INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Avant–Projet CAFÉ

Calcul Formel et Équations

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

1999

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Manuel Bronstein [DR]

Assistante de projet

France Limouzis [TR, à temps partiel dans le projet]

Personnel Inria

Stéphane Dalmas [IR]
Evelyne Hubert [CR, à partir du 1/10/99]

Ingénieurs experts

Olivier Arsac
Claude Huchet

Personnel UNSA

Marc Gaëtano [Maître de conférences]

Chercheurs doctorants

Raphaël Bomboy [allocataire moniteur normalien]
Stéphane Lavirotte [allocataire MESR]

Stagiaires

Eric Blond [avril–août 1999]
Benoit Gonzalvo [mars–juin 1999]
Hanane Naciri [janvier–juillet 1999]

2 Présentation et objectifs généraux

CAFÉ est un avant–projet de l'INRIA. Suite à la recommandation du 4 décembre 1998[1] du comité des projets de l'UR de Sophia Antipolis, CAFÉ a le statut d'action en attendant l'évaluation de la proposition de projet par des rapporteurs externes.

Notre objectif principal est de créer une nouvelle génération de fonctionnalités des systèmes de calcul formel relatives à la résolution symbolique d'équations fonctionnelles. Il s'agit d'équations où les inconnues représentent des fonctions plutôt que des valeurs numériques. Les équations fonctionnelles qui sont l'objet de nos études actuellement sont plus particulièrement les équations différentielles et les équations aux (q)–différences. Nos recherches suivent une approche à trois volets :

– l'étude des mathématiques sous–jacentes ;

1. `http://www-sop.inria.fr/sadm/interne/DR:I/COMITES/crcp04dec98/crcp04dec98.html`

- la conception d'algorithmes efficaces pour la résolution formelle de ces équations ;
- le développement de bibliothèques dédiées de calcul formel et d'outils logiciels pour la distribution de ces bibliothèques aux utilisateurs industriels par l'intermédiaire des systèmes commerciaux.

Pour les recherches théoriques et algorithmiques, nous nous intéressons en particulier à la généralisation des théories et méthodes pour les équations différentielles aux équations aux (q)–différences, et au–delà aux équations fonctionnelles arbitraires.

3 Fondements scientifiques

3.1 Algorithmes pour équations linéaires

Mots clés : algèbre linéaire, algèbre différentielle, équations différentielles, équations aux différences, intégration formelle, solution analytique, quadratures, solution en forme close, théorie de Galois.

L'objectif de ce thème est d'étudier la résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles linéaires, principalement différentielles et aux q–différences. L'importance de l'approche par linéarisation de telles équations dans pratiquement toutes les sciences de l'ingénieur est bien connue, et se reflète dans l'importance des investissements en ordinateurs et temps de calcul consacrés à leur résolution numérique. Ingénieurs et physiciens essaient d'étendre la connaissance de la linéarisée au problème non–linéaire, ce qui montre d'autant plus l'utilité d'une analyse fine de la structure du linéaire. La connaissance de solutions formelles amène à une meilleure compréhension des modèles étudiés, car les solutions ainsi obtenues contiennent des informations sur la structure même des problèmes résolus.

Une équation différentielle (resp. aux différences) ordinaire linéaire est une équation de la forme :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y(x) = b(x)$$

respectivement

$$a_n(x)y(x+n) + \cdots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

où l'inconnue y, ainsi que les coefficients b et les a_i, sont des fonctions de la variable x. On cherche à déterminer s'il existe des solutions *Liouvilliennes*, c'est à dire si on peut exprimer au moins une solution non–nulle par une formule finie faisant intervenir des opérations algébriques, des primitives (resp. des sommes) et des exponentielles (resp. des produits). Ces solutions sont aussi appelées solutions en quadratures ou bien en forme close. Ce type de solution n'existe pas toujours lorsque l'ordre n est plus grand que 1 et que les coefficients a_i ne sont pas constants. Par exemple, l'équation de Bessel :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

n'en admet pas (ses solutions sont les fonctions de Bessel, qui sont définies implicitement par cette équation). Plus difficile pour les systèmes de calcul formel, les équations :

$$(x^3+1)(x^2+1)(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2+2x-1)\frac{dy}{dx}+15(x^3+1)y(x)=0 \tag{1}$$

et

$$y(x+2)+y(x+1)+xy(x)=0 \tag{2}$$

n'en admettent pas non plus, alors que :

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{7x-4}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2592x^2-2963x+560}{252x^2(x-1)^2}\frac{dy}{dx}+\frac{57024x-40805}{24696x^2(x-1)^2}y(x)=0 \tag{3}$$

et

$$y(x+2)+\frac{(x+1)(5x^2+8x+4)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x+1)-\frac{x^2(x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+3)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x)=0 \tag{4}$$

en admettent. On notera que MAPLE V.5 et MATHEMATICA 4.0 ne sont capable ni de trouver des solutions Liouvilliennes de (3) ou (4), ni de prouver que (1) ou (2) n'en ont pas. La théorie de Galois différentielle, développée tout d'abord par Picard et Vessiot au début du siècle, puis de façon algébrique principalement par Kolchin dans les années 60, associe un groupe de Galois à une équation de ce type, et donne des critères liant l'existence de solutions en quadratures à une propriété de ce groupe. Des algorithmes permettant de tester cette propriété à partir de l'équation seulement[Kov86,Sin80] ont rendu le problème de l'existence de solutions en quadratures décidable dans le cas de coefficients polynômiaux. Une généralisation récente de cette théorie aux équations aux différences finies [SvdP97] a engendré la découverte d'un premier algorithme de calcul des solutions Liouvilliennes de ces équations pour des coefficients polynômiaux [HS99]. Dans les deux cas, la complexité de ces algorithmes ainsi que leur besoin de résolution d'équations intermédiaires non–linéaires rendent ces algorithmes difficilement applicables en pratique, sauf pour les équations du second ordre.

Notre action dans ce thème a plusieurs buts :

- la généralisation des théories et méthodes à des équations aux (q)-différences,
- la généralisation des algorithmes à des classes de coefficients contenant des fonctions plus générales,
- l'amélioration des algorithmes existants afin de pouvoir résoudre ces équations pour des ordres supérieurs,
- le développement de bibliothèques dédiées fournissant ces fonctionnalités de résolution à divers systèmes de calcul formel.

[Kov86] J. KOVACIC, « An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations », *Journal of Symbolic Computation 2*, 1, March 1986, p. 3–43.

[Sin80] M. SINGER, « Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Differential Equations », *American Journal of Mathematics 103*, 1980, p. 661–682.

[SvdP97] M. SINGER, M. VAN DER PUT, *Galois Theory of Difference Equations*, *LNM 1666*, Springer, 1997.

[HS99] P. HENDRIKS, M. SINGER, « Solving Difference Equations in Finite Terms », *Journal of Symbolic Computation 27*, 3, March 1999, p. 239–260.

3.2 Aspects logiciels du calcul formel

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductive, communication, protocole, OpenMath.

L'objectif général de ce thème est l'amélioration des systèmes de calcul formel. La plupart des systèmes de calcul formel intègrent tout un ensemble de connaissances non algorithmiques (déclaratives), directement dans leur code, comme les valeurs d'intégrales ou de sommes particulières. Une idée naturelle est de regrouper ces connaissances dans une base de données pour pouvoir en rajouter facilement et les partager entre plusieurs systèmes. Les bases de données classiques ne conviennent évidemment pas, car elles n'ont pas la connaissance mathématique indispensable : prise en compte de la commutativité, des éléments neutres, déterminations d'instances de formules, *etc.* La réalisation d'une telle base qui soit à la fois suffisamment efficace pour être utilisable en pratique et suffisamment puissante dans son mécanisme de recherche et de reconnaissance, pose divers problèmes qui se situent au carrefour des techniques et outils du calcul formel et de la déduction automatique. Le prototype que nous développons depuis un peu plus de deux ans admet des requêtes de la forme « sous les conditions $C_1, \dots C_n$, la formule P est-elle vraie ? » où P peut contenir des variables particulières qui devront être instanciées par une expression convenable dans la réponse. Ceci permet, par exemple, de poser des questions telles que « quelle est l'expression qui représente la primitive d'une fonction donnée ». La réponse à une telle requête est multiple et conditionnelle : des conditions supplémentaires peuvent être données dans la réponse. La base peut ainsi répondre « P est vrai si on rajoute la condition C_{n+1} aux conditions C_i ». Les réponses sont obtenues par un processus de déduction original qui combine une unification associative-commutative entre la requête et les formules de la base (il s'agit en fait d'un cas particulier d'unification associative-commutative) et une ou plusieurs étapes qui s'apparentent à de la para-modulation (certaines des équations provenant de des échecs d'unification sont résolues en utilisant la base elle-même ou un algorithme spécialisé).

La communauté de calcul formel a reconnu depuis quelques années l'importance de définir un standard pour la communication d'objets mathématiques (communication inter-processus, par courrier électronique, par archivage dans des bases de données *etc*). Un effort international, *OpenMath*, a été initié dans ce sens et nous y participons très activement. Les problèmes sont multiples : trouver le bon niveau de définition des objets, prendre en compte la variété des applications qui peuvent utiliser un tel standard ou encore intégrer *OpenMath* avec les standards actuels ou à venir pour les documents électroniques ou la communication entre applications (XML, CORBA, DCOM/OLE). C'est ainsi que nous participons au groupe de travail sur les mathématiques du Consortium Web. Un standard dans ce domaine est aussi un premier pas vers la mise au point d'une nouvelle architecture pour les systèmes de calcul formel (et plus généralement pour les systèmes de calcul scientifique au sens le plus large) à base de composants OpenMath qui pourrait permettre de résoudre les difficiles problèmes rencontrés aujourd'hui pour développer et maintenir un système de calcul formel.

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

La stratégie principale du projet est d'enrichir les fonctionnalités des systèmes commerciaux de calcul formel, afin de transférer nos résultats et algorithmes vers leurs utilisateurs par l'intermédiaire de ces systèmes. Du point de vue de la recherche, nous envisageons d'étudier les applications possibles suivantes :

- automatique (application de l'élimination différentielle),
- analyse numérique (détermination de l'index d'un système différentio-algébrique, recherche de conditions initiales cohérentes),
- bases de données mathématiques (consultation de formulaires mathématiques sur Internet).

5 Logiciels

5.1 Bibliothèques OpenMath

Participants : Olivier Arsac, Stéphane Dalmas [correspondant].

Mots clés : communication, protocole, OpenMath.

Deux bibliothèques OpenMath (cf. 6.2) sont développées dans le cadre du projet européen OpenMath. Il s'agit d'une bibliothèque C qui a déjà été liée à plusieurs systèmes de calcul formel et qui est disponible depuis un peu plus de deux ans et d'une bibliothèque Java, réalisée l'année dernière. Cette année nous avons aussi écrit une bibliothèque C++.

5.2 Passerelle OpenMath–MathLink

Participants : Stéphane Dalmas [correspondant], Yves Papegay [projet SAGA].

Mots clés : communication, protocole, OpenMath, Mathematica, MathLink.

Nous avons développé une passerelle OpenMath-MathLink (MathLink est le protocole utilisé par le système de calcul formel Mathematica pour communiquer avec un autre logiciel). Ce programme peut être vu comme un traducteur entre MathLink (et un large sous-ensemble de Mathematica) et OpenMath. Il permet à une application OpenMath d'utiliser Mathematica ou d'être utilisée depuis Mathematica (ou tout autre programme utilisant MathLink pour ses communications). Il permet également de lire et sauvegarder des objets Mathematica au format OpenMath.

5.3 Bibliothèque SALLI

Participant : Manuel Bronstein [correspondant].

Mots clés : Aldor, standard, structures de données.

Suite à un contrat de β–test avec NAG Ltd. pour l'évaluation du compilateur Aldor, la bibliothèque standard SALLI [2] (Standard ALdor LIbrary) continue à être développée dans le projet. Nous y avons rajouté cette année de nouvelles structures de données, ainsi qu'une version "debug" permettant de vérifier automatiquement les accès à ces structures. Cette bibliothèque remplace le logiciel `axllib` livré par NAG avec le compilateur et fournit une interface de haut niveau aux types et structures de données de base du langage. SALLI est distribuée avec une ébauche de livre sur la programmation en Aldor [BB98].

5.4 Bibliothèque Σ^{it}

Participant : Manuel Bronstein [correspondant].

Mots clés : calcul formel, équations différentielles, équations aux différences.

La bibliothèque Σ^{it} [3], qui incorpore nos résultats algorithmiques sur la résolution d'équations fonctionnelles, continue à être développée dans le projet. Un portage sur la bibliothèque SALLI est en cours, ainsi que l'addition d'un résolveur d'équations aux différences finies.

6 Résultats nouveaux

6.1 Algorithmes pour équations linéaires

Participants : Raphaël Bomboy, Manuel Bronstein, Benoit Gonzalvo.

Mots clés : équations différentielles, équations aux différences, coefficients Liouvilliens, déterminants, solution Liouvillienne, solution analytique, quadratures, groupes de Galois, réductibilité, solution périodique.

Équations différentielles

Pour les équations différentielles, notre activité principale cette année a été la résolution d'équations dont les coefficients contiennent un terme exponentiel ou trigonométrique, par exemple :

$$(x - e^x)\frac{dy^2}{dx^2} + (e^{2x} + e^x - x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + e^x(x^2 - x + 1 - xe^x)y(x) = 0$$

qui a pour solution générale $C_1 e^{x^2/2} + C_2 e^{e^x}$. En collaboration avec Anne Frédet (École Polytechnique), une alternative efficace à l'algorithme de Singer [Sin91] pour le calcul des solutions dans le corps de coefficients a été découverte et implémentée [7]. Cet algorithme a été ensuite utilisé lors du stage de Benoit Gonzalvo pour le calcul des solutions en quadratures de ce type d'équations.

2. `http://www.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/salli.html`
3. `http://www.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit.html`

[BB98] P. BROADBERY, M. BRONSTEIN, « A First Course on Aldor with SALLI », novembre 1998, `http://www.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/tutorial.ps.gz`.

[Sin91] M. SINGER, « Liouvillian Solutions of Linear Differential Equations with Liouvillian Coefficients », *Journal of Symbolic Computation 11*, 1991, p. 251–273.

Puisque nos algorithmes génèrent des systèmes algébriques linéaires symboliques de grande taille, nous avons aussi commencé l'étude, en collaboration avec Thom Mulders (ETH Zurich), de l'application du procédé du relèvement de Hensel pour l'algèbre linéaire. Une approche efficace combinant le relèvement de Hensel et les images modulaires afin de calculer le déterminant de grandes matrices a été découverte [5] et l'adaptation de ces techniques à d'autres calculs, tels que celui du noyau, est en cours.

Équations aux différences finies

L'essentiel de nos efforts en recherche en amont ont été centrés sur l'étude des équations aux différences finies, en particulier des problèmes suivants : leur théorie de Galois, les solutions périodiques et les équations à coefficients fonctionnels.

Théorie de Galois : Nous nous sommes attachés à établir les liens entre les propriétés de réductibilité d'un opérateur aux différences et la forme de ses solutions et de son groupe de Galois. Ce travail est essentiellement l'adaptation aux cas des différences finies de celui effectué dans le cas différentiel par Singer [Sin96]. L'objectif visé est de donner des algorithmes rapides de détermination des solutions Liouvilliennes et du groupe de Galois d'une équation aux différences finies. Nous avons aussi donné des caractérisations de la réductibilité et de la complète réductibilité d'un opérateur aux différences finies en terme de la réductibilité et complète réductibilité de son espace de solutions et de la réductivité de son groupe de Galois. Une notion importante intervenant dans ces problèmes de réductibilité est celle d'Eigenring d'un opérateur. Nous avons déterminé la structure complète de l'Eigenring d'un opérateur complètement réductible. Ces résultats ont fait l'objet d'un rapport de recherche [9] et seront prochainement soumis à publication.

Solutions périodiques : Nous avons découvert un algorithme de recherche des solutions périodiques d'un opérateur aux différences finies. Ces solutions ont une importance dans les applications pratiques de ce genre d'équations. Ce problème a été résolu sans faire appel à la théorie de Galois. Nous avons montré que l'espace des solutions périodiques admet une base formée de solutions appartenant à une autre classe de solutions remarquables, les solutions géométriques. Nous avons donné un algorithme efficace de recherche des solutions géométriques d'une équation aux différences finies. Pour déterminer les solutions périodiques, nous avons également raffiné cet algorithme au moyen d'un algorithme calculant a priori une borne sur les périodes minimales d'une solution périodique. Ces résultats ont fait l'objet d'une soumission au *Rhine Workshop on Computer Algebra*[4].

Équations à coefficients fonctionnels : Nous avons développé une théorie algébrique des tours d'extensions de corps aux différences afin de pouvoir traiter les équations aux différences dont les coefficients contiennent des fonctions transcendantes définies par des sommes et/ou produits, par exemple :

$$y(n+2) - (n! + n)y(n+1) + n(n! - 1)y(n) = 0$$

qui admet (en particulier) $(n-1)!$ comme solution. Nous avons étudié en détail les propriétés de ces extensions et y avons en partie généralisé les algorithmes d'Abramov pour les équations

4. RWCA'00, `http://www.inf.ethz.ch/rwca00/`

[Sin96] M. F. Singer, « Testing Reducibility of Linear Differential Operators: A Group Theoretic Perspective », *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 7*, 1996, p. 77–104.

aux différences et aux q–différences [Abr89,Abr95]. Ces résultats ont fait l'objet d'un rapport de recherche [10] et ont été soumis au *Journal of Symbolic Computation*.

6.2 Architectures logicielles pour le calcul formel

Participants : Olivier Arsac, Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano, Claude Huchet, Yves Papegay [projet SAGA].

Mots clés : communication, protocole, OpenMath.

L'essentiel de cette activité a été centré cette année encore autour d'*OpenMath*, un format de représentation d'objets mathématiques, sa définition et la réalisation d'outils pour sa mise en oeuvre. Ce travail se déroule dans le cadre d'un projet européen Esprit (de la tâche 3.2, Multimedia Standards) intitulé *OpenMath: Accessing and Using Mathematical Information Electronically* (cf 8.2.2).

Cette année, nous avons participé à la révision du standard (modification de l'encodage XML, définition de niveaux de conformité OpenMath), mis à jour nos bibliothèques C et Java et réalisé une bibliothèque C++. Nous avons également développé un certain nombre de *Content Dictionaries* (recueil de définitions de symboles OpenMath) notamment pour les fonctions spéciales.

Un prototype de passerelle MathLink-OpenMath (permettant d'échanger des objets entre le système de calcul formel Mathematica et une application OpenMath) avait été réalisé l'année dernière. Avec l'aide d'Yves Papegay (du projet SAGA), ce programme a été grandement amélioré et mis à la disposition de la communauté OpenMath.

6.3 Base de formules

Participants : Claude Huchet, Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano.

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductive.

Nous avons poursuivi le développement de notre base de données déductive pour formules mathématiques dans deux directions : l'amélioration de la pertinence des réponses et une meilleure efficacité du processus de déduction.

En ce qui concerne le problème plus général de la recherche d'informations mathématiques dans un document XML ou une base de documents XML (pouvant contenir des objets mathématiques décrits en MathML ou OpenMath), nous avons étudié l'extension des mécanismes de notre prototype et les fonctionnalités supplémentaires qui devraient être ajoutées pour permettre des recherches suivant les critères nécessaires, étant donné la variété des formules que l'on peut trouver dans des articles de mathématiques ou de physique.

Ce travail s'est fait dans le cadre du projet européen OpenMath (cf. 8.2.2).

[Abr89] S. A. Abramov, « Rational Solutions of Linear Differential and Difference Equations with Polynomial Coefficients », *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics 29*, 1989, p. 1611–1620.

[Abr95] S. A. Abramov, « Rational solutions of linear difference and q–difference equations with polynomial coefficients. », *in : Proceedings of ISSAC'95*, A. Levelt (éditeur), ACM Press, p. 285–289, 1995.

6.4 Calcul formel avec paramètres

Participants : Eric Blond, Manuel Bronstein, Hanane Naciri.

Mots clés : paramètres, singularités.

Bien que n'apparaissant pas directement dans les objectifs du projet, ce thème d'activité à fait l'objet de plusieurs stages cette année, car la résolution d'équations à paramètres est l'étape naturelle qui suit la résolution d'équations non paramétrisées. Or, la plupart des équations à paramètres n'ont de solutions Liouvilliennes que pour certaines valeurs de ces paramètres, et la plupart des algorithmes existants sont incapables de calculer ces valeurs et les solutions correspondantes. Lorsqu'une expression contient des paramètres, l'approche traditionnelle en calcul formel consiste à les considérer comme des indéterminées algébriquement indépendantes, et donc à ne pas étudier les valeurs de ces paramètres pour lesquelles le résultat diffère du résultat générique. Le problème de la détermination des valeurs spéciales des paramètres a été le sujet des stages suivants :

– Hanane Naciri a étudié le problème de la manipulation et simplification de conditions de congruences attachées à des paramètres entiers. Ce travail, qui s'inscrit dans la lignée d'un ancien travail effectué par le projet SAFIR [Fau84], nous a permis de déterminer comment manipuler des conditions abstraites dans une bibliothèque générique.
– Eric Blond a étudié le problème de déterminer le rang d'une matrice en fonction des valeurs que peuvent prendre les paramètres présents dans cette matrice. Il a comparé l'élimination de Gauss dynamique à l'algorithme de Sit [Sit92] dans les cas univariés (un seul paramètre) et multivariés (plusieurs paramètres). Son étude a montré la nécessité de développer une bonne représentation des conditions algébriques multivariées. Ceci motive l'étude des systèmes triangulaires.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 NAG

Participant : Manuel Bronstein.

Ce contrat a pour but d'évaluer les versions préliminaires du compilateur Aldor de NAG Ltd. en vue d'une commercialisation ultérieure. Il nous permet d'obtenir, d'une part, les versions de développement du compilateur et des bibliothèques qui y sont jointes, et, d'autre part, des modifications nécessaires à notre travail.

[Fau84] C. Faure, « Objets conditionnels et objets inconnus », *Rapport de Recherche n° RR–2298*, INRIA, 1984, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-2298.html`.

[Sit92] W. Sit, « An Algorithm for Solving Parametric Linear Systems », *Journal of Symbolic Computation 13*, 4, April 1992, p. 353–394.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Accueils de chercheurs français

Anne Frédet (Ecole Polytechnique, Laboratoire GAGE), une semaine en avril 1999. Collaboration avec M. Bronstein sur la résolution d'équations différentielles à coefficients exponentiels.

Stéphane Dellière (Université de Limoges), novembre et décembre 1999. Collaboration avec E. Hubert sur les systèmes triangulaires.

8.2 Actions européennes

8.2.1 CATHODE-2

Participant : Manuel Bronstein.

Nous participons au groupe de travail européen CATHODE-2 (Computer Algebra Tools for Handling Ordinary Differential Equations, ESPRIT-WG 24.490, durée 3 ans) qui a débuté en mai 1997. Ce groupe, dont les autres partenaires sont le GMD (Bonn), l'ETH (Zurich) et les universités de Bruxelles, Grenoble, Groningen, Londres et Madrid, doit produire des modules de calcul formel pour manipuler et résoudre des systèmes et équations différentielles ordinaires. Le projet CAFÉ intervient dans les parties algorithmes et logiciels pour systèmes et équations linéaires.

8.2.2 OpenMath

Participants : Olivier Arsac, Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano, Claude Huchet.

Le projet européen Esprit 24.969 (Task 3.2, Multimedia Standards) intitulé *OpenMath: Accessing and Using Mathematical Information Electronically* a pour but la définition d'un standard pour la communication d'objets mathématiques et la réalisation d'un certain nombre d'applications utilisant ce standard. Parmi ces applications, il est prévu des outils de consultation de documentations techniques et de bases de données d'articles mathématiques, des versions des systèmes de calcul formel Axiom et GAP utilisant *OpenMath* et des logiciels pour l'enseignement à distance à travers le Web.

Les partenaires de l'INRIA dans ce projet sont NAG (fournisseur de logiciels pour le calcul scientifique, coordonnateur du projet, Grande-Bretagne), Springer-Verlag (éditeur scientifique, Allemagne) et RIACA (Research Institute for Applications of Computer Algebra, université technique d'Eindhoven, Pays-Bas). Les partenaires associés sont OVE Interactive (société spécialisée dans les services World Wide Web et Internet, France), Stilo Technology, Ltd. (spécialisée dans les outils de gestion de documents électroniques, Grande-Bretagne), Trinity College (Dublin, République d'Irlande) et les universités de Bath (Grande-Bretagne) et Saint Andrews (Ecosse).

CAFÉ intervient dans la définition d'OpenMath, dans la conception et l'écriture des bibliothèques (en C et Java) et dans l'activité sur les bases de données mathématiques. Le projet a commencé en septembre 1997, pour une durée de trois ans.

8.3 Réseaux et groupes de travail internationaux

8.3.1 Groupe de travail sur les mathématiques du W3C

Stéphane Dalmas est membre du nouveau groupe de travail sur les mathématiques du World Wide Web Consortium (W3C). Ce groupe est responsable de la définition de la version 2 de MathML, un standard pour inclure des objets mathématiques dans un document XML. Cette version devrait voir le jour en mars 2000.

8.3.2 Institut Liapunov

Nous participons au projet Liapunov *Méthodes directes de calcul formel pour les solutions rationnelles de systèmes d'équations linéaires fonctionnelles* (durée 2 ans) qui a débuté en juillet 1998. Ce projet, dont l'autre partenaire est le centre de calcul de l'académie des sciences russe, a pour but de développer et d'implémenter des algorithmes directs (sans découplage) pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires de type différentielle, différence ou q-différence.

8.4 Accueils de chercheurs étrangers

Europe (CEE) Tony Scott (Université de Paderborn, Allemagne), une semaine en novembre 1999, collaborateur M. Gaëtano. Protocoles de communication de données entre systèmes de calcul scientifique.

Europe (hors–CEE) Sergei Abramov (Université de Moscou), deux semaines en mai 1999, et Petr Glotov (Université de Moscou), une semaine en octobre 1999, collaborateur M. Bronstein. Dans le cadre du projet Liapunov (cf. 8.3.2), étude de la résolution d'équations et de systèmes aux différences finies.

Alexander Grigorov et Margarita Spiridonova (IMI Sofia, Bulgarie), une semaine en novembre 1999, collaborateur M. Gaëtano. Utilisation du calcul formel dans l'enseignement.

Thom Mulders (ETH Zurich, Suisse), une semaine en décembre 1999, collaborateur M. Bronstein. Algèbre linéaire formelle par relèvement de Hensel.

Michael Singer (NCSU Raleigh), une semaine en décembre 1999, collaborateurs R. Bomboy, M. Bronstein et E. Hubert. Algèbre différentielle et aux différences.

9 Diffusion de résultats

9.1 Enseignement universitaire

Dans le cadre de son service d'enseignement de moniteur, R. Bomboy a effectué 30 heures de TD de mathématiques en DEUG sciences, ainsi que 36 heures de TD de mathématiques sur ordinateurs (MAPLE et WIMS[5]).

9.2 Thèses et Stages

Thèses en cours dans le projet :

1. Raphaël Bomboy, « Invariants en théorie de Galois des équations aux différences », UNSA.
2. Stéphane Lavirotte, « Reconnaissance de formules planes appliquée aux systèmes de calcul formel », UNSA.

Stages effectués dans le projet :

1. Eric Blond, « Résolution de systèmes linéaires à paramètres »
2. Benoit Gonzalvo, « Un algorithme de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients dans $k(x,e^{\int \alpha(x)dx})$ »
3. Hanane Naciri, « Simplification des entiers symboliques conditionnels »

9.3 Participations à des jurys

M. Bronstein a participé aux jurys de thèse de Philippe Aubry (Informatique, Paris VI, 13 janvier 1999) et d'Alban Quadrat (Mathématiques Appliquées, ENPC, 27 septembre 1999), ainsi qu'en tant que rapporteur au jury d'habilitation de Michel Petitot (Informatique, Lille I, 1er février 1999). Il a aussi participé aux jurys locaux des UR de Rocquencourt et de Sophia Antipolis pour le concours CR2 de 1999.

9.4 Participation à des colloques, séminaires, invitations

M. Bronstein a présenté ses travaux sur l'intégration des équations différentielles dans diverses réunions nationales et internationales : aux séminaires de calcul formel de l'université de Kaiserslautern (Allemagne, 25–27 janvier 1999) et de l'ETH (Zurich, Suisse, 13–14 avril 1999), à la réunion du groupe de travail européen CATHODE-2 (CIRM, 3–7 mai 1999), à la conférence ISSAC'99 (Vancouver, Canada, 28–31 juillet 1999), et au séminaire Passe–Partout (UNSA, 10 novembre 1999). En outre, il a été conférencier invité aux journées annuelles du DMV[6] (Mayence, Allemagne, 9 septembre 1999).

R. Bomboy et M. Bronstein ont participé à l'atelier sur les groupes de Galois au CIRM du 22 au 26 février 1999.

M. Bronstein et E. Hubert ont participé à la réunion de prospective du programme 2B à Ventron du 23 au 25 novembre 1999.

S. Dalmas et M. Gaëtano ont participé aux réunions et conférences OpenMath des 4 et 5 février 1999 à Oxford, des 11 au 16 mai 1999 à Amsterdam et Eindhoven, ainsi qu'à l'évaluation de ce projet du 3 au 5 novembre 1999 à Bath.

5. `http://wims.unice.fr/`
6. Deutsche Mathematiker–Vereinigung

S. Dalmas a participé aux réunions du *Math Working Group* du consortium Web des 15 au 16 mars 1999 à Redmond et des 7 au 9 novembre 1999 à Oxford.

M. Gaëtano a présenté un cours lors de l'école thématique "Panorama du Calcul Formel" (Marrakech, Maroc, 10–14 mai 1999).

S. Lavirotte a présenté ses travaux de recherche sur la reconnaissance de formules mathématiques par numérisation à la conférence ICDAR'99 (Bangalore, Inde, 20–22 septembre 1999) [8].

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] M. Bronstein, M. Petkovšek, « An Introduction to Pseudo–Linear Algebra », *Theoretical Computer Science 157*, 1996, p. 3–33.

[2] M. Bronstein, W. Sit (éditeurs), *Differential Algebra and Differential Equations (Special Issue of the Journal of Symbolic Computation)*, Academic Press, London, 1999.

[3] M. Bronstein, *Symbolic Integration I – Transcendental Functions*, Springer, Heidelberg, 1997.

[4] E. Hubert, « Essential Components of an Algebraic Differential Equation », *Journal of Symbolic Computation 28*, 4-5, 1999, p. 657–680.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[5] J. Abbott, M. Bronstein, T. Mulders, « Fast deterministic computation of determinants of dense matrices », *in : Proceedings of ISSAC'99*, S. Dooley (éditeur), ACM Press, p. 197–204, 1999.

[6] O. Arsac, S. Dalmas, M. Gaëtano, « The Design of a Customizable Component to Display and Edit Formulas », *in : Proceedings of ISSAC'99*, ACM press, p. 283–290, 1999.

[7] M. Bronstein, A. Fredet, « Solving linear ordinary differential equations over $C(x, e^{\int f(x)dx})$ », *in : Proceedings of ISSAC'99*, S. Dooley (éditeur), ACM Press, p. 173–179, 1999.

[8] A. Kosmala, S. Lavirotte, L. Pottier, G. Rigoll, « On-Line Handwritten Formula Recognition using Hidden Markov Models and Context Dependent Graph Grammars », *in : Proceedings of the Fifth International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*, IEEE Computer Society Press, p. 107–110, Bangalore, Inde, septembre 1999.

Rapports de recherche et publications internes

[9] R. Bomboy, « Réductibilité des opérateurs aux différences finies : une approche Galois-théorique », *Rapport de Recherche n° RR–3735*, INRIA, Juillet 1999, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3735.html`.

[10] M. Bronstein, « On Solutions of Linear Ordinary Difference Equations in Their Coefficient Field », *Rapport de Recherche n° RR–3797*, INRIA, 1999, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3797.html`.