INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Avant-Projet MATHFI

Mathématiques Financières

Rocquencourt

THÈME 4A

Rapport d'Activité

1999

Table des matières

1 Composition de l'équipe 3

2 Présentation et objectifs généraux 4

3 Fondements scientifiques 5

3.1 Contrôle stochastique 5

3.2 Méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés . . 7

4 Domaines d'applications 8

4.1 Mathématiques financières 8

4.1.1 Applications des lois stables en Finance 8

4.1.2 Couverture approchée des produits dérivés 8

4.1.3 Commande stochastique singulière et gestion de portefeuilles avec coûts de transaction 9

5 Logiciels 10

5.1 Développement d'un logiciel de pricer d'options : Premia 10

6 Résultats nouveaux 11

6.1 Méthodes de Monte-Carlo pour les options asiatiques 11

6.2 Stratégies de couverture réelle 12

6.3 Prix d'options américaines déduits d'options européennes 12

6.4 Convergence des méthodes d'arbre pour les options américaines sur trajectoires 13

6.5 Étude théorique du risque modèle pour la gestion des produits dérivés. 14

6.6 Processus stables et évaluation d'options 15

6.7 Contrôle optimal de systèmes avec retard 15

6.8 Contrôle stochastique ergodique - Application en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction 16

6.9 Optimisation dynamique de portefeuilles avec coûts fixes et proportionnels: un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel 17

6.10 Gestion de portefeuille dans un marché gouverné par des processus de diffusion avec sauts 17

6.11 Gestion de portefeuille dans le cas d'un marché gouverné par un Mouvement Brownien fractionnaire 18

6.12 Ambiguïté et Utilité 19

6.13 $\mathcal{P}$-Martingale, g-martingale et application en finance 19

6.14 Problèmes de temps d'arrêt optimal 19

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux) 20

7.1 Processus stables et "pricing" d'options 20

7.2 Premia : un pricer d'options 20

7.3 Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change 21

7.4 Évaluation numérique d'options sur taux 21

8 Actions régionales, nationales et internationales **22**
8.1 Actions nationales 22
8.2 Actions européennes 22
8.3 Relations internationales 22

9 Diffusion de résultats **22**
9.1 Animation de la communauté scientifique 22
9.2 Enseignement universitaire 23
9.3 Encadrement de stages 23
9.4 Encadrement de thèses 24
9.5 Soutenance de thèse 25
9.6 Participation à des colloques, séminaires, invitations 25

10 Bibliographie **26**

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Agnès Sulem [DR Inria]

Responsable permanent

Claude Martini [CR Inria]

Assistante de projet

Martine Verneuille [SAR Inria]

Membres du projet

Bernard Lapeyre [Directeur du Cermics, Professeur à l'ENPC]

Benjamin Jourdain [Enseignant Chercheur, Maître de conférence à l'ENPC]

Conseiller scientifique

Olivier Pironneau [Professeur, Université Paris 6]

Collaborateurs extérieurs

Jean-Philippe Chancelier [Enseignant Chercheur, Maître de conférence à l'ENPC]

Jean-François Delmas [Enseignant Chercheur, Maître de conférence à l'ENPC]

Anne Gilles-Genest [Ingénieur expert]

Damien Lamberton [Professeur, Université de Marne la Vallée]

Chercheurs invités

Lucia Carramellino [Enseignant Chercheur, Université de Rome III]

Antonino Zanette [Enseignant Chercheur, Université de Trieste]

Chercheurs post-doctorants

Zengjing Chen [Shandong University, Chine]

Vassilis Koulovassilopoulos

Doctorants

Xavier Joseph [Bourse Cifre, Coface depuis octobre 1997, Université Paris 6]

Mouaya Noubir [Crédit Lyonnais, ENPC]

Christophe Patry [Bourse MENRT depuis octobre 1997, Université Paris 9 Dauphine]

Emmanuel Temam [ENPC, Bourse MENRT, Université Paris 6]

Arnaud Tisseyre [Bourse Cifre, Banque Hervet, Université Paris 9 Dauphine]

Stagiaires

Clément Akeboue [Ecole Polytechnique]

Hatim Benamar [Université de Rabat, Maroc]

Laurent Chretien [doctorant, Université de Lyon]

Renaud Gillet [Institut Galilée, Université Paris 13]

A. Ikethea [Institut Galilée, Université Paris 13]

J. Indraghoby [Université Paris 6]

Mohamed Mnif [Université Paris 1]

Sami Nabi [Université Paris 1]

P. Strachman [Ecole Nationale des Ponts et Chaussées]

2 Présentation et objectifs généraux

La pratique d'instruments financiers de plus en plus complexes (options, produits de taux d'intérêt ...) a conduit à une utilisation de techniques avancées d'analyse stochastique et numérique dans les établissements financiers.

En retour, la pratique financière pose aux mathématiciens des problèmes stimulants et une interaction fructueuse s'est ainsi établie entre mathématiciens et financiers. Le développement dans le monde académique de cette nouvelle branche des mathématiques appliquées s'est concrétisée par l'organisation de congrès scientifiques internationaux, la création de plusieurs revues, une explosion de l'offre de cours en troisième cycle et dans les écoles d'ingénieurs ainsi que la soutenance de nombreuses thèses sur le sujet.

Les compétences scientifiques de l'équipe (à la fois du coté des chercheurs Inria que des chercheurs de l'équipe de probabilités appliquées du Cermics de l'ENPC) dans ce domaine concernent la modélisation des prix des actifs par des processus stochastiques, la résolution d'équations aux dérivées partielles par des méthodes probabilistes et d'analyse numérique classique, le contrôle stochastique des diffusions ou des processus de Markov, les probabilités numériques, avec des applications au calcul des prix d'actifs complexes, à l'optimisation dynamique de portefeuilles en marché imparfait, à la couverture approchée de produits dérivés en marché incomplet.

Le domaine de la finance mathématique est aujourd'hui tellement étendu qu'un seul projet Inria ne peut le couvrir en totalité. Notre projet ne s'intéresse pas aux aspects les plus théoriques du sujet, mais il vise à développer certains aspects proches des préoccupations des salles de marchés : modélisation plus pertinente des actifs financiers (prise en compte d'évènements rares comme d'importantes variations de cours, incertitude structurelle sur les paramètres de la dynamique statistique des cours, ...), méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des options et leur mise en œuvre, étude de techniques de couverture réalistes (coûts de transaction, couverture en temps discret, contrainte de liquidité, ...), applications du contrôle stochastique à la gestion de portefeuilles d'actifs et d'options. Le thème du contrôle stochastique, domaine de compétence traditionnelle de l'Inria depuis sa création, semble trouver un renouveau dans les applications financières.

Nous développons un logiciel consacré à l'évaluation et la couverture des options : "Premia" financé par un consortium de banques. Premia vise à constituer une base de référence sur les algorithmes de pricing et de couverture des produits dérivés, ainsi qu'un environnement informatique facilitant l'implémentation et les tests numériques.

Les activités scientifiques du projet peuvent se regrouper selon trois thèmes : méthodes numériques déterministes et probabilistes en finance[LT96], [11], couverture approchée des options, contrôle stochastique et applications financières.

3 Fondements scientifiques

3.1 Contrôle stochastique

Mots clés : commande stochastique, commande singulière, frontière libre, Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquation variationnelle.

Participants : M. Akian [projet Meta2], J.-Ph. Chancelier, C. Martini, M. Mnif, Ch. Patry, A. Sulem.

Résumé : *Le contrôle stochastique est l'étude des systèmes dynamiques perturbés par des événements aléatoires et que l'on peut commander dans le but d'optimiser un certain critère.*

On considère des systèmes dynamiques dont l'état est modélisé par un processus de diffusion (avec sauts éventuellement), sur lequel on peut agir au moyen de variables de commande. La commande peut être continue, singulière ou impulsionnelle. Le but est d'optimiser un critère sur un horizon de gestion fini ou infini ou de type ergodique. La fonction valeur, qui réalise l'optimum du critère satisfait une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ou une Inéquation variationnelle ou quasi-variationnelle elliptique, parabolique ou ergodique, avec des conditions

[LT96] L.C.G. Rogers, D. Talay (réd.), *Numerical Methods in Finance*, Cambridge University Press, 1996.

aux limites dépendant du comportement du processus au bord du domaine : arrêté, réfléchi, etc ...

Soit par exemple un système dont l'état X_t est gouverné par une diffusion dans un ouvert Ω :

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x \tag{1}$$

où u_t est le processus de commande, et W_t un processus de Wiener. On cherche à optimiser un critère qui peut-être de la forme

$$E\left(\int_0^\tau e^{-\alpha t} f(X_t, u_t)dt\right) \tag{2}$$

où E désigne l'espérance, $\alpha > 0$ et τ désigne le premier temps de sortie de X_t du domaine Ω.

Notons

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(x, u)$$

où $J(x, u)$ est donné par (2) et $\mathcal{U}$ est l'ensemble des commandes admissibles.

La méthode de la programmation dynamique conduit à une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour la fonction valeur V :

$$\begin{cases} \max\limits_{u \in \mathcal{U}}(A^u V + f(u)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où A^u est un opérateur elliptique, pouvant être dégénéré, du 2ème ordre :

$$A^u V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1} b_i(x, u)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) - \alpha V(x) \tag{4}$$

avec $a = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} = \dfrac{1}{2}\sigma\sigma^T$ et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x, u)\eta_i\eta_j \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathcal{U}.$

Dans le cas d'une commande singulière (alors le déplacement de l'état du système dû à l'application de la commande est non différentiable par rapport au temps), l'équation de la programmation dynamique est une inéquation variationnelle (I.V.), c'est à dire un système d'inéquations aux dérivées partielles.

La commande peut être également de type impulsionnel, c'est-à-dire que l'état du système subit des sauts à certains instants, les instants d'impulsion et la taille des sauts étant des variables de décision. Dans ce cas, la fonction valeur vérifie une inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.). Les I.V. et I.Q.V. correspondent à des problèmes de frontière libre. La théorie des solutions de viscosité fournit un cadre rigoureux pour l'étude des équations de la programmation dynamique.

L'étude théorique et numérique de ces problèmes est un de nos sujets de recherche de base.

3.2 Méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés

Mots clés : Monte–Carlo, méthodes d'arbres, différences finies.

Participants : L. Caramellino, B. Lapeyre, C. Martini, S. Nabi, Ch. Patry, O. Pironneau, A. Sulem, E. Temam, A. Zanette.

Résumé : *Les problèmes de calcul effectif des prix et des couvertures d'options sont, encore aujourd'hui, l'enjeu essentiel pour les établissements financiers, en particulier le calcul d'options exotiques et sur taux d'intérêt et l'optimisation de portefeuille sous contraintes. Ce thème d'activité, tout en étant au coeur du développement du logiciel Premia, motive des recherches plus théoriques à la fois sur les méthodes de type Monte-Carlo que sur les schémas numériques pour les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires (Kolmogorov, Hamilton-Jacobi-Bellman, Inéquations Variationnelles et Quasi-Variationnelles, ...).*

Méthodes de Monte–Carlo. Les problèmes d'évaluation et de couverture d'options sont liées à des équations de diffusion en dimension (parfois) grande (plus de 10), ou très dégénérées pour lesquelles les méthodes numériques sont délicates voire impossibles à mettre en oeuvre. Il n'est donc pas étonnant de constater que des méthodes de Monte-Carlo sont aujourd'hui utilisées de façon massive en finance, très souvent en raison de la simplicité de leur implémentation. Cette simplicité apparente ne doit pas cacher que la mise en oeuvre efficace de ces techniques conduit à des problèmes mathématiques délicats : approximation précise de fonctionnelles du mouvement brownien (option sur moyenne ou maximum, justification de l'emploi de suites à discrépance faible pour des fonctions peu régulières comme celles utilisées lors de calculs d'options, pour ne citer que des points directement traités par des chercheurs du projet. Ce domaine de recherche est, bien sûr, directement lié à des activités appliquées et concerne une des parties importantes du logiciel Premia.

Méthodes numériques probabilistes. Les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement l'évaluation numérique de prix d'actifs complexes, en particulier le pricing d'options par des méthodes d'arbres. Si la convergence des schémas d'arbre a été traité notamment par Kushner [HD92], il semble que l'étude de la vitesse de convergence et aussi la compréhension des phénomènes d'enveloppes observés lors de la convergence des schémas d'arbre soit pour une grande part encore à réaliser.

Plus précisément, on peut citer: l'étude de la forme de la convergence de l'algorithme de Cox-Ross-Rubinstein [CRR78] pour une option standard, de la vitesse de convergence pour des

[HD92] H.J. Kushner, P. Dupuis, *Numerical Methods for stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer Verlag, 1992.

[CRR78] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, « Option pricing: a simplified approach », *J. of Economics*, January 1978.

algorithmes de type Hull-White [HW93] ou Barraquand-Pudet [BP96] pour des options européennes sur trajectoires, la preuve de la convergence de ce type d'algorithmes pour des options américaines.

Méthodes numériques déterministes. Nous étudions les schémas numériques pour des équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées en particulier les équations en dimension élevée et les questions de stabilité des schémas aux différences finies pour les inéquations variationnelles.

Nous menons aussi l'étude des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, en particulier dans le cas très fréquent dans les applications, où le schéma discrétisé ne vérifie pas le principe du maximum discret.

4 Domaines d'applications

4.1 Mathématiques financières

Résumé : *Les sujets de recherche que nous développons visent à se rapprocher des conditions du marché par des modélisations plus réalistes des actifs financiers (prise en compte d'événements rares comme d'importantes variations de cours par la modélisation des prix des actifs par des processus stables et des mouvements Browniens fractionnaires), ainsi que par l'étude de techniques de couverture approchée (introduction de coûts de transaction, couvertures discrètes).*

4.1.1 Applications des lois stables en Finance

Participants : A. Sulem, A. Tisseyre.

Mots clés : lois stables.

Les modèles usuels de finance comme le modèle de Black-Scholes et ses différentes variations font intervenir des processus de diffusion browniens. On connait les limites de ces modèles et les quelques incohérences qu'ils entraînent entre leurs axiomes et les observations empiriques. Parmi les faiblesses on peut citer le "smile de volatilé". L'objet de la thèse d'A. Tisseyre est l'utilisation de processus géométriques α-stables. L'étude statistique des cours de change permet de trouver une valeur de α de l'ordre de 1.65, ce qui donne en particulier une bonne estimation de fréquence de retour de "crak". Un modèle de pricing d'options dans ce cadre permet d'apporter une correction significative sur le smile de volatilité.

4.1.2 Couverture approchée des produits dérivés

Mots clés : risque modèle, coûts de transaction, couverture discrète.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options», *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

Participants : C. Martini, Ch. Patry, E. Temam.

Les modèles utilisés par les praticiens pour décrire les actifs financiers sont des modèles continus. On dispose alors d'une théorie parvenue à maturité ces dernières années, celle des marchés complets qui permet de calculer les prix et les stratégies de couverture des options.

Pourtant, ces stratégies de couverture ne sont pas réalistes. En effet, le trader ne se couvre qu'à des instants discrets et ne peut intervenir qu'un nombre fini de fois sur le marché par séance. Des travaux théoriques montrent les limites de l'application de la stratégie continue à des temps discrets déterministes : un exemple typique est celui d'un call à la monnaie à maturité, ou d'une option digitale. Les praticiens sont conscients de ce phénomène et développent des recettes empiriques pour y pallier.

Des travaux théoriques très récents ont été menés sur ces sujets par Cvitanic et Karatzas (contrainte sur le ratio de couverture, [CK]) et Barles et Soner (coûts de transaction, [BS96]). Nous étudions en particulier la couverture en temps discret, l'introduction des coûts de transaction et leur implémentation numérique.

4.1.3 Commande stochastique singulière et gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Participants : M. Akian [projet Meta2], A. Sulem.

On étudie la politique optimale de consommation et d'investissement d'un investisseur ayant un compte en banque à taux d'intérêt fixe r et n comptes en actions modélisés par des mouvements browniens géométriques. Les transactions entre comptes entraînent des coûts proportionnels au montant de la transaction et sont modélisées par des commandes singulières.

On note $s_0(t)$ (resp. $s_i(n)$, $i = 1 \cdots n$) la quantité d'argent investie dans le compte en banque (resp. dans le ième compte en actions) et $\mathcal{L}_i(t)$ et $\mathcal{M}_i(t)$ les quantités cumulées d'actions de type i achetées et vendues sur l'intervalle de temps $(0, t)$. Les équations d'évolution des comptes sont alors

$$\begin{cases} ds_0(t) = (rs_0(t) - c(t))dt - \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)d\mathcal{L}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}(1-\mu_i)d\mathcal{M}_i(t), \quad s_0(0^-) = x_0 \\ ds_i(t) = \alpha_i s_i(t) + \sigma_i s_i(t)dW_i(t) + d\mathcal{L}_i(t) - d\mathcal{M}_i(t), \quad s_i(0^-) = x_i \quad i = 1 \cdots n \end{cases} \tag{5}$$

où $c(t)$ représente la consommation et les coefficients λ_i et μ_i sont les coûts de transaction proportionnels. Soit $u(c)$ une fonction d'utilité de type Hara, l'objectif est de maximiser la fonctionnelle

$$J_x = E_x \int_0^\infty e^{-\delta t} u(c(t))dt \tag{6}$$

[CK] J. Cvitanić, I. Karatzas, « Hedging and Portfolio optimisation under transaction costs: a martingale approach », *Math. Finance 6*, p. 133–165.

[BS96] G. Barles, M. Soner, « Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation », Preprint, 1996.

sur l'ensemble des politiques admissibles, c'est à dire ne conduisant jamais à la faillite. Dans [2], on a montré que la fonction valeur est l'unique solution de viscosité d'une inéquation variationnelle elliptique (I.V.), et on a résolu cette IV par l'algorithme FMGH basé sur l'algorithme de Howard et les multigrilles. Cette étude numérique a permis de déterminer la stratégie optimale d'investissement et de consommation.

Si on s'intéresse à la politique d'investissement seul ($c = 0$), le critère à maximiser est fonction de la richesse $s_0(T) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \mu_i)s_i(T)$ à un instant T donné. On obtient ainsi un problème en horizon fini que nous avons étudié dans [ASS95].

Le cas ergodique (maximisation du taux moyen de profit) est étudié dans [21]. Le problème des coûts fixes de transaction est étudié dans [22]. Le cas où les prix des actifs sont modélisés par des processus de diffusion avec sauts est traité dans [29, 18].

5 Logiciels

5.1 Développement d'un logiciel de pricer d'options : Premia

Participants : C. Martini (responsable du logiciel), C. Akeboue, L. Caramellino, A. Gille-Genest, R. Gillet, J. Indraghoby, A. Ikethea, O. Pironneau, P. Strachman, E. Temam, A. Zanette.

Le logiciel Premia est dédié à l'évaluation (pricing) et à la couverture de produits dérivés (options) sur actions, sur taux d'intérêt, taux de change et multi-support. À vocation essentiellement didactique, Premia vise à présenter des implémentations rigoureuses et documentées des algorithmes les plus récents dans le domaine et à constituer une contrepartie numérique à l'explosion académique du domaine.

Ce logiciel peut être un outil de formation de nouveaux market-makers ou traders soucieux de maîtriser l'aspect numérique du pricing d'options, et des étudiants de 3ème cycle en finance ou mathématiques financières. L'objectif n'est pas de réaliser un produit commercial qui traite tous les contrats existants sur le marché mais plutôt de fournir, pour un éventail de cas suffisamment représentatif des difficultés numériques qui se présentent, des codes sources et une documentation hypertexte qui fasse le pont entre la formule théorique du prix et du ratio de couverture de l'option et l'algorithme effectif de calcul. On insiste sur le fait qu'il s'agit de traiter des cas pratiques concrets où des questions numériques se posent, et non pas exclusivement la convergence du schéma de Cox-Ross-Rubinstein pour un call européen standard dans le modèle de Black et Scholes.

Par rapport aux "packages" spécialisés finance associés aux grands logiciels scientifiques, Premia est centré sur les produits dérivés et met l'accent sur l'aspect numérique [33].

Premia est développé en collaboration avec un consortium de banques : Caisse des Dépots et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial,

[ASS95] M. Akian, A. Sulem, P. Séquier, «A finite horizon multidimensional portfolio selection problem with singular transactions», *in: Proceedings CDC*, p. 2193–2198, News Orleans, Décembre 1995. Vol.3.

Caisse Centrale des Banques Populaires. La Société Générale, BNP-Paribas et EDF ont été démarchées en octobre 1999 et vont probablement adhérer au Consortium.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web

http://cermics.enpc.fr/ premia

Le logiciel Premia1 a été livré en mai 1999, la nouvelle mouture Premia2 est prévue pour décembre 1999, et la mise à disponibilité de Premia2 sur le web les années suivantes.

6 Résultats nouveaux

6.1 Méthodes de Monte-Carlo pour les options asiatiques

Participants : B. Lapeyre, E. Temam.

Les méthodes de Monte-Carlo sont connues pour être utiles en dimension grande. Ceci est vrai, mais le cas des options asiatiques fournit un exemple, surprenant, où les méthodes de Monte-Carlo (aidées par des techniques de réductions de variance) peuvent être plus efficaces que toute autre méthode connue y compris en dimension 2.

Le problème du pricing d'option asiatique est délicat. Ce problème est, déjà, largement traité soit par des méthodes analytiques [GY93,FMW96], soit par des méthodes numériques [DW95, LS95], soit par des méthodes de Monte-Carlo [AA90]. L'originalité de notre travail est de proposer (et de justifier en détail) de nouveaux schémas de discrétisation en temps pour l'intégrale du processus de Black et Scholes : ce point pose un vrai problème lorsque l'on met en oeuvre une méthode de Monte-Carlo comme l'ont noté Madan, Fy et Wang [FMW96], page 14. Nous montrons alors que pour un schéma en temps et une technique de réduction de variance bien choisis, la méthode de Monte-Carlo obtenue est, pour certaines valeurs de la volatilité, plus efficace que les autres méthodes déjà citées. Nous avons mené des comparaisons numériques détaillées entre notre méthode de Monte-Carlo et les méthodes suivantes : Forward Shooting Grid (FSG)[BP96], Hull et White [HW93] et des méthodes différences finies. Pour des valeurs de la précision relative modérées (1%), il apparaît que les méthodes d'arbres (FSG ou Hull et White) sont les plus efficaces. Mais, de façon surprenante, une grande précision (de l'ordre de

[GY93] H. Geman, M. Yor, « Bessel processes, Asian options, and perpetuities », *Mathematical Finance 3*, 4, 1993, p. 349–375.

[FMW96] M. Fu, D. Madan, T. Wang, « Pricing continous time Asian options: A comparison of analytical and monte carlo methods », *forthcoming in the Journal of Computational Finance*, 1996.

[DW95] J. Dewynne, P. Wilmott, « Asian options as linear complementary problems: Analysis and finite difference solutions », *Advances in Futures and Operations Research 8*, 1995, p. 145–173.

[LS95] L.C.G. Rogers, Z. Shi, « The value of an Asian option », *J. Appl. Probab. 32*, 4, 1995, p. 1077–1088.

[AA90] A.G.Z. Kemna, A.C.F. Vorst, « A pricing method for options based on average asset values », *J. Banking Finan.*, March 1990.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

0,01 %) ne peut être obtenue que par une méthode de Monte-Carlo utilisant un pas de temps relativement grand (de l'ordre de 1 mois) (cf. [34]).

6.2 Stratégies de couverture réelle

Participants : H. Benamar, C. Martini, Ch. Patry, E. Temam, R. Zhang.

Les modèles utilisés dans l'évaluation d'options par absence d'opportunités d'arbitrage supposent que le market-maker a la possibilité de se couvrir en temps continu, ce qui n'est évidemment pas vérifié en pratique. Concrètement, l'utilisation de modèles aussi classiques que celui de Black-Scholes en pratique, donc avec des couvertures discrètes, pose la question du choix des instants et ratios de couverture effectifs. Ceci a mené à l'étude de la stratégie de couverture discrète la plus simple, qui correspond à l'approximation de l'intégrale stochastique par une somme de Riemann (travaux de Henrotte [Hen93], Zhang [13]).

Le travail d'étude des couvertures à temps fixes mené par R. Zhang en dimension 1, et pour des fonctions relativement régulières, a été étendu depuis par E. Temam et E. Gobet [24] au cas de fonctions moins régulières et en particulier pour les options digitales. Ce travail confirme l'intuition des praticiens des marchés : ces options sont beaucoup plus délicates à couvrir que les options classiques et ceci se traduit par une vitesse de convergence de la couverture approchée plus lente que dans le cas des puts et des calls. Enfin, récemment, E. Temam a étendu ces résultats au cas multidimensionnel, pour une large classe d'options incluant les puts et les calls et les options digitales sur indices. Cependant, rien n'oblige de se couvrir à intervalle de temps régulier, alors que la couverture semble devoir être plus fréquente dans les zones où le ratio de couverture Black- Scholes varie beaucoup. Une question naturelle dans ce sens est celle du choix optimal des paramètres de couverture pour un nombre de couvertures fixé, par exemple pour un critère de minimisation de la variance de l'erreur de réplication. Le problème correspondant est un problème de contrôle stochastique non-standard dans la mesure où il fait intervenir un nombre fini de temps d'arrêt. On parvient à ramener ce problème à une suite de problèmes d'arrêts optimaux classiques. On résout numériquement le même problème dans le modèle (discret) de Cox-Ross-Rubinstein, et l'on montre la convergence de l'algorithme quand le pas de discrétisation tend vers zéro par un argument type solutions de viscosité. On a développé un algorithme de différences finies (méthode d'Howard) pour le même problème, les résultats numériques correspondent de façon très satisfaisante. Actuellement, le travail en cours concerne l'étude d'autres critères (minimisation de l'espérance de la partie négative de l'erreur de couverture, travail sous la probabilité historique) [26].

6.3 Prix d'options américaines déduits d'options européennes

Participants : B. Jourdain, C. Martini.

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix d'une option américaine standard est solution d'un problème d'arrêt optimal, sous forme infinitésimale d'une inéquation variationnelle.

[Hen93] P. Henrotte, *Transaction costs and duplication strategies*, thèse de doctorat, University of Standford, 1993.

Le plan (t, x) se partage en 2 régions, la région d'exercice où par définition le prix de l'option est égal au payoff, et son complémentaire : la région de continuation. Dans celle-ci, le prix satisfait l'EDP classique de Black-Scholes. De plus, le recollement à la frontière (libre) entre les 2 régions est très régulier (travaux de A.Friedmann, Van Moerbecke …). De plus, le prix est fonction croissante du temps. Une idée naturelle pour obtenir une telle situation est donc de partir d'une carte de prix européens et de prélever la zone où le prix est fonction croissante du temps (région "thêta" positive en jargon financier), et de prolonger ailleurs la fonction obtenue par sa valeur le long de la frontière où la dérivée en temps s'annule (courbe thêta-zéro). On peut montrer, par une méthode solutions de viscosités, au moins dans le cas où le taux d'intérêt est nul, que ceci fonctionne. L'extension au cas général repose sur un argument probabiliste très simple, et cela mène à toute une nouvelle classe de formules explicites pour des options américaines. Malheureusement, on ne sait pas caractériser les payoffs ainsi obtenus (i.e. prélevés sur la courbe théta-zéro de prix d'options européennes). L'application de la méthode précédente au Put américain est basée sur une famille de payoffs européens tels que la frontière thêta-zéro possède les mêmes caractéristiques que celles qu'on connait de la frontière libre du Put Américain (plus précisément: bonnes limites en zéro et à l'infini, analycité, équivalent de Barles&al. et de Lamberton en zéro). Il est facile d'exhiber une telle famille paramétrée par une mesure, avec 2 conditions de moments. On montre que le payoff américain associé coïncide avec celui du Put en dehors de l'intervalle $[K^*, K]$, où K^* est le strike perpétuel, et a les bonnes dérivées premières (i.e. -1) en K^{*+} et K^-. L'étape suivante est de choisir une famille paramétrée pour laquelle les calculs sont simples, puis de choisir le paramètre tel que la norme infinie (sur une discrétisation donnée de $[K^*, K]$) soit minimale. Les résultats numériques sont très bons [28, 25, 32].

6.4 Convergence des méthodes d'arbre pour les options américaines sur trajectoires

Participants : C. Martini, S. Nabi, E. Temam.

Le pricing des options américaines sur trajectoires (par exemple le Call Lookback américain, le Call Asiatique à Strike flottant américain …) dans le modèle de Black-Scholes, dans le cadre de la théorie standard de l'évaluation par absence d'opportunités d'arbitrage conduit à un problème d'arrêt optimal (ou bien une inéquation variationnelle). Ce problème n'a pas encore été étudié très précisément d'un point de vue numérique, même si des méthodes générales d'approximations existent, de type probabiliste (méthodes "à la Kushner"), ou bien de type analytique (approximation des réduites de Lamberton et Pagès [LP]). Un des seuls articles publiés sur la convergence des méthodes d'arbres (Barraquand et Pudet [BP96]), ne fait pas référence à la méthode de Kushner et il semble que la preuve donnée de la convergence de l'algorithme soit fallacieuse. Dans son mémoire de DEA (Université Paris 1), Sami Nabi a appliqué les méthodes de consistence locale de Kushner au pricing des options asiatiques européennes

[LP] D. Lamberton, G. Pages, « Sur l'approximation des réduites », *Annales de l'Institut Henri Poincaré 26*, 2, p. 331–355.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

et américaines, et il montre qu'il faut raffiner dans la direction de la moyenne la discrétisation proposée par Barraquand et Pudet. Emmanuel Temam a programmé les algorithmes correspondants, qui seront intégrés au logiciel Premia2. Sami Nabi prolonge actuellement son mémoire de DEA avec l'élaboration d'algorithmes de type discrétisation de semi-groupes pour les options Lookback, à partir de l'article de Lamberton et Pagès [36].

6.5 Étude théorique du risque modèle pour la gestion des produits dérivés.

Participants : S. Deparis, D. Lamberton, C. Martini.

Les résultats les plus récents sur le pricing d'options, en marché complet ou incomplet, supposent que le modèle, au sens probabilité sous laquelle est spécifiée la dynamique stochastique du sous-jacent de l'option, est fixé, même si les prix d'achat-vente sans risque d'une option ne dépendent que de la classe d'équivalence de cette probabilité. Malheureusement, en pratique on est confronté à une incertitude structurelle de modèle, qui s'identifie typiquement à une incertitude sur la volatilité. Il semble très pertinent de spécifier non pas une probabilité mais une famille de probabilités parmi lesquelles le bon modèle a des chances de se situer. La situation qu'on ne sait pas traiter théoriquement est celle où la famille en question n'est pas dominée au sens statistique. Dans certain cas (en particulier celui de l'intervalle de volatilité traité par Avellaneda, Lévy, Paras et aussi Lyons), on peut appliquer des résultats de contrôle stochastique pour calculer le plus petit prix de surcouverture. La situation dans le cas général est encore mystérieuse Les travaux d'Avellaneda montrent, en dimension 1, comment calculer une surcouverture lorsque la volatilité est inconnue mais reste bornée. Lorsque l'on cherche à étendre les travaux d'Avellaneda [ALP95] en dimension 2, soit pour une option sur 2 actions ou pour un produit sur taux d'intérêt, les difficultés ne sont pas théoriques (le cas multi-dimensionnel a été étudié par Lyons [T.J95]) mais numériques. En effet, parmi les schémas numériques (de type Barles [BP91]) dont la convergence repose sur le principe du maximum discret on ne sait pour l'instant exhiber que des schémas de complexité N^4 dans le cas dégénéré (par exemple, une corrélation inconnue entre -1 et $+1$). Dans un travail récent, Kushner [H.J98] propose des méthodes d'arbres qui sont aussi, après une lecture minutieuse, en N^4, tout comme Menaldi [J.L]. Ce phénomène ne semble pas encore bien compris, et l'étude numérique de ce type de schéma semble encore à faire.

[ALP95] M. Avellaneda, A. Levy, A. Paras, «Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities», *Journal of Applied Finance 1*, 1995.

[T.J95] T.J. Lyons, «Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives», *Journal of Applied Finance 2*, 1995.

[BP91] G. Barles, P.E. Souganidis, «Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second-order equations», *Asymptotic Analysis 4*, 1991, p. 271–283.

[H.J98] H.J. Kushner, «Variance Control», 1998, Preprint.

[J.L] J.L. Menaldi, « Convergence Rates of Approximation Schemes in stochastic control », *SIAM Journal of Control and Optimization*.

6.6 Processus stables et évaluation d'options

Participants : A. Tisseyre, A. Sulem.

La thèse d'Arnaud Tisseyre est consacrée à l'utilisation de processus géométriques stables de la forme :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t u(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB_\alpha s\right\}$$

où $B_\alpha = (B_\alpha(s))_{s\geq 0}$ est un processus α-stable, pour modéliser les prix d'actifs (taux de change, etc ...), en substitution au modèle classique de Black et Scholes.

On montre sur des estimations statistiques, qu'une valeur de α proche de 1.65 permet de rendre compte de façon convenable des données observées.

Un premier travail a été consacré au développement de méthodes numériques analytiques permettant d'évaluer la densité, la fonction de répartition et la transformée de Laplace partielle des lois α-stables. A. Tisseyre a obtenu des résultats théoriques permettant d'exprimer ces fonctions à l'aide soit de séries, soit d'intégrales complexes, soit de développements asymptotiques. Ces résultats sont appliqués pour l'évaluation de prix d'options dans le cadre de modèles "stables" (voir [12]).

6.7 Contrôle optimal de systèmes avec retard

Participants : I. Elsanosi (Univ. d'Oslo), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Nous étudions les systèmes décrits par l'équation stochastique différentielle avec retard suivante :

$$dX(t) = b(t, X(t), X(t-\delta), Y(t))dt + \sigma(t, X(t), X(t-\delta), Y(t))dW(t) - d\gamma(t)$$

avec

$$Y(t) = \int_{-\delta}^0 e^{\lambda s} X(t,s)ds,$$

et les valeurs initiales

$$X(s) = \xi(s), \quad -\delta \leq s \leq 0$$

où b et σ sont des fonctions données, $\delta > 0$, et W est un processus de Wiener. Le processus de contrôle $\gamma(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté, croissant, et continu à droite. Il représente des flux de dividendes à optimiser ou bien peut modéliser des stratégies de "harvesting" ("pêche") pour les systèmes biologiques. Soit

$$T = \inf\{t \geq 0\ ;\ h(s+t)X(t), Y(t)) \leq 0\}$$

où h est une fonction donnée. Le critère à optimiser est le suivant:

$$J^\gamma(s,\xi) = E^{s,\xi,\gamma}\left[\int_0^T u(s+t), X(t), Y(t))dt + \int_0^T \pi(s+t)d\gamma(t)\right]$$

où u et π sont des fonctions d'utilité.

Ce problème peut se formuler comme un problème de contrôle stochastique singulier et conduit à des inéquations variationnelles en dimension infinie à cause du retard. Nous avons obtenu des résultats explicites dans quelques cas particuliers (cf [23]) et prouvé un théorème de vérification pour ces inéquations variationnelles.

6.8 Contrôle stochastique ergodique - Application en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Participants : M. Akian [projet Meta2], A. Sulem, M. Taksar (Stony Brook University New York).

Nous avons achevé l'étude des inéquations variationnelles ergodiques associées à l'optimisation d'un taux moyen de profit.

Le modèle est celui décrit au paragraphe 4.1.3, mais sans consommation ($c(t) \equiv 0$) : soit un agent possédant un actif non risqué et n actifs risqués modélisés par des processus de diffusion log-normaux. On suppose que les transactions entre comptes entraînent des coûts proportionnels au montant de la transaction et sont modélisés par des contrôles singuliers. A chaque politique admissible $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, on associe les deux fonctionnelles de performance suivantes:

$$J^{\gamma}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \liminf_{T \to +\infty} T^{-1}(1-\gamma)^{-1} \log E\left[W(T)^{1-\gamma}\right], \quad \gamma \geq 0,\ \gamma \neq 1. \tag{7}$$

$$J^{1}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \liminf_{T \to +\infty} T^{-1} E\{\log W(T)\} \tag{8}$$

où $\gamma \geq 0$ représente le coefficient d'aversion au risque. Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés au critère J^1 uniquement, c'est à dire au cas $\gamma = 1$. L'objectif est de calculer

$$\sup_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} J^{1}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) =: \pi. \tag{9}$$

Ce problème se réduit à un problème de contrôle stochastique singulier avec critère ergodique. On obtient alors le taux moyen maximal π ainsi que la fonction potentiel correspondante comme solutions d'une inéquation variationnelle ergodique.

L'étude théorique de l'inéquation variationnelle a été menée à l'aide de la notion de solutions de viscosité. Nous avons en particulier travaillé cette année sur les problèmes d'unicité des solutions de viscosité de cette équation.

Sa résolution numérique a été effectuée à l'aide de l'algorithme FMGH basé sur l'algorithme de Howard et les multigrilles [Aki90].

Nous avons ainsi obtenu la stratégie optimale de transaction, c'est à dire que nous avons déterminé les frontières entre les régions où il est optimal d'acheter, de vendre ou de laisser évoluer sans transaction chaque actif.

La rédaction d'un article sur ces travaux est achevée (cf [21]) et a été soumis pour publication.

[Aki90] M. Akian, *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*, thèse de doctorat, Université Paris-IX Dauphine, Paris, 1990.

6.9 Optimisation dynamique de portefeuilles avec coûts fixes et proportionnels: un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel

Participants : J.-Ph. Chancelier, B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Mots clés : Inéquations quasi variationnelles, contrôle impulsionnel.

Nous étudions la politique optimale de consommation et d'investissement dans le cas où les transactions entre comptes entraînent non seulement des coûts proportionnels au montant de la transaction mais également un coût fixe $k > 0$ indépendant du montant de la transaction ([22]). Dans ce cas les transactions sont modélisées par des contrôles impulsionnels et la consommation par un contrôle de type régulier. L'objectif est de maximiser une fonction d'utilité de la consommation sur un certain horizon. On formule ce problème comme un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel qui conduit à une inéquation quasi variationnelle non linéaire. On étudie l'existence et l'unicité de la solution de viscosité de cette équation. Une des difficultés vient ici de ce que la fonction valeur est discontinue sur le bord du domaine et que l'opérateur d'intervention est non local. On propose une méthode itérative qui permet de calculer la solution de l'IQV comme la limite croissante d'une suite de solutions d'inéquations variationnelles non linéaires. Avec Jean-Philippe Chancelier, nous étudions les méthode numériques pour la résolution de l'inéquation variationnelle ([20]).

6.10 Gestion de portefeuille dans un marché gouverné par des processus de diffusion avec sauts

Mots clés : Contrôle stochastique singulier, Diffusions avec sauts, Processus de diffusion réfléchis, Solution de viscosité, Inéquation variationelle, Équations intégro-différentielles, Gestion de portefeuille, Coûts de transaction..

Participants : N.C. Framstand (Univ. d'Oslo), B. Øksendal Univ. d'Oslo), A. Sulem.

On étudie la politique optimale d'investissement et de consommation d'un agent possédant un actif non risqué et un actif risqué modélisé par un processus de diffusion avec saut (processus de Lévy géométrique) On suppose donc que le prix $P(t)$ de l'actif risqué est un processus càdlàg satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$dP(t) = \alpha P(t)dt + \sigma P(t)dW(t) + P(t^-)\int_{-1}^{\infty} \eta \tilde{N}(dt, d\eta); \quad P(0) = p > 0. \tag{10}$$

où $\alpha, r, \sigma > 0$, $W(t)$ est un processus de Wiener,

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - tq(A); \quad t \geq 0,\ A \in \mathcal{B}(-1, \infty)$$

est le compensateur d'une mesure aléatoire homogène de Poisson $N(t, A)$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(-1, \infty)$ d'intensité $E[N(t, A)] = tq(A)$, q est la mesure de Lévy associée à N, et $\mathcal{B}(-1, \infty)$ désigne la σ-algébre de Borel sur $(-1, \infty)$.

On a montré qu'en l'absence de coûts de transaction, la solution est de la même forme que dans le cas d'une pure diffusion [29]. En particulier, le portefeuille optimal consiste à conserver dans l'actif risqué une fraction constante de la richesse. Cette constante est plus petite que dans le cas d'une diffusion pure. En présence de coûts de transaction proportionnels, On montre que la solution a la même forme que dans le cas d'une diffusion pure traité par Davis and Norman [MN90]. On montre en particulier qu'il existe sous certaines hypothèses un cône de non transaction D où il est optimal de ne faire aucune transaction tant que la position de l'investisseur s'y trouve et d'acheter et de vendre selon des temps locaux sur la frontière de D. On établit l'inéquation variationnelle intégro-différentielle associée à ce problème que l'on étudie par la théorie des solutions de viscosité.

6.11 Gestion de portefeuille dans le cas d'un marché gouverné par un Mouvement Brownien fractionnaire

Participants : Y. Hu (Univ. Kansas), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

On considère un marché de type Black et Scholes mais on remplace dans la dynamique du prix de l'actif risqué le mouvement brownien usuel par un mouvement brownien fractionnaire: Le prix $S(t)$ à l'instant $t \geq 0$ est ainsi:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t) \, ; \qquad S(0) = s > 0 \, , \tag{11}$$

où $a > r > 0$ et $\sigma \neq 0$ sont des constantes.

Pour H constant, $0 < H < 1$, le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H est le processus gaussien $B_H(t) = B_H(t, \omega)$; $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ de moyenne $E[B_H(t)] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et de covariance

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \tfrac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

pour tout $s, t \geq 0$. On suppose $B_H(0) = 0$.

Si $H = \frac{1}{2}$ alors $B_H(t)$ coincides avec le mouvement brownien standard $B(t)$.

Si $H > \frac{1}{2}$ alors $B_H(t)$ vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty \, .$$

où

$$\rho(n) = \mathrm{cov}(B_H(1), B_H(n+1) - B_H(n)).$$

$B_H(t)$ est *auto-similaire*, ce qui signifie que $B_H(\alpha t)$ a la même loi que $\alpha^H B_H(t)$, pour tout $\alpha > 0$. Cependant, $B_H(t)$ n'est ni une semi-martingale ni un processus de Markov. (voir [HB99]) On se restreint ici au cas $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Dans le cas d'un mouvement brownien standard $B(t)$, l'approche naturelle pour le problème de gestion optimale de portefeuille est la programmation dynamique, qui conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Dans le cas où $B(t)$ est

[MN90] M.H.A. Davis, A. Norman, «Port folio selection with transaction costs», *Mathematics of Operation Research 15*, 1990, p. 676–713.

[HB99] Y. Hu, B. Øksendal, « Fractional white noise calculus and applications to finance », Preprint University d'Oslo, 1999.

remplacé par $B_H(t)$, il n'est plus possible d'utiliser cette méthode car le système n'est plus markovien.

Nous utilisons ici la méthode des martingales, introduite par Cox et Huang [CC89,CC91]. (voir aussi [KLS87]), ce qui permet, bien que $B_H(t)$ ne soit pas une martingale (ni même une semimartingale) de trouver une solution explicite au problème.

6.12 Ambiguïté et Utilité

Participant : C. Zengjing.

Les modèles existants de fonctions d'utilité dans le cas stochastique en temps continu supposent que les comportements des agents sont représentés par une mesure de probabilité. Comme cela a été illustré par le paradoxe d'Ellsberg, ceci évacue a priori toute considération sur l'ambiguïté. On formule en collaboration avec l'économiste Larry Epstein une version en temps continu intertemporelle d'utilité dans laquelle la notion d'aversion à l'ambiguïté est prise en compte, voir [38].

6.13 $\mathcal{P}$-Martingale, g-martingale et application en finance

Participants : A. Sulem, C. Zengjing.

On introduit un nouveau concept : la $\mathcal{P}$-martingale qui développe la notion de g-martingale introduit par S. Peng [Pen97] et Chen and Peng [14] et de $\mathcal{E}$-martingale introduit par T. Cholli, C Stricker, and L.Krawczyk [CSK99], [CKS98]. On étend les inégalités "upcrossing /downcrossing" et l'inégalité de Doob aux $\mathcal{P}$-martingales. On obtient aussi un nouveau théorème de décomposition de Doob-Meyer. Ces résultats permettent de discuter l'évaluation de produits contingents pour un grand investisseur, c'est à dire tel que sa fortune affecte les taux d'intérêts.

Nous avons étendu le domaine des g-espérances de l'espace des variables aléatoires de carré intégrable à un espace plus gros. Nous étudions quelques propriétés de cette espérance comme la non additivité et les propriétés de Markov ainsi que les non-semigroupes et le générateur infinitésimal introduits par la g-espérance [39, 37].

6.14 Problèmes de temps d'arrêt optimal

Participants : D. Lefevre, A. Sulem.

[CC89] J. Cox, C.-F. Huang, « Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process », *Journal of Economic Theory 49*, 1989, p. 33–83.

[CC91] J. Cox, C.-F. Huang, « A variational problem arising in financial economics », *J. Mathematical Economics*, 20, 1991, p. 465–487.

[KLS87] I. Karatzas, J. Lehoczky, S.E. Shreve, « Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon », *Siam J. Control and Optimization*, 25, 1987, p. 1157–1186.

[Pen97] S. Peng, « BSDE and related g–expectation », *in : Research Notes in Math. Series 364, Backwards stochastic differential equations*, N. El Karoui et L. Mazliak (réd.), Pitman, 1997.

[CSK99] T. Chouli, C. Stricker, L. Krawczyk, «On Fefferman and Burkholder-Davis-Gundy inequalities for $\mathcal{E}$-martingales», *Probab. Theory Relat. Fields*, 1, 1999, à paraître.

[CKS98] T. Chouli, L. Krawczyk, C. Stricker, «$\mathcal{E}$-martingales and their applications in mathematical finance», *Ann. Probab. 2*, 1998, p. 853–876.

Nous caractérisons la règle d'arrêt et la fonction valeur optimale pour un problème où la fonction reward g est de la forme

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_p - x_(p+1) - \cdots - x_n$$

et lorsque $x_1, \ldots, x_n$ suivent des mouvements browniens géométriques éventuellement correllés. Ceci est motivé par de nombreux problèmes empruntés tant au champ de la prise de décision en finance qu'à la théorie des options américaines. Dans un premier temps, nous étudions le cas correspondant à $p = 1$, $n = 2$ (cas 1). Dans cette situation, B. Øksendal et Y. Hu dans [HB98] ont donné les conditions exactes de validité des formules explicites de la fonction valeur et de la région d'arrêt optimales. Leur résultat est basé sur un théorème faisant le lien entre le problème d'arrêt optimal et des inéquations variationnelles. Afin de quantifier l'apport de ce théorème, nous explorons la méthode du smooth pasting. Pour cela, nous ramenons le problème d arrêt optimal bidimensionnel correspondant au cas 1 en un problème unidimensionnel grâce à un changement de probabilité. L'application de la technique du smooth pasting ne permet pas alors une résolution complète du problème proposé. Nous faisons ainsi apparaître le principe du smooth pasting comme une condition nécessaire du premier ordre pour une solution du problème d'arrêt optimal : pour une résolution complète et rigoureuse du cas 1, il manque ensuite les conditions du second ordre, suffisantes, qui interviennent dans la preuve d'Øksendal et Hu. Toutefois, la méthode proposée dans [HB98] implique de deviner ou d'intuiter la forme de la fonction valeur. Nous donnons alors une nouvelle preuve du résultat d'Øksendal et Hu en construisant effectivement la fonction valeur et la région d'arrêt optimales pour le cas 1. Dans un deuxième temps, nous résolvons le cas n-dimensionnel avec $p = 1$ (cas 2) pour la fonction reward g décrite précédemment, par la résolution de l'inéquation variationnelle associée. Nous étendons ensuite le résultat précédent à une fonction reward de la forme $-x_1+x_2+\ldots+x_n$ (cas 3 correspondant à une étude avec $-g$, $p = 1$, n quelconque). Enfin, dans le cas général, nous prouvons simplement la convexité de la fonction valeur et de la région d'arrêt optimales : ceci repose de manière cruciale sur la structure particulière de la fonction reward g : l'homogénéité et la convexité de g se portent sur la fonction valeur optimale, ce qui permet ensuite de caractériser la région d'arrêt optimale comme un sous-ensemble convexe (voir [35]).

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Processus stables et "pricing" d'options

Participants : A. Sulem, A. Tisseyre (Banque Hervet).

Il s'agit d'une étude sur l'utilisation des processus stables menée dans le cadre d'une convention Cifre avec la Banque Hervet (voir description §6.5).

7.2 Premia : un pricer d'options

Participants : C. Akeboue, L. Caramellino, A. Gille-Genest, R. Gillet, J. Indraghoby,

[HB98] Y. Hu, B. Øksendal, « Optimal time to invest when the price processes are geometric Brownian motions», *Finance and Stochastic 2*, 1998, p. 295–310.

A. Ikethea, B. Lapeyre, C. Martini, O. Pironneau, A. Sulem, P. Strachman, E. Temam, A. Zanette.

Un consortium de banques s'est mis en place autour du pricer Premia. En contrepartie d'une cotisation annuelle, les banques participant au consortium disposent régulièrement des nouvelles versions (tous les 6 mois) du logiciel et du droit d'intégrer les routines dans leur chaîne de production.

Actuellement, le consortium est composé de : Caisse des Dépots et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Caisse Centrale des Banques Populaires. La Société Générale, BNP-Paribas et EDF ont été démarchées en octobre 1999 et vont probablement adhérer au consortium.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web

http://cermics.enpc.fr/ premia

Le logiciel Premia1 a été livré en mai 1999, la nouvelle mouture Premia2 est prévue pour Décembre 1999, et la mise à disponibilité de Premia2 sur le web l'année d'après.

7.3 Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change

Participants : X. Joseph, A. Sulem.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre avec la Coface. Le but du travail consiste à étudier la couverture (stratégies, efficacité, risque toléré) de contrats d'assurance sur taux de change (typiquement des risques de change à l'exportation) conditionnés par un facteur exogène aux taux de change, à savoir le taux de conclusion (taux de réussite aux appels d'offre) et de modéliser une gestion dynamique des contrats ainsi couverts.

Les garanties de change usuelles de la Coface sont des ventes à terme avec intéressement, dont la mise en place définitive est soumise à une condition suspensive, qui consiste en la constatation de l'échec de l'assuré exportateur à l'appel d'offre. La délivrance de la garantie s'accompagne du versement d'une prime d'engagement, la levée de la condition suspensive d'une prime de conclusion, toutes deux versées à la Coface par l'assuré.

Il s'agit donc d'un instrument financier soumis à des aléas de type financier (taux de change et d'intérêt) et non financier (taux de conclusion).

Après avoir modélisé le risque de change et le risque de conclusion, le problème est de déterminer des stratégies dynamiques de gestion des risques. Ces stratégies doivent respecter les limites de risque de perte autorisées, prendre en compte les coûts de gestion et de réajustement de couverture et permettre d'optimiser les prix de contrats.

Nous avons étudié 2 types de couvertures : (i)la stratégie 0-100, c'est à dire que le réajustement des positions n'a lieu que si la variation du cours de l'actif se fait au delà du cours fixé garanti de plus ou moins un certain retard prédéfini. (ii) la stratégie optionnelle qui consiste à couvrir chaque garantie par des options de change (cf. [31]).

7.4 Évaluation numérique d'options sur taux

Participants : B. Lapeyre, M. Noubir.

Contrat ENPC/Crédit Lyonnais.Crédit Lyonnais (contrat ENPC) : Évaluation d'options dans des modèles de marché (thèse de N. Mouaya, encadrement : B. Lapeyre).

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

- A. Sulem responsable de l'Action coopérative Mathfi sur les mathématiques financières. Adresse web : http://amadeus.inria.fr/ sulem/action.html.
- Participation de membres de Mathfi au GDR FIQUAM "Méthodes quantitatives en finance" du CNRS. Ce GDR fait partie du Programme Risques et Complexité des systèmes financiers du CNRS .

8.2 Actions européennes

Un programme d'action intégrée Aurora 99 franco - norvégien est en place depuis le début de l'année avec l'Université d'Oslo (responsable français : Agnès Sulem, responsable norvégien : Professeur Bernt Øksendal).

8.3 Relations internationales

- Création et responsabilité du projet "Mathématiques financières" de l'Institut franco-russe Liapunov. Responsable français: A Sulem, responsable russe: A. Shiryaev (prolongé jusqu'en juin 2000).

  Site Web: http://www.inria.fr/international/liapunov.html
- Cours "Numerical methods for option pricing", Université de Mexico, août 1999 (B. Lapeyre).

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- B. Jourdain, B. Lapeyre, C. Martini, D. Talay : Cours de formation continue du Collège de l'École Polytechnique : "Méthodes de Monte-Carlo en finance", juin 1999.
- C. Martini et B. Lapeyre (CERMICS/ENPC): organisateurs d'un groupe de travail sur les méthodes numériques en finance. Ce groupe se réunit tous les 15 jours à l'université de Marne-La-Vallée en alternance avec le groupe de travail "Méthodes Stochastiques et Finance" de l'Université de Marne-La-Vallée.
- A. Sulem : Organisateur d'une école sur les mathématiques financières en juin 1999 à l'Inria Rocquencourt.

9.2 Enseignement universitaire

– J.F. Delmas, B. Jourdain

  - Cours à l'ENPC : "Méthodes mathématiques pour la finance".

– B. Lapeyre

  - Maître de conférence à l'École Polytechnique (PC de probabilités, de finance et de méthodes de Monte-Carlo).

  - Cours de DEA à Marne-la-Vallée : "Méthodes de Monte-Carlo, application en finance".

  - Cours à l'ENPC (en collaboration avec J.F. Delmas) : "Processus aléatoires et méthodes de Monte-Carlo".

– B. Lapeyre, A. Sulem

  - Cours de DEA à l'Université Paris 6 : "Méthodes numériques en finances", (DEA de probabilités, option Finance).

– C. Martini

  - Cours de DEA (9h) à l'Université Paris 1 Sorbonne: "Méthodes mathématiques de la finance"

  - Cours de Master (21h) à l'École Polytechnique: "Évaluation d'options par absence d'opportunités d'arbitrage"

  - Cours de DEA (3h) à l'Université Paris 6 : "Introduction aux Méthodes Numériques en Mathématiques Financières"

– C. Patry

  - 48 heures de TD de statistiques et probabilités en 1ère année de Deug Gestion et Economie Appliquée (GEA) à Dauphine.

– A. Sulem

  - Cours de DEA, Université Paris 9 Dauphine, DEA Mase, 18 heures de cours. *Titre*: "Méthodes numériques en gestion de portefeuilles".

  - Cours de DEA, Université Paris 1, DEA MMME, 21 h. de cours, "Contrôle stochastique et Applications financières'.

  - ESSI (option Imafa "Informatique et mathématiques appliquées à la finance et à l'assurance ". Sophia-Antipolis). "Bases du contrôle stochastique et applications en finance" (10 heures de cours).

9.3 Encadrement de stages

– B. Lapeyre

  - Aziz Ikheteah "Méthodes de réduction de variance en finance". Stage Institut Galilée, Université Paris 13.

- Carole Camozzi "Comparaison de schémas de discrétisation d'EDS". Stage DEA Université Paris 6.

– C. Martini

- Renaud Gillet "Conception et réalisation d'un testeur dynamique de gestion d'options." Stage Institut Galilée, Université Paris 1.

- Sami Nabi "Consistance locale pour la méthode Forward Shooting Grid", mémoire de DEA Université Paris 1.

– A. Sulem

- Stanislas Bourgeois : stage de DEA Paris 6 - (avril à septembre 1999) en liaison avec Bernard Lapeyre du Cermics.

- David Lefevre : stage de DEA Université Paris 1 (avril à septembre 1999) "Détermination du temps d'investissement optimal".

- Mohamed Mnif : contrôle stochastique impulsionnel et applications en gestion de portefeuilles, stage de DEA Université Paris 1 (avril à septembre).

- Omar Dia : stage de DEA Université Paris-Dauphine) (avril à septembre 1999) effectué au sein du Crédit Agricole Indosuez.

- Xavier de la Porte du Theil : Couverture statique de swaptions bermudas effectué au sein du Crédit Agricole Indosuez, (avril à septembre 1999) stage de DEA Université Paris-Dauphine.

- Céline Jacod : Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross à un facteur - Étude et calibration, stage effectué à la Caisse Autonome de Refinancement, (avril à septembre 1999) stage de DEA Université Paris-Dauphine.

- Mamadou Wane : "Gestion dynamique de portefeuille par un processus de contrôle mixte", mémoire de DEA Université Paris-Dauphine.

9.4 Encadrement de thèses

B. Lapeyre :

– Frédéric Ksas, à l'ENPC : "Techniques de suites à discrépance faible appliquées au calcul d'options", (co-encadrement avec Monique Piquet - Université d'Evry).

– Mouaya Noubir, à l'ENPC : "Calcul de prix d'option exotiques dans les modèles de marché".

– Emmanuel Teman, à l'Université de Paris 6 : "Méthodes approchées pour l'évaluation et la couverture d'options".

9.5 Soutenance de thèse

- Arnaud Tisseyre,le 25 octobre 1999 à l'Université Paris-Dauphine : "Stabilité et Finance". Mention très honorable avec félicitations du jury et proposition de prix de thèse. Directeur de thèse : A. Sulem.

- Rutao Zhang, le 8 janvier 1999 à l'ENPC : "Couverture approchée des options européennes". Directeur de thèse : B. Lapeyre.

9.6 Participation à des colloques, séminaires, invitations

- B. Jourdain

  - "Prix d'options américaines déduits d'options européennes", Groupe de Travail Méthodes Numériques en Finance, Université de Marne La Vallée.

- C. Martini

  - "Closed formula for PutSpread-like payoffs in the Black-Scholes model", 1^{st} Hammamet International Conference on Mathematical Finance, Hammamet (Tunisie).

  - "American prices embedded in european prices", MiniSymposium on Mathematical Finance, 3^{rd} Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Ascona (Suisse).

  - "Présentation du logiciel Premia", Groupe de Travail Méthodes Numériques en Finance, Université de Marne La Vallée.

  - "Prix américains déduits de prix européens", Séminaire Bachelier, Institut Henri Poincaré,

  - "A new approximation of the American Put price in the Black-Scholes model", et "Présentation du logiciel Premia" à la Banque Paribas-Londres, 27 octobre.

  - "Prix d'options américaines déduits de prix d'options européennes", Groupe de Travail Mathématiques de l'Economie, IHP, 19 novembre.

  - Fonction maximale du semigroupe et arrêt optimal", Groupe de travail en Probabilités, Université du Mans, 26 novembre.

- C. Patry

  - "Couverture discrète optimale", C.Patry, Groupe de Travail Méthodes Numériques en Finance, Université de Marne La Vallée.

- A. Sulem

  - Présentation d'une communication à la " Conference on Lévy Processes: Theory and Applications", University of Aarhus, Danemark, janvier 18-22, 1999 titre de la communication: "Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market"

  - Conférence invitée au " Second Nordic-Russian Symposium on Stochastic Analysis, Beitostølen, Valdresflya, Norvège, août 1-6, 1999

- Conférence invitée a la "Conference on Stochastic Analysis, Random fiels and Applications - Minisymposium on Stochastic Methods in Financial Models", 22-24 septembre 1999, Ascona, Suisse. Titre de la conference: " Combined stochastic and impulse control and application to potfolio optimisation with transaction costs"

– E. Temam

- "Présentation du logiciel Premia", Groupe de Travail en Mathématiques Financières, Ecole Polytechnique.

– Chen Zengjing

- Invité par le professeur J. Lepeltier, département de mathématiques, Université du Mans, mars.

Titre de la conférence: g-Expectation and its application.

- Invité par les professeurs Hu Ying et Memin, département de mathématiques, Université de Rennes, mars.

Titre de la conférence: g-Expectation and its application.

- Invité à la 2ème Conférence Internationale "Backward stochastic differential equations", Université du Mans, juin.

Titre de la conférence : Some properties of Backward stochastic differential equations.

- Invité à "International Economic Conference on New themes in decision theory under uncertainty", Université Paris 1, juillet.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] A. Bar-Ilan, A. Sulem, «Explicit solution of inventory problems with delivery lags», *Mathematics of Operations Research 20*, 3, August 1995, p. 709–720.

[2] M. Akian, J.L. Menaldi, A. Sulem, «On an Investment-Consumption model with transaction costs», *SIAM J. Control and Optim. 34*, 1, Janvier 1996, p. 329–364.

[3] F. Bonnans, A. Sulem, «Pseudopower Expansion of Solutions of Generalized Equations and Constrained Optimization Problems», *Mathematical Programming 70*, october 1995, p. 123–148.

[4] P. Jaillet, D. Lamberton, B. Lapeyre, «Variationnal inequalities and the pricing of American options», *in : Acta Applicandae Mathematicae*, 1990.

[5] D. Lamberton, B. Lapeyre, «Hedging index options with few assets», *Mathematical Finance*, 1992.

[6] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Une introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, édition Collection Mathématiques et Applications, Ellipses, 1992.

[7] D. Lamberton, B. Lapeyre, *An introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman et Hall, 1996.

[8] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Introduction aux méthodes de Monte-Carlo*, édition Collection Mathématiques et Applications, Springer Verlag, 1997.

[9] C. Martini, « Polynômes harmoniques sur l'espace du bruit blanc », *Potential Analysis 9*, 4, décembre 1998, p. 351–382.

[10] A. Sulem, A. Shiryaev, « Mathématiques financières », *in: Actes Journées Mathématiques financières*, Inria Rocquencourt, Paris, mai 1998.

Livres et monographies

[11] B. Lapeyre, A. Sulem, D. Talay, *Understanding Numerical Analysis for Option Pricing*, Cambridge University Press, L.C.G. Rogers and D. Talay (eds). en préparation.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[12] A. Tisseyre, *Stabilité et Finance*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, Paris, octobre 1999.

[13] R. Zhang, *Couverture approchée des options européennes*, thèse de doctorat, ENPC, Champs sur Marne, janvier 1999, `http://cermics.enpc.fr/theses/99/zhang-ruota.ps.gz`.

Articles et chapitres de livre

[14] Z. Chen, S. Peng, « A general downcrossing inequality for g-martingale », *Statistics and Prob. Letters 45*, 1999.

[15] C. Martini, « Harmoniques sphériques et représentations irréductibles de $O(\infty)$ », *Potential Analysis 10*, 1, février 1999, p. 55–90.

[16] C. Martini, « On the marginal laws of one-dimensional stochastic integrals with uniformly elliptic integrand », *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, novembre 1999.

[17] C. Martini, « Propagation of convexity by markovian and martingalian semigroups », *Potential Analysis 10*, 2, mars 1999, p. 133–175.

[18] N.C. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market with Proportional Transaction Costs », *Journal of Mathematical Economics*, 1999, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[19] Y. Hu, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal portfolio in a fractional Black & Scholes market », *in: International Conference on Mathematical Physics and Stochastic Analysis (in honor of Ludwig Streits 60th birthday)*, R. V. Mendes (éditeur), Lisbon, October 1998. Preprint series n.13, Institute of Mathematics, University of Oslo, august 1999.

[20] J.Ph. Chancelier, B. Øksendal, A. Sulem, « Combined stochastic control and Optimal stopping with application to portfolio optimisation with fixed transaction costs », *in: Actes de la conférence Ascona 99 on stochastic analysis*, Birkhauser Verlag, 1999.

Rapports de recherche et publications internes

[21] M. Akian, A. Sulem, M. Taksar, « Dynamic optimisation of a long term growth rate for a mixed Portfolio with transaction costs. The logarithmic utility case », *Rapport de recherche nº 3626*, Inria, Rocquencourt, février 1999, Soumis à Finance and Stochastics, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3626.html`.

[22] B. Øksendal, A. Sulem, «Optimal Consumption and Portfolio with both fixed and proportional Transaction Costs: A Combined Stochastic Control and Impulse Control Model», *preprint series nº 19*, Université d'Oslo, octobre 1999.

[23] I. Elsanosi, B. Øksendal, A. Sulem, «Some Solvable stochastic control problems for systems with delays», *preprint series*, Université d'Oslo.

[24] E. Gobet, E. Temam, « Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs », *Prépublication nº 177*, Cermics, Champs sur Marne, 1999, soumis à Finance and Stochastics.

[25] B. Jourdain, C. Martini, « American prices embedded in European prices », *Rapport de Recherche nº 3799*, Inria, Rocquencourt, novembre 1999, Prépublication Cermis n. 182 et soumis à Acta Applicandae Mathematicae, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3799.html`.

[26] C. Martini, C. Patry, « Variance optimal hedging in the Black-Scholes model with a given number of transactions », *Rapport de Recherche nº 3767*, Inria, Rocquencourt, septembre 1999, soumis à Finance and Stochastics, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3767.html`.

[27] C. Martini, « On the martingal laws of one-dimensional stochastic integrals with uniformly ellptic integrand », *Rapport de Recherche nº 3696*, Inria, Rocquencourt, mai 1999, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3696.html`.

[28] C. Martini, « The uvm model and American Options », *Rapport de Recherche nº 3697*, Inria, Rocquencourt, mai 1999, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-3697.html`.

[29] N.C. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market », *Discussion Paper nº 5*, Norwegian School of Economics and Business Administration, mars 1999, and Proceedings Workshop on Mathematical Finance, Inria, Paris 1998.

[30] E. Temam, «Monte-Carlo methods for Asian options», *Prépublication nº 144*, Cermics, 1998.

Divers

[31] X. Joseph, «Introduction à la couverture des garanties de change Coface», manuscript Coface.

[32] B. Jourdain, C. Martini, « Another Approximation for the American Put », en préparation.

[33] B. Lapeyre, C. Martini, « The Premia project », Ercim news, à paraître.

[34] B. Lapeyre, E. Temam, «Competitive Monte-Carlo methods for the pricing of Asian options», 1999, soumis à Computational Finance.

[35] D. Lefevre, A. Sulem, «Optimal time to invest for general reward functions», en préparation.

[36] C. Martini, S. Nabi, E. Temam, « On the convergence of lattice methods for path-dependant claims », en préparation.

[37] C. Zengjing, « g-expectation and related properties », en préparation.

[38] C. Zengjing, L. Epstein, « Ambiguity Risk and Asset Returns in Continuous time », Econometrica, 1999, soumis.

[39] C. Zengjing, A. Sulem, « $\mathcal{P}$-martingale and its applications », en préparation.