Projet OMEGA

Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les mathématiques financières

Localisation : *Nancy et Sophia Antipolis*

Mots-clés : analyse mathématique, analyse numérique, approximation, processus stochastique, équation différentielle stochastique, mathématiques financières.

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Denis Talay, DR Inria

Responsable permanent

Bernard Roynette, Professeur, université Henri Poincaré

Assistante de projet

Sandrine Chevris

Personnel Inria

Mireille Bossy, CR
Claude Martini, CR, à partir du 1^{er} octobre

Personnel université

Philippe Chassaing, Maître de conférences, université Henri Poincaré (Nancy)
Marco Dozzi, Professeur, université de Nancy II
Axel Grorud, Maître de conférences, université de Provence et Ura-Cnrs 225
Pierre Vallois, Professeur, université Henri Poincaré (Nancy)

Personnel Ceram

Nathalie Pistre, Professeur, groupe Ceram, établissement d'enseignement de la chambre de commerce et d'industrie de Nice et Côte d'Azur

Ingénieur expert

Katell Savidan, jusqu'au 1^{er} octobre et à temps partiel

Chercheurs doctorants

David Chevance, jusqu'au 1^{er} octobre assistant moniteur normalien à l'université de Nice-Sophia Antipolis puis ATER à l'université d'Orléans
Madalina Deaconu, boursière Tempus, université Henri Poincaré
Radouane Raki, boursier du gouvernement marocain, université Henri Poincaré
Hervé Régnier, université de Provence
Patrick Seumen Tonou, boursier Inria, université de Provence
Olivier Vaillant, boursier MESR, université de Provence, à partir du 1^{er} octobre
Sophie Wantz, boursière MESR, université Henri Poincaré

Visiteurs

Vigirdas Mackevicius, Professeur université de Vilnius, du 1^{er} au 30 octobre
Rolando Rebolledo, Professeur université catholique de Santiago du Chili, du 1^{er} au 13 septembre

Stagiaires

Rémi Rocca, ISITV et DEA de Mathématiques appliquées de l'université de Provence, du 1^{er} avril au 31 août
Henri Harfouche, École des Mines de Paris, pendant 3 mois

2 Présentation du projet

Le projet OMEGA est bilocalisé entre les unités de Sophia Antipolis et de Nancy.

L'année 1996 aura été marquée par le recrutement d'un chargé de recherche (Claude Martini) à Sophia Antipolis.

Le principal thème de recherche d'OMEGA est l'analyse de méthodes numériques probabilistes, avec deux champs d'application privilégiés : la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires, la modélisation et la simulation en mathématiques financières. Les méthodes que nous étudions impliquent la simulation de processus stochastiques. L'analyse numérique de ces méthodes en est encore à ses débuts alors qu'elles sont utilisées dans l'ingéniérie de pointe de secteurs industriels divers (secteurs nucléaire et bancaire par exemple) pour résoudre des problèmes complexes ou de grande dimension.

En ce qui concerne la résolution probabiliste d'équations aux dérivées partielles non linéaires, OMEGA étudie les méthodes de Monte–Carlo, les méthodes particulaires stochastiques, les méthodes ergodiques. Actuellement nous nous intéressons essentiellement à leurs applications aux équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier–Stokes, etc.), aux équations du transport neutronique et aux modèles aléatoires de la turbulence ; certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques liées aux conditions aux bords, aux dégénérescences des opérateurs différentiels sous-jacents, aux phénomènes de fausses convergences, etc. Nous effectuons des études d'erreur d'approximation non asymptotiques, afin de donner des bornes pour l'erreur correspondant à tout choix des paramètres numériques : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. En amont, l'étape–clef consiste à interpréter l'algorithme comme la discrétisation d'une représentation probabiliste de la solution de l'EDP : une part de l'activité d'OMEGA concerne donc l'élaboration de représentations probabilistes appropriées. En aval, les estimations théoriques de vitesse de convergence sont systématiquement confrontées aux simulations numériques.

En mathématiques financières et en actuariat, OMEGA s'intéresse plus particulièrement aux méthodes de Monte–Carlo et aux modèles de marché. Les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement l'évaluation numérique de prix d'actifs complexes, la robustesse des stratégies de couverture des produits dérivés par rapport aux erreurs de modélisation, et le calcul de stratégies de gestion du risque.

Les modèles financiers posent des problèmes d'approximation spécifiques : simulation de fonctionnelles « path dependent », calcul de dérivées d'espérances de ces fonctionnelles. OMEGA s'intéresse aussi à la définition de mesures de risque utilisables en pratique et cohérentes avec un modèle mathématique du marché. Enfin, on étudie des problèmes d'adossement et de risques de défaut de trésorerie. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données réelles.

Enfin, OMEGA étudie les performances sur architectures parallèles des algorithmes développés et analysés. En effet, si les méthodes de Monte–Carlo sont souvent très bien adaptées à la programmation parallèle, c'est moins évident pour les méthodes qui font intervenir la simulation de particules dépendantes ou de processus à temps de vie aléatoire.

La théorie des processus stochastiques, en particulier les problèmes d'approximation de processus, est l'outil mathématique essentiel et commun à tous les problèmes traités.

3 Actions de recherche

3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

3.1.1 Méthodes particulaires stochastiques

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay

Mots-clés : propagation du chaos, méthode particulaire stochastique, équation de Burgers, équation de Navier-Stokes, méthode vortex.

L'étude engagée sur ce sujet depuis quelques années a été poursuivie aussi bien sur le plan de l'analyse théorique de la vitesse de convergence que sur le plan de l'implémentation numérique. L'objectif est aujourd'hui d'étendre notre analyse pour obtenir des résultats attendus sur les méthodes de vortex aléatoire pour l'équation de Navier–Stokes incompressible 2-D écrite en terme de vorticité.

Le cadre général de travail est la résolution d'équations aux dérivées partielles de type *équation de McKean–Vlasov* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U_t}{\partial t} = \mu \Delta U_t - div \left(U_t \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} b(x,y) U_t(dy) \right), \ \ (x,t) \in R^d \times [0,T], \\ U_{t=0} \ = \ U_0. \end{array} \right. \tag{9}$$

La fonction $b(\cdot,\cdot)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui intervient dans la partie non linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*. D'après la théorie probabiliste de la *propagation du chaos*, la solution U_t s'interprète comme la loi limite d'un système de particules interagissant entre elles. La dynamique des particules est décrite par le système différentiel stochastique

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t^i = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b\left(X_s^i, X_s^j\right) ds + \sqrt{2\mu} w_t^i, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } U_0, \ \text{ pour } i = 1, \ldots, N. \end{array} \right. \tag{10}$$

Le corollaire intéressant du phénomène de *propagation du chaos* est la convergence au sens des mesures, quand N tend vers l'infini, de la mesure empirique $1/N \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^i}$ vers U_t. En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction U_t. À partir de cette interprétation probabiliste, M. Bossy et D. Talay ont développé un algorithme d'approximation de U_t, fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$; la mesure initiale U_0 est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui donne les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ci-dessus.

La complexité de l'analyse de la vitesse de convergence est essentiellement liée à la régularité du noyau d'interaction $b(\cdot,\cdot)$. Le cas de noyaux lipschitziens ainsi que le cas particulier de la fonction de

Heaviside menant à la résolution numérique de l'équation de Burgers visqueuse ont déjà été étudiés. L'équation de Navier–Stokes pour les variables vorticité et vitesse $(W = rot(\vec{V}), \vec{V})$, fait apparaître comme noyau d'interaction le noyau de Biot et Savart $K(x) = \frac{1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)}(-x_2, x_1)$, singulier en 0 et l'algorithme particulaire évoqué ci-dessus correspond à la méthode bien connue de vortex aléatoires.

Un résultat partiel de vitesse de convergence a été obtenu lorsque le noyau d'interaction est une masse de Dirac, régularisée pour les besoins de la simulation. Un tel noyau est très similaire au noyau de Biot et Savart une fois qu'il est lui aussi régularisé pour les besoins de la simulation. On montre que l'erreur d'approximation en norme $L^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ est d'ordre $O(\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha}(\sqrt{\Delta t} + 1/\sqrt{N}))$ où ε est le paramètre de régularisation du noyau d'interaction et α est une constante bornée en fonction de la condition initiale, de la date d'observation de l'erreur et de la viscosité. La vitesse de convergence obtenue est bien optimale en N (c'est à dire en $1/\sqrt{N}$), mais pas assez précise par rapport au paramètre de régularisation ε et doit être améliorée. Nous cherchons à ramener le facteur $\frac{1}{\varepsilon^\alpha}$ à $\frac{1}{\varepsilon^2}$, ce qui correspond à la vitesse de convergence obtenue dans le cas de noyaux d'interaction lipschitziens.

Par ailleurs, en collaboration avec S. Méléard (université Paris X), D. Talay a entamé l'étude de la propagation du chaos pour le système de particules associé à l'équation de Navier–Stokes 2-D incompressible, dans l'espoir d'étendre un résultat d'Osada en suivant une approche radicalement différente de celle d'Osada.

Enfin, en collaboration avec M. Picasso (École Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH), M. Bossy et D. Talay ont entamé l'étude d'une méthode numérique probabiliste pour un système différentiel stochastique d'un type un peu différent de Mc Kean–Vlasov intervenant dans un modèle de polymères.

3.1.2 Comparaison de performances entre méthode déterministe et méthode particulaire probabiliste

Participants : Mireille Bossy, Loula Fezoui (projet CAIMAN), Serge Piperno (projet CAIMAN)

Mots-clés : méthode particulaire stochastique, volume fini, équation de Burgers.

En collaboration avec le projet CAIMAN, une étude de comparaison de performances entre une méthode déterministe (résolution en volumes finis) et une méthode particulaire probabiliste a été menée sur le cas test de l'équation de Burgers. Le critère de comparaison choisi est la précision du calcul en norme $L^1(\mathbb{R})$ pour un temps de calcul fixe. Des cas visqueux (pour une large gamme de valeurs de viscosité) et non visqueux ont été considérés.

3.1.3 Processus de branchement associé à l'équation de Navier-Stokes

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois

Mots-clés : processus de branchement, équation de Navier-Stokes.

Pour l'équation de Navier–Stokes incompressible dans un domaine borné, A.J. Chorin a introduit des méthodes de vortex aléatoires. Notre objectif est d'en effectuer l'analyse numérique fine. Ceci nécessite une représentation probabiliste adéquate de la solution. Le travail en cours fait apparaître des systèmes de particules avec branchements à la frontière.

Plus précisément, soit Ω un ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On considère l'équation de Navier–Stokes dans Ω :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_t + (u \cdot \nabla)\, u & = & \nu\Delta u - \nabla p \\ div\, u & = & 0 \\ u(0,\cdot) & = & u_0 \\ u & = & 0 \text{ au bord de } \Omega \end{array} \right. \tag{11}$$

A l'équation satisfaite par le rotationnel de la solution u, B. Roynette et P. Vallois, en collaboration avec S. Benachour (université Henri Poincaré), ont associé un processus de branchement à valeurs dans Ω dont la « densité de présence » est égale au rotationnel de u. Ceci leur a permis de construire un algorithme de simulation probabiliste permettant d'approcher numériquement la solution de (11). Le lien avec la méthode de Chorin est à l'étude.

Des essais numériques vont être menés par M. Deaconu et S. Wantz.

3.1.4 Représentation probabiliste de l'équation $u_t = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois

Mots-clés : représentation probabiliste d'EDP.

En collaboration avec S. Benachour (université Henri Poincaré), B. Roynette et P. Vallois ont étudié l'équation

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} & \\ u(0,\cdot) & = \quad u_0(\cdot) \end{cases}$$

Bien que cette EDP ne satisfasse pas le principe du maximum, il est possible de donner une représentation probabiliste de cette solution. Celle-ci fait intervenir le mouvement brownien itéré.

3.1.5 Simulation de processus de branchement et équations de convection-réaction-diffusion

Participants : Axel Grorud, Hervé Régnier, Denis Talay

Mots-clés : processus de branchement, équation de convection-réaction-diffusion, méthode particulaire stochastique.

L'objectif est d'analyser la méthode particulaire stochastique de Sherman et Peskin pour des équations de convection-réaction-diffusion.

La théorie des processus de branchement et les problèmes de martingales non linéaires qui leur sont associés, permettent d'interpréter les solutions au sens faible des équations aux dérivées partielles de type

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) + \alpha(x)\left\{\sum_{p=2}^{N} q_p(x)u^p(t,x) - u(t,x)\right\},$$

où L désigne un opérateur elliptique et où α et q_p sont des coefficients suffisamment réguliers. Ikeda-Nagasawa-Watanabe donnent une interprétation probabiliste de la solution en terme de processus de branchement ponctuels. À partir de cette interprétation, on construit facilement un algorithme de Monte–Carlo. A. Grorud, H. Régnier et D. Talay ont montré que la vitesse de convergence en norme $L^1(\mathbb{R}^d \times \Omega)$ est d'ordre $O(\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{\sqrt{M}})$ où Δt est le pas de temps et M le nombre de simulations. Des essais numériques ont été effectués et ont permis de corroborer la vitesse de convergence théorique.

L'étude s'est poursuivie en considérant le lien entre les équations du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \psi(u) \tag{12}$$

(avec des fonctions ψ convenables) et les processus de branchement avec interactions, afin d'effectuer l'analyse numérique de la méthode particulaire stochastique de Sherman et Peskin. Cette méthode ne cherche pas à résoudre (12) directement mais l'équation au gradient qui lui est associée. À cette équation nous pouvons associer un processus de branchement avec interaction de type champ moyen (l'interaction dépend de l'état global du système). Entre t et $t+\Delta t$, chaque particule suit un mouvement brownien à l'issue duquel elle meurt ou bien donne naissance à de nouvelles particules. La condition de regénérescence fait intervenir l'état global du système. Les résultats de « propagation du chaos » pour ces systèmes montrent que, quand le nombre de particules à l'instant 0 tend vers l'infini, chaque arbre issu d'une particule initiale a tendance à se comporter comme une copie indépendante d'un arbre dont la loi est décrite à l'aide d'une équation « limite » ; dans le cas de l'équation de Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov avec une condition initiale égale à la fonction de Heaviside, l'équation « limite » est la suivante :

$$g_t = \mu_0 * \sigma_t + \int_0^t [\psi'(< \mu_s,\ 1\!\!1_{]-\infty,x]} >)\mu_t] * \sigma_{t-s} ds,$$

où g_t est la densité de μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue et σ le noyau de Green de l'équation de la chaleur. Chauvin, Olivares-Rieumont et Rouault ont montré que la mesure μ_t peut être approchée à l'aide de la mesure empirique (aléatoire) des particules de l'algorithme de Sherman et Peskin, et qu'une simple intégration numérique par rapport à cette mesure empirique fournit une approximation de la solution de (12). A. Grorud, H. Regnier et D. Talay ont entamé l'étude de la vitesse de convergence en exploitant ce point de vue. Il semblerait que l'erreur en norme $L^1(I\!\!R \times \Omega)$ soit d'ordre $O(\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{\sqrt{N}})$ où N est le nombre de particules à l'instant initial.

3.1.6 Méthode de Monte–Carlo pour des équations de transport

Participants : Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

Mots-clés : méthode de Monte–Carlo, équation de transport, neutronique.

Ce travail s'effectue dans le cadre d'une collaboration avec l'EDF sur les méthodes de Monte–Carlo pour certaines équations de transport neutronique.

Le problème aux valeurs propres s'écrit de la façon suivante : trouver le plus grand $k > 0$ tel que le couple (k, u) vérifie l'équation

$$y\nabla_x u(x,y) + c(x)u(x,y) + \frac{\lambda(x)}{4\pi}\int_{[-1,1]\times[0,2\pi]} u(x,z)\,dz = \frac{1}{k}S(u(x,y),\nu(x))$$

dans un domaine D avec des conditions au bord de D de type absorption. La fonction inconnue $u(x, y)$ représente le flux de neutrons au point x et de vitesse y ; λ et c sont des caractéristiques physiques du milieu. $S(u(x,y),\nu(x))$ est un terme source qui dépend de la solution u de l'équation et du nombre moyen de neutrons émis par fission d'un neutron au point x. Le rôle joué par k est de corriger le nombre de neutrons créés par fission pour que l'on ait un état stable dans le réacteur D.

Nous avons construit un algorithme d'approximation de k, fondé à la fois sur une méthode de Monte–Carlo et sur une méthode d'itération sur le terme source. Nous avons ensuite appliqué cet algorithme à un cas-test fourni par l'EDF. La valeur numérique de k obtenue est comparable à celle fournie par des méthodes déterministes.

3.1.7 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

Participant : Denis Talay

Mots-clés : discrétisation d'équations différentielles stochastiques, processus de Lévy.

Avec pour motivation une méthode de Monte–Carlo pour certaines équations intégro-différentielles, P. Protter (Purdue University, US) et D. Talay ont continué leur travail sur l'approximation de solutions d'équations différentielles stochastiques gouvernées par des processus de Lévy assez généraux[1]. Sous des hypothèses encore trop fortes, des résultats partiels ont été obtenus sur la vitesse de convergence des solutions approchées, en fonction de la vitesse de convergence des suites de processus de Poisson composés convergeant vers le processus de Lévy directeur, de tels processus de Poisson étant effectivement simulés dans l'algorithme.

[1] La première partie de ce travail est à paraître à *Annals of Probability*.

3.1.8 Approximation de la solution d'une équation différentielle stochastique à deux indices et d'une équation parabolique stochastique

Participant : Marco Dozzi

Mots-clés : discrétisation d'équations différentielles stochastiques, processus à deux indices, équation aux dérivées partielles stochastique.

M. Dozzi s'est intéressé aux équations différentielles stochastiques à deux indices conduites par un drap brownien. En collaboration avec C. Eustratiou, il a déterminé la vitesse de convergence du schéma d'Euler vers la solution exacte. Ce résultat a pour application l'approximation d'une équation hyperbolique stochastique qu'on obtient en transformant l'équation différentielle stochastique.

M. Dozzi a également travaillé avec R. Schott sur les équations paraboliques stochastiques conduites par un mouvement brownien ou un drap brownien. A l'aide de la discrétisation de la fonction de Green associée à l'équation homogène, et pour certains types d'opérateurs paraboliques, il a obtenu la vitesse de convergence du schéma d'Euler. L'objectif à présent est d'obtenir un résultat similaire pour une classe plus large d'opérateurs différentiels.

3.2 Mathématiques financières

3.2.1 Calcul numérique du prix d'options exotiques

Participants : Patrick Seumen Tonou, Denis Talay

Mots-clés : mathématiques financières, option exotique, méthode de Monte–Carlo.

Le but est d'approcher, par une méthode de Monte–Carlo, le prix d'une option exotique dépendant du prix de l'action sous–jacente et du supremum des prix passés, lorsque le modèle sur le prix de l'action et sur le taux d'intérêt est plus complexe que le modèle de Black et Scholes. On s'intéresse donc à la quantité $\mathbb{E}F(X_t^x, y \vee \sup_{0\leq s\leq t} X_s^x)$, approchée par $\mathbb{E}F(\overline{X}_{t_n}^x, y \vee \sup_{0\leq k\leq n} \overline{X}_{t_k}^x)$, $x \leq y$, où (X_t^x) est un processus de diffusion homogène, $(\overline{X}_{t_k}^x)$ est un schéma d'Euler de pas de discrétisation $\frac{t}{n}$, et $F(\cdot,\cdot)$ représente le flux correspondant à l'option. La quantité

$$\epsilon(n) := \mathbb{E}F(X_t^x, y \vee \sup_{0\leq s\leq t} X_s^x) - \mathbb{E}F(\overline{X}_{t_n}^x, y \vee \sup_{0\leq k\leq n} \overline{X}_{t_k}^x)$$

mesure l'erreur d'approximation du processus stochastique sous-jacent dans la méthode de Monte–Carlo de calcul du prix de l'option.

Sous des hypothèses de régularité sur les coefficients du générateur de (X_t^x) et sur F, P. Seumen Tonou et D. Talay ont montré que la fonction

$$u(t,x,y) = \mathbb{E}F(X_t^x, y \vee \sup_{0\leq s\leq t} X_s^x)$$

est régulière et ont obtenu des estimations précises sur le comportement des dérivées par rapport à x et y de $u(t,x,y)$ quand t tend vers 0 et quand x tend vers y. À l'aide d'une approche utilisant le fait que $u(t,x,y)$ est solution d'une E.D.P. parabolique dégénérée avec condition de Neumann à la frontière, ces estimations ont permis de montrer que $\epsilon(n)$ est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.2.2 Gestion actif-passif

Participants : Mireille Bossy, Nathalie Pistre, Katell Savidan, Denis Talay

Mots-clés : mathématiques financières, analyse de risque.

La gestion du risque de taux d'intérêt a pris une importance particulière en cette période de forte volatilité des taux d'intérêt. Ce sujet concerne la gestion de portefeuilles obligataires, mais plus généralement l'immunisation d'un bilan, ce qui rend la gestion actif-passif nécessaire. La nécessité d'une définition correcte du risque est par exemple apparue explicitement dans la Directive du Comité de Bâle (13-IV-1995).

M. Bossy, N. Pistre, K. Savidan et D. Talay ont montré que la notion de duration couramment employée et que la notion de duration stochastique introduite dans la littérature ne sont pas des mesures appropriées du risque de taux d'intérêt. Ils proposent de définir un objectif en terme de contrôle stochastique en tenant compte du risque lié au modèle de taux d'intérêt, par exemple en contrôlant le processus des capitaux propres à tout instant pour éviter la faillite.

Ce problème de contrôle optimal stochastique est non standard. Nous en avons commencé l'étude théorique et avons abordé la question du calcul numérique.

3.2.3 Approximation de prix d'options américaines

Participants : David Chevance

Mots-clés : mathématiques financières, option américaine.

D. Chevance a poursuivi son travail sur l'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades introduites par Pardoux et Peng, qui fournissent une interprétation probabiliste originale à certains sytèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques quasi-linéaires par exemple, et qui ont un lien naturel avec certains problèmes d'évaluation d'options en mathématiques financières.

Après avoir étudié le problème de la discrétisation de ces équations dans le cas markovien, il s'est intéressé aux approximations de Macmillan, et Barone-Adesi et Whaley pour le prix d'une option américaine dans le modèle de Black et Scholes.

Dans ce modèle, il existe une probabilité « risque-neutre » et un mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ sous cette probabilité, tels que le prix de l'action vérifie l'E.D.S.:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rS_t + \sigma dW_t,\ 0 \leq t \leq T,$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, σ la volatilité de l'action et T l'échéance de l'option. Dans ce modèle, le prix $(P_t)_{0\leq t\leq T}$ d'un put américain sur l'action, de prix d'exercice K est donné par la solution unique $(P_t, q_t, C_t)_{0\leq t\leq T}$ de l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie

$$\begin{cases} P_T = F_T \\ -\, dP_t = -rP_t\, dt + dC_t - q_t\, dW_t \\ P_t \geq F_t;\ \ C_0 = 0;\ C \text{ croissant};\ \ \displaystyle\int_0^T (P_t - F_t)\ dC_t = 0 \end{cases}$$

où $\left(F_t = (K - S_t)^+\right)_{0\leq t\leq T}$ est la valeur intrinsèque du put. La solution doit être adaptée par rapport à la filtration brownienne.

L'approximation de Macmillan, et Barone-Adesi et Whaley donne une formule analytique qui approche P_0, en fonction de r, σ, K et T et S_0. On sait déjà que cette formule pour $T = +\infty$ donne la valeur exacte du prix d'un put perpétuel (limite de P_0 quand T tend vers $+\infty$).

Le travail en cours semble pouvoir établir par ailleurs que l'erreur relative de l'approximation tend vers zéro exponentiellement vite lorsque σ tend vers 0, tous les autres paramètres étant constants.

3.2.4 Étude des propriétés du modèle de pricing non linéaire d'Avellaneda-Lyons

Participant : Claude Martini

Mots-clés : mathématiques financières, pricing d'option.

Avellaneda et Lyons, indépendamment, ont récemment étudié le plus petit prix de vente à l'instant 0 d'une option européenne de maturité t tel qu'il existe une stratégie de couverture garantissant un ProfitAndLoss positif quelle que soit la volatilité de l'actif sous-jacent, la seule hypothèse étant qu'elle est comprise dans un intervalle $[\sigma_{\text{min}}, \sigma_{\text{max}}]$. C. Martini poursuit l'étude entamée dans sa thèse à l'université d'Évry sur ce sujet. En utilisant cette seule formulation variationnelle, il montre pour l'opérateur de pricing d'Avellaneda-Lyons la propriété de semi-groupe, de scaling brownien, de commutation aux homothéties, la propagation de la convexité et de la concavité. Il montre aussi que la limite du prix, quand l'intervalle de volatilité tend vers $\mathbb{R}+$, est l'enveloppe concave supérieure de la valeur intrinsèque. Il obtient enfin par changement de temps un majorant non trivial du prix, à savoir le prix à l'instant 0 d'une option américaine de fenêtre d'exercice $[\sigma^2_{\text{min}}\text{t}, \sigma^2_{\text{max}}\text{t}]$.

Actuellement, C. Martini cherche à savoir si le prix d'Avellaneda-Lyons est le supremum des prix européens sous toutes les dynamiques qui satisfont à l'hypothèse de volatilité du début.

3.2.5 Stratégies de couverture réelles et intégrales stochastiques

Participant : Claude Martini

Mots-clés : mathématiques financières, stratégie de couverture.

Sous les hypothèses idéales du modèle de Black-Scholes, la théorie financière canonique suppose que l'intégrale stochastique en temps continu correspond à la trésorerie engendrée par une suite continue d'achats-ventes du sous-jacent. Or toute stratégie réelle, même dans un marché parfait, ne fait intervenir qu'un nombre fini de réajustements du portefeuille, éventuellement dépendant de la trajectoire. Il semble donc pertinent de restreindre l'espace des stratégies admissibles au sous-espace des intégrales stochastiques élémentaires à intervalles définis par des temps d'arrêt où le nombre de temps d'arrêt dépend éventuellement de la trajectoire mais est fini presque sûrement. C. Martini étudie si le prix de vente d'une option européenne, défini de façon variationnelle comme ci-dessus, est égal au prix Black-Scholes.

3.2.6 Délit d'initié dans un modèle à sauts

Participant : Axel Grorud

Mots-clés : mathématiques financières, délit d'initié.

On s'intéresse à modéliser et détecter le délit d'initié.

On considère un modèle de marché sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$ dont la dynamique est régie par un mouvement brownien W de dimension m et un processus ponctuel marqué N, indépendant de W, de dimension n ayant la propriété de représentation prévisible :

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s(b_s ds + \sigma_s dW_s + \int \phi(y,s)N(dy,ds)), 0 \le t \le T, S_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Un agent économique cherche à optimiser sa stratégie sur l'intervalle de temps $[0,T]$.

En collaboration avec Monique Pontier (université d'Orléans) et Laurent Denis (université de Provence), A. Grorud a prolongé un travail antérieur en supposant la présence d'un investisseur initié : celui-ci connait des informations sur le futur, par exemple une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$ (des échanges auront lieu et il sait à quelle date). On note $\mathcal{Y}$ la filtration « naturelle » de l'initié : $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L), t \in [0,T]$. Le problème qui se pose alors est que W et N ne sont plus nécessairement des semi-martingales pour la nouvelle filtration. La méthode de grossissement initial d'une filtration permet de trouver les conditions sur L pour que $W_t = B_t + A_t$ où B est un $\mathcal{Y}-$brownien et A un $\mathcal{Y}-$processus croissant, et pour que N_t admette un compensateur $\mathcal{Y}$-prévisible. On utilise le calcul explicite du portefeuille optimal pour obtenir l'expression, dans le cadre des informations sur le futur, des stratégies optimales.

3.2.7 Premier temps de passage pour certains processus avec sauts

Participants : Marco Dozzi, Pierre Vallois

Mots-clés : mathématiques financières, risque de faillite.

Rappelons que la formule de Borovkov et Zolotarev donne la loi du premier temps de passage, à un niveau positif, d'un processus de Lévy sans sauts positifs (formule que M. Dozzi et P. Vallois avaient légèrement généralisée avec une nouvelle démonstration). Pour les niveaux non positifs le problème est plus délicat. En se restreignant à des modèles spécifiques de la théorie des risques, M. Dozzi et P. Vallois ont obtenu des résultats plus ou moins explicites pour la loi du temps de premier passage (sous forme d'une série dans un travail précédent) ou d'une équation fonctionnelle (travail en cours). Ils tentent à présent d'obtenir des résultats pour une classe plus vaste de processus en vue d'autres applications, notamment en mathématiques financières.

3.2.8 Amplitude de processus à temps discret et continu

Participant : Pierre Vallois

Mots-clés : mathématiques financières, risque de faillite.

En collaboration avec Isabelle Boni (université Henri Poincaré), Y. Siebenaler (stagiaire) et H. Ganidis (étudiante en thèse à l'I.E.C.N.), P. Vallois a travaillé sur l'amplitude d'un processus stochastique X.

Pour l'essentiel, on peut ramener l'amplitude de X à son processus inverse, c'est-à-dire à $\theta(a), a \geq 0$, où $\theta(a)$ désigne le premier instant où l'amplitude de X atteint le niveau a. Lorsque X est le mouvement brownien, le processus θ est bien décrit. On s'intéresse au cas où l'on perturbe le mouvement brownien, c'est-à-dire au cas du mouvement brownien avec dérive. On souhaite également étudier le mouvement brownien géométrique, processus qui joue un rôle important en mathématiques financières.

En ce qui concerne les processus à temps discret, on peut obtenir des résultats analogues pour des marches de vie et de mort. L'étape suivante consiste à traiter les cas de processus de Markov de vie et de mort, afin de pouvoir étudier les marches en milieu aléatoire (avec d'autres applications que les mathématiques financières).

3.3 Problèmes divers

3.3.1 Algorithmes stochastiques

Participant : Philippe Chassaing

Mots-clés : algorithme stochastique, ordonnancement stochastique.

P. Chassaing s'intéresse à l'optimalité en moyenne des algorithmes. Le coût moyen de nombreux algorithmes et des théorèmes limites ont été obtenus par différents auteurs (Jacquet, Flajolet, Schott, etc.) à l'aide des séries génératrices, de l'analyse complexe ou du calcul stochastique. Le but, ici, n'est pas de calculer le coût d'un algorithme donné remplissant un certain objectif, par exemple ranger une liste de n nombres, mais de démontrer qu'il est le moins coûteux parmi tous les algorithmes remplissant la même fonction. Il n'y a pas d'approche standard de ce type de problèmes, en tout cas aucune approche qui se soit montrée efficace pour une large classe de problèmes. On sait par exemple que ranger une liste de n nombres coûte en moyenne $1,442\ldots n\log(n)(1+o(1))$ comparaisons, au minimum, par des arguments de théorie de l'information, mais ces arguments échouent pour le moment quand il s'agit de trouver le nombre moyen de comparaisons minimal nécessaire pour fusionner deux listes bien rangées de n et m nombres respectivement en une liste bien rangée de $n+m$ nombres (« merging problem »).

L'approche par martingales, typique du contrôle stochastique donne des résultats malgré des difficultés techniques parfois rebutantes. Ainsi, P. Chassaing a obtenu l'algorithme optimal pour la recherche du maximum d'une marche aléatoire simple asymétrique et précisé les résultats d'Odlyzko concernant le cas symétrique.

En collaboration avec S. Alili (université de Cergy-Pontoise), P. Chassaing a travaillé sur un problème suscité par la mécanique statistique des interfaces, portant sur des marches aléatoires générales en milieu aléatoire. Les résultats obtenus sont analogues à ceux que les mêmes auteurs avaient obtenu antérieurement pour un mouvement brownien en milieu aléatoire, et décrivent le comportement asymptotique de la queue de distribution du temps d'atteinte d'un niveau aléatoire par une marche aléatoire.

En collaboration avec F. Charpillet (INRIA Nancy, projet SYCO), P. Chassaing travaille actuellement à de nombreux problèmes d'ordonnancement stochastique avec applications à l'intelligence artificielle, notamment aux algorithmes *anytime*, c'est-à-dire des algorithmes qui doivent fournir une réponse même s'ils sont interrompus avant la fin de leur runtime. Il s'agit de les agencer de sorte que la qualité de la réponse souffre le moins possible de cette interruption prématurée.

3.3.2 Régularité du mouvement brownien itéré

Participant : Madalina Deaconu

Mots-clés : analyse stochastique.

Nous montrons l'appartenance presque sûre des trajectoires du mouvement brownien itéré à l'espace de Besov $\mathcal{B}^{\frac{1}{4}}_{p,\infty}$ et à l'espace de Besov-Orlicz $\mathcal{B}^{\frac{4}{3}}_{M,\infty}$. Le résultat est optimal.

3.3.3 Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante, processus non linéaires autostabilisants

Participants : Madalina Deaconu, Sophie Wantz

Mots-clés : analyse stochastique, probabilité invariante.

Motivées par l'étude de systèmes de particules en interaction autostabilisants, M. Deaconu et S. Wantz se sont intéressées à l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$X^y_t = y + B_t - \frac{1}{2}\int_0^t u(X^y_s)ds,$$

où la dérive $-u$ est « fortement rentrante » i.e. : $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est telle que u et u' tendent vers l'infini à l'infini, u'' et $\frac{u'^2}{u}$ sont des $o(u)$ à l'infini et $u'' \leq \frac{2u'^2}{u}$. De plus, on suppose que $\frac{1}{u}$ est intégrable à l'infini. M. Deaconu et S. Wantz ont décrit le comportement asymptotique de $E(exp\ \alpha T^y_x)$ lorsque $y \to \infty$ avec $T^y_x = inf\{t \geq 0; X^y_t = x\}$.

M. Deaconu et S. Wantz ont également étudié des processsus non linéaires (au sens de Mc Kean) réfléchis aux bornes d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui fournissent des exemples de systèmes autostabilisants, au sens où il existe un comportement asymptotique en temps grand. Sous certaines hypothèses portant sur le noyau d'interaction intervenant dans le coefficient de dérive, l'existence d'une unique mesure stationnaire a été établie ainsi que la convergence en temps grand de la loi du processus vers la mesure stationnaire.

3.3.4 Extension du calcul stochastique

Participants : Radouane Raki, Pierre Vallois

Mots-clés : calcul stochastique.

En collaboration avec Francesco Russo (université Paris 13), R. Raki et P. Vallois définissent dans un cadre général des intégrales « progressives », rétrogrades, symétriques par rapport à des processus continus ou continus à droite et limités à gauche. Ils introduisent également la notion de processus croissants associés. Ces objets coïncident avec ceux définis dans le cadre classique du calcul stochastique. Ces nouveaux schémas d'intégration, d'une part, permettent de prendre en compte des processus non adaptés, et, d'autre part, constituent un outil pour relier entre elles les différentes constructions d'intégrales anticipatives : intégrales de Skorokhod, de Stratonovich, intégrales définies par grossissement de filtration.

L'étape suivante consiste à définir des règles de calcul stochastique, en particulier à étendre la formule d'Itô.

4 Actions industrielles

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Nathalie Pistre, Bernard Roynette, Katell Savidan, Patrick Seumen Tonou, Denis Talay, Pierre Vallois, Sophie Wantz

Le contrat d'étude avec l'EDF s'est poursuivi en collaboration avec X. Warin et B. Métivet (EDF) sur le thème des méthodes de Monte–Carlo pour certains problèmes de transport neutronique et sur un début d'étude d'un problème de calcul de valeur propre par des méthodes de Monte–Carlo.

En collaboration avec J-P. Minier (EDF), l'ensemble du projet a commencé à l'automne un travail sur le développement de schémas d'intégration numérique d'équations différentielles stochastiques qui sont utilisées pour la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche lagrangienne, et pour les écoulements turbulents réactifs selon la méthode dite PDF (Probability Density Function).

Dans le cadre d'une étude pour la Fédération Française des Sociétés d'Assurance, et en collaboration avec F. de Varenne (FFSA), M. Bossy, N. Pistre et D. Talay ont calculé la valeur de la dette engagée par une société d'assurance vis-à-vis d'un assuré, pour un contrat d'assurance garantissant un revenu minimum augmenté d'une participation au gain de la société sur ses placements financiers (actions et obligations). Ils ont également étudié les variations de cette valeur induites par des variations de certains paramètres du modèle décrivant le portefeuille financier de la société et la stratégie financière de l'assuré. L'étude a été réalisée dans un modèle simplifié.

Enfin, dans le cadre d'une collaboration avec la CAR, D. Talay a participé à l'expertise d'algorithmes de Monte–Carlo en finance et à l'étude d'une modélisation de gestion actif-passif des fonds d'épargne.

5 Actions nationales et internationales

5.1 Actions nationales

B. Roynette, P. Vallois et M. Dozzi organisent le Séminaire de probabilités de l'institut Elie Cartan.

Le séminaire de Théorie et applications numériques des processus stochastiques organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Jean-François Le Gall (université Paris 6), Vigirdas Mackevicius (université de Vilnius, LT), Marco Picasso (École Polytechnique de Lausanne, CH), Rolando Rebolledo (Universitad Catolica de Chile, CL).

Le séminaire Ceram/Inria de Mathématiques financières organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy et N. Pistre a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Thierry Foucault (Barcelone), Rajna Gibson (École des HEC de Lausanne), Monique Jeanblanc Picqué (université d'Evry), Robert Kast (CNRS), Igor Pikovsky (Carnegie Mellon University), Agnès Sulem-Bialobroda (INRIA Rocquencourt, projet META 2), Agnès Tourin (université Paris IX Dauphine).

En outre, les composantes sophipolitaine et nancéenne du projet ont organisé des réunions trimestrielles au cours desquelles ont exposé, entre autres, R. Léandre (CNRS), S. Bénachour (université Henri Poincaré),

5.2 Actions internationales

D. Talay est responsable pour l'Inria d'une collaboration Inria/NSF sur le thème de la convergence en loi des processus stochastiques (le responsable américain en est P. Protter).

D. Talay est coresponsable scientifique (avec A.J. Chorin, Directeur du Département de Mathématiques de Berkeley) d'une coopération France-Berkeley sur le thème des modèles aléatoires de turbulence.

D. Talay est éditeur associé des revues « Monte Carlo Methods and Applications » et « Finance and Stochastics ».

6 Diffusion des résultats

6.1 Formation

6.1.1 Enseignement universitaire

A. Grorud enseigne à l'université de Provence.

N. Pistre est professeur au Ceram (établissement d'enseignement de la chambre de commerce et d'industrie de Nice et Côte d'Azur) et assure un cours de magistère sur la « théorie financière appliquée à la firme » (université de Bordeaux), ainsi qu'un cours à HEC sur la « théorie des options appliquée aux choix d'investissements réels ».

B. Roynette et P. Vallois (respectivement M. Dozzi) sont professeurs à l'université Henri Poincaré (respectivement Nancy 2) et donnent notamment des cours de DEA sur le calcul stochastique (120h au total) et des cours de DESS (50h). M. Dozzi est directeur des études de la Miage à l'Université Nancy 2.

P. Chassaing enseigne à l'université Henri Poincaré.

D. Chevance enseigne en DEUG à l'université d'Orléans.

M. Bossy et K. Savidan ont donné un cours d'introduction à la modélisation financière dans le cadre du DEA de macrodynamique et de financement des économies ouvertes de l'université de Nice (20h).

N. Pistre et K. Savidan ont créé un cours de gestion de bilan à l'ESC-CERAM (24 heures).

D. Talay donne un cours de calcul stochastique et applications numériques à l'ISITV (Toulon) validé par le DEA de mathématiques appliquées de l'université de Provence (30h), un cours du DEA de probabilités (option finance) de Paris 6 (12h) et un cours du mastère de finance internationale d'HEC (15h).

D. Talay est coresponsable de l'option « Informatique et mathématiques appliquées à la finance et à l'assurance » de troisième année de l'ESSI, et est membre de son conseil scientifique.

D. Talay est membre de la commission de spécialistes du département de mathématiques de l'université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand).

6.1.2 Thèses

– Thèses en cours :

1. David Chevance, « Discrétisation d'équations différentielles stochastiques rétrogrades », AMN (puis ATER depuis le 1er octobre) et université de Provence et OMEGA-Sophia Antipolis,
2. Madalina Deaconu, « Processus non linéaires autostabilisants », université Henri Poincaré et OMEGA-Nancy,
3. Radouane Raki, « Calcul stochastique non adapté », université Henri Poincaré et OMEGA-Nancy,
4. Hervé Régnier, « Approximation de processus de branchement et applications à certaines E.D.P. non linéaires », université de Provence et OMEGA-Sophia Antipolis,
5. Patrick Seumen Tonou, « Méthodes de Monte–Carlo en neutronique et en mathématiques financières », université de Provence et OMEGA-Sophia Antipolis,

6. Olivier Vaillant, « Équation de Navier–Stokes avec condition initiale aléatoire. Modèles aléatoires de la turbulence », université de Provence et OMEGA-Sophia Antipolis,
7. Sophie Wantz, « Étude de processus non linéaires », université Henri Poincaré et OMEGA-Nancy.

– Les membres du projet ont participé à 2 jurys de thèse.

6.1.3 Stages

Le projet a accueilli les stagiaires suivants :

– Henri Harfouche, « Problèmes de gestion de bilan », stage de 3^{eme} année de l'École des Mines de Paris (3 mois à partir du 1er janvier)

– Rémi Rocca, « Résolution d'équations aux dérivees partielles elliptiques par une méthode probabiliste. Application à la décomposition en sous-domaines », stage de l'ISITV et du DEA de Mathématiques appliquées de l'université de Provence (5 mois à partir du 1er avril)

6.2 Participation à des conférences et colloques

N. Pistre et K. Savidan ont exposé au congrès de l'AFFI (juin 1996) sur le thème « Assets and Liabilities Management: how to immunize a bank balance sheet against stochastic interest rates risk ».

P. Chassaing (orateur), M. Dozzi (orateur) et D. Talay (organisateur de session) ont participé au 4^{eme} Congrès de la Société Bernouilli à Vienne (AT).

P. Chassaing, B. Roynette, P. Vallois ont exposé aux Journées de Probabilités 1996 à Luminy.

M. Bossy et P. Chassaing ont exposé aux Journées du groupe MAS de la SMAI (Toulouse). M. Deaconu et S. Wantz y ont participé. D. Talay y a organisé deux sessions.

M. Dozzi a exposé au Symposium on Operations Research, à Braunschweig (DE).

H. Régnier a donné un séminaire à l'université de Trento (IT).

D. Chevance a participé à l'école d'été CIME « Financial Mathematics » à Bressanone (IT) et au Colloque « Jeunes probabilistes et statisticiens » à Aussois. Il a exposé au Colloque « Équations différentielles stochastiques rétrogrades et applications » (université du Maine).

D. Talay a donné la conférence scientifique annuelle de l'assemblée générale de la SMAI. Il a également donné un séminaire au Collège de France à l'invitation de J-L. Lions, à Purdue University (US), au workshop « Monte Carlo methods in Finance » organisé à l'ETH-Zürich (CH), à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (CH), à l'École des Hautes Etudes Commerciales de l'université de Lausanne, au séminaire de mathématiques de l'économie et de la finance à l'Institut Henri Poincaré (Paris) et à l'université de Provence.

L'ensemble du projet a participé à un workshop franco-américain organisé à Sophia Antipolis par J. Jacod, P. Protter et D. Talay dans le cadre de la collaboration Inria-NSF (voir *supra*).

6.3 Organisation de colloques et de cours

D. Talay a été membre du comité scientifique (présidé par J. Neveu) des Journées du groupe MAS de la SMAI (Toulouse).

7 Publications

Livres et monographies

[672] C. GRAHAM, T. KURTZ, S. MÉLÉARD, P. PROTTER, M. PULVIRENTI, D. TALAY, *Probabilistic Models for Nonlinear PDE's and Numerical Applications*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1627, Springer-Verlag, 1996, CIME Summer School, D. Talay and L. Tubaro (Eds.).

[673] L. C. G. ROGERS, D. TALAY (réd.), *Numerical Methods in Financial Mathematics*, Cambridge University Press, 1996.

Articles et chapitres de livre

[674] L. ALONSO, P. CHASSAING, R. SCHOTT, « A coin weighing problem », *Random Structures and Algorithms*, 9, 1996, p. 1–14.

[675] V. BALLY, D. TALAY, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II) : convergence rate of the density », *Monte Carlo Methods and Applications*, 2, 1996, p. 93–128.

[676] S. BENACHOUR, P. VALLOIS, B. ROYNETTE, « Étude de l'équation $u_t = \frac{1}{2}\Delta u \pm |\nabla u|$ », *Astérisque 236*, 1996, Numéro spécial à l'occasion du 60^{eme} anniversaire de P.A. Meyer et J. Neveu.

[677] M. BOSSY, D. TALAY, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation », *Ann. Appl. Probab.*, 6, 1996, p. 818–861.

[678] M. BOSSY, D. TALAY, « A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation », *Math. Comp.*, 1, 1997.

[679] P. CHASSAING, « Slow diffusion for a brownian motion with random reflecting barriers », *Stochastic Processes and Applications*, 61, 1996, p. 71–83.

[680] M. DEACONU, S. WANTZ, « Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante », *Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 1996, p. 757–762.

[681] M. DEACONU, « Régularité du mouvement brownien itéré », *Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 1996, p. 933–938.

[682] C. HENIN, N. PISTRE, « Bounding the generalized convex option prices », *European Journal of Finance*, 2, 1996, p. 239–259.

[683] G. LORANG, B. ROYNETTE, « Étude d'une fonctionnelle liée au processus de Bessel », *Annales de l'Institut H. Poincaré 32*, 1, 1996, p. 107–133.

[684] N. PISTRE, « Bourse de Varsovie : la stabilisation ? », *Banque*, 566, 1996, p. 50–51.

[685] F. RUSSO, P. VALLOIS, « Itô formula for C_1 functions of semi-martingales », *Probab. Theory and Related Fields 104*, 1996, p. 27–41.

[686] S. TAPIÉRO, P. VALLOIS, « Run length statistics and the Hurst exponent in random and birth-death random walk », *Chaos, Solitons and Fractals 7*, 9, 1996, p. 1333–1342.

[687] P. VALLOIS, « The range of a simple random walk on $\mathbb{Z}$ », *Advances in Appl. Prob.*, 1996.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[688] V. BALLY, P. PROTTER, D. TALAY, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations », *in : Applied Stochastics and Optimisation, proceedings of ICIAM 95*, O. Mahrenholtz, K. Marti, R. Mennicken (réd.), *Numéro spécial de Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3, Akademie Verlag, p. 207–210, 1996.

[689] C. BANDLE, M. DOZZI, R. SCHOTT, «Blow-up behaviour of a stochastic partial differential equation of reaction-diffusion type», *in: Symposium on the Brownian sheet*, *10*, Israel Mathematical Conference Proceedings, 1996.

[690] M. BOSSY, D. TALAY, «A Stochastic Particle Method for McKean-Vlasov PDE's and the Burgers Equation», *in: Applied Stochastics and Optimisation, proceedings of ICIAM 95*, O. Mahrenholtz, K. Marti, R. Mennicken (réd.), *Numéro spécial de Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3, Akademie Verlag, p. 319–322, 1996.

[691] D. CHEVANCE, «Discretization of Pardoux-Peng's backward stochastic differential equations», *in: Applied Stochastics and Optimisation, proceedings of ICIAM 95*, O. Mahrenholtz, K. Marti, R. Mennicken (réd.), *Numéro spécial de Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3, Akademie Verlag, p. 323–326, 1996.

[692] D. CHEVANCE, «Numerical methods for backward stochastic differential equations», *in: Numerical Methods in Financial Mathematics*, L. C. G. Rogers, D. Talay (réd.), Cambridge University Press, 1996.

[693] C. HENIN, N. PISTRE, «The use of second order stochastic dominance to bound European call prices: theory and results», *in: Numerical Methods in Financial Mathematics*, L. C. G. Rogers, D. Talay (réd.), Cambridge University Press, 1996.

[694] S. TAPIÉRO, P. VALLOIS, «The range process in random walks. Theoretical results and applications», *in: Advances in Computational Economics*, H. Ammans, B. Rustem, A. Whinston (réd.), Kluwer Publ., 1996.

Rapports de recherche et publications internes

[695] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, D. TALAY, P. VALLOIS, «Nonlinear self-stabilizing processes (I)», *Prepublication n˚16*, Institut Elie Cartan, 1996.

[696] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS, «Nonlinear self-stabilizing processes (II)», *Prepublication n˚17*, Institut Elie Cartan, 1996.

[697] P. CHASSAING, «The value of the Odlyzko's constant», *Prépublication n˚39*, IECN, 1996.

[698] M. DEACONU, S. WANTZ, «Processus non linéaire autostabilisant réfléchi», *Prépublication n˚35*, IECN, 1996.

[699] N. PISTRE, «Stochastic dominance arguments and the bounding of generalized concave option price», *Cahier de Recherche n˚63*, CERAM, 1996.

[700] N. PISTRE, «Using second order stochastic dominance and linear options to bound nonlinear options premia», *Cahier de Recherche n˚65*, CERAM, 1996.

Divers

[701] M. BOSSY, N. PISTRE, D. TALAY, «Évaluation numérique du passif d'un contrat d'assurance et étude de sensibilité dans un modèle simplifié», 1996, rapport de contrat FFSA-Inria.

[702] P. SEUMEN TONOU, D. TALAY, «Méthodes de Monte-Carlo pour le transport neutronique», 1996, rapport final de contrat EDF-Inria.

8 Abstract

The OMEGA project is located at two sites: Sophia Antipolis and Nancy.

The objective of this project is to develop and analyze probabilistic numerical methods. Two fields of applications are emphasized: the numerical resolution of Partial Differential Equations (in particular those in Fluid Mechanics and in Neutronics) and the calculation of complex quantities arising in Financial Mathematics.

In 1996 the research themes of OMEGA have been:

- the simulation of the distributions of stochastic processes and the study of discretized stochastic differential equations;
- the development and analysis of probabilistic numerical methods (and in particular Monte Carlo methods and methods of stochastic particle systems);
- estimates on the speed of convergence of the methods;
- the probabilistic interpretation of various nonlinear PDE's in terms of the limit laws of particle systems;
- construction of models for the stock market and related objects in Financial Mathematics; study of computational problems arising in Insurance and Accounting; and the numerical calculation of complex prices of financial derivatives (e.g., stock options);
- computations performed on computers using parallel architecture.