée (caractérisés par le nombre d'octets échangés) sont soit sans mémoire soit à mémoire "courte". Ces hypothèses se sont récemment révélés inadéquates pour décrire la structure des trafics observés sur des réseaux de type LAN. En particulier, elles ne permettent pas de rendre compte de la forte sporadicité observée sur plusieurs échelles de temps.

Cette sporadicité semble principalement liée au fait que les processus d'arrivée sont à mémoire longue. Des modèles récents prennent en compte cette caractéristique en considérant le processus à mémoire longue le plus simple, le mouvement Brownien fractionnaire (mBf).

Le succès du mBf comme modèle du trafic repose sur le fait que le degré de dépendance à long terme est contrôlé par un seul paramètre,  $H$ . La dépendance à long terme étant grossièrement une qualité statistique de l'ordre 2, il est naturel de se demander si le mBf est aussi un bon modèle pour les statistiques d'ordre supérieur des trafics réels.

L'analyse multifractale permet d'apporter des réponses via le spectre multifractal qui caractérise les irrégularités locales du processus. Pour un mBf ce spectre est trivial : la régularité locale est partout la même (égale à  $H$ ). Dans ce sens, le mBf est un processus monofractal. Des études numériques intensives [62, 64] ont montré que les trafics LAN enregistrés à Berkeley et au CNET exhibent un comportement multifractal sur 3 à 4 ordres de grandeur.

Les spectres observés mettent aussi en évidence les différences entre les trafics sortant et entrant, dans toutes les traces analysées. D'autre part, la forme particulière du spectre du trafic sortant de Berkeley fournit une information sur la stationnarité du processus, une question de grande importance en pratique. Nous étudions à l'heure actuelle des modèles multifractals comportant un petit nombre de paramètres.

### 3.3.5 Processus stables : Application aux choix des portefeuilles optimaux

*Participants* : Lotfi Belkacem, Jacques Lévy Véhel, Christian Walter, en collaboration avec le Crédit Lyonnais

*Mots-clés* : actif financier, loi stable, processus de Lévy.

L'analyse de Markowitz en matière de choix des portefeuilles efficients peut être formulée comme un problème de programmation quadratique dont l'objectif est de construire un portefeuille qui offre la rentabilité la plus élevée pour chaque niveau de risque, ou le risque le moins élevé pour un niveau désiré de rentabilité.

Nous avons résolu le problème d'optimisation dans un marché où les rentabilités des actifs suivent une distribution stable multivariée et nous avons montré que les portefeuilles efficients issus d'un modèle stable dominant ceux qui résultent d'un modèle Gaussien. Dans notre cadre, un portefeuille  $p$ , combinaison linéaire des actifs financiers sera caractérisé par le couple (espérance, échelle) où l'échelle est donnée par :

$$\Lambda_p(x) = \left( \int_{S_d} |(x, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (1)$$

$x$  étant le  $d$ -vecteur des composantes du portefeuille, et  $\Gamma$  est la mesure spectrale de vecteur aléatoire  $(R_1, \dots, R_d)$  des rentabilités des actifs sur la sphère unité  $S_d$ . Sous nos hypothèses ( $1 < \alpha < 2$ ), la variance est infinie et le risque est quantifié par le paramètre d'échelle.

En pratique, le problème est résolu numériquement en utilisant un algorithme de Programmation Quadratique Séquentielle (SQP). Les frontières efficientes stable et Gaussienne pour une combinaison de trois actifs (Accor, Carrefour et Cie Bancaire) sont représentées sur la figure 5, qui montre que pour un niveau donné de rentabilité espérée d'un portefeuille, le risque associé dans le modèle stable est plus petit que sa contrepartie dans le modèle Gaussien.

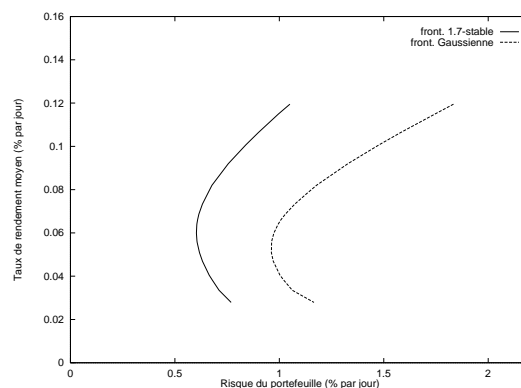


Figure 5: Frontière efficiente 1.7-stable et frontière efficiente Gaussienne avec vente à découvert.

Une explication intuitive de ce fait est que le risque optimal donné par le modèle Gaussien peut être réduit en prenant en considération les variations brusques des prix sur le marché, de façon à atteindre l'optimum donné par le modèle stable adéquat.

### 3.3.6 Analyse des spectres de diffraction de structures hétérogènes multicouches GaAs-AIAs de taille finie à l'aide d'un algorithme génétique

*Participants* : Benoît Leblanc, Evelyne Lutton, en collaboration avec Françoise Axel, du Laboratoire de Physique des Solides d'Orsay.

*Mots-clés* : algorithme génétique, problème inverse.

Dans le cadre de l'étude des structures hétérogènes aperiodiques multicouches GaAs-AIAs (que l'on peut considérer comme des "quasi-cristaux" généralisés), il est intéressant de savoir si l'on peut remonter à la structure multicouche fine de tels matériaux, à partir de la mesure expérimentale de leurs spectres de diffraction X.

L'approche proposée repose sur la connaissance du modèle théorique de formation du spectre de diffraction X (modèle proposé et validé au laboratoire de Physique des Solides d'Orsay), lorsque la composition des couches est connue. La figure 6 montre une courbe d'intensité de diffraction X pour la séquence de Prouhet-Thue-Morse :

$$0 \rightarrow 01$$

$$1 \rightarrow 10$$

où un "0" représente une couche GaAs et un "1" une couche AIAs.

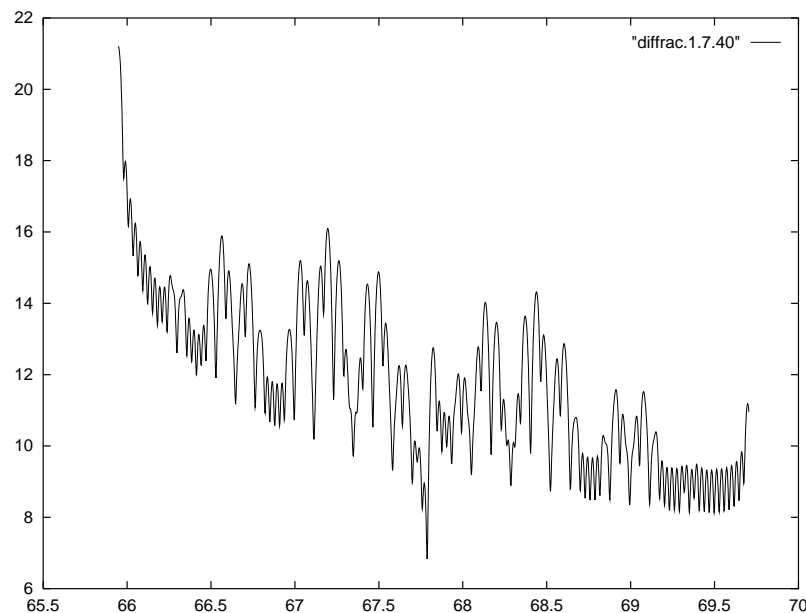


Figure 6: Spectre de diffraction simulé pour la séquence de Prouhet-Thue-Morse

A l'aide du logiciel ALGON, nous avons pu traiter le problème inverse sur des données simulées et retrouver le codage en couches d'un matériau à partir de son spectre de diffraction, jusqu'à une épaisseur de 128 couches en un temps de calcul raisonnable.

La validation expérimentale se fera en collaboration avec François Laruelle du L2S-CNRS, Jacques Schneck et Laurent Leprince du CNET Bagnaux, qui fourniront des mesures spectrales réelles.

## 3.4 Applications : signaux 2D

### 3.4.1 Analyse d'images radar

*Participants* : Bertrand Guiheneuf, Jacques Lévy-Véhel, en collaboration avec Alcatel Espace

*Mots-clés* : analyse d'images, analyse multifractale.

Poursuivant les travaux d'application de méthodes multifractales/multiéchelles au traitement d'images radar, nous avons proposé une nouvelle approche pour faciliter la segmentation d'une image en zones homogènes.

Pour des images très bruitées comme les images radar, il est en effet nécessaire d'effectuer un filtrage préalable à la segmentation. Nous avons développé un algorithme opérant directement sur la régularité Hölderienne du signal et motivé par l'observation suivante. Le spectre multifractal d'une image peu bruitée présente généralement un maximum à la valeur  $\alpha = 2$ . En revanche, le spectre des images SAR que nous traitons est systématiquement décalé vers la gauche, indiquant une baisse globale de la régularité. L'idée du "filtrage" multifractal est de translater le spectre de façon que son maximum soit de nouveau atteint en  $\alpha = 2$ . Cela est rendu possible par une modification non linéaire des coefficients d'ondelettes. Un résultat est présenté figure 7 [53].

L'amélioration de cette technique nous a amené à considérer les signaux dans le cadre de l'analyse 2-microlocale, notion généralisant la régularité Hölderienne. Nos travaux actuels consistent à définir des algorithmes numériques adaptés à ce nouveau formalisme.

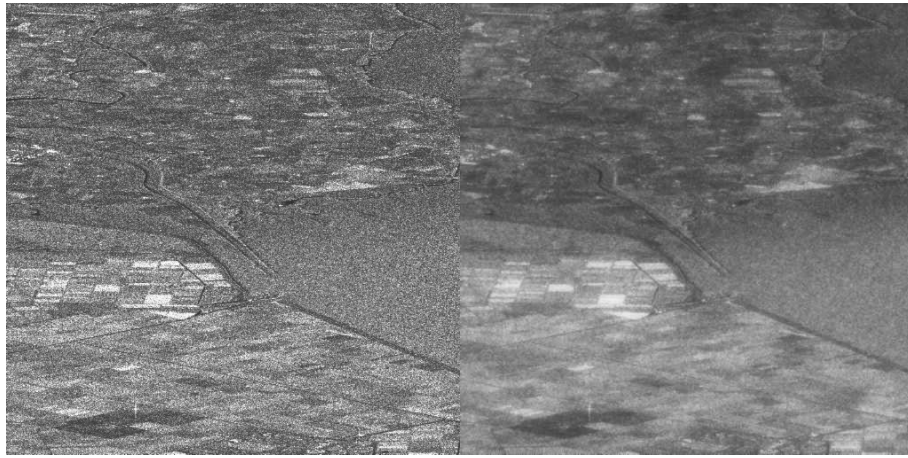


Figure 7: A gauche, image SAR originale, a droite, image débruitée par décalage du spectre multifractal

### 3.4.2 Détection de changements

*Participants* : Christophe Canus, Jacques Lévy Véhel, en collaboration avec Alcatel ISR

*Mots-clés* : analyse multifractale, analyse de texture, détection de changements.

Dans le prolongement des études sur l'application d'outils issus de la théorie de l'analyse multifractale à la détection de changements dans des séquences d'images aériennes et satellites [58], nous avons défini une méthode de choix de suite de capacités permettant de discriminer les changements d'origine naturelle (météorologiques ou bruits de différentes origines) de ceux d'intérêt dans notre application, c.à.d. d'origine humaine (bâties, routes). Pour rendre le problème abordable, nous considérons uniquement des suites de capacités de Choquet du type :

$$c_{n,a} := c_{n,1}^a c_{n,2}^{(1-a)}, \quad 0 \leq a \leq 1, n \geq 1,$$

où  $(c_{n,1})_{n \geq 1}$  et  $(c_{n,2})_{n \geq 1}$  sont deux suites de capacités calculées sur des intervalles  $I_k^n$  de résolution  $n$ . On essaie de déterminer ces deux suites et le coefficient  $a$  de telle sorte qu'en calculant les exposants de Hölder (respectivement  $\alpha_n^{\mathcal{T}_1}$  et  $\alpha_n^{\mathcal{T}_2}$ ) sur deux types de textures que l'on cherche à discriminer

(respectivement  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ ), un certain écart soit maximum. Pour  $(c_{n,1}), (c_{n,2})$  fixées,  $a$  est déterminé par :

$$a^* = \arg \max_{0 \leq a \leq 1} \frac{|\Delta_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2} \bar{\alpha}_a|}{\Sigma_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2} \sigma_{\alpha_a}^2},$$

où  $\Delta_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2} \bar{\alpha}_a := \bar{\alpha}_a^{\mathcal{T}_1} - \bar{\alpha}_a^{\mathcal{T}_2}$  et  $\Sigma_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2} \sigma_{\alpha_a}^2 := \sigma_{\alpha_a}^2_{\mathcal{T}_1} + \sigma_{\alpha_a}^2_{\mathcal{T}_2}$ , avec les notations habituelles pour la moyenne et la variance. Les exposants de Hölder associés à cette capacité sous-optimale sont ensuite calculés par simple combinaison linéaire convexe.

### 3.4.3 Compression d'images

*Participants* : Guillaume Cretin, Jacques Lévy Véhel, Evelyne Lutton

*Mots-clés* : compression d'image, système de fonctions itérées.



Figure 8: Image originale : 512 × 512.



Figure 9: Images comprimées à des taux de 45 et 69.

Les travaux sur la compression d'images se sont poursuivis, notamment dans le cadre de la méthode fondée sur la notion d'IFS. Les améliorations suivantes ont été apportées :

- le critère de coupure ne repose plus sur le contenu de l'image ; au moment de couper, seuls deux endroits sont testés et le meilleur retenu (un bit à stocker),
- l'ensemble des domaines ne correspond plus aux rectangles présents dans la partition, mais est au contraire un ensemble défini à l'avance, offrant plus de possibilités,

- le partitionnement selon un critère utilisateur s'arrête à un certain niveau de profondeur, diminuant ainsi la quantité de données à stocker,
- enfin, un post-traitement est effectué à chaque itération (au niveau des frontières des ranges) lors de la décompression, limitant en cela les effets de bloc.

Les résultats obtenus sont bien meilleurs, les taux de compression ayant été environ multipliés par deux (figures 8 et 9).

## 4 Actions industrielles

L'équipe a des contrats avec :

- le CNET pour la synthèse de la parole fondée sur l'utilisation de codes IFS (paragraphe 3.3.1),
- le Crédit Lyonnais pour l'évaluation d'actifs financiers, le contrôle du risque et la gestion de portefeuille fondés sur une modélisation par des lois  $\alpha$ -stables (paragraphe 3.3.5),
- le CNET sur la modélisation, l'estimation et le contrôle du trafic sur les futurs réseaux de paquets optiques,
- Alcatel Espace pour la segmentation multifractale d'images radar est en cours (paragraphe 3.4.1),
- Alcatel ISR pour l'analyse d'images aériennes et satellitaires (paragraphe 3.4.2).

Un contrat CNET démarre fin 96 sur l'indexation dans des séquences d'images vidéo.

Alcatel Mobile Communication a acquis une licence d'exploitation de Arthur/Excalibur.

## 5 Actions nationales et internationales

### 5.1 Actions nationales

Le projet a des collaborations avec :

- Y. Meyer (CEREMADE) qui est conseiller scientifique du projet et dirige la thèse de K. Daoudi.
- J.-P. Allouche (LRI, Orsay) sur l'étude du problème inverse pour les automates finis,
- F. Axel (Laboratoire de Physique des Solides, Orsay), J. Schneck, L. Leprince (CNET, Bagneux) et F. Laruelle (L2S-CNRS) sur l'étude de spectres de diffraction  $X$  de structures hétérogènes multicouches.
- C. Graffigne et S. Sevestre (Université Paris V) sur l'intégration de paramètres fondés sur une modélisation par mBf dans ARTHUR.

Au sein de l'INRIA, des collaborations sont en cours avec le projet SOSSO sur le thème de l'analyse de signaux biomédicaux (stage de D.E.A. de Julie Bestel), et avec le projet META2 sur l'application d'outils max-plus pour le calcul de spectres multifractals et sur l'étude d'actifs financiers (une action transversale Finances est en cours de création avec A. Sulem).

E. Lutton fait partie du comité directeur du Comité technique Vie Artificielle de l'AFCEt, en tant que trésorière. Elle est aussi organisatrice du Groupe de travail de l'AFCEt-CMAPX "Applications des Algorithmes d'Evolution Artificielle".

J. Lévy Véhel et Bertrand Guiheneuf participent au groupe de travail "Radar" du GDR134, et à différents groupes de travail du GDR ISIS.

## 5.2 Actions internationales

Plusieurs collaborations et contacts existent avec des laboratoires à l'étranger: Université de Yale (B. Mandelbrot), Laboratoire d'Analyse Fractale de l'École Polytechnique de Montréal (Cl. Tricot), Université de Waterloo (Ed Vrscaj). Une convention financée par l'organisme canadien CRSNG est en cours avec ces deux dernières équipes.

Cl. Tricot de l'École Polytechnique de Montréal est professeur invité dans le projet depuis septembre 1996.

J. Lévy Véhel a été relecteur pour Journal of Fourier Analysis, Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis, FRACTALS, Journal de Physique, TS, C.R.A.S, ainsi que pour les conférences internationales Siggraph et Eurographics. Il a été membre du comité scientifique du workshop "Resolution Dependence and Multifractals in Remote Sensing", Montreal, Juin 1996.

Une collaboration a été entamée avec Madame Torres (Facultad de Ingenieria-Bioingenieria, Argentine), [63].

## 6 Diffusion des résultats

### 6.1 Actions d'enseignement

- J. Lévy Véhel :
  - Chargé de cours sur les Fractales à l'École Centrale de Paris,
  - Chargé de cours sur les Fractales à l'ESIEA,
  - Chargé de cours sur les Fractales à l'INT.
- E. Lutton :
  - Chargée de cours sur les Fractales à l'Ecole Centrale de Paris.
  - Assistante du cours sur les Fractales de cinquième année de l'ESIEA.

### 6.2 Jury de thèse

J. Lévy Véhel a été rapporteur des thèses de : H. Guillemet, "Reconnaissance de microcalcifications en mammographie numérique" (1996, ENST), J. Thollot, "Extension du modèle IFS pour une géométrie fractale constructive", (1996, Université de Lyon I), M. Ben Slimane, "Étude du formalisme multifractal pour les fonctions", (1996, ENPC).

J. Lévy Véhel a été examinateur des thèses de : S. Salem, "Dérivée fractionnaire, dérivée de Lipschitz et dimension fractale" (1995, Ecole Polytechnique de Montréal), A. Elkalay, "Analyse par ondelettes et analyse non-linéaire de l'algèbre des bosses" (1996, Université de Paris-Dauphine).

### 6.3 Conférences invitées

J. Lévy Véhel a été conférencier invité à la "hot topic session" "Self similar traffic" de la conférence Performance'96 (Lausanne), ainsi que dans le séminaire de probabilités et statistiques (Université d'Orsay), dans le groupe de travail "Processus fractionnaires et imagerie" de l'Université de Paris V, et a participé au workshop IFIP WG 7.3 (Lausanne).

E. Lutton a fait des conférences à l'ONERA, au séminaire d'Algorithmique du GREYC à l'université de Caen, et a été invitée aux journées PSMN de l'ENS-Lyon. Dans le cadre d'une collaboration européenne financée par le FNRS avec plusieurs universités belges, elle a été invitée à faire une conférence aux journées Algorithmes Génétiques et Mathématiques à l'université d'Anvers.

Rudolf Riedi a été conférencier invité aux journées "Processus à longue dépendance" aux Houches, et à "Performance 96" à Lausanne. Il a présenté un poster invité à la Gordon Conference on Fractals.

Khalid Daoudi a visité en Mai 96 le département de mathématiques de Princeton University sur invitation du Prof. Ingrid Daubechies.

## 6.4 Organisation de colloques et de cours

J. Lévy Véhel a été co-organisateur avec Patrick Flandrin de l'École de Printemps des Houches sur les bruits en  $1/f$  en mai 1996.

E. Lutton fait partie des comités d'organisation des congrès Evolution Artificielle 97 (Nîmes), et est secrétaire de l'Association pour l'Evolution Artificielle, depuis Décembre 1994.

J. Lévy Véhel, E. Lutton et Cl. Tricot organisent la conférence "Fractales pour l'Ingénieur, Fractals in Engineering" qui aura lieu en 1997 à Arcachon.

## 6.5 Séminaires

Le projet organise des conférences en commun avec les projets META2 et MEVAL (un exposé par semaine). Des comptes rendus de ces conférences seront publiés en rapport interne Inria à la fin de 1996.

## 6.6 Site WEB

Le site WEB (<http://www-syntim.inria.fr/fractales>) du projet, qui propose démonstrations, publications et logiciels, enregistre quotidiennement une grande quantité de connexions et est source de nombreux contacts avec des instituts étrangers.

## 6.7 Diffusion de logiciels

Arthur et Excalibur ont été mis à disposition du département de mathématiques de l'université d'Orléans.

Arthur, Excalibur, XAlpha et une boîte à outils d'ondelettes ont été mis à disposition du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau.

# 7 Publications

## Livres et monographies

- [46] J.-M. ALLIOT, E. LUTTON, E. RONALD, M. SCHOENAUER, D. SNYERS (éd.), *Artificial Evolution, Lecture Notes in Computer Science 1063*, Springer, 1996. European Conference AE'95, selected papers. Brest, France.

## Thèses

- [47] L. BELKACEM, *Processus Stables et Applications en Finance: CAPM, Risque, Choix des Portefeuilles et Évaluation des Options dans un Marché "Stable"*, thèse de doctorat, Université de Paris IX Dauphine, Novembre 1996.
- [48] K. DAOUDI, *Généralisations des systèmes de fonctions itérées: Applications au traitement du signal*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, Novembre 1996.



## Articles et chapitres de livre

- [49] L. BELKACEM, «How to Select Optimum Portfolio in “Stable” markets», submitted to Stochastics Finance.
- [50] B. LEBLANC, E. LUTTON, F. AXEL, «Analysis of High Resolution X-Ray Diffraction Spectra of Finite Size GaAs-AlAs Multilayer Heterostructures using a Genetic Algorithm», *Journal of Physics*, 1996, submitted.
- [51] E. LUTTON, J. LÉVY VÉHEL, G. CRETIN, P. GLEVAREC, C. ROLL, «Mixed IFS: resolution of the inverse problem using Genetic Programming», *Complex Systems*, *accepted*, 1996, (paru aussi comme rapport de recherche Inria n°2631).
- [52] E. LUTTON, J. LÉVY VÉHEL, «Some remarks on the optimization of Hölder functions with Genetic Algorithms», *Submitted to Evolutionary Computation*, 1996, (paru aussi comme rapport de recherche Inria n°2627).
- [53] J. LÉVY VÉHEL, *Fractal Image Encoding and Analysis*, Springer Verlag, 1996, ch. Introduction to the Multifractal Analysis of Images, Yuval Fisher (Ed.).
- [54] J. LÉVY VÉHEL, *In Fractal Geometry and Analysis, The Mandelbrot Festschrift, Curacao*, World Scientific, 1996, ch. Fractal Approaches in Signal Processing, Evertsz, C.J.G. and Peitgen, H.-O. and Voss, R.F. (Eds.).
- [55] R. H. RIEDI, B. B. MANDELBROT, «Inversion formula for Continuous Multifractals», *Adv. Appl. Math*, July 1996, submitted.
- [56] R. H. RIEDI, B. B. MANDELBROT, «Exceptions to the Multifractal Formalism for Discontinuous Measures», *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, May 1997, to appear.
- [57] R. H. RIEDI, I. SCHEURING, «Conditional and Relative Multifractal Spectra», *Fractals. An Interdisciplinary Journal*, October 1996, accepted for publication.

## Communications à des congrès, colloques, etc.

- [58] C. CANUS, J. LÉVY VÉHEL, «Change Detection in Sequences of Images by Multifractal Analysis», in: *Proceedings of the ICASSP'96*, p. 2178–2181, Atlanta GA, USA, 1996.
- [59] J. LÉVY VÉHEL, K. DAOUDI, «Generalized IFS for Signal Processing», in: *Proceedings of the IEEE Digital Signal Processing Workshop*, Loen, Norway, 1996.

## Rapports de recherche et publications internes

- [60] L. BELKACEM, J. LÉVY VÉHEL, C. WALTER, «CAPM, Risk and Portfolio selection in "Stable" Markets», *Rapport de recherche n°2776*, INRIA, Janvier 1996.
- [61] J. BESTEL, «Analyse multifractale: Une nouvelle définition du Spectre des Grandes Déviations, application à des données biomédicales», *rapport de recherche*, INRIA, 1996, Rapport de DEA, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [62] R. H. RIEDI, J. LÉVY VÉHEL, «Multifractal Properties of LAN Traffic», *rapport de recherche*, INRIA, 1996.
- [63] M. E. TORRES, L. G. GAMERO, C. E. D'ATELLIS, «Detection of changes in nonlinear Dynamical Systems using Multiresolution Entropy», *rapport de recherche n°RR 2812*, INRIA, February 1996.

## Divers

- [64] R. H. RIEDI, J. LÉVY VÉHEL, «Multifractal formalism for processes: A Study of LAN Traffic», in preparation.

## 8 Abstract

The aim of the *FRACTALES* group is to develop **theoretical tools** in the field of **fractal geometry**, in order to finely analyze **complex signals**, for purposes of **modelization**, **prediction**, and **synthesis**.

More precisely, the *FRACTALES* group is concerned with the following aspects of fractal geometry:

- **multifractal theory**,
- **iterated functions system**,
- **fractionnal stable processes**.

The applications are numerous. They may be divided into two parts:

- 1D signals:
  - **computer network traffic analysis**: we model some types of computer network traffic signals as noisy stochastic multiplicative cascades
  - **financial analysis**: we model financial time series as fractional stable processes,
  - **speech synthesis**: we model speech signals as attractors of general IFS.
- 2D signals: we have designed a multifractal approach to the problem of **image analysis**. Defining various measures and capacities on an image, we are able to perform robust and precise **image denoising and segmentation**, and **image compression**.

For most of these subjects, the *FRACTALES* group has active collaborations with other research groups in France, Europe and the U.S.A., and industrial contracts with french companies.