

Projet Caiman

Calcul scientifique, modélisation et analyse numérique

Sophia Antipolis

THÈME 4B



*R*apport
d'Activité

1999

Table des matières

1	Composition de l'équipe	3
2	Présentation et objectifs généraux	4
3	Fondements scientifiques	4
3.1	Couplages de modèles et de méthodes	4
3.2	Équations de conservation et Volumes finis	6
4	Domaines d'applications	7
4.1	Propagation d'ondes électromagnétiques	7
4.2	Mécanique des fluides et problèmes connexes	9
5	Logiciels	10
5.1	MAXWELL/VF	10
5.2	Simu_ESD	10
5.3	NS3IFS	10
6	Résultats nouveaux	11
6.1	Électromagnétisme	11
6.1.1	Méthodes de décomposition de domaines pour l'équation de Helmholtz	11
6.1.2	Électromagnétisme non linéaire en domaine temporel	11
6.1.3	Résolution rapide des équations intégrales pour l'électromagnétisme en domaine fréquentiel	12
6.1.4	Solutions du système de Maxwell en milieu hétérogène non régulier	12
6.1.5	Nouveau schéma en volumes finis pour l'électromagnétisme en domaine temporel	13
6.1.6	Schémas hybrides volumes finis - différences finies pour l'électromagnétisme en domaine temporel	13
6.1.7	Etat périodique pour les systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell	14
6.1.8	Décharges électrostatiques	14
6.1.9	Environnement plasmique des satellites	15
6.2	Mécanique des fluides et problèmes connexes	15
6.2.1	Interaction fluide compressible-structure	15
6.2.2	Interaction fluide incompressible-structure	16
6.2.3	Prototype de plateforme de couplage	16
6.2.4	Schémas d'ordre deux pour Navier-Stokes incompressible	17
6.2.5	Résolution par sous-domaines du problème de Stokes	17
6.2.6	Méthode mixte éléments finis/volumes finis appliquée à la combustion en milieu multiphasique	18
6.2.7	Méthodes de résolution des équations d'Euler pour des gaz non polytropiques	19
6.2.8	Logiciel de résolution exacte d'un problème de Riemann	19
6.2.9	Combustion dans un réacteur à dépôt chimique	20

6.3	Visualisation de données	20
6.4	Interfaçage de programmes	20
7	Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)	21
7.1	Conseil scientifique pour Alcatel Space Industries	21
7.2	Couplage de méthodes pour Aérospatiale - CCR	21
8	Actions régionales, nationales et internationales	22
8.1	Actions régionales	22
8.1.1	Combustion multiphasique	22
8.2	Actions nationales	22
8.2.1	Écoulements incompressibles en génie civil et génie biomédical	22
8.3	Actions européennes	23
8.3.1	Projet européen EFAISTOS	23
8.4	Actions internationales	23
8.4.1	Méthodes non conformes et décomposition de domaines	23
9	Diffusion de résultats	23
9.1	Animation de la Communauté scientifique	23
9.1.1	GdR Couplage fluide-structure, pollution, chimie	23
9.1.2	GdR Sparch	24
9.2	Enseignement	24
9.3	Thèses	24
9.4	Stages, post-doctorats, ingénieurs-experts	24
9.5	Participation à des colloques, séminaires, invitations	25
10	Bibliographie	25

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Serge Piperno [IPC]

Assistante de projet

Sabine Barrère [adjoint administratif]

Personnel INRIA

Loula Fezoui [DR]

Personnel ENPC

Armel de La Bourdonnaye [IPC, jusqu'au 1/8 (responsable scientifique)]

Nathalie Glinsky-Olivier [CR Équipement, temps partiel à 80%]

Robert Rivière [ITPE]

Collaborateurs extérieurs

Frédéric Poupaud [Professeur, UNSA]

Thierry Goudon [Maître de conférences, UNSA]

Ingénieurs experts

Pierre-Emmanuel Bournet [du 1/6 au 1/12]

Chercheurs post-doctorants

Roland Becker [post-doc INRIA jusqu'au 1/4]

Emmanuel Briand [post-doc INRIA à partir du 1/11]

François Sévérin [post-doc industriel INRIA-ASpI jusqu'au 1/10]

Chercheurs doctorants

Emmanuel Bongiovanni [boursier ENPC]

Mihai Bostan [vie professionnelle]

Olivier Chanrion [boursier ENPC]

Gilles Fourestey [boursier ENPC, service national à partir du 01/10]

Malika Remaki [boursière ENPC]

Guillaume Sylvand [IPC]

Stagiaire

Emmanuel Bongiovanni [stages de DEA et DESS, du 1/4 au 1/10]

2 Présentation et objectifs généraux

CAIMAN est un projet commun à l'INRIA et au CERMICS (laboratoire de recherche commun à l'INRIA et à l'École Nationale des Ponts et Chaussées). Dans un très proche avenir, le projet devrait être commun avec le Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (unité mixte de recherche du CNRS et de l'université de Nice-Sophia Antipolis).

Les thèmes scientifiques abordés par CAIMAN s'étendent de la modélisation de phénomènes physiques à leur simulation sur ordinateur. Pour cela, on s'intéresse à la mise au point et à l'analyse de méthodes numériques, ainsi qu'à leur validation sur des configurations réalistes et leur implémentation des algorithmes notamment sur des machines parallèles.

Les domaines d'application du projet sont principalement l'électromagnétisme et la mécanique des fluides. Nos activités en électromagnétisme concernent les phénomènes de décharges électriques dans le vide, la diffraction d'ondes acoustiques à hautes fréquences, la propagation d'ondes en domaine temporel ainsi que le transport de particules chargées dans un champ électromagnétique. En mécanique des fluides, les champs d'application sont, d'une part, les interactions fluide-structure notamment pour l'aéronautique, la stabilité aérodynamique des grandes structures de génie civil et les écoulements biomédicaux et, d'autre part, les écoulements de gaz réels, multiphasiques pour les feux de forêt ou réactifs pour l'épithaxie.

3 Fondements scientifiques

3.1 Couplages de modèles et de méthodes

Mots clés : couplage, modélisation, électromagnétisme, mécanique des fluides, interaction fluide-structure, analyse numérique, élément fini, volume fini, maillage non structuré.

Participants : Serge Piperno, Loula Fezoui, Robert Rivière, Frédéric Poupaud, Roland Becker, Emmanuel Briand, François Sévérin, Olivier Chanrion, Malika Remaki.

Glossaire :

couplage interaction entre plusieurs sous-systèmes, dont les évolutions simultanées s'influencent mutuellement. Par exemple, un couplage physique peut intervenir entre plusieurs sous-systèmes d'un modèle. De même, un couplage numérique de différentes méthodes peut s'avérer nécessaire pour la simulation numérique d'un problème couplé.

algorithme de couplage algorithme particulier, construit pour la simulation numérique d'un problème couplé, permettant la réutilisation modulaire de méthodes numériques pré-existantes relatives à chaque sous-système. Sans construction particulière, un algorithme de couplage n'hérite pas des propriétés numériques des méthodes sur lesquelles il repose.

Résumé : *L'ensemble des modèles abordés par le projet regroupe des modèles très classiques en électromagnétisme et en mécanique des fluides, qui sont cependant souvent sous une forme particulière (hétérogène, multiespèce, multiphasique, etc...) et qui apparaissent dans des problèmes couplés (Vlasov-Maxwell, interactions fluide-structure, etc...). On s'intéresse aussi bien à la mise au point de méthodes*

numériques adaptées à chaque sous-problème, efficaces et extensibles à des cas réalistes, qu'à leur couplage proprement dit.

Les thèmes de recherche du projet sont très variés; ils vont de la propagation d'ondes électromagnétiques à des couplages complexes tels que l'interaction champ-matière ou fluide-structure. Le dénominateur commun à ces différents thèmes est la conception de méthodes numériques fiables et précises pour la simulation sur ordinateur.

Les modèles mathématiques sous-jacents se ramènent néanmoins à quelques équations très classiques comme le système de Maxwell pour la propagation d'ondes électromagnétiques et les équations de Navier-Stokes pour la simulation d'écoulements de fluides. Cependant, la complexité des phénomènes étudiés peut modifier le modèle mathématique connu sous sa forme la plus classique. Ainsi, le système de Maxwell sera à coefficients constants ou variables selon le milieu de propagation considéré (homogène ou non [21]), les équations de Navier-Stokes prendront une forme différente selon le type d'écoulement (compressible ou non), la nature du fluide (à une ou plusieurs espèces) ou encore la présence de plusieurs phases dans le milieu [26], pour ne parler ici que des phénomènes abordés dans le projet. Les problèmes de couplage font intervenir d'autres équations, telles que celle de Vlasov dans l'étude du mouvement de charges dans un champ électromagnétique [12] ou une équation d'élasticité dans les interactions fluide-structure. Ces domaines sont assez ouverts aussi bien sur le plan numérique que théorique.

Parallèlement à la construction de méthodes numériques pour la simulation des phénomènes de couplage, le projet investit dans la recherche de résultats plus théoriques tels que la convergence vers l'état périodique du problème continu pour Vlasov/Maxwell [10] ou l'analyse de stabilité du couplage pour l'interaction fluide-structure [19]. Ces travaux jouent un rôle important dans la compréhension des problèmes divers qui surgissent lors de la simulation numérique d'un phénomène de couplage. Par exemple, l'utilisation de méthodes dont la stabilité et la précision sont prouvées pour chacun des sous-modèles ne garantit nullement la stabilité ou la précision de l'ensemble [8].

Un principe commun à l'ensemble des applications envisagées dans le projet sert de guide dans la recherche et la construction des méthodes numériques qui seront retenues. Celles-ci doivent permettre les extensions futures nécessitées par des applications réalistes issues du milieu industriel. Ces extensions incluent l'aspect tridimensionnel, la prise en compte de géométries complexes, le calcul en temps long et l'ouverture vers d'autres applications (possibilités d'extension vers d'autres couplages). Pour donner un exemple, une méthode élégante, fiable et précise, développée pour un modèle scalaire à une variable d'espace pourra s'avérer très coûteuse voire inapplicable pour le même modèle mathématique considéré sous la forme d'un système à plusieurs variables, dans une géométrie plus complexe qu'un cube ou un cylindre. Cependant, de tels modèles simplifiés (quand on en dispose) sont précieux pour l'analyse détaillée d'une méthode avant le développement d'un code de calcul tridimensionnel.

La volonté affichée de construire des méthodes numériques extensibles explique l'intérêt que nous portons aux méthodes de type éléments finis et/ou volumes finis en maillages quelconques [4]. Ces méthodes sont en général plus difficiles à mettre en œuvre sur machine et à analyser [20] (stabilité et convergence) dans les contextes réalistes d'utilisation (systèmes d'équations à plusieurs variables). On pallie ce manque de résultats théoriques par des comparaisons numériques réalisées en interne ou en collaboration et par la participation à des ateliers de travail

nationaux ou internationaux.

3.2 Équations de conservation et Volumes finis

Mots clés : volume fini, maillage non structuré, électromagnétisme, mécanique des fluides, problème de Riemann, monotonie, formulation ALE, maillage mobile.

Participants : Serge Piperno, Loula Fezoui, Armel de La Bourdonnaye, Nathalie Glinsky-Olivier, Emmanuel Bongiovanni, Malika Remaki.

Glossaire :

volumes finis famille de méthodes numériques reposant sur une partition du domaine en volumes de contrôle, pour lesquels seule une valeur moyenne des inconnues est calculée. Pour des lois de conservation, les échanges entre volumes de contrôle se font par l'intermédiaire de flux, de manière automatiquement conservative.

lois de conservation une loi de conservation est une équation aux dérivées partielles d'une grandeur scalaire, ne faisant intervenir que des dérivées du premier ordre, en temps ou en espace, de fonctions de la grandeur considérée (par exemple, $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$). Pour une inconnue vectorielle, on parle de système de lois de conservation.

solveur de Riemann un solveur de Riemann est une fonction, donnant une valeur exacte ou approchée de la solution d'un problème de Riemann à l'origine. Un problème de Riemann est un problème de Cauchy particulier dont la donnée initiale est constituée de deux états constants, de part et d'autre de l'origine. Les deux états constants sont les arguments du solveur de Riemann.

Résumé : *Les méthodes de volumes finis sont utilisées depuis longtemps pour la simulation numérique en mécanique des fluides. Elles permettent d'approcher des solutions presque nécessairement discontinues, tout en conservant de bonnes propriétés (conservativité, précision, monotonie, etc...) Ces méthodes ont retrouvé une seconde jeunesse avec leur application à l'électromagnétisme, notamment pour les cas hétérogènes, et les applications de la mécanique des fluides où les domaines sont déformables (interactions fluide-structure, écoulements moteur, etc...)*

L'éventail des problèmes considérés dans le projet semble large, mais, pour une grande partie, les équations modèles sont très proches de la mécanique des fluides compressibles : on s'intéresse à des équations et systèmes hyperboliques (linéaires ou non) caractérisés par la propagation d'ondes (électromagnétiques, chocs, etc...) [11, 14, 16, 23]. La communauté scientifique s'est d'abord intéressée aux systèmes hyperboliques non linéaires de la mécanique des fluides [Sod78]. Pour ceux-ci, il n'existe pas dans le cas général de solution régulière, même pour une donnée initiale régulière. Des discontinuités apparaissent et les solutions que l'on cherche à approcher numériquement sortent rapidement des bons espaces attachés aux approximations en éléments finis.

[Sod78] G. A. SOD, « A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws », *Journal of Computational Physics* 27, 1978, p. 1–31.

La méthode des volumes finis a été alors proposée. Le principe en est simple : on considère comme espace d'approximation les fonctions constantes par morceaux, ces morceaux ou cellules ou volumes finis étant choisis par l'utilisateur, et issus par exemple d'un maillage de type éléments finis – notamment non structuré, ce qui permet de prendre en compte des géométries complexes. Cette vision des volumes finis est néanmoins réductrice, et fortement influencée par l'approche éléments finis (les volumes finis peuvent être vus comme des éléments finis de type P0).

Cependant, les méthodes en volumes finis prennent un autre sens quand on s'intéresse à une loi ou à un système de lois de conservation. Les valeurs numériques dans chaque cellule peuvent être vues comme des approximations de valeurs moyennes sur la cellule, dont les variations ne dépendent que de flux aux bords de la cellule. Ainsi, il suffit de construire des fonctions de flux numériques, donnant de bonnes approximations de ce qui passe d'une cellule à ses voisines. Automatiquement, la méthode produite est conservative (ce qui sort d'une cellule rentre exactement dans sa voisine). Les flux de bords sont alors construits à l'image de la méthode de Godunov, par un solveur de Riemann exact ou approché (fondé sur des méthodes de décentrage sélectionnant les ondes en fonction de leur provenance) [5]. Dans la mesure du possible, la méthode ainsi construite possède des propriétés de monotonie (principe du maximum, schémas TVD et LED), de consistance, de stabilité, etc... La précision est classiquement élevée grâce à l'adjonction d'une interpolation (par exemple de type MUSCL) et de limiteurs de pente [7].

Ces méthodes peuvent être appliquées dans la grande majorité des domaines d'application abordés par le projet, des écoulements multispèces ou multiphasiques à l'électromagnétisme en général. Dans ce domaine particulier (où le système hyperbolique est linéaire), nous sommes particulièrement intéressés par des configurations hétérogènes où les caractéristiques des matériaux peuvent être fortement discontinues [11, 21]. Nous continuons à développer des méthodes numériques adaptées, et nous avons également construit un nouveau schéma de type volumes finis [23], ayant des propriétés et un coût comparable à ceux de l'universel schéma de Yee, schéma aux différences finies limité aux géométries simplistes.

Enfin, il est important de rappeler ici que les méthodes de volumes finis s'adaptent très simplement pour la simulation numérique de lois de conservation en formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE), en maillages dynamiques à topologie constante, passage presque nécessaire pour la plupart des interactions fluide-structure (où le domaine fluide, complémentaire de la structure, varie avec le temps). De nombreux travaux portent sur l'extension des propriétés habituelles des méthodes de volumes finis (en commençant par celles découlant de la conservation des volumes [6]). Nous sommes également intéressés par des méthodes en maillages mobiles à topologie variable (retraits et ajouts de points).

4 Domaines d'applications

4.1 Propagation d'ondes électromagnétiques

Mots clés : environnement des satellites, compatibilité électromagnétique, furtivité radar, acoustique.

Résumé : *Nous nous intéressons à la propagation d'ondes en domaine temporel, aux problèmes de diffraction en domaine fréquentiel, et enfin aux plasmas et au transport de particules chargées dans un champ électromagnétique. Les applications visées concernent les satellites, les antennes, la furtivité (électromagnétique et acoustique), la compatibilité électromagnétique.*

Les méthodes numériques que nous développons pour la simulation numérique de phénomènes électromagnétiques en domaine temporel (sans supposer d'oscillations harmoniques à fréquence donnée) et en domaine fréquentiel nous permettent d'attaquer des environnements physiques très différents et donc des domaines d'applications riches: calcul, caractérisation et optimisation d'antennes, compatibilité électromagnétique, furtivité radar, modélisation de matériaux absorbants entre autres.

Pour ce qui est des simulations en domaine temporel, notre but est de construire des méthodes précises et efficaces en vue de simulations numériques complexes: géométries quelconques, milieu hétérogène, sources de courant filaires ou surfaciques, etc... Pour atteindre ce but, nous commençons par adapter des méthodes existantes (volumes finis centrés aux sommets du maillage ou confondus avec les éléments, éléments finis discontinus [29], milieu PML ^[BP97]) au cas du système de Maxwell, en prenant désormais en compte un milieu éventuellement fortement hétérogène [21, 30]. Ensuite, ces méthodes sont comparées avec d'autres méthodes plus utilisées (schéma en différences finies de Yee par exemple [9]) en termes de précision, stabilité et efficacité. Enfin, nous cherchons à construire des méthodes hybrides combinant les avantages des différentes méthodes, en utilisant les méthodes adéquates dans les parties du domaine de calcul où elles s'avèrent les mieux adaptées [11].

En domaine fréquentiel, la méthode des éléments finis de frontière, fondée sur une formulation intégrale, permet de traiter des problèmes de grande taille de manière efficace (problèmes multiseconde membres), à condition de pouvoir résoudre des systèmes linéaires de plusieurs millions d'inconnues. Sur ce point, le projet développe des approches prometteuses, comme la discrétisation microlocale [2] (en approximation haute fréquence) ou la méthode multipôle ^[HB83], cette dernière étant facilement adaptable à l'acoustique (équation de Helmholtz), pour laquelle nous nous intéressons également à la formulation mathématique de méthodes de sous-domaines (décomposition de domaine) efficaces. Une application possible est la furtivité acoustique d'un sous-marin par exemple.

Nous nous intéressons enfin aux plasmas et au transport de particules chargées en général, dont une application directe est l'étude de l'environnement électromagnétique et plasmique spatial des satellites. Ceux-ci sont soumis à des ondes, présentent de fortes différences de potentiels (causes d'ionisation et de décharges) et baignent dans un nuage de particules, chargées ou non, qui se rapproche du plasma en certains points et du fluide continu en d'autres (notamment à la sortie des propulseurs chimiques ou plasmiques). Même si la physique des satellites est plutôt électrostatique (système de Vlasov-Poisson), les techniques mises en œuvre dans d'autres domaines électromagnétiques, notamment à propos du transport de particules char-

[BP97] F. BONNET, F. POUPAUD, « Bérenger absorbing boundary condition with time finite volume scheme for triangular meshes », *Applied Numerical Mathematics* 25, 4, 1997, p. 333-354.

[HB83] C. HAFNER, R. BALLISTI, « The multiple multipole method (MMP) », *COMPEL- The International Journal for Computation and Mathematics in Electric and Electronic Engineering* 2, 1983, p. 1-7.

gées (couplage d'une méthode de volumes finis et d'une méthode particulière déterministe pour le système de Vlasov-Maxwell), peuvent être utilisées.

4.2 Mécanique des fluides et problèmes connexes

Mots clés : algorithme de couplage, interaction fluide-structure, milieu multiphasique, combustion, gaz réel, volume fini, élément fini, maillage non structuré, ordre élevé, maillage dynamique, feu de forêt, génie civil, écoulement sanguin.

Résumé : *Nous nous intéressons à plusieurs problèmes physiques, pour lesquels la mécanique des fluides classique est couplée à d'autres phénomènes, notamment les interactions entre un fluide (compressible ou non) et une structure, et les écoulements réalistes multiphasiques et/ou réactifs. Les applications visées concernent l'aéronautique, le génie civil (stabilité aéroélastique des structures) et les écoulements sanguins d'une part, les feux de forêt et l'épitaxie, d'autre part.*

Nous nous intéressons à plusieurs problèmes physiques, pour lesquels la mécanique des fluides classique est couplée à d'autres phénomènes. C'est par exemple le cas des interactions fluide-structure, de la combustion en milieu multiphasique et des écoulements de gaz réels à loi d'état complexe.

Le domaine d'application des interactions fluide-structure est multiple. On peut distinguer les applications où le fluide est supposé compressible (écoulement gazeux où le nombre de Mach est supérieur à 0.3) des applications où le fluide est incompressible (écoulements liquides ou gazeux avec faible nombre de Mach). Le principal domaine d'application des cas compressibles est l'aéronautique. Les instabilités aéroélastiques jouent un rôle de plus en plus prépondérant dans la limitation des domaines de vol des avions en général (civils et militaires), pour lesquels on recherche à la fois une manœuvrabilité et une efficacité optimales. Nous travaillons dans ce cadre avec l'équipe du Pr. Charbel Farhat à l'université du Colorado à Boulder, plus particulièrement sur les algorithmes de couplage [8]. Les domaines d'applications des cas incompressibles sont divers. Nous commençons à construire des problèmes modèles d'écoulements sanguins, et, en collaboration notamment avec M3N, nous espérons simuler le comportement de vaisseaux collabables (susceptibles de s'écraser en forme de huit) et d'anévrismes. D'autre part, nous nous intéressons à la simulation de l'effet du vent sur de grandes constructions du génie civil [17]. Dans ce cadre, nous sommes partenaires d'un thème de recherche du LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées), qui concerne entre autres le CSTB (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment) et le SETRA (Service d'études Techniques des Routes et Autoroutes).

Nous nous intéressons également à des écoulements réalistes en mécanique des fluides multiphasiques et/ou réactifs. L'étude de la combustion en milieu multiphasique s'applique à la propagation des incendies de forêt. On étudie les phénomènes de combustion dans un milieu composé de plusieurs phases ayant des propriétés différentes : ces phases modélisent les différentes espèces (épinés, feuilles, brindilles,...) qui constituent la litière d'une forêt [26]. On cherche à identifier clairement les différentes étapes de la propagation du feu, depuis le séchage jusqu'à la combustion des résidus carbonneux, et étudier la propagation du front de flamme. D'autre part, la simulation numérique d'un réacteur de dépôt chimique est une activité en plein

essor dans le projet. Cette technique, l'épitaixie [3], d'une importance industrielle considérable, consiste à injecter des précurseurs dans un réacteur chauffé contenant un substrat sur lequel se dépose une fine couche cristalline. La géométrie complexe du réacteur implique l'utilisation de maillages non structurés. La modélisation du réacteur doit prendre en compte les phénomènes de transfert thermique au sein du réacteur, l'écoulement tridimensionnel de type convection mixte et la cinétique chimique. Enfin, de nombreux problèmes, dont le problème de l'épitaixie cité plus haut, concernent des écoulements à haute température pour lesquels le gaz ne peut être considéré comme polytropique, c'est-à-dire que la relation entre l'énergie interne et la température n'est plus linéaire, mais donnée par une loi polynômiale ou parfois même seulement par des tables. On étudie alors une méthode de relaxation d'énergie [CP98], pour laquelle un solveur classique peut être utilisé et adapté simplement.

5 Logiciels

5.1 MAXWELL/VF

Mots clés : électromagnétisme, équations de Maxwell, domaine temporel, volume fini, milieu hétérogène, calcul parallèle.

Participant : Loula Fezoui [Correspondant].

Le logiciel MAXWELL/VF est un code développé par le projet et SIMULOG qui permet la simulation de la propagation d'ondes électromagnétiques instationnaires par une méthode de volumes finis centrés aux nœuds. Il s'insère dans une chaîne logicielle allant du mailleur à la visualisation en passant par la décomposition de maillages pour des traitements en mode parallèle. Des simulations de calcul en grande taille sont possibles sur des réseaux de stations ou de PC.

5.2 Simu_ESD

Mots clés : équation de Poisson, équation de dérive-diffusion, équations d'Euler, ionisation, décharge sous vide, désorption, plasma.

Participant : François Sévérin [Correspondant].

Le logiciel Simu_ESD simule la propagation d'une décharge électrostatique de type diélectrique. Il est basé sur une méthode de type fluide. La décharge est produite par un couplage entre trois types de particules (électrons, ions, molécules neutres). Ce couplage se fait via les phénomènes de désorption, d'ionisation, de recombinaison ainsi que par l'équation de Poisson.

5.3 NS3IFS

Mots clés : interaction fluide-structure, fluide visqueux incompressible, maillage mobile, élément fini, coque, MODULEF, génie civil, écoulement sanguin.

[CP98] F. COQUEL, B. PERTHAME, « Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics », *SIAM Journal of Numerical Analysis* 35, 1998, p. 2223–2249.

Participants : Serge Piperno [Correspondant], Roland Becker, Pierre-Emmanuel Bournet.

Le logiciel NS3IFS permet la simulation d'un écoulement incompressible visqueux (équations de Navier-Stokes incompressible) instationnaire en maillage mobile, ainsi que la simulation couplée de la dynamique d'une structure simple. Allié au COUPLEUR développé par Roland Becker pendant son post-doctorat dans le cadre de l'ARC "Simulations numériques d'interactions fluide-structure en génie civil et ingénierie biomédicale" (conclue fin janvier 1999), ce programme permet maintenant de simuler des écoulements autour de structures modélisées par des coques (comme des vaisseaux sanguins par exemple), grâce à la librairie MODULEF, maintenant disponible librement. Pour l'instant, ces programmes (NS3IFS et COUPLEUR) sont en accès restreints aux membres de l'ARC et du Thème de Recherche LCPC en cours.

6 Résultats nouveaux

6.1 Électromagnétisme

6.1.1 Méthodes de décomposition de domaines pour l'équation de Helmholtz

Mots clés : méthode de décomposition de domaine, problème de Helmholtz, domaine fictif, condition absorbante.

Participants : Armel de La Bourdonnaye, Charbel Farhat (Université du Colorado, Boulder (US)), Ulrich Hetmanyuk (Université du Colorado, Boulder (US)), Serge Piperno.

Dans la continuité de l'étude d'une méthode de décomposition de domaines [15, 24] pour l'équation de Helmholtz (avec l'ONERA et l'Université du Colorado), nous démarrons maintenant une étude sur la possibilité d'utiliser des sous-domaines fictifs (conditions de raccord, exploitation de la structure approximativement axisymétrique), notamment pour simuler la vibro-acoustique d'un sous-marin, et à long terme aborder des problèmes inverses.

6.1.2 Électromagnétisme non linéaire en domaine temporel

Mots clés : système de Maxwell, effet Kerr, autofocalisation, filamentation, méthode de Godunov, problème de Riemann, volume fini, solveur de Roe.

Participant : Armel de La Bourdonnaye.

Nous avons poursuivi notre étude du système de Maxwell-Kerr, désormais avec une polarisation non linéaire, en une et en deux dimensions d'espace. Ce modèle est un nouveau pas vers la compréhension du comportement des champs forts dans des milieux isotropes. Il permet en particulier de prédire les phénomènes de rotation de la polarisation et de comprendre l'autofocalisation (celle-ci n'étant effective qu'en deux et trois dimensions d'espace).

Nous avons montré l'existence et l'unicité du problème de Riemann pour de grandes données et développé un schéma décentré en volumes finis s'appuyant sur un solveur de Roe. Celui-ci donne des résultats de simulation très encourageants en une et deux dimensions d'espace [34].

6.1.3 Résolution rapide des équations intégrales pour l'électromagnétisme en domaine fréquentiel

Mots clés : système de Maxwell, domaine fréquentiel, élément fini, équation intégrale, méthode multipôle, calcul parallèle.

Participants : Guillaume Sylvand, Armel de La Bourdonnaye.

Toujours dans le but de contribuer à la simulation numérique des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques, et un peu dans la même veine que la méthode de discrétisation microlocale, nous nous intéressons à la résolution itérative rapide des systèmes (complexes, non hermitiens) linéaires issus de la formulation intégrale du système de Maxwell en domaine fréquentiel, après discrétisation en éléments finis de surface.

Les systèmes obtenus sont pleins, et le problème est souvent multiseconde. D'autre part, l'objet doit être discrétisé assez finement (ici dix points par longueur d'onde) et les systèmes linéaires deviennent très gros dès que la taille de l'objet augmente (par exemple, on atteint un système linéaire de taille un million pour une sphère de diamètre égal à trente longueurs d'onde). La méthode multipôle permet d'accélérer notablement les produits matrice-vecteur (on assemble une matrice d'interactions proches, tandis que les interactions lointaines sont traitées globalement) et de rendre une résolution itérative bien plus rapide. Nous avons implémenté cette méthode dans un code industriel, dans une configuration assez simple (matériau parfaitement conducteur) et vérifié la scalabilité du code en fonctionnement parallèle.

Par la suite, nous pourrions considérer, toujours en électromagnétisme, des matériaux non parfaitement conducteurs et des éléments filaires. Nous nous pencherons également sur le solveur itératif et sur le conditionnement des systèmes. Enfin, la méthode multipôle est également adaptable à l'acoustique.

6.1.4 Solutions du système de Maxwell en milieu hétérogène non régulier

Mots clés : système de Maxwell, domaine temporel, matériau fortement hétérogène, matériau anisotrope, existence et unicité, théorème de Hille-Yosida.

Participants : Malika Remaki, Frédéric Poupaud.

Nous nous intéressons aux solutions du système de Maxwell pour des milieux anisotropes fortement hétérogènes, pour lesquels la permittivité et la perméabilité sont des matrices (symétriques définies positives) dépendant non nécessairement continûment de la variable d'espace. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour le système de Maxwell, pour une donnée initiale relativement régulière (essentiellement L^2 et H_{rot}) et des conditions aux limites mixtes (condition métallique et condition absorbante de type Silver-Müller). La démonstration [21] s'appuie sur le théorème de Hille-Yosida, et l'unique solution obtenue est L^2 en espace et C^1 en temps.

6.1.5 Nouveau schéma en volumes finis pour l'électromagnétisme en domaine temporel

Mots clés : système de Maxwell, domaine temporel, maillage non structuré, volume fini, schéma centré élément, stabilité, schéma de Yee.

Participants : Malika Remaki, Serge Piperno, Loula Fezoui.

Pour le système de Maxwell en domaine temporel, nous avons proposé un nouveau schéma en volumes finis centrés sur les éléments (de forme quelconque) d'un maillage structuré ou non structuré [36]. Ce schéma est particulièrement simple, puisqu'il est fondé sur des flux numériques totalement centrés entre cellules et sur un schéma en temps explicite et de type saute-mouton.

Les propriétés de ce nouveau schéma sont extrêmement prometteuses [23]. Ce schéma est d'ordre deux en espace (lorsque le maillage est régulier) et en temps, il ne diffuse pas, et une énergie discrète est conservée exactement sous une condition de stabilité de type CFL. On sait d'ailleurs montrer, comme pour le schéma en volumes finis décentré d'ordre un [20], que ce nouveau schéma est stable et qu'une énergie discrète est conservée pour n'importe quelle partition en volumes finis, en deux et trois dimensions d'espace. Enfin, ce schéma produit une dispersion comparable à celle du schéma de Yee (schéma aux différences finies, limité aux maillages cartésiens) [9]. Enfin, ce schéma est très peu coûteux (coût moindre que le schéma de Yee dans un maillage régulier en quadrangles) et permet d'attaquer des géométries complexes de manière naturelle, contrairement au schéma de Yee.

6.1.6 Schémas hybrides volumes finis - différences finies pour l'électromagnétisme en domaine temporel

Mots clés : système de Maxwell, domaine temporel, maillage non structuré, maillage hybride, volume fini, différence finie, schéma de Yee, schéma hybride, stabilité couplée.

Participants : Malika Remaki, Loula Fezoui, Serge Piperno, Frédéric Poupaud.

Pour le système de Maxwell en domaine temporel, nous avons cherché à coupler une méthode de volumes finis [36] capable de fonctionner sur un maillage non structuré et le schéma de Yee [9], schéma aux différences finies, très efficace et très utilisé, pouvant être utilisé sur une grille cartésienne, en deux et trois dimensions d'espace. Notre but est de pouvoir simuler numériquement la propagation d'ondes électromagnétiques autour d'objets de géométrie complexe, en utilisant un maillage non structuré près de l'objet et une grille cartésienne dès que possible.

A priori, on pourrait envisager ici une double hybridation : une hybridation de discrétisations (maillage non structuré et grille cartésienne) et une hybridation de méthodes (volumes finis et différences finies). Les schémas en volumes finis étant adaptables à toute forme d'éléments, nous nous sommes limités dans nos recherches à l'hybridation de méthodes (l'hybridation de discrétisations pouvant être faite à l'intérieur de la partie du domaine où l'on utilise les volumes finis).

Nous avons donc considéré une discrétisation cartésienne en une, deux et trois dimensions

d'espace, et cherché à appliquer le schéma de Yee et un schéma en volumes finis dans deux parties du domaine séparées par une interface, sur laquelle des conditions de raccord doivent être imposées. Nous avons réussi à coupler, de façon consistante à l'interface, le schéma de Yee avec le nouveau schéma en volume fini [36] (et seulement celui-là!), de telle sorte que le schéma global obtenu soit stable en norme L^2 [11] (en fait, une énergie discrète est à nouveau exactement conservée sous une hypothèse de type CFL, ce qui montre que la méthode couplée dans son ensemble est non diffusive). Des tests numériques en deux dimensions d'espace ont été menés et une phase d'implémentation doit précéder des tests en trois dimensions d'espace.

6.1.7 Etat périodique pour les systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell

Mots clés : Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell, régime permanent.

Participants : Mihai Bostan, Frédéric Poupaud.

Les régimes permanents dans les dispositifs modélisés par les systèmes de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Maxwell sont caractérisés par des solutions stationnaires ou périodiques. Ces dernières sont difficilement obtenues par des méthodes classiques. Nous avons construit une méthode basée sur une perturbation du champ électromagnétique via un paramètre de contrôle dépendant du temps [12]. Cette perturbation a pour but de raccourcir considérablement le régime transitoire sans modifier la solution recherchée (le paramètre tend rapidement vers zéro). La démonstration de l'existence et de la convergence vers la solution périodique a été étendue du cas scalaire au cas vectoriel (toujours pour un modèle linéaire avec terme source périodique).

6.1.8 Décharges électrostatiques

Mots clés : équation de Poisson, équation de dérive-diffusion, équations d'Euler, ionisation, décharge sous vide, désorption, plasma.

Participants : François Sévérin, Armel de La Bourdonnaye, Sylvie Brosse (Alcatel Space Industries).

Nous avons poursuivi l'étude des phénomènes de formation et de propagation d'un plasma entre deux cellules solaires d'un panneau d'un satellite ^[Sév98] (l'existence de ce plasma étant à l'origine d'une décharge électrostatique pouvant endommager considérablement le panneau). Plus précisément, nous avons continué à développer et à utiliser le code Simu_ESD (cf. 5.2) qui simule la propagation d'une décharge électrostatique de type diélectrique. Celui-ci est basé sur une méthode de type fluide. La décharge est produite par un couplage entre trois sortes de particules (électrons, ions, molécules neutres). Ce couplage se fait via les phénomènes de désorption (ou la présence d'un spot de molécules neutres), d'ionisation, de recombinaison, d'émissions froide et secondaire ainsi que par les forces électrostatiques.

Nous avons réussi à connecter deux cellules adjacentes (présence d'un plasma suffisamment dense). Cependant, le plasma obtenu ne semble pas suffisamment dense pour pouvoir provoquer

[Sév98] F. SÉVÉRIN, *Étude théorique et simulation numérique d'une décharge électrique dans le vide*, Thèse en mathématiques appliquées, École Nationale des Ponts et Chaussées, octobre 1998.

une décharge électrostatique [37]. Des études ultérieures devraient être menées, toujours en partenariat avec Alcatel, à propos des conditions initiales du plasma considéré, et incluant probablement les équations d'Euler pour les particules neutres et les particules chargées.

6.1.9 Environnement plasmique des satellites

Mots clés : plasma, propulseur plasmique, magnétosphère, ionisation, équations de Vlasov-Poisson, équations d'Euler isotherme, couplage de modèles.

Participants : Olivier Chanrion, Loula Fezoui, Frédéric Poupaud, Thierry Goudon, Sylvie Brosse (Alcatel Space Industries), Thierry Dargent (Alcatel Space Industries).

Les satellites en vol, baignent dans un mélange de particules chargées, avec éventuellement des neutres (particules neutres). Des électrons et des ions issus de ce plasma interagissent avec les surfaces du satellite et vont ainsi modifier sa charge électrostatique. Nous nous sommes intéressés particulièrement à ces phénomènes de charge en considérant des plasmas provenant de la magnétosphère et d'un propulseur électrique. Le but est de simuler l'influence de ce type de propulsion sur la charge électrostatique d'un satellite en vol.

Dans un premier temps, nous avons étudié les mécanismes de charge de surfaces (émission secondaire, photoémissivité, etc...) sur des diélectriques ou des conducteurs parfaits.

Pour décrire le plasma magnétosphérique, nous avons considéré des plasmas peu denses, entièrement ionisés (protons et électrons) en équilibre thermodynamique. Deux types de modèles ont été étudiés : le modèle Vlasov-Poisson stationnaire et un modèle fluide (système d'Euler isotherme), dans des configurations unidimensionnelles ou sphériques.

Pour décrire le plasma issu du propulseur électrique, nous avons considéré un plasma partiellement ionisé (ions Xe^+ , Xe^{++} et électrons). Le modèle Vlasov-Poisson instationnaire pour décrire à la fois les ions et les électrons dans une configuration axisymétrique a été écarté en raison d'un coût de calcul rédhibitoire.

Les prochaines étapes consisteront à étudier des modèles plus réalistes pour le plasma issu du propulseur électrique (modèle quasi-neutre), de passer en dimension supérieure pour traiter le plasma magnétosphérique, puis d'étudier le couplage des modèles.

6.2 Mécanique des fluides et problèmes connexes

6.2.1 Interaction fluide compressible-structure

Mots clés : algorithme de couplage, interaction fluide-structure, fluide compressible, maillage dynamique, volume fini, schéma d'ordre élevé.

Participants : Serge Piperno, Charbel Farhat (Université du Colorado, Boulder (US)).

La mise au point d'algorithmes de couplage pour la simulation numérique de phénomènes d'interaction entre un fluide compressible et une structure dans un cadre ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) tridimensionnel a été poursuivie [27]. En collaboration avec C. Farhat, nous avons cherché à appliquer la méthode d'évaluation quantitative de schémas de couplage de type décalé, fondée sur l'évaluation quantitative en temps long de l'énergie artificiellement

créée à l'interface fluide-structure [19]. Pour des algorithmes simples, cette méthode d'évaluation donne des résultats très précis et concordants pour ces modèles similaires, traités en deux ou trois dimensions d'espace. Nous nous en sommes servis pour construire de nouveaux algorithmes, toujours de type décalé, mais avec un décalage permettant un traitement simultané des sous-systèmes (parallélisme inter-modèle), contrairement à ce que nous avons fait par le passé.

6.2.2 Interaction fluide incompressible-structure

Mots clés : interaction fluide-structure, fluide incompressible, maillage dynamique, élément fini, génie civil, écoulement sanguin.

Participants : Serge Piperno, Pierre-Emmanuel Bournet, Marc Thiriet (M3N), Marina Vidrascu (Macs), Dominique Chapelle (Macs), Frédéric Bourquin (LCPC), Xavier Amandolèse (LCPC), Olivier Flamand (CSTB).

La dernière version du code NS3IFS (cf. 5.3) pour la simulation d'interactions fluide-structure, qui avait été validée sur plusieurs types d'expériences habituellement faites par les bureaux d'études en Génie Civil (reproduction des caractéristiques aéroélastiques de profils de pont rectangulaires en mouvement forcé, simulation du mouvement libre dans un vent permanent), n'a pas beaucoup évolué. En effet, il se trouve que la reproduction de grandeurs intégrales (traînée, portance, moment) semble plus facile à obtenir numériquement que des profils de grandeurs ponctuelles (notamment la pression) [17, 28].

Nous avons donc choisi de revenir à la validation du code, notamment pour les profils de pression, qu'on trouve assez peu dans la littérature. Dans le cadre d'un thème de recherche LCPC, portant sur l'effet du vent sur les ouvrages d'art, nous avons cherché à reproduire le plus fidèlement possible certains résultats expérimentaux obtenus en soufflerie au CSTB. Nous avons donc développé un certain nombre d'outils élémentaires pour décoder des résultats bruts de soufflerie expérimentale et pour visualiser des grandeurs importantes (comme la pression, l'énergie cinétique turbulente, etc...) le long du profil. Nous avons aussi réactivé les modèles de turbulence inclus dans le code NS3IFS, et apporté certaines modifications (notamment pour améliorer le modèle $k-\varepsilon$ près des décrochements).

6.2.3 Prototype de plateforme de couplage

Mots clés : approche multimodèle, parallélisme, algorithme de couplage, programmation objet, Visualisation ToolKit.

Participants : Roland Becker, Marina Vidrascu (Macs), Serge Piperno, Dominique Chapelle (Macs), Frédéric Hecht (Gamma).

Le code NS3IFS a servi de base à l'élaboration d'une plate-forme de couplage de codes pour l'interaction fluide-structure, dans le cadre d'une Action de Recherche Coopérative (ARC) de la Direction Scientifique (domaines cibles : génie civil et génie biomédical). Le code initial avait été réagencé afin de distinguer les trois parties essentiellement différentes qui le composaient : le solveur fluide, le solveur structure (élémentaire) et le coupleur (élémentaire). NS3IFS est

d'ailleurs capable de simuler une interaction entre une structure simple et un fluide de trois manières différentes : de manière séquentielle (un seul process), de manière pseudo-parallèle (plusieurs process avec échanges de données par fichier) et de manière parallèle (sous PVM).

Un nouveau coupleur, programmé en C++, a été achevé par Roland Becker. Il devrait permettre désormais de coupler d'autres codes plus facilement. Pour les domaines d'application cibles, des modèles structurels de coques en grands déplacements déjà développés (par Marina Vidrascu et Dominique Chapelle du projet Macs) ont été choisis pour être intégrés à la plateforme. Ainsi, le coupleur C++ sait gérer des échanges (sous PVM) avec le solveur structure en coques en grands déplacements, incluant des procédures de la librairie MODULEF. D'autre part, la construction des données nécessaires aux échanges entre codes est automatique, mais pour l'instant limitée à des maillages coïncidants. Cette plateforme nous a permis d'obtenir les premières simulations d'écoulements sanguins élémentaires (écoulements tridimensionnels visqueux incompressibles, à l'intérieur ou autour d'une structure déformable avec grands déplacements).

Une aide (reposant sur la librairie VTK - Visualisation ToolKit) pour la construction des fichiers d'entrée nécessaires au coupleur et aux solveurs fluide et structure a été développée.

6.2.4 Schémas d'ordre deux pour Navier-Stokes incompressible

Mots clés : équations de Navier-Stokes, fluide incompressible, élément fini, méthode des caractéristiques, ordre élevé.

Participants : Gilles Fourestey, Serge Piperno.

Nous avons démarré une étude sur des schémas en temps d'ordre élevé pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible instationnaires. En effet, le code NS3IFS (qui repose sur le code NSI3 développé par Frédéric Hecht entre autres) est fondé sur un schéma d'ordre un en temps et sur une méthode des caractéristiques également d'ordre un, le tout dans un maillage fixe ^[PM92]. Ainsi, la méthode numérique induit une viscosité artificielle, susceptible de polluer les résultats numériques (notamment en dissipant les tourbillons créés, qui jouent un rôle déterminant dans l'apparition de certaines instabilités de profils de ponts). On doit alors réduire le pas de temps, ce qui peut rendre le coût de simulation prohibitif.

Nous avons proposé un nouveau schéma globalement d'ordre deux en temps (schéma global implicite et méthode des caractéristiques), y compris lorsqu'on se place dans un maillage mobile (formulation ALE). Nous avons mené des comparaisons numériques entre les méthodes sur un code développé entièrement, et nous espérons les inclure dans un avenir proche au code NS3IFS.

6.2.5 Résolution par sous-domaines du problème de Stokes

Mots clés : problème de Stokes, élément fini, sous-domaine, parallélisme, complément de Schur dual.

[PM92] C. PARES MADRONAL, *Étude mathématique et approximation numérique de quelques problèmes aux limites de la mécanique des fluides*, thèse de doctorat, université de Paris VI, 1992.

Participants : Cédric Mouret (ONERA), François-Xavier Roux (ONERA), Serge Piperno.

L'étude sur la résolution parallèle par sous-domaines (approche FETI) du problème de Stokes se poursuit. À terme, nous espérons accélérer considérablement les simulations d'écoulements incompressibles visqueux tridimensionnels en général, et d'interactions fluide-structure en particulier. Nous avons pour l'instant développé une méthode de reconjugaison, utilisée dans un solveur prototype des équations de Stokes stationnaires. Celui-ci est fondé sur un algorithme d'Uzawa, dont certaines parties sont facilement parallélisables, et dont l'inversion centrale des systèmes de type Laplacien est faite par sous-domaines en utilisant la méthode FETI [FR91] (complément de Schur dual) qui utilise l'algorithme du gradient conjugué. La méthode développée ici permet de recycler les directions de descente pour les réintroduire dans le gradient conjugué lors des appels ultérieurs, il s'en suit une diminution croissante (jusqu'à 50%) du nombre d'itérations nécessaires à la convergence.

6.2.6 Méthode mixte éléments finis/volumes finis appliquée à la combustion en milieu multiphasique

Mots clés : combustion, milieu multiphasique, feu de forêt, volume fini, élément fini, maillage non structuré.

Participant : Nathalie Glinsky-Olivier.

Ces travaux ont été effectués dans le cadre du contrat européen EFAISTOS, prolongé jusqu'au 31 mars 1999, et se poursuivent après la fin du contrat.

Le but est ici de simuler la combustion d'une litière composée d'espèces diverses en suivant l'approche multiphasique. Le modèle physique, inspiré des travaux de Grishin, nous a été proposé par l'IUSTI (Université Aix-Marseille). On étudie le comportement d'une phase gazeuse réactive traversant le milieu combustible constitué de plusieurs phases solides.

Notre méthode de résolution repose sur une discrétisation spatiale mixte volumes finis / éléments finis P1 décentrés applicable à des maillages triangulaires non structurés [33]. Les flux convectifs du système gazeux sont approchés en utilisant un solveur de Roe spécialement adapté à ce problème. Les équations de la phase solide, au repos, sont traitées de façon découplée de la partie gazeuse, bien qu'un fort couplage existe entre ces deux systèmes par l'intermédiaire des termes sources traduisant les réactions chimiques au sein du gaz, les échanges entre phase et les échanges de chaleur par conduction et radiation.

Ce modèle numérique a permis d'obtenir de nouveaux résultats sur des domaines de calcul plus grands ($2m \times 2m$) permettant une meilleure représentation des phénomènes. On a pu ainsi clairement identifier les différentes étapes de la propagation du feu, depuis le séchage jusqu'à la combustion des résidus charbonneux et étudier la propagation du front de flamme.

[FR91] C. FARHAT, F. X. ROUX, « A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32, 1991, p. 1205–1227.

6.2.7 Méthodes de résolution des équations d'Euler pour des gaz non polytropiques

Mots clés : équations d'Euler, gaz réel, méthode de relaxation.

Participants : Emmanuel Bongiovanni, Loula Fezoui, Nathalie Glinsky-Olivier.

De nombreux problèmes industriels, notamment la combustion dans un réacteur à dépôt chimique, concernent des écoulements à haute température pour lesquels le gaz ne peut être considéré comme polytropique, c'est-à-dire que la relation entre l'énergie interne et la température n'est plus linéaire mais donnée par une loi polynomiale ou parfois seulement par des tables.

Il s'agit donc ici, d'étudier précisément une méthode de résolution des équations d'Euler pour de tels gaz, pour lesquels les solveurs de Riemann approchés classiques, écrits pour des gaz parfaits polytropiques ne sont plus applicables.

La méthode classique qui consiste à modifier notamment les matrices jacobiennes des flux convectifs pour tenir compte des nouvelles caractéristiques du gaz a d'abord été implémentée. Une seconde méthode a ensuite été étudiée. Il s'agit de la méthode de relaxation d'énergie récemment proposée par Coquel et Perthame ^[CP98] appliquée aux schémas WENO par Montarnal et Shu ^[MS99]. Cette méthode consiste en une décomposition de l'énergie en une partie vérifiant une loi polytropique pour laquelle un solveur classique peut être utilisé et une partie d'énergie résiduelle vérifiant une équation de convection.

Ces deux méthodes ont été implémentées dans un code bidimensionnel et comparées pour des problèmes monodimensionnels de tubes à choc à haute température [31].

6.2.8 Logiciel de résolution exacte d'un problème de Riemann

Mots clés : équations d'Euler, problème de Riemann, solution exacte.

Participants : Emmanuel Bongiovanni, Loula Fezoui, Nathalie Glinsky-Olivier.

Lors de la validation d'une méthode de résolution des équations d'Euler, il est nécessaire de comparer le résultat obtenu par cette méthode avec une solution de référence. En pratique, on reproduit souvent les cas des tubes à choc de Sod et de Lax pour lesquels les solutions exactes sont connues ^[Sod78].

Il est possible de calculer les solutions exactes de n'importe quel problème de Riemann (attention aux conditions d'apparition du vide, néanmoins), à la main, et il n'existait pas à notre connaissance de logiciel général calculant ces solutions en fonction des états à gauche et à droite. On s'est donc intéressé à écrire un tel code qui, à partir des valeurs à gauche et à droite de la densité, de la vitesse et de la pression, calcule la solution exacte à un temps donné

[CP98] F. COQUEL, B. PERTHAME, « Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics », *SIAM Journal of Numerical Analysis* 35, 1998, p. 2223–2249.

[MS99] P. MONTARNAL, C. SHU, « Real gas computation using an energy relaxation method and high-order WENO schemes », *Journal of Computational Physics* 148, 1999, p. 59–80.

[Sod78] G. A. SOD, « A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws », *Journal of Computational Physics* 27, 1978, p. 1–31.

du problème de Riemann. Un soin particulier a été apporté à l'interface avec l'utilisateur afin de rendre ce logiciel simple d'utilisation et de fournir plusieurs formats de résultats (fichier de valeurs, courbes) [32].

6.2.9 Combustion dans un réacteur à dépôt chimique

Participants : Emmanuel Bongiovanni, Nathalie Glinsky-Olivier, Alexandre Ern (CERMICS-ENPC).

Mots clés : combustion, volume fini, élément fini, maillage non structuré.

On souhaite simuler numériquement un réacteur de dépôt chimique. Cette technique, d'une importance industrielle considérable, consiste à injecter des précurseurs dans un réacteur chauffé contenant un substrat sur lequel se dépose une fine couche cristalline. La géométrie complexe du réacteur implique l'utilisation de maillages non structurés. La modélisation du réacteur doit prendre en compte les phénomènes de transfert thermique au sein du réacteur, l'écoulement tridimensionnel de type convection mixte et la cinétique chimique.

Le modèle physique a été développé et validé par A. Ern sur des géométries simplifiées utilisant une méthode aux différences finies. Afin de simuler de tels phénomènes dans des géométries réelles de réacteurs, on s'intéresse à l'écriture d'un solveur basé sur la méthode mixte volumes finis/éléments finis pour des maillages triangulaires non structurés. L'équation d'énergie étant complexe (le C_p et le C_v du gaz sont des polynômes en température), on s'intéresse actuellement à une extension des méthodes étudiées pour résoudre les équations d'Euler dans le cas d'un gaz réel au cas d'un système complet du type équations de Navier-Stokes pour un gaz réactif.

6.3 Visualisation de données

Mots clés : interaction 3D, visualisation scientifique, image volumique.

Participant : Robert Rivière.

Toujours à la recherche d'un outil de visualisation des résultats de calcul, simple et interactif, les développements autour de la librairie VTK (Visualisation ToolKit, présentée en <http://www.kitware.com/vtk.html>) ont continué, l'accent ayant été mis sur les mesures de performances de rendu graphique.

Un benchmark a ainsi été mis au point en collaboration avec Sébastien Barré, chercheur à l'Université de Technologie de Compiègne, puis proposé en libre accès aux utilisateurs de VTK. Une base de donnée de résultats de performances a été ainsi constituée, regroupant les contributions d'une trentaine d'utilisateurs pour une soixantaine de plate-formes matérielles.

6.4 Interfaçage de programmes

Mots clés : programmation objet, interfaçage de programmes.

Participants : Emmanuel Briand, Robert Rivière, Loula Fezoui.

Nous avons entamé l'étude et le développement d'une librairie de classes C++ destinées à définir une représentation standard des données utilisées par les codes de calcul développés au sein du laboratoire, aujourd'hui en très grande majorité Fortran.

L'objectif est d'aboutir à un ensemble de classes de "fondation", relatives à la problématique des éléments finis/volumes finis, capables d'être interfacées le plus simplement possible avec les programmes Fortran existants, et/ou de servir de support à de nouveaux modules ou codes programmés en C++.

Ceci facilitera les échanges de données entre différents programmes, autorisera leur partage en mémoire par des codes ou des utilitaires devant coopérer, et incitera à une migration progressive des nouveaux développements vers la programmation objet.

De nombreux travaux relatifs à la définition de telles classes ont certes déjà été conduits, mais ils intègrent toutefois très rarement la préoccupation de l'interfaçage avec des langages non objet. Parmi ceux-là, la librairie P2mesh ^[BM99] développée à l'Université de Trento et l'Institut d'Analyse Numérique de Pavie représente une intéressante base de départ.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Conseil scientifique pour Alcatel Space Industries

Mots clés : environnement des satellites, compatibilité électromagnétique, équation de Poisson, équation de dérive-diffusion, équations d'Euler, ionisation, décharge sous vide, désorption, plasma.

Participants : Serge Piperno, Loula Fezoui, Armel de La Bourdonnaye, Frédéric Poupaud, Thierry Goudon, François Séverin, Olivier Chanrion.

Le projet a une activité de conseil scientifique vis-à-vis d'Alcatel Space Industries sur les sujets liés à l'environnement électrostatique et plasmique des satellites, aux questions de vibro-acoustique, aux problèmes de choix de modélisation (fluide continu, raréfié, équation de Boltzmann, etc...) et plus généralement sur toutes les applications du calcul scientifique de notre domaine de compétences. Notre conseil porte aussi sur le choix des méthodes numériques envisageables et des logiciels disponibles ou à développer, indépendamment ou en collaboration avec l'équipe (cf. 6.1).

7.2 Couplage de méthodes pour Aérospatiale - CCR

Mots clés : système de Maxwell, domaine temporel, maillage non structuré, volume fini, différence finie, schéma de Yee, maillage hybride, schéma hybride, stabilité couplée.

Participants : Serge Piperno, Loula Fezoui, Frédéric Poupaud, Malika Remaki.

Ce contrat a pour objet d'étudier le couplage de méthodes de différences finies et de volumes finis pour la simulation instationnaire de la propagation d'ondes électromagnétiques (cf. 6.1).

[BM99] E. BERTOLAZZI, G. MANZINI, « P2MESH : a collection of generic classes for PDE solvers on unstructured 2-D grids », 1999, <http://dragon.ian.pv.cnr.it/~marco/p2mesh.ps.gz>.

En particulier, on cherche à coupler le schéma de Yee (schéma aux différences finies très utilisé et très efficace) avec une méthode de volumes finis à déterminer, dans le but de pouvoir utiliser un maillage non structuré et des volumes finis près d'une géométrie complexe, d'une part, et le schéma de Yee sur grille cartésienne autour de la zone non structurée, d'autre part.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions régionales

8.1.1 Combustion multiphasique

Participant : Nathalie Glinsky-Olivier.

Dans le cadre du contrat EFAISTOS, nous travaillons en étroite collaboration avec M. Larini et B. Porterie de l'IUSTI sur les modèles de combustion en milieu multiphasique et effectuons des échanges réguliers avec P. Carréga (Agence d'Analyse Spatiale de l'UNSA).

8.2 Actions nationales

8.2.1 Écoulements incompressibles en génie civil et génie biomédical

Participants : Serge Piperno, Pierre-Emmanuel Bournet, Roland Becker, Gilles Fourestey.

Malgré la fin de l'ARC sur les « Simulations numériques d'interactions fluide-structure en génie civil et ingénierie biomédicale », le groupe de travail INRIA sur l'interaction fluide-structure a continué à se réunir dans le cadre d'un thème de recherche LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées), intitulé « Effets du vent sur les structures du génie civil », et dont les principaux partenaires sont le CSTB (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment) et le SETRA (Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes). Ce projet, financé par la DRAST (Direction de la Recherche pour les Affaires Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Équipement, des Transports et du Logement), nous a permis d'accueillir en thèse Gilles Fourestey, et sur un poste d'ingénieur-expert Pierre-Emmanuel Bournet.

Plus précisément, nous cherchons à retrouver numériquement les résultats expérimentaux obtenus en soufflerie autour de profils de pont (en statique ou en mouvement libre ou forcé), notamment les grandeurs intégrées ou les profils de pression. Le projet Macs de l'INRIA Rocquencourt apporte la modélisation de coques en grands déplacements. Le CSTB apporte les résultats expérimentaux. Le projet M3N de Rocquencourt (notamment Marc Thiriet et dans le futur Jean-Frédéric Gerbeau) nous apporte des données et contacts sur le thème des écoulements sanguins. Enfin, le LCPC est intéressé par un couplage entre le code NS3IFS et un code de structure utilisant un modèle plus simple que les coques, pour l'appliquer aux structures du génie civil.

8.3 Actions européennes

8.3.1 Projet européen EFAISTOS

Participant : Nathalie Glinsky-Olivier.

- Projet européen EFAISTOS : expérimentation et simulations pour l'amélioration de modèles de comportement des feux de forêt (No. ENV4-CT96-0299)
- Programme : environnement et climat
- Début : 1er septembre 1996, fin : prolongé jusqu'au 31 mars 1999.
- Coordinateur : J.-C. Valette - INRA, PIF, Avignon
- Partenaires : ARMINES (France), TNO (Pays-Bas), DIFT (Danemark), IST (Portugal), IUSTI (France), NARF (Grèce), CAIMAN (ENPC, France), INIA (Espagne), ADFA (Australie), UNSA (France)

Ce projet participe au développement d'un modèle européen de simulation de feux de forêt prenant essentiellement en compte la strate inférieure. Les deux objectifs majeurs du projet sont la conception et la mise en œuvre d'un modèle physique amélioré ainsi que la conception et l'implantation d'un Environnement de Résolution de Problèmes (ERP) regroupant tous les outils nécessaires à la modélisation. Les expériences en laboratoire se limiteront au comportement du feu dans la litière forestière et les feux expérimentaux sur le terrain aux basses strates.

8.4 Actions internationales

8.4.1 Méthodes non conformes et décomposition de domaines

Participants : Serge Piperno, Armel de La Bourdonnaye.

Le projet participe au Programme International de Coopération Scientifique sur les méthodes non conformes et la décomposition de domaines (partenaires US : Charbel Farhat (Université du Colorado à Boulder), Pr. Mandel (Université du Colorado à Denver) et Olof Widlund (Courant Institute of Mathematical Science) ; partenaire CNRS : Yvon Maday (ASCI et CNRS)). Nous gérons également le volet INRIA/NSF de cette collaboration tripartite. Ce volet est intitulé « Décomposition de Domaine et Parallélisation en Calcul Scientifique » (partenaires INRIA : A. Dervieux (Sinus), M. Vidrascu et P. Le Tallec (Macs)).

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la Communauté scientifique

9.1.1 GdR Couplage fluide-structure, pollution, chimie

Le projet fait partie du Groupe de Recherche « Couplage fluide-structure, pollution, chimie », qui a fait suite au Groupe de Recherche « Couplage d'équations ». Il s'est achevé cette année, avec le colloque « Fluide en interaction », co-organisé par S. Piperno, avec Christine Bernardi, Yvon Maday et Olivier Pironneau à l'INRIA Sophia Antipolis.

9.1.2 GdR Sparch

Le projet fait partie du Groupe de Recherche Sparch (Simulation de particules chargées).

9.2 Enseignement

- *Calcul Scientifique*, S. Piperno (maître de conférence), tronc commun 1ère année, ENPC (30 heures).
- *Écoulements multiphasiques*, N. Glinsky-Olivier, Mastère de Mécanique Numérique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris (6 heures).

9.3 Thèses

– Thèses en cours :

1. E. Bongiovanni, Méthodes numériques pour les écoulements de gaz parfaits non polytropiques. Application à l'épitaxie, ENPC
2. O. Chanrion, Modélisation des effets de la propulsion électrique sur la charge électrostatique d'un satellite, ENPC (bourse CIFRE ASpI)
3. G. Fourestey, Simulations numériques de couplages aéroélastiques « écoulement incompressible - structure souple ». Applications aux ouvrages d'art, ENPC
4. G. Sylvand, Méthodes numériques rapides pour la résolution des équations intégrales en électromagnétisme, ENPC

– Thèses soutenues dans le projet :

1. M. Bostan, Schémas numériques pour la résolution du système de Vlasov-Maxwell, UNSA
2. M. Remaki, Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène, ENPC

9.4 Stages, post-doctorats, ingénieurs-experts

- E. Bongiovanni, Algorithmes de résolution des équations d'Euler pour des gaz non polytropiques, stage de DEA d'Analyse Numérique, UNSA.
- E. Bongiovanni, Logiciel de résolution exacte d'un problème de Riemann, stage de DESS-ISI, ESSI.
- Roland Becker, fin de son séjour post-doctoral (1/1 au 1/4), développement du coupleur.
- Pierre-Emmanuel Bournet, ingénieur-expert (1/6 au 1/12), a travaillé sur la comparaison de résultats expérimentaux du CSTB et de résultats numériques fournis par NS3IFS (cf. 6.2).
- Emmanuel Briand, arrivé en séjour post-doctoral le 1/11, développe une librairie de classes C++ pour l'interfaçage de programmes.

9.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations

- Organisation par Serge Piperno du colloque « Fluide en interaction » à l'INRIA Sophia Antipolis, du 11 au 14 octobre, dans le cadre du Groupe de Recherche « Couplage fluide-structure, pollution, chimie ».
- Communication de N. Glinsky-Olivier au congrès "Finite Volumes for Complex Applications II" à Duisburg, Allemagne.
- Communication de Serge Piperno au congrès FSI'99 à Trondheim, Norvège.
- Communication de Serge Piperno au Fifth US National Congress on Computational Mechanics, à Boulder (Colorado, USA).
- Communication de Malika Remaki au 15th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, à Monterey (Californie, USA).
- Communication de Malika Remaki à la 20ième rencontre annuelle de la société de mathématiques appliquées et industrielles, Université Laval (Québec, Canada).
- Communication de Robert Rivière à "Linux-Expo, Paris" en juin 99 sur "la bibliothèque graphique 3D VTK".
- Participation de N. Glinsky-Olivier au Symposium conclusif d'EFAISTOS, Avignon.
- Participation de Serge Piperno et Pierre-Émanuel Bournet au Colloque "Interactions Fluide-Structure" de la SHF, au LNH de EDF, à Chatou, France.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] F. BONNET, J.-P. CIONI, L. FEZOU, F. POUPAUD, « FVTD schemes using conformal hybrid meshes and a PML medium technique », *in: ACES 97 Symposium*, Monterey, California, 1997.
- [2] A. DE LA BOURDONNAYE, *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell, Collection Didactique*, INRIA, 1998, ch. Discrétisation microlocale pour les équations intégrales.
- [3] A. ERN, V. GIOVANGIGLI, M. SMOOKE, « Detailed modeling of three-dimensional chemical vapor deposition », *Journal of Crystal Growth* 180, 1997, p. 670–679.
- [4] L. FEZOU, B. STOUFFLET, « A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes », *Journal of Computational Physics* 84, 1989, p. 174–206.
- [5] A. HARTEN, P. D. LAX, B. VAN LEER, « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws », *SIAM Review* 25, 1, 1983, p. 36–61.
- [6] B. KOOBUS, C. FARHAT, « Second-Order Time-Accurate and Geometrically Conservative Implicit Schemes for Flow Computations on Unstructured Dynamic Meshes », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 170, 1999, p. 103–130.
- [7] S. PIPERNO, S. DEPEYRE, « Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution TVD schemes », *Computers and fluids* 27, 2, 1998, p. 183–197.
- [8] S. PIPERNO, C. FARHAT, B. LARROUTUROU, « Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 124, 1-2, 1995, p. 79–112.
- [9] K. S. YEE, « Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media », *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-16, 1966, p. 302–307.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

- [10] M. BOSTAN, *Schémas numériques pour la résolution du système de Vlasov-Maxwell*, Thèse en mathématiques appliquées, université de Nice - Sophia Antipolis, avril 99.
- [11] M. REMAKI, *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, Thèse en mathématiques appliquées, École Nationale des Ponts & Chaussées, décembre 99.

Articles et chapitres de livre

- [12] M. BOSTAN, F. POUPAUD, « Time periodic solutions of boundary value problems for the Vlasov Poisson system », *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1999, à paraître.
- [13] A. DE LA BOURDONNAYE, « High Order Scheme for a Non Linear Maxwell System Modelling Kerr Effect », *Journal of Computational Physics*, 1999, à paraître.
- [14] S. DEPEYRE, « A stability analysis for finite volume schemes applied to the Maxwell System », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 33, 3, 1999, p. 443–458.
- [15] C. FARHAT, A. MACEDO, M. LESOINNE, F. X. ROUX, F. MAGOULÈS, A. DE LA BOURDONNAYE, « Two-level Domain Decomposition Methods with Lagrange Multipliers for the Fast Iterative Solution of Acoustic Scattering Problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, à paraître.
- [16] F. MAGOULÈS, F.-X. ROUX, A. DE LA BOURDONNAYE, « Méthode de décomposition de domaines pour des problèmes hyperboliques », *Calculateurs parallèles, Réseaux et Systèmes répartis* 10, 4, 1998, p. 353–361.
- [17] S. PIPERNO, P.-E. BOURNET, « Numerical simulations of wind effects on flexible civil engineering structures », *Revue Européenne des Eléments Finis*, 1999, à paraître.
- [18] S. PIPERNO, C. FARHAT, « Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems », *Revue Européenne des Eléments Finis*, 1999, à paraître.
- [19] S. PIPERNO, C. FARHAT, « Partitioned Procedures for the Transient Solution of Coupled Aeroelastic Problems - Part II: Energy Transfer Analysis and Three-Dimensional Applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, à paraître.
- [20] S. PIPERNO, « L^2 -stability of the upwind first order finite volume scheme for the Maxwell equation in two and three dimensions on arbitrary unstructured meshes », *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 1999, à paraître.
- [21] F. POUPAUD, M. REMAKI, « Existence et unicité des solutions du système de Maxwell pour des milieux hétérogènes non réguliers », *Note aux C.R.A.S.*, 1999, à paraître.
- [22] M. REMAKI, F. POUPAUD, L. FEZOU, O. CHANRION, « Couplage de modèles et de méthodes numériques pour l'électromagnétisme en domaine temporel », *Revue Européenne des Eléments Finis*, 1999, à paraître.
- [23] M. REMAKI, « A New Finite Volume Scheme for Solving Maxwell's System », *COMPEL- The International Journal for Computation and Mathematics in Electric and Electronic Engineering*, 1999, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

- [24] A. DE LA BOURDONNAYE, C. FARHAT, M. LESOINNE, A. MACEDO, F. MAGOULÈS, F. X. ROUX, « Two-level domain decomposition methods with Lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems », in : *ICTCA '99 proceedings*, Trieste, Italie, 1999.

- [25] A. DE LA BOURDONNAYE, C. FARHAT, A. MACEDO, F. MAGOULÈS, F. X. ROUX, « A method of finite element tearing and interconnecting for the Helmholtz problem », *in: Advances in Computational Mechanics with High Performance Computing*, Civil-Comp Press, 1998.
- [26] N. GLINSKY-OLIVIER, E. SCHALL, « A mixed Finite Volume/Finite Element method applied to combustion in multiphase medium », *in: Finite Volume for Complex Applications II*, R. Vilsmeier, F. Benkhaldoun, D. Hänel Eds., Hermès, p. 411–418, 1999.
- [27] S. PIPERNO, C. FARHAT, « An Energy Transfer Criterion for Assessing Partitioned Procedures Applied to the Solution of Non-linear Transient Aeroelastic Problems », *in: Fifth US National Congress on Computational Mechanics*, A. Carosio, P. Smolarkiewicz, K. Willam, J. Yang (éditeurs), University of Colorado, p. 145, Boulder, Colorado, Aug. 4-6 1999.
- [28] S. PIPERNO, « Numerical simulation for civil engineering: aeroelastic instabilities of elementary bridge decks », *in: Computational Methods for Fluid-Structure Interaction, FSI'99*, T. Kvamsdal, I. Enevoldsen, K. Herfjord, C. B. Jenssen, K. Mehr, S. P. Norsett (éditeurs), Tapir, p. 41–50, Trondheim, Norway, Feb. 15-17 1999.
- [29] M. REMAKI, L. FEZOU, « Comparison between a Discontinuous Galerkin method and a Finite Volume Time-Domain method in solving Maxwell equations, in heterogeneous media », *in: Conference Proceedings, 15th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*, Naval Postgraduate School, Monterey, Ca, USA, 15-20 mars 1999.
- [30] M. REMAKI, L. FEZOU, « Une méthode de Galerkin discontinue pour le système de Maxwell dans un milieu hétérogène », *in: 20ième rencontre annuelle de la société de mathématiques appliquées et industrielles*, Université Laval, Québec, Canada, juin 1999.

Rapports de recherche et publications internes

- [31] E. BONGIOVANNI, « Algorithmes de résolution des équations d'Euler pour des gaz non polytropiques », *Rapport de stage de DEA*, UNSA, 1999.
- [32] E. BONGIOVANNI, « Logiciel de résolution exacte d'un problème de Riemann », *Rapport de stage de 3ème année*, ESSI, 1999.
- [33] M. BRAACK, E. SCHALL, N. GLINSKY-OLIVIER, « A mixed finite volume/finite element method and an adaptive finite element method applied to combustion in multiphase medium », *Rapport final de contrat no. env4-ct96-0299*, 1999.
- [34] A. DE LA BOURDONNAYE, « High Order Scheme for a Non Linear Maxwell System Modelling Kerr Effect », *Rapport de recherche n° 3688*, INRIA, 1999, <http://www.inria.fr/RRRT/RR-3688.html>.
- [35] S. PIPERNO, C. FARHAT, « Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part II: Energy Transfer Analysis and Three-Dimensional Applications », *rapport de recherche n° 99-03*, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado, février 1999.
- [36] M. REMAKI, « A New Finite Volume Scheme for Solving Maxwell System », *Rapport de recherche n° 3725*, INRIA, 1999, <http://www.inria.fr/RRRT/RR-3725.html>.
- [37] F. SÉVÉRIN, « Simulation numérique d'une ESD et formation d'un plasma entre deux cellules d'un panneau solaire », *Rapport de stage n° ASPI 99/DRT 98*, Alcatel Space Industries, 1999.