INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet OMEGA

Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les mathématiques financières

Nancy et Sophia Antipolis

THÈME 4B

Rapport d'Activité

1999

Table des matières

OMEGA est un projet bi–localisé entre les unités de recherches de Nancy et de Sophia Antipolis.

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Denis Talay [DR Inria]

Responsable permanent à Nancy

Bernard Roynette [Professeur, université Henri Poincaré]

Assistantes de projet

Sandrine Chevris [TR Inria (à Sophia Antipolis)]
Geneviève Pierrelée [ATR Inria (à Nancy)]

Personnel Inria

Mireille Bossy [CR]
Madalina Deaconu [CR]

Personnel Université

Philippe Chassaing [MC, université Henri Poincaré (Nancy)]
Axel Grorud [MC, université de Provence (Marseille) et Ura-CNRS 225]
Pierre Vallois [Professeur, université Henri Poincaré (Nancy)]

Personnel ENSAE

Nathalie Pistre [Professeur au Ceram jusqu'au 1er septembre 1999, puis professeur à l'Ensae]

Ingénieur expert

Jérôme Francescatto [Janvier 1999]

Chercheurs doctorants

Christophe Berthelot [depuis le 1er novembre 1999, boursier Cifre Bull et INRIA]
Sébastien Chaumont [depuis le 1er novembre 1999, boursier Dyade]
Ndeye Awa Diop [depuis le 1er septembre 1999, boursière CIES]
Marie–Pierre Etienne [depuis le 1er septembre 1999, allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]
Claire Gauthier [boursière Cifre, CCF et Inria]
Hélène Ganidis–Cochard [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]
Jean–Sébastien Giet [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]

Samuel Herrmann [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]
Sylvain Maire [PRAG, université de Toulon et du Var]
Jean–François Marckert [ATER, université Henri Poincaré (Nancy)]
Hadiza Moussa Saley [boursière du gouvernement nigerien, université Henri Poincaré (Nancy)]
Hervé Régnier [université de Provence, Caisse Autonome de Refinancement]
Oliver Schein [jusqu'au 15 avril 1999, université de Darmstadt]
Etienne Tanré [élève de l'Ecole Normale de Cachan, étudiant en thèse à l'université Henri Poincaré (Nancy)]
Olivier Vaillant [allocataire MESR, université de Provence]
Agnès Volpi [PRAG, Esstin (Nancy)]
Zheng Ziyu [depuis le 1er septembre 1998, université de Shamdong]

Chercheur post–doctorant

Abdelkarem Berkaoui [du 1er avril au 30 juin, université de Cady Ayyad, Marrakech]

Chercheurs invités

Brahim Boufoussi [du 4 au 27 décembre 1998, université de Cady Ayyad, Marrakech]
Alexander Gottlieb [du 15 septembre au 19 octobre 1999, université de Californie, Berkeley]
Anatoli Manita [de janvier à mars puis de septembre à novembre, université de Moscou]
Ely Merzbach [juillet 1999, université de Bar–Ilan, Ramat Gan, Israël]
Youssef Ouknine [janvier 1999, université de Cady Ayyad, Marrakech]
Philip Protter [juillet 1999, Purdue University, USA]

Stagiaires

Ndeye Awa Diop [avril–juin 1999]
Sébastien Chaumont [avril–juin 1999]
Laurent Laumesfield [mai–juin 1999]
Laurent Prigneaux [mai–juin 1999]

Collaborateurs extérieurs

Bernard De Meyer [Professeur, Esstin (Nancy)]
Francine Diener [Professeur, université de Nice–Sophia Antipolis]
Marc Diener [Professeur, université de Nice–Sophia Antipolis]
Marco Dozzi [Professeur, université Nancy 2]
Mihai Gradinaru [MC, université Henri Poincaré (Nancy)]
Angelo Koudou [MC, IUT, université Nancy 2]
Sophie Wantz–Mézières [MC, IUT, université Nancy 2]

2 Présentation et objectifs généraux

Le projet OMEGA est bilocalisé entre les unités de Sophia Antipolis et de Nancy. Sa composante nancéenne est rattachée à l'Institut Élie Cartan.

Le principal thème de recherche d'OMEGA est l'analyse de méthodes numériques probabilistes, avec deux champs d'application privilégiés : la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires et la modélisation et la simulation en mathématiques financières. Les méthodes que nous étudions impliquent la simulation de processus stochastiques. L'analyse numérique de ces méthodes en est encore à ses débuts, alors qu'elles sont utilisées dans l'ingéniérie de pointe de secteurs industriels divers (secteurs nucléaire, électrique, électrotechnique et bancaire par exemple) pour résoudre des problèmes complexes ou de grande dimension. OMEGA effectue des travaux mathématiques portant sur la représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles, la conception d'algorithmes numériques probabilistes et la vitesse de convergence de tels algorithmes. Par ailleurs, OMEGA étudie les performances sur architectures parallèles des algorithmes développés et analysés. En effet, si les méthodes de Monte–Carlo sont souvent très bien adaptées à la programmation parallèle, c'est moins évident pour les méthodes qui font intervenir la simulation de particules dépendantes ou la simulation de processus à temps de vie aléatoire.

La théorie des processus stochastiques, en particulier des problèmes d'approximation de processus, est l'outil mathématique essentiel et commun à tous les problèmes traités.

À propos de la résolution d'EDP non linéaires : En ce qui concerne la résolution probabiliste d'équations aux dérivées partielles non linéaires, OMEGA étudie les méthodes de Monte–Carlo, les méthodes particulaires stochastiques et les méthodes ergodiques. Actuellement, nous nous intéressons essentiellement à leurs applications aux équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier–Stokes, etc.), aux équations du transport neutronique et aux modèles aléatoires de la turbulence ; certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques liées aux conditions aux bords, aux dégénérescences des opérateurs différentiels sous–jacents, aux phénomènes de fausses convergences, etc. Nous effectuons des études d'erreur d'approximation non asymptotiques, afin de donner des bornes pour l'erreur correspondant à tout choix des paramètres numériques : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. En amont, l'étape–clef consiste à interpréter l'algorithme comme la discrétisation d'une représentation probabiliste de la solution de l'EDP : une part de l'activité d'OMEGA concerne donc l'élaboration de représentations probabilistes appropriées. En aval, les estimations théoriques de vitesse de convergence sont systématiquement confrontées aux simulations numériques.

À propos de la modélisation et de la simulation en mathématiques financières : En mathématiques financières et en actuariat, OMEGA s'intéresse plus particulièrement aux méthodes de Monte–Carlo et aux modèles de marché. En ce qui concerne les méthodes de Monte Carlo, OMEGA considère les problèmes d'approximation spécifiques aux modèles financiers, par exemple la simulation de fonctionnelles *path dependent* et le calcul de dérivées d'espérances de ces fonctionnelles. En ce qui concerne les modèles de marché, les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement la sensibilité des stratégies de couverture des produits dérivés par rapport aux erreurs de modélisation et le calcul de stratégies de gestion du risque. OMEGA s'intéresse aussi à la définition de mesures de risque utilisables en pratique et cohérentes avec un modèle mathématique du marché. On étudie également des problèmes d'adossement et de risques de défaut de trésorerie. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données réelles.

3 Fondements scientifiques

3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Bernard Roynette, Denis Talay, Pierre Vallois.

De nombreux problèmes d'évolution linéaires ou non linéaires

$$\frac{du}{dt} = A(t,u)u + f(t,u) \tag{1}$$

peuvent être interprétés à l'aide de processus de Markov bien choisis : on interprète u à l'aide du générateur infinitésimal du semigroupe de transition d'un processus de Markov (X_t) ou bien à l'aide de l'adjoint de ce générateur. Les motivations de cette démarche peuvent être d'ordre théorique et/ou numérique. En effet, en particulier lorsque $X = (X_t)$ est solution d'une équation différentielle stochastique, le calcul stochastique permet parfois d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité ou de régularité de la solution de (1) plus efficacement que les techniques d'analyse habituelles : le théorème de Girsanov, le calcul de Malliavin, la propagation du chaos sont des outils puissants qui n'ont pas d'analogues en analyse « déterministe » des équations aux dérivées partielles. D'autre part, dès que l'on peut écrire la solution de (1) sous la forme d'une espérance du type $u(t) = \mathbb{E}F(X_\cdot)$ avec F fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de X entre 0 et t, on peut chercher à développer une méthode de Monte–Carlo pour approcher $u(t)$ même si on ne sait pas simuler des trajectoires exactes de X : il suffit de construire un processus proche (en loi) de X, en simuler un grand nombre de trajectoires entre 0 et t, évaluer la fonctionnelle F le long de chaque trajectoire simulée et enfin moyenner toutes les valeurs obtenues.

Donnons un exemple élémentaire. Considérons l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \Delta u(t,x),\ \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d \tag{2}$$

avec pour condition initiale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ une fonction mesurable bornée. Le paramètre ν est strictement positif, et est appelé « paramètre de viscosité » en mécanique des fluides ou « volatilité » en finance.

On vérifie facilement que la fonction

$$\forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d,\ u(t,x) := \mathbb{E}u_0(x + \sqrt{2\nu}W_t)$$

où (W_t) est un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ [1] satisfait (2) ainsi que $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ en tout point de continuité de u_0. Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher $u(t,x)$ par

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(x+\sqrt{2\nu t}\,g_i(\omega))$$

où les $\{g_i(\omega)\}$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centrées et de matrice de covariance $Id_{\mathbb{R}^d}$. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre : on sait effectuer des tirages gaussiens indépendants à l'aide d'appels à un générateur de nombres pseudo–aléatoires uniformément répartis ; en outre il est naturellement parallélisable : le i[e] processeur a la tâche d'engendrer $g_i(\omega)$. La vitesse de convergence est décrite par des théorèmes–limite tels que le théorème de limite centrale, la loi du logarithme itéré, l'inégalité de Berry–Esseen : la convergence est d'ordre $1/\sqrt{N}$, elle est donc lente. Toutefois, le coût de l'algorithme croît seulement linéairement avec la dimension d de l'espace puisqu'on simule Nd trajectoires d'un mouvement brownien unidimensionnel standard, et ce coût est indépendant du paramètre ν.

Typiquement, les méthodes de Monte–Carlo pour des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques peuvent permettre de traiter des problèmes extrêmes, en très grande dimension ou avec de très faibles viscosités, lorsqu'il serait difficile, ou démesurément coûteux, d'utiliser des algorithmes classiques.

Soit à présent le problème parabolique

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_j^i(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x),\\ \forall (t,x)\in]0,T]\times\mathbb{R}^d,\end{aligned} \tag{3}$$

où b est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et a une fonction à valeurs dans l'espace des matrices symétriques et définies positives. Sous certaines conditions, on sait que l'unique solution régulière vérifie

$$u(t,x) = \mathbb{E}u_0(X_T^{t,x}),$$

où $(X_\theta^{t,x})$ est le processus de Markov solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_\theta^{t,x} = x + \int_t^\theta b(s,X_s^{t,x})ds + \sum_{j=1}^{r}\int_t^\theta \sigma_j(s,X_s^{t,x})dW^j, \tag{4}$$

où les matrices $\sigma(t,x)$ sont des racines carrées des matrices $a(t,x)$. La discrétisation en temps

1. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ indicées par le temps : $\{X_t(\omega), t\in\mathbb{R}^+\}$; à ω fixé l'application $t\to X_t(\omega)$ est appelée « trajectoire ». Un exemple de processus est le mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, processus à trajectoires presque sûrement continues défini de la manière suivante : $W_0=0$ presque sûrement ; pour tout $0<s<t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $(t-s)Id_{\mathbb{R}^d}$, indépendante de la famille $\{W_\theta, 0\le\theta\le s\}$.

de (4) conduit naturellement au processus de Markov à temps discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{X}_0^{t,x} & = & x, \\ \bar{X}_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^{t,x} & = & \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x} + b(p\frac{T-t}{n},\bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})\frac{T-t}{n} \\ & & \\ & & +\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \sigma_j(p\frac{T-t}{n},\bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})(W_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^j - W_{p\frac{T-t}{n}}^j). \end{array}\right. \tag{5}$$

Il est facile de simuler des trajectoires indépendantes $(\bar{X}_\cdot^{t,x}(\omega_i))$ de ce processus puisque les variables aléatoires $W_{(p+1)(T-t)/n}^j - W_{p(T-t)/n}^j$ sont mutuellement indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance $(T-t)/n$. On peut donc numériquement approcher $u(t,x)$ par

$$u(t,x) \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(\bar{X}_T^{t,x}(\omega_i)).$$

La vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre N de simulations et du nombre n de pas de temps.

Le procédé s'étend dans des directions variées : problèmes elliptiques, problèmes de transport (applications en neutronique), problèmes avec conditions frontière de Dirichlet ou de Neumann, problèmes intégro–différentiels, etc.

Au lieu de vouloir résoudre (3), on peut s'intéresser au problème adjoint

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(t,x)p(t,x)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_j^i(t,x)p(t,x)), \quad \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \tag{6}$$

avec la condition : $p(t,x)dx$ converge faiblement vers une mesure de probabilité donnée lorsque t tend vers 0. Supposons (ce n'est pas une restriction) que cette mesure soit la masse de Dirac en x. Soit $(X_\cdot^{0,x}(\omega_i))$ des trajectoires indépendantes de la solution de (4) avec $t=0$. Sous de bonnes hypothèses, la mesure empirique

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{0,x}}(\omega_i)$$

converge faiblement vers $p(t,x)dx$. Cette remarque sous–tend une famille de méthodes particulaires stochastiques pour les équations aux dérivées partielles non linéaires de type *équation de McKean–Vlasov* :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial U_t}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}\Delta U_t - \operatorname{div}\left(U_t \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)U_t(dy)\right), \ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times]0,T], \\ U_{t=0} \ = \ U_0. \end{array}\right. \tag{7}$$

La fonction $b(\cdot,\cdot)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui intervient dans la partie non linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*. L'équation ci–dessus est considérée au sens des distributions. La théorie probabiliste de la *propagation du chaos* montre que la solution U_t s'interprète à l'aide de la loi limite d'un système de particules interagissant entre elles. La dynamique des particules est décrite par le système différentiel stochastique de dimension $N \times d$

$$\begin{cases} X_t^i = \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} b\left(X_s^i, X_s^j\right) ds + \sigma w_t^i, \ , \ i = 1, \ldots, N, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } U_0, \text{ indépendante de } X_0^j, \ i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

La *propagation du chaos* implique la convergence au sens des mesures, quand N tend vers l'infini, de la mesure empirique $1/N \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^i}$ vers U_t. En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction U_t. À partir de cette interprétation probabiliste, on développe un algorithme d'approximation de U_t fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$; la mesure initiale U_0 est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui fournit les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ci–dessus.

La complexité de l'analyse de la vitesse de convergence dépend essentiellement de la singularité éventuelle du noyau d'interaction $b(\cdot,\cdot)$. Pour la plupart des équations provenant de problèmes physiques (et en particulier pour les équations de Burgers ou de Navier–Stokes en dimension 2), le noyau d'interaction est singulier. La vitesse de convergence dépend du nombre N de particules et du pas de temps utilisé pour la discrétisation de (8).

Pour un aperçu de résultats sur les méthodes de Monte–Carlo et certaines méthodes particulaires stochastiques, on pourra consulter [8].

3.2 Analyse stochastique des algorithmes

Participants : Philippe Chassaing, Jean–François Marckert.

D'après Flajolet et Prodinger, le but de l'analyse des algorithmes est la compréhension de la complexité (coût de calcul) des algorithmes. L'évaluation de ce coût dans le pire des cas a suscité énormément de travaux, mais l'intérêt pour l'analyse en moyenne ou probabiliste va croissant. Le fondateur du domaine est Knuth, qui a consacré l'expression « analyse des algorithmes » dans les années soixante, et l'a illustré dans sa série monumentale d'ouvrages, « The Art of Computer Programming ». Ce domaine est très lié aux mathématiques discrètes, à l'analyse combinatoire, et à la théorie des probabilités.

D'après Sedgewick et Flajolet, l'analyse des algorithmes requiert un examen attentif de ces algorithmes qui conduit souvent à améliorer leur implémentation. Spécifiquement l'analyse en moyenne des algorithmes permet de mieux comparer plusieurs algorithmes remplissant la même tâche. Les exemples où l'on a démontré l'optimalité en moyenne d'un algorithme, parmi tous les algorithmes remplissant la même tâche, sont assez rares. Les exemples les plus classiques sont la recherche ou l'insertion d'une clé dans une liste rangée de longueur n, en $1{,}442\ldots\log(n)(1+o(1))$ comparaisons en moyenne (et $\log_2 n$ comparaisons aussi dans le pire des cas), et, plus délicat peut–être, la complexité du *sorting*: le problème de ranger dans l'ordre une liste désordonnée de n nombres, en effectuant un minimum de comparaisons 2 à 2. Ce dernier problème a été posé par H. Steinhaus en 1950, et résolu par Ford & Johnson en 1959 ($1{,}442\ldots n\log(n)(1+o(1))$ comparaisons en moyenne). Il est abondamment traité, souvent comme exemple introductif, dans la plupart des livres d'algorithmique (voir Aho, Hopcroft

& Ullman, Cormen, Leiserson & Rivest, Motwani & Raghavan, Reingold, Nivergelt & Deo, Sedgewick & Flajolet).

Dans les problèmes d'optimalité en moyenne, la difficulté principale est souvent de trouver une borne inférieure pour le coût moyen de tous les algorithmes remplissant la même tâche. Les exceptions célèbres sont justement le *sorting* et l'insertion, évoqués plus haut : la borne inférieure pour le coût moyen est aussi la borne inférieure bien connue de la profondeur moyenne d'une feuille de l'arbre de décision (voir par exemple Aho et al., p. 93), ce qui peut aussi être vu comme un argument simple de théorie de l'information. Malheureusement ce type d'argument semble hors sujet dans d'autres problèmes classiques, comme le problème de sélection : il s'agit de déterminer le k^e plus petit nombre d'une liste de n nombres en désordre, en faisant le minimum de comparaisons 2 à 2. Cunto & Munro ont fini par prouver en 1984 que le coût moyen optimal est de $n + k + o(n)$ ($k < n/2$) par des arguments ad hoc (pour un intéressant historique de ce problème, qui remonte à Lewis Carroll, et a été étudié par Steinhaus, Rivest, Tarjan, Milton Sobel, Picard, entre autres ... , voir Knuth [Knu81, tome III, p. 209-219])

Parmi les résultats d'optimalité en moyenne qu'on connaît, citons le résultat d'Odlyzko sur la recherche du maximum d'une marche aléatoire, le résultat d'Alonso et Reingold et Schott sur le problème de la majorité. Parmi les problèmes encore ouverts, un des plus célèbre est celui de trouver le nombre moyen de comparaisons minimal nécessaire pour fusionner deux listes bien rangées de n et m nombres respectivement en une liste bien rangée de $n + m$ nombres (voir Knuth).

4 Domaines d'applications

4.1 Méthodes numériques probabilistes en ingéniérie

Mots clés : transport neutronique, mécanique des fluides, turbulence, polymère, mécanique aléatoire.

Les méthodes numériques probabilistes sont utilisées dans des domaines variés. Nous avons abordé les sujets suivants : les calculs de criticité pour des modèles de transport neutronique par méthodes de Monte–Carlo, la simulation de modèles stochastiques d'écoulements turbulents, les simulations moléculaires de chaînes de polymères, les méthodes de vortex aléatoire pour la résolution des équations de la Mécanique des Fluides. Pour beaucoup de ces questions, un cadre général de travail est la résolution numérique probabiliste d'équations aux dérivées partielles de type *équation de McKean–Vlasov* introduites au paragraphe 3.1.

4.2 Mathématiques financières

Mots clés : finance, évaluation d'options, gestion de bilan, risque financier.

Le projet s'intéresse à divers aspects des mathématiques financières, liés principalement à l'évaluation et à la couverture des options d'une part, à la gestion de portefeuilles ou de bilans d'autre part.

[Knu81] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1981.

Un premier champ de recherches concerne l'étude de stratégies de gestion de portefeuilles d'options correspondant à des actifs sous–jacents dont les volatilités sont des processus stochastiques à valeurs dans des intervalles bornés. Le marché est incomplet, il n'existe donc pas de stratégie de couverture parfaite. Il semble particulièrement intéressant de pouvoir calculer la plus faible valeur initiale des stratégies conduisant à des portefeuilles dont la valeur à l'échéance majore le payoff d'une option donnée, et ceci pour tout état futur du marché ou bien pour tout état appartenant à un ensemble pertinent en pratique.

Un autre champ de recherches concerne le calcul numérique de prix d'options complexes par des méthodes de Monte–Carlo, la simulation de bilans correspondant à des stratégies de gestion ou de couverture mal spécifiées, la gestion de portefeuilles sous contraintes. Ces questions motivent, par exemple, des études spécifiques sur l'approximation en loi de fonctionnelles diverses (et irrégulières) de solutions d'équations différentielles stochastiques.

5 Résultats nouveaux

5.1 Méthodes numériques probabilistes pour les EDP

Mots clés : méthode particulaire, propagation du chaos.

Nous poursuivons l'étude engagée sur ce sujet les années précédentes, aussi bien sur le plan de l'analyse théorique de la vitesse de convergence que sur le plan de l'implémentation numérique.

5.1.1 Méthodes particulaires stochastiques et processus de branchement

Participants : Axel Grorud, Hervé Régnier, Denis Talay.

Nous avons achevé le travail d'étude de la vitesse de convergence de la méthode particulaire de Sherman et Peskin pour des équations de type Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov. Cette méthode met en œuvre des particules issues de processus de branchement dont la loi de reproduction et la loi de parcours libre entre instants de branchement dépendent des interactions globales des particules. La technique de démonstration exploite la méthodologie introduite par M. Bossy et D. Talay pour les systèmes de particules en interaction champ moyen (voir [7]). On a été conduit à mesurer très finement les effets de la discrétisation en temps, de l'approximation par le schéma de Milstein des trajectoires en parcours libre et de la taille finie du système de particules. On montre notamment que la la méthode de Sherman et Peskin a une erreur en $1/sqrtN$ par rapport au nombre N de particules mises en œuvre, et ceci quel que soit N. Ce résultat est optimal (voir [21] et [9]).

5.1.2 Vitesse de convergence optimale de l'algorithme particulaire pour les équations de conservation scalaires

Participant : Mireille Bossy.

Dans un travail précédent sur l'analyse de convergence d'un algorithme particulaire pour les équations de McKean–Vlasov et de Burgers, on s'est attaché principalement à obtenir la vitesse optimale par rapport au nombre de particules mises en œuvre par l'algorithme. L'erreur de discrétisation en temps du système d'EDS en interaction était majorée brutalement par les estimations en norme $L^2(\Omega)$ du schéma d'Euler. Or, pour ce type d'algorithme, seule l'erreur faible du schéma d'Euler est en cause. Cela est confirmé très nettement par les essais numériques qui montrent une erreur d'ordre Δt au lieu de $\sqrt{\Delta t}$ donnée par les estimationd d'erreur en norme $L^2(\Omega)$.

Dans ce dernier travail, nous obtenons également la vitesse de convergence optimale par rapport au pas de discrétisation en temps pour le schéma d'Euler, pour l'algorithme particulaire appliqué à la résolution des équations de conservation scalaires (comme l'équation de Burgers). La principale difficulté dans ce travail consiste à mettre en évidence et à itérer l'erreur faible du schéma d'Euler pour des EDS non linéaires dans la décomposition d'erreur de l'algorithme. Pour cela nous utilisons la méthodologie développée par Talay et Tubaro [TT90] pour obtenir le développement de l'erreur du schéma d'Euler. Cette méthode s'appuie sur des résultats de régularité de l'EDP associée à la diffusion considérée. Pour cette raison, la vitesse de convergence optimale est obtenue pour des équations de conservation scalaires de conditions initiales C^3.

Nous cherchons maintenant à étendre ce résultat au cas d'une condition initiale dont la dérivée est une mesure signée et bornée, et à traiter le cas général des équations de McKean–Vlasov.

5.1.3 Méthode particulaire pour l'équation de Burgers avec condition de Dirichlet

Participant : Mireille Bossy.

Nous nous intéressons aux méthodes particulaires pour la résolution d'EDP non linéaires avec condition aux bords. Par sa simplicité, l'équation de Burgers est un cas test intéressant pour la mise au point de méthodes numériques en mécanique des fluides. L'interprétation probabiliste de la solution de l'équation de Burgers dans un intervalle, avec condition au bord de type Dirichlet, est obtenue comme la fonction de répartition (ou une modification simple de cette fonction) de la loi d'un processus stochastique non linéaire réfléchi au bord du domaine.

En collaboration avec Benjamin Jourdain (CERMICS), nous avons obtenu la propagation du chaos pour le système de particules réfléchies associé qui justifie la convergence de l'algorithme particulaire stochastique employé. L'analyse de sa vitesse de convergence est en cours. Conformément aux essais numériques, nous cherchons à obtenir, grâce au résultat mentionné dans la section précédente, la vitesse de convergence optimale lorsqu'on utilise le schéma de discrétisation de Lépingle pour les EDS réfléchies.

5.1.4 Simulation de solutions statistiques d'EDP non linéaires

Participants : Denis Talay, Olivier Vaillant.

[TT90] D. TALAY, L. TUBARO, « Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations », *Stoch. Anal. Appl. 8*, 4, 1990, p. 94–120.

Mots clés : solution statistique d'EDP, estimateur non paramétrique de régression, propagation du chaos.

Nous nous intéressons à des EDP non linéaires de type McKean–Vlasov sur $[0,T] \times \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial p(t,x,p_0)}{\partial t} & = & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_b(t,x,p_0)p(t,x,p_0)\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2}\left(u_\sigma(t,x,p_0)\right)^2 p(t,x,p_0)\right), \\ p(0,x,p_0) & = & p_0(x), \\ u_b(t,x,p_0) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} b(x,y)p(t,y,p_0)dy, \\ u_\sigma(t,x,p_0) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sigma(x,y)p(t,y,p_0)dy, \end{array} \right. \tag{9}$$

pour lesquelles la condition initiale p_0 n'est pas connue explicitement.
Cette incertitude peut par exemple provenir de la modélisation d'un écoulement turbulent (la vorticité d'un fluide incompressible en dimension 2 est décrite par une équation de type McKean–Vlasov) ou de l'imprécision d'appareils de mesures. Elle est prise en compte en considérant une mesure de probabilité μ sur l'espace des conditions initiales de (9). Ce formalisme s'inscrit dans la théorie des solutions statistiques de Vishik et Fursikov [VF88].

Nous avons montré comment représenter, à l'aide d'un processus stochastique, les « moments » $M_k(t)$ d'une solution statistique de (9), définis par

$$(M_k(t),\phi)_{L^2(k)} = \int \left(\int_{\mathbb{R}^k} \phi(x^1,\dots,x^k)p(t,x^1,p_0)...p(t,x^k,p_0)dx^1\dots dx^k \right) \mu(dp_0),$$

où

$$L^2(k) = \underbrace{L^2(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R})}_{k \text{ fois}},$$

et $\phi \in L^2(k)$.

Nous avons ensuite défini des algorithmes particulaires stochastiques pour la simulation numérique de ces moments : pour toute fonction ψ continue et bornée sur $\mathbb{R}$,

$$(M_1(t),\psi)_{L^2(\mathbb{R})} \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \psi\left(X_t^{i,N}\right),$$

où $\left(X^{1,N},\dots,X^{N,N}\right)$ est le système de processus stochastiques en interaction défini par

$$\forall 1 \le i \le N, \left\{ \begin{array}{lcl} dX_t^{i,N} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} b(X_t^{i,N},X_t^{j,N})dt + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}\sigma(X_t^{i,N},X_t^{j,N})dW_t^i, \\ X_t^{i,N}\mid_{t=0} & = & X_0^i. \end{array} \right.$$

Les poids α_{ij} sont des fonctions positives de variables aléatoires $\theta^1,\dots,\theta^N$ indépendantes et de même loi μ. Ils sont définis à partir d'estimateurs non paramétriques d'une fonction de

[VF88] M. VISHIK, A. FURSIKOV, *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

régression (voir, par exemple, le livre de Bouleau et Lépingle [BL94] ou Juditsky [AJa94]). De tels systèmes généralisent les méthodes particulaires stochastiques usuelles, pour lesquelles les poids d'interaction ont une valeur constante $1/N$. Nous avons étudié la vitesse de convergence de cet algorithme pour différentes familles de poids α_{ij}, puis validé les résultats théoriques obtenus par des essais numériques.

5.1.5 Simulation de fluides viscoélastiques

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

Mots clés : fluide viscoélastique, polymère.

M. Bossy et D. Talay étudient, en collaboration avec M. Picasso (École Polytechnique Fédérale de Lausanne), un modèle moléculaire stochastique pour les fluides viscoélastiques. Des chaînes de polymères baignant dans un fluide sont modélisées par des haltères (deux billes liées par un ressort). Dans le cas d'un écoulement dans un canal plan, la dynamique d'une haltère est décrite par un système EDS en dimension 2 couplé à une EDP de type Navier–Stokes décrivant la vitesse du fluide. Après avoir étudié un modèle simple autorisant l'haltère à s'allonger indéfiniment, nous considérons maintenant le cas où l'élongation maximale de la chaîne de polymères est finie, égale à b. Cela nous conduit à étudier un système couplé du type

$$\left\{\begin{aligned} dP_t(y) &= -\frac{1}{2\lambda}\frac{P_t(y)}{1-\dfrac{P_t^2(y)+Q_t^2(y)}{b}}dt + \frac{\partial V}{\partial y}(y,t)Q_t(y)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}dw_t^1 \\ dQ_t(y) &= -\frac{1}{2\lambda}\frac{Q_t(y)}{1-\dfrac{P_t^2(y)+Q_t^2(y)}{b}}dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}dw_t^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= K\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{E}\left(\frac{P_y(y)Q_t(y)}{b-(P_t^2(y)-Q_t^2(y))}\right). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

La démonstration de l'existence d'une solution à ce système est en cours, les essais numériques sont menés à l'EPFL par M. Picasso.

5.1.6 Simulation de systèmes hamiltoniens stochastiques dissipatifs

Participants : Oliver Schein, Denis Talay.

Mots clés : système hamilonien, probabilités invariantes.

En réponse à une question de C. Soize (ONERA), nous avons établi la vitesse de convergence du schéma d'Euler implicite pour l'approximation de mesures invariantes de certains systèmes hamiltoniens dissipatifs et stochastiques à coefficients non globalement lipschitziens.

[BL94] N. BOULEAU, D. LEPINGLE, *Numerical methods for stochastic processes*, Wiley interscience, 1994.

[AJa94] Q. Z. A. JUDITSKY, AL, « Wavelets in identification », *rapport de recherche*, INRIA, 1994.

La difficulté technique provient de la croissance pôlynomiale des coefficients et du caractère dégénéré des générateurs infinitésimaux des processus de diffusion utilisés pour ces modèles hamiltoniens.

Chemin faisant, nous avons obtenu des estimations très précises et, semble–t–il, originales sur la décroissance exponentielle en temps de la solution de certaines équations aux dérivées partielles paraboliques à opérateur dégénéré et à coefficients non globalement lipschitziens. Ces estimations assurent, par exemple, que les moments des systèmes hamiltoniens dissipatifs examinés convergent exponentiellement vite quand le temps tend vers l'infini.

Le travail est publié dans [19].

La géneralisation des résultats à de plus larges classes de systèmes hamiltoniens est en cours.

5.1.7 Calcul approché de quantiles de lois marginales de diffusions

Participants : Denis Talay, Ziyu Zheng.

Mots clés : quantiles, discrétisation de diffusions.

Avec pour motivation des applications en mathématiques financières (calculs de quantités de type Value at Risk) et en fiabilité de systèmes dynamiques stochastiques, nous étudions la vitesse de convergence du schéma d'Euler pour les équations différentielles stochastiques lorsqu'il s'agit d'approcher les quantiles de marginales à temps fixes de la solution exacte à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

Grâce à un travail antérieur de Bally et Talay, D. Talay et Z. Zheng ont pu établir la vitesse de convergence par rapport au pas de discrétisation en temps. Pour compléter la description de l'erreur, il reste à en décrire le comportement par rapport au nombre de simulations. Il est bien connu qu'il est nécessaire de connaître des encadrements fins de la densité de la loi simulée. D. Talay et Z. Zheng cherchent donc à établir de telles estimations sous des hypothèses correspondant aux modèles utilisés en calculs de risques financiers, par exemple. Trouver des minorations de densités de diffusions hypoelliptiques n'est pas une tâche aisée. On espère pouvoir tirer parti des structures particulières des équations différentielles stochastiques considérées.

5.1.8 Livre en cours

Participant : Denis Talay.

D. Talay et L. Tubaro (université de Trento) poursuivent la rédaction de leur livre « Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations ».

5.2 Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles

Mots clés : processus stochastique, système de particules, équations aux dérivées partielles.

5.2.1 Interprétation probabiliste de l'équation de coagulation de Smoluchowski

Participants : Madalina Deaconu, Etienne Tanré.

M. Deaconu et E. Tanré ont donné des interprétations probabilistes aux solutions d'équations de coagulation de Smoluchowski. Ces équations modélisent les phénomènes de coagulation en divers domaines, par exemple en chimie (coagulation des polymères), en physique (évolution des particules coloïdales) et en astrophysique (formation des étoiles et planètes).

L'équation associée à une fonction K peut être discrète :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}n(k,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} K(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j,k)n(j,t), \\ n(k,0) = n_0(k),\ k \geq 1, \end{cases} \tag{SD}$$

ou continue :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(y,x-y)n(y,t)n(x-y,t)dy - n(x,t)\int_0^\infty K(x,y)n(y,t)dy, \\ n(x,0) = n_0(x). \end{cases} \tag{SC}$$

K désigne le noyau de coagulation et est supposé symétrique et positif. L'étude porte sur trois types de noyaux : additif, multiplicatif et constant. Ces trois cas particuliers permettent de déterminer plus ou moins explicitement les solutions.

Pour ces trois noyaux, dans la situation discrète, on associe aux solutions de (SD) des processus de branchement. Ceci permet d'obtenir des formules explicites pour les solutions de (SD). Les résultats de cette partie ne sont pas nouveaux, mais la façon dont on interprète le problème permet de simplifier les démonstrations existantes.

Dans le cas continu, il est montré que la solution du cas additif s'exprime à l'aide de la solution du cas multiplicatif et vice versa. Pour les trois noyaux considérés, on montre aussi des théorèmes de renormalisation : la solution de (SC), convenablement renormalisée, converge vers une limite qui ne dépend que faiblement de la condition initiale.

Ce travail fait l'objet d'un article en préparation.

5.2.2 Systèmes de particules aléatoires en temps long

Participants : Mireille Bossy, Alex Gottlieb, Anatoli Manita, Denis Talay.

On a entamé l'étude en temps long de systèmes de particules stochastiques en interaction champ moyen et à valeurs dans une variété compacte, ainsi que de leurs approximations discrétisées (celles qui sont effectivement simulées sur ordinateur). Le but de cette étude est de construire des méthodes numériques probabilistes efficaces pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles non linéaires stationnaires.

De premiers exemples de laboratoire ont été analysés en profondeur, pour lesquels des phénomènes de bifurcation sont apparus : selon l'amplitude du noyau d'interaction, on peut observer la non existence, l'unicité ou la non unicité d'une loi de probabilité invariante pour la diffusion non linéaire au sens de McKean qui décrit le comportement limite du système de particules quand le nombre de particules tend vers l'infini.

5.2.3 Équations aux dérivées partielles paraboliques à faible viscosité et à coefficients irréguliers

Participants : Mireille Bossy, Awa Diop, Denis Talay.

En réponse à une question de F. Poupaud et M. Rascle (université de Nice Sophia Antipolis), on utilise les outils probabilistes pour étudier certaines équations aux dérivées partielles paraboliques à coefficients du premier ordre très irréguliers, lorsque la viscosité tend vers 0.

De premiers résultats ont été obtenus dans le cas unidimensionnel.

5.2.4 Processus associé à l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois.

En collaboration avec S. Benachour (université de Nancy 2), B. Roynette et P. Vallois ont étudié l'EDP linéaire d'ordre 4 : $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$.

Traditionnellement, on sait associer des processus aux équations d'évolution parabolique d'ordre 2. Voulant sortir de ce cadre, nous avons étudié $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Les auteurs représentent la solution via des espérances de fonctionnelles du mouvement brownien itéré.

Ce travail est paru dans Progress in Probability [10].

5.2.5 Équation de Navier–Stokes et processus de branchement

Participants : Jean–Sébastien Giet, Bernard Roynette, Pierre Vallois.

En collaboration avec S. Benachour (université de Nancy 2), B. Roynette et P. Vallois ont établi l'an dernier une interprétation probabiliste de l'équation de Navier–Stokes dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$ avec condition de vitesse nulle au bord. Au tourbillon ω est associé un processus de branchement non–linéaire $(X_t, t \geq 0)$ qui a la particularité de créer ou de détruire de la masse au bord de Ω. Le bord apparaît donc comme l'endroit où les tourbillons se créent ou se détruisent. Plus précisément, pour l'équation 2D, le lien entre ω et X est le suivant :

$$\mathbb{E}_{\omega_0}(\int_\Omega h(x) dX_t) = < \omega(t,.), h > ,$$

pour toute fonction h régulière.

J.-S. Giet a considéré ce problème en 3D. L'étude porte sur l'équation de Navier–Stokes dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ avec condition de vitesse nulle au bord. Comme dans le cas 2D, on passe à l'équation au tourbillon, ce qui supprime une inconnue, la pression ; par contre, le tourbillon n'est plus scalaire mais de dimension 3.
On construit un processus de branchement Y non linéaire prenant ses valeurs dans $\Omega \times \{1,2,3\}$. Le tourbillon représente la densité de ce processus ; pour toute fonction h régulière, on a :

$$\mathbb{E}_{\omega_0}\left(\int_{\Omega\times\{1,2,3\}} h \; dY_t\right) = \int_{\Omega\times\{1,2,3\}} h(x)\omega(t,x) \; d\mu(x).$$

Il n'y a plus seulement branchement au bord du domaine Ω comme c'était le cas en dimension 2, mais les branchements interviennent aussi à l'intérieur du domaine Ω pour tenir compte des échanges entre les trois composantes du tourbillon.

5.2.6 Lois de certaines fonctionnelles du temps local des processus de Bessel

Participants : Mihai Gradinaru, Bernard Roynette, Pierre Vallois.

M. Gradinaru, B. Roynette et P. Vallois, en collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), se sont intéressés aux lois de certaines de fonctionnelles du temps local des processus de Bessel.

On considère l'équation aux dérivés partielles sur $\mathbb{R}_+^2$ avec conditions au bord

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = L\omega \ ; \ \omega(0,x) = \omega_0(x), \ \omega(t,0) = f(t) \ ;$$

où ω_0 et f sont deux fonctions données et L est le générateur du processus de Bessel d'indice n $(-1 < n < 0)$. On peut calculer explicitement la solution à l'aide de ω_0 et f . En utilisant la méthode développée pour l'équation de Navier–Stockes, on calcule la loi d'intégrales du type $\int_0^1 \varphi(s) dL_s(R)$, pour une large classe de fonctions φ, $L_s(R)$ désignant le temps local en 0 du processus de Bessel R. On établit de plus des théorèmes limites pour certaines intégrales du type précédent.

Cette étude a fait l'objet de deux publications [14], [15].

5.2.7 Modélisation d'une phénomène de fissuration

Participant : Pierre Vallois.

En collaboration avec A. Mézin (laboratoire de génie des surfaces à l'école des Mines de Nancy), P. Vallois a modélisé un phénomène de fissuration unidirectionnelle avec l'hypothèse de non–relaxation de contrainte. Le modèle prend en compte à la fois la localisation des fissures et la contrainte exercée.

Ce travail a été accepté pour publication [17].

Toujours en collaboration avec A. Mézin, A. Koudou et P. Vallois travaillent sur un modèle plus réaliste prenant en compte la relaxation de contrainte : lorsque une fissure a lieu en x, il existe une zone « relaxée » autour de x dans laquelle de nouvelles fissures ne peuvent pas se former.

5.3 Théorie des processus stochastiques et applications

Mots clés : processus stochastique, analyse stochastique.

5.3.1 Problème de ruine pour une compagnie d'assurance

Participant : Pierre Vallois.

En collaboration avec Y. Siebenaler (stagiaire du centre universitaire du Luxembourg), P. Vallois s'est intéressé à la loi de $\theta(a)$, cette variable aléatoire désignant le premier instant où l'amplitude d'une marche au plus proche voisin (de paramètres $p, q, r, p + q + r = 1$), atteint le niveau a. Ce travail généralise un précédent travail de P. Vallois pour le cas $r = 0$. La loi de $\theta(a)$ est complexe. Nous avons néanmoins pu calculer explicitement son espérance, sa variance, et établir des théorèmes limites lorsque a tend vers l'infini. Comme l'amplitude de la marche modélise des fluctuations, les résultats obtenus pourraient être intéressants pour certaines applications en finance, en assurance, etc.

Un article a été soumis à Journal of Theoritical Probability.

Par ailleurs, P. Vallois a considéré les processus avec sauts et leurs applications au problème de la ruine. Pour modéliser le niveau d'eau d'un barrage (respectivement les actifs d'une compagnie d'assurance) on construit un processus stochastique X, et on s'intéresse au premier instant $T_x(X)$ où X atteint un niveau donné $x > 0$. En supposant d'abord que les sauts de X sont négatifs (problèmes de barrage), on a montré que, pour une large classe de processus, la loi de $T_x(X)$ s'exprime à l'aide de la famille de lois $\{P(X_t \in \cdot) \,; t > 0\}$ (relation dite de Zolotarev). En revanche, dans le cas où les sauts peuvent être positifs (problèmes d'assurance), on a montré que la fonction de répartition de $T_x(X)$, considérée en tant que fonction des deux variables (x,t), vérifie une équation intégrale. Ceci permet d'avoir une solution approchée de la probabilité de ruine ou de non–ruine.

Ce travail est en cours de rédaction.

5.3.2 Un phénomène singulier de grandes déviations

Participants : Mihai Gradinaru, Samuel Herrmann, Bernard Roynette.

M. Gradinaru, S. Herrmann et B. Roynette ont étudié un phénomène singulier de grandes déviations. Soit X_t^ε ($\varepsilon > 0$) la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \operatorname{sgn}(X_t^\varepsilon)|X_t^\varepsilon|^\gamma dt, \\ X_0^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

où $0 < \gamma < 1$. Cette EDS est une petite perturbation brownienne de l'équation différentielle ordinaire $x_t' = \operatorname{sgn}(x_t)|x_t|^\gamma$ qui admet une infinité de solutions. L'étude de la décroissance exponentielle de la densité de X_t^ε quand ε décroît vers 0 met en évidence un comportement qui dépend de la position de (t,x). Ainsi nous montrons que pour (t,x) appartenant au domaine compris entre les deux solutions extrémales de l'équation différentielle ordinaire, l'ordre de convergence est différent de celui rencontré dans la théorie de Freidlin et Wentzell, tandis qu'en dehors de ce domaine l'ordre de convergence est classique. Les preuves reposent sur des arguments probabilistes (théorie des grandes déviations) ainsi que sur des arguments analytiques (solutions de viscosité pour des équations de Hamilton–Jacobi). Ce travail fait l'objet d'un article soumis pour publication à Probability Theory and Related Fields.

5.3.3 Impulsion brownienne

Participants : Jean–Sébastien Giet, Bernard Roynette, Sophie Wantz–Mézières.

J.-S. Giet et S. Wantz–Mézières ont généralisé l'étude effectuée par B. Roynette et S. Wantz–Mézières [16], concernant la loi de certaines EDS bidimensionnelles présentant localement des coefficients de très grande amplitude. La modélisation proposée couvre un spectre plus large d'applications car nous considérons des coefficients lipschitziens à l'intérieur de leur support. Les grandes amplitudes des coefficients sont modélisées par la famille suivante d'EDS, paramétrée par le réel positif ε destiné à tendre vers 0 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_t^\varepsilon & = & \int_0^t \phi(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_s^\varepsilon)\ ds, \\ Y_t^\varepsilon & = & z + \int_0^t [\frac{1}{\varepsilon}\rho(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}) + \sigma(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)]\ dB_s + \int_0^t [\frac{1}{\varepsilon}\theta(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}) + b(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)]\ ds. \end{array} \right.$$

On désigne par $D_{\rho,\theta}$ le plus grand domaine délimité par les supports des fonctions ρ et θ. On démontre que la loi de la solution $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$ de cette EDS, au temps de sortie du processus X^ε du domaine $D_{\rho,\theta}$, lorsque ε converge vers 0, est décrite par une fonctionnelle additive du processus (Z_t) solution de :

$$Z_t = z + \int_0^t \frac{\rho(s)}{\sqrt{\phi(s, Z_s)}}\ dB_s + \int_0^t \frac{\theta(s)}{\phi(s, Z_s)}\ ds.$$

Cette étude conduit à un schéma de simulation permettant de réduire l'erreur faite par discrétisation (article en préparation).

5.3.4 Quelques temps d'arrêt du mouvement brownien

Participants : Bernard De Meyer, Bernard Roynette, Pierre Vallois.

En collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), B. De Meyer, B. Roynette et P. Vallois s'intéressent aux problèmes suivants (B_t désigne un mouvement brownien issu de zéro) :

- les lois μ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ telles qu'il existe un temps d'arrêt T tel que (T, B_T) soit de loi μ,
- les temps d'arrêt T tels que T et B_T soient indépendants,
- les temps d'arrêt T tels que B_T^1 et B_T^2 soient indépendants, (B^1, B^2) étant un mouvement brownien en dimension 2,
- les temps d'arrêt T bornés, non constants, tels que B_T soit une gaussienne.

5.3.5 Calcul stochastique généralisé

Participant : Pierre Vallois.

Le projet a continué à explorer des questions difficiles de calcul stochastique. P. Vallois en collaboration avec F. Russo (université de Paris 13) ont défini, dans une série de travaux précédents, la notion d'intégrale stochastique et de crochet généralisés. On a obtenu de nouveaux résultats relatifs à des processus gaussiens. Les auteurs considèrent également des EDS généralisées du type : $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)d\xi_t$ où ξ est un processus possédant un crochet généralisé. On étudie également le cas des processus avec sauts.

Ce travail a fait l'objet : d'un article en commun avec F. Russo ([18]) et de deux articles soumis, un en collaboration avec J. Wolf et F. Russo, et un autre en collaboration avec M. Errami et F. Russo.

M. Gradinaru et P. Vallois, en collaboration avec F. Russo, étudient l'existence d'intégrales stochastiques par rapport à un processus gaussien. Les EDS associées pourraient ouvrir le champ à de nouvelles applications : il serait possible de remplacer le mouvement brownien directeur usuel par un processus gaussien.

5.3.6 Loi du temps de sortie d'un intervalle et de l'amplitude pour des chaînes de Markov associées aux polynômes ultrasphériques

Participants : Hélène Ganidis–Cochard, Pierre Vallois.

H. Ganidis–Cochard a étudié le processus de l'amplitude pour une classe de chaînes de Markov, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associées aux polynômes ultrasphériques (également appelées chaînes ultrasphériques). Ces chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont été notamment étudiées par George ([Geo75]).

On a établi que ces chaînes, convenablement renormalisées, convergent en loi vers les processus de Bessel, ce qui généralise ainsi un résultat de George. Ainsi, via un passage à la limite, on a pu déterminer (ou quelquefois retrouver) la loi de certaines fonctionnelles de processus de Bessel.

Les auteurs se sont plus particulièrement intéressés au processus de l'amplitude $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'à son inverse $(\theta(p))_{p\in\mathbb{N}}$:

$$A_n = \sup_{k\le n} X_k - \inf_{k\le n} X_k,$$

$$\theta(p) = \inf\{k, A_k \ge p\}.$$

Par définition des chaînes ultrasphériques, $|X_{n+1} - X_n| = 1$.

A partir de cette propriété, on a établi que la loi de $\theta(p)$ est intimement liée à celle du temps de sortie d'un intervalle

$$T_{b,c} = \inf\{n \ge 0, X_n = b \text{ ou } c\}.$$

Tout naturellement ceci a conduit à étudier les temps d'atteinte de points et les temps de sortie d'intervalles. On a en particulier déterminé leur transformée de Laplace et leurs deux premiers moments. Nous en avons déduit la transformée de Laplace et le premier moment de $\theta(p)$, premier instant où l'amplitude atteint le niveau p. Les calculs ont été simplifiés dans deux cas particuliers : ceux correspondant aux chaînes ultrasphériques associées aux processus de Bessel de dimension 1 et 3.

[Geo75] C. George, *Chaînes de Markov Associées aux Polynômes Orthogonaux*, thèse de doctorat, université de Nancy I, 1975.

5.3.7 Sur le problème de Skorokhod

Participants : Hélène Ganidis–Cochard, Pierre Vallois.

H. Ganidis–Cochard a construit des solutions explicites pour deux problèmes de type Skorokhod avec le mouvement brownien, et a établi des inégalités maximales relatives à chacun des ces problèmes.

Plus précisément, on considère deux classes de martingales :

1 - la classe des martingales $(M_t)_{t\geq 0}$ càdlàg, uniformément intégrables, dont la loi ρ du couple (M_0,M_∞) est fixée,

2 - la classe des martingales $(M_t)_{t\geq 0}$ càdlàg, uniformément intégrables, dont les lois μ_0 de M_0 et μ_1 de M_∞ sont données.

On a construit une solution explicite à ces deux problèmes de type Skorokhod à partir d'un mouvement brownien : pour toute probabilité sur $\mathbb{R}^2$, ρ donnée (respectivement tout couple (μ_0, μ_1) de probabilités sur $\mathbb{R}$), on construit une fonction ϕ et on définit un temps d'arrêt T par

$$T = \inf\{t \geq 0,\ W_t \leq \phi(W_0,\bar{W}_t)\}.$$

$(W_t)_{t\geq 0}$ désigne ici un mouvement brownien de loi initiale ρ_0 (respectivement μ_0) et $(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ le processus du maximum de $(W_t)_{t\geq 0}$. On montre que $(W_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ appartient à la classe 1 (respectivement à la classe 2). De plus, dans le second cas, $\phi(x,\cdot)$ ne dépend pas de x. On a ensuite montré des inégalités maximales pour chacun des deux problèmes considérés.

5.3.8 Processus de renouvellement spatiaux

Participant : Marco Dozzi.

En collaboration avec E. Merzbach, M. Dozzi étudie les extensions possibles de la théorie de renouvellement à des processus indexés par des sous–ensembles d'un espace métrique. Les théorèmes de renouvellement décrivent le comportement asymptotique d'un système stochastique après un nombre aléatoire d'événements. Ces théorèmes sont appliqués à de nombreux problèmes, par exemple en statistique séquentielle, en théorie du risque ou en théorie des files d'attente. Depuis ses débuts dans les années 50, ce domaine a connu récemment un développement important, d'un point de vue théorique aussi bien qu'appliqué.

Le travail en cours a pour but de démontrer des théorèmes de renouvellement pour des sommes (au sens de Minkowski) de sous–ensembles convexes et compacts d'un espace vectoriel général muni d'un produit scalaire. Notre motivation pour ce travail est double : d'une part, ces résultats possèdent des applications en écologie et en sciences de l'environnement ; d'autre part, sur le plan théorique, de nombreux problèmes se posent, et on peut mettre en œuvre les outils de la géométrie intégrale, de la géométrie stochastique et de la théorie des martingales indexées par des ensembles.

5.4 Analyse stochastique des algorithmes

Participants : Philippe Chassaing, Jean–François Marckert.

5.4.1 Coalescence et parking

Participant : Philippe Chassaing.

En collaboration avec G. Louchard (université Libre de Bruxelles), P. Chassaing étudie le problème de coalescence et de parking. Le résultat principal est l'étude asymptotique du comportement au cours du temps (au fur et à mesure de l'arrivée des voitures) des blocs de voitures garées consécutivement. Ce comportement (largeur et position des blocs) est asymptotiquement celui des excursions (largeur et position) du pont brownien conditionné à avoir un temps local au niveau 0 égal à a, si, pour un nombre de places égal à n, le nombre de places vides est approximativement $a\sqrt{n}$. La loi des largeurs et des positions est décrite explicitement.

La dépendance en le paramètre temps a est étudiée, et le comportement asymptotique se révèle être gouverné par le coalescent additif standard d'Aldous et Pitman. Un sous–produit en est une construction alternative du coalescent additif standard, plus simple à notre avis que la construction originale d'Aldous et Pitman.

5.4.2 Arbres

Participants : Philippe Chassaing, Jean–François Marckert.

P. Chassaing et J.-F. Marckert ont étudié le problème suivant : on utilise la correspondance arbres–parking due a Schutzenberger–Foata–Riordan–Françon, et une correspondance moins connue entre parking et processus empiriques, pour ramener une question ouverte d'Odlyzko et Wilf sur la largeur moyenne des arbres étiquetés (trouver les premiers et deuxièmes termes du développement asymptotique de la largeur moyenne) au théorème de Komlos, Major et Tusnady concernant les processus empiriques. On obtient un résultat analogue pour les moments d'ordre supérieur. En collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), P. Chassaing et J.-F. Marckert obtiennent le comportement asymptotique du couple largeur–hauteur pour les arbres simples (incluant arbres binaires, arbres généraux et arbres étiquetés) à n noeuds : normalisé par $\sqrt{n}$, le couple largeur–hauteur converge en loi vers $[(\sigma \max_{0\leq s\leq 1} e(s), \int_0^1 \frac{ds}{\sigma e(s)})]$, où e désigne l'excursion Brownienne normalisée, et σ est un paramètre dépendant du modèle d'arbres simples choisi.

5.4.3 Mouvement brownien

Participant : Philippe Chassaing.

En collaboration avec S. Janson (université d'Uppsala), P. Chassaing décrit une transformation de trajectoire reliant le pont Brownien réfléchi conditionné à avoir un temps local en 0 égal à a, noté X_a, au pont Brownien non conditionné, noté b, ou à l'excursion Brownienne non conditionnée. Le cas $a = 0$ redonne la transformation de Vervaat reliant le pont et l'excursion. On en déduit simplement la densité d'occupation de X_a:

$$E[\text{mes}(\{0 \leq s \leq 1 \mid X_a(s) \geq x\})] = e^{-2ax-2x^2}.$$

5.4.4 Intelligence artificielle

Participant : Philippe Chassaing.

En collaboration avec S. Zylberstein (université de Massachussets) et F. Charpillet (INRIA–LORIA), P. Chassaing prouve que le facteur d'accélération minimal à imprimer à un ordinateur pour qu'un algorithme interruptible produise un résultat d'aussi bonne qualité qu'un algorithme interruptible, est égal à 4.

5.5 Modèles financiers avec asymétrie d'information

Participant : Axel Grorud.

Mots clés : asymétrie d'information, marché financier, agent informé, grossissement de filtration, stratégie optimale.

Nous continuons l'étude des marchés financiers avec asymétrie d'information, c'est–à–dire un modèle mathématique d'évolution d'actifs boursiers dans lequel on suppose la présence d'un investisseur informé (voir Grorud & Pontier[AM98,GP98]).

On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t,t \in [0,T]),\mathbb{P})$ sur lequel sont définies les dynamiques des prix de d actifs, semi–martingales càdlàg, par exemple régies par l'équation

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i (\sigma_s^i, dW_s) \\ &\quad + \int_0^t \int_E S_s^i \phi^i(s,x) dN(s,x), \quad 0 \le t \le T, \quad S_0 \in \mathbb{R}^d, \quad i = 1,\cdots,d, \end{aligned}$$

où W est un d–mouvement brownien, N un processus ponctuel. On suppose que, en $t = 0$, un agent informé connaît une variable $L \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_T;\mathbb{R}^\kappa),\kappa \in \mathbb{N}$.

Marchés Incomplets

Mots clés : marché incomplet, grossissement de filtration, prix des actifs.

Nous faisons dans [GP98] le lien entre différentes hypothèses qui permettent d'obtenir le grossissement de filtration, c'est–à–dire la comparaison entre les $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Y}$–martingales, lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration des prix observés et $(\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)),\ t \in [0,T])$ la filtration grossie par l'information de l'agent informé. Nous étudions la complétude du marché, l'existence des probabilités neutres au risque et le prix des actifs à atteindre du point de vue d'un agent informé ou d'un agent non informé. Ce travail sera publié dans les Comptes Rendus à l'Académie des Sciences.

[AM98] A.Grorud, M.Pontier, « Insider trading in a continuous time Market Model », *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(3), 1998, p. 331–347.

[GP98] A. Grorud, M. Pontier, « Probabilités neutres au risque et asymétrie d'information », *rapport de recherche n° 98-10*, L.A.T.P., 1998.

Marchés avec sauts

Mots clés : processus de Poisson marqué, stratégie optimale.

Dans [Gro98], nous avons considéré un modèle de marché dont la dynamique est régie par un mouvement brownien W de dimension m et un processus de Poisson marqué N, indépendant de W, de dimension n et d'intensité λ. Le fait d'avoir un processus de Poisson multivarié permet de décrire complètement la famille des probabilités neutres au risque, et ainsi nous pouvons expliciter les stratégies optimales de l'agent informé . Ce travail sera publié dans la revue International Journal of Theoretical and Applied Finance.

Dans l'article [11], les prix sont dirigés par une mesure de Poisson, le modèle financier est alors incomplet et ne peut pas être complété par un nombre fini d'actifs. Nous caractérisons les probabilités neutres au risque du modèle avec agent informé et nous montrons de plus un théorème de représentation martingale dans un cadre non habituel.

Travaux en cours

Mots clés : équations forward–backward, marchés complétés, équilibre.

Avec Monique Pontier, nous travaillons sur un modèle de grand investisseur initié. Il s'agit d'étudier l'influence sur les prix des actifs d'un investisseur dont la stratégie modifie ces prix et ayant une information initiale privée. Nous devons étudier les solutions d'équations forward–backward dans une filtration grossie par l'information initiale. Cela mène à l'étude fine d'équations aux dérivées partielles.

Avec Nathalie Pistre (Omega et Ensae), nous étudions de manière précise les coefficients d'un marché avec friction à l'équilibre, qui a été complété par une option. On sait que, dans un modèle à temps continu une option peut compléter un marché, mais l'étude précise n'a pas été menée dans le cas d'un marché avec friction.

Thèse en cours

Mots clés : statistique, modèle mal spécifié, robustesse.

Marian Ciuca prépare une thèse sur la robustesse et les statistiques dans les modèles financiers mal spécifiés. Il s'agit d'étudier les propriétés de stabilité des stratégies financières de couverture et des stratégies optimales lorsque les coefficients du marché sont mal spécifiés. Marian Ciuca étudiera aussi les propriétés des estimateurs non paramétriques de ces coefficients. La thèse est financée par le groupe "Communications and Systems".

5.6 Optimisation d'un bilan bancaire simplifié

Participants : Mireille Bossy, Nathalie Pistre, Denis Talay.

Nous modélisons le bilan simplifié d'une institution financière (au passif : obligations et capitaux propres ; à l'actif : portefeuille d'investissement en actions, portefeuille de zéro–coupons

[Gro98] A. Grorud, « Asymmetric information in a financial market with jumps », 1998, article soumis.

et liquidités) afin de décrire et calculer une allocation d'actif pour une gestion actif passif optimale (le passif étant considéré comme donné). Les aléas portent sur l'évolution des taux d'intérêt (décrite par un modèle de Vasicek avec une prime de risque quelconque) qui agitent les obligations à l'actif et au passif et celle des actions détenues à l'actif de la banque.

Nous nous intéressons au problème de contrôle optimal stochastique correspondant à la maximisation de l'espérance intertemporelle de l'utilité des capitaux propres (la variable de contrôle est la proportion de zéro–coupons à détenir à l'actif). Nous regardons le problème dual en considérant l'équation d'Hamilton–Jaccobi–Bellman (HJB) adjointe et cherchons à obtenir l'existence et l'unicité d'une solution viscosité. Deux problèmes se posent : les coefficients de l'équation de HJB ne sont pas réguliers et nous travaillons dans un ouvert non borné.

Nous résolvons par ailleurs l'EDP numériquement, ce qui nous permet de mettre en évidence l'impact relatif de tous les paramètres en particulier de la valeur de la prime de risque du modèle de Vasicek.

5.6.1 Livre en cours

Participant : Denis Talay.

En collaboration avec B. Lapeyre (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) et A. Sulem–Bialobroda (INRIA Rocquencourt), D. Talay a poursuivi la rédaction du livre « Understanding Numerical Analysis for Option Pricing » à paraître chez Cambridge University Press.

5.7 Jeu répété et évolution des prix sur un marché à information asymétrique

Participants : Bernard De Meyer, Hadiza Moussa Saley.

B. De Meyer et H. Moussa Saley ont analysé l'utilisation stratégique de l'information privée sur un marché financier. On utilise un modèle d'enchères répétées pour étudier l'évolution d'un système de prix sur un marché à information asymétrique. Ce modèle est, en fait, un jeu n–fois répété à somme nulle et à information incomplète d'un côté tel que l'avait introduit Aumann et Maschler [AM95]. L'évolution stochastique de ce système de prix peut alors être représentée explicitement à chacune des n étapes du jeu et, lorsque n tend vers l'infini, ce processus des prix est une martingale continue liée au mouvement brownien.

6 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

6.1 Risklab

Participants : Mireille Bossy, Nathalie Pistre, Denis Talay, Zheng Ziyu.

Le projet collabore avec l'université de Lausanne (R. Gibson, F-S. Lhabitant) et l'association Risklab qui réunit notamment les plus grandes banques suisses (Crédit Suisse, S.B.S.,

[AM95] R. AUMANN, M. MASCHLER, *Repeated games with Incomplete information*, MIT Press, 1995.

U.B.S.). L'E.T.H. Zurich (F. Delbaen, P. Embrechts) est associé aux activités de Risklab : cf. [12] et [13].

L'objectif de la coopération est d'élaborer des mesures de risque pour la gestion de portefeuilles de produits dérivés sur taux d'intérêt. Ce thème est crucial pour les praticiens : en effet, des encours importants sont gérés sur les marchés dérivés avec des stratégies dont le comportement est parfaitement identifié au sein d'un modèle probabiliste donné. Le risque réside alors dans le choix du modèle utilisé.

À la suite de nos travaux précédents, nous nous sommes intéressés cette année à l'approximation de quantiles du bilan de stratégies de couverture erronées (cf. supra). Nous avons aussi développé une approche originale pour tenter de définir une stratégie de gestion du risque de modèle. Cette approche repose sur une formalisation en termes de jeux stochastiques. Nous avons étudié l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs associée, et montré qu'elle admet une unique solution de viscosité. Nous sommes en train d'analyser la convergence de la méthode de discrétisation par différences finies habituelles. Nous avons aussi réalisé des expérimentations numériques pour illustrer la pertinence financière du point de vue proposé.

6.2 Collaboration avec EDF–Chatou

Participants : Abdelkarem Birkaoui, Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Denis Talay.

En collaboration avec Jean–Pierre Minier (EDF–Chatou), on développe des schémas d'intégration numérique pour les équations différentielles stochastiques qui sont utilisées pour la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche lagrangienne, et pour les écoulements turbulents réactifs selon la méthode dite PDF (Probability Density Function).

Les écoulements turbulents forment la grande majorité des écoulements. Il existe plusieurs approches pour leur prédiction numérique. Parmi celles–ci, l'approche habituelle consiste à déduire des équations instantanées les équations sur les moments (moments d'ordre deux pour le modèle dit $R_{ij} - \epsilon$). Des termes inconnus apparaissent qu'il faut fermer avant de résoudre le système d'équations. Une solution attrayante (et quelque peu intermédiaire entre l'approche classique et des approches plus fondamentales comme la DNS ou la LES) est fournie par la méthode dite PDF qui est suivie depuis peu à EDF. En pratique, cela consiste à adopter un point de vue lagrangien et à simuler le comportement instantané d'un grand nombre de particules. Cette approche traite la convection et les termes sources, même fortement non linéaires, de façon exacte et donne accès à tous les moments en un point. Elle se révèle donc intéressante pour les problèmes à physique complexe qui nécessitent une information sur les grandeurs turbulentes plus détaillée que celles issues de l'approche classique.

De nombreux écoulements diphasiques se caractérisent par l'existence d'une phase sous forme d'inclusions séparées et dispersées au sein de l'autre phase. C'est le cas par exemple dans un écoulement diphasique de type liquide–solide. On a alors une phase continue (le fluide) et une phase dispersée (sous la forme de particules solides).

En collaboration avec Jean–Pierre Minier (EDF-Chatou), nous avons développé des schémas d'intégration numérique pour les équations différentielles stochastiques qui sont utilisées pour la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche lagrangienne et pour les écoulements turbulents réactifs selon la méthode dite PDF (Probability Density Function).

On s'intéresse à la dynamique de « particules » dans un écoulement turbulent dont la position et la vitesse sont décrites par des équations différentielles stochastiques du type :

$$\begin{aligned} dx_i &= U_i\,dt \\ dU_i &= D_i(\mathbf{x},\mathbf{U})dt + \textstyle\sum_j \sigma_{i,j}(\mathbf{x})dW_j. \end{aligned}$$

On peut rajouter différentes variables selon le problème considéré (température, diamètre, valeur d'un scalaire,...), mais les diverses équations définissent toutes des processus de diffusion. En introduisant le vecteur d'état $\mathbf{Y} = (\mathbf{x},\mathbf{U},\ldots)$ on obtient l'équation type

$$dY_i = D_i(\mathbf{Y})dt + \sum_j \sigma_{i,j}(\mathbf{Y})dW_j,$$

où les W_j sont des processus de Wiener indépendants.

Nous avons mis au point un schéma numérique d'ordre 2 au sens de l'approximation faible (c'est–à–dire de l'approximation de quantités du type $\mathbb{E}f(Y_i(T))$, T étant un temps déterministe) et qui possède de bonnes propriétés de stabilité par rapport à divers paramètres (pas de discrétisation, temps caractéristique de la vitesse de l'écoulement, etc.).

Nous avons aussi étudié des questions relatives à la modélisation du bruit de la dynamique des (Y_i), et à son incidence sur le comportement de quantités telles que l'énergie moyenne quand certains paramètres du modèle (temps de relaxation, etc) tendent vers 0, séparément ou simultanément

6.3 L'action AMAZONE du G.I.E Dyade Bull/INRIA

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Sébastien Chaumont, Madalina Deaconu, Denis Talay.

OMEGA est le projet d'accueil de l'action Amazone du G.I.E Dyade entre Bull et l'INRIA. Cette action, démarrée en mars 1999, s'intéresse aux problèmes de performance de codes de calcul numérique intensif en finance. Dans ce domaine, l'utilisation de calculateurs puissants est nécessaire pour traiter soit des problèmes simples de très grande dimension ou nécessitant des temps de réponse rapides (évaluation d'option, prévisions et sensibilité de bilan), soit des problèmes complexes comme la résolution de problèmes de contrôle stochastique (gestion de bilan).

Pour les calculs numériques, Amazone utilise la machine SX de NEC à architecture vectorielle/parallèle. Le premier exemple traité reprend le code du logiciel LICS, développé par OMEGA, sur la simulation et le calcul de sensibilité du bilan de contrat financier de type assurance–vie. L'utilisation du SX permet d'augmenter considérablement la dimension du portefeuille d'investissement à simuler (de l'ordre de 1000 lignes de titres) jusqu'à obtenir un problème en vraie grandeur. Les points qui restent à résoudre sont la mise en place de routines d'optimisation efficaces pour la composition du portefeuille d'investissement à l'actif du contrat et le traitement numérique du problème de contrôle stochastique associé (en revenant à une modélisation en petite dimension).

6.3.1 Gestion optimale de contrat de type assurance–vie avec option de sortie

Nous nous intéressons au problème de la gestion du bilan d'un contrat financier de type assurance–vie émis par une compagnie. Le problème est posé en termes de contrôle stochastique et est étudié théoriquement et numériquement avec la mise en place d'un programme de simulation.

Formulation du problème. Ce travail étudie un cas particulier de contrat de type assurance–vie introduit par M. Bossy, N. Pistre et D. Talay[2]. Nous considérons un modèle simplifié de contrat, d'échéance T, garantissant à l'assuré un revenu minimum augmenté d'une participation aux gain de la compagnie sur ses placements financiers : la prime du contrat versée par le client est investie par la compagnie dans un portefeuille financier (actions, obligations). Ce portefeuille est la partie actif du bilan du contrat, sa valeur de marché à l'instant t est noté A_t. Si l'assuré décide de sortir du contrat d'assurance avant son échéance T, il perçoit la somme

$$D_t = p(t)(e^{\rho t} + \gamma(A_t - e^{\rho t})_+)$$

où :

- $p(t)$ est une fonction de pénalisation incitant le client à ne pas sortir avant T.
- ρ est le taux minimal garanti par le contrat.
- $0 < \gamma \leq 1$ représente le pourcentage du gain du portefeuille reversé au client.

On modélise le comportement de l'assuré en supposant que celui ci calcule à chaque instant la rentabilité passé de son contrat et utilise ce taux de rendement historique pour évaluer la valeur de son contrat à l'échéance. La comparaison à chaque instant de cette prévision et des opportunités offertes sur le marché au même moment permet d'élaborer un critère de sortie comme un temps d'arrêt τ, représentant la date aléatoire à laquelle le client quitte le contrat.

Le portefeuille de la compagnie est constitué d'une proportion d'actifs risqués et d'une proportion d'obligations, et cette composition varie au cours du temps. Les variations des proportions de l'investissement de la compagnie en actifs risqués et obligations modifient le bilan futur, aussi faudra–t–il "autofinancer" le portefeuille, ce qui signifie qu'à chaque instant, le passage de l'ancienne composition à la nouvelle doit se faire sans apport ni retrait d'argent.

La compagnie doit utiliser ces variables comme paramètres de contrôle de son bilan ; il est ainsi naturel de rechercher un contrôle "optimal", ayant comme critère de minimiser, en espérance, les pertes de la compagnie. Nous posons le problème en termes de contrôle stochastique, et nous montrons que, dans cet exemple relativement simple, il est possible de trouver un tel contrôle, par la résolution d'une équation aux dérivées partielles non–linéaire de type Hamilton–Jacobi–Bellman.

Nous considérons le processus controlé X, solution d'une équation différentielle stochastique contrôlée :

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(X_t,u_t)dB_t + f(X_t,u_t)dt \\ X_0 &= x = (r,A,t_0) \end{cases}$$

2. "Etude numérique de sensibilité d'un bilan de société d'assurance dans le cadre de contrats avec options de sortie.", "Banques et marchés", 28 (1997)

où $(u_t; 0 \leq t \leq T)$ est le processus de contrôle. Notre but est de trouver un processus u qui réalise :

$$\inf_{u_. \in \mathcal{A}} E[(D_\tau - A_\tau)^2]$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des processus de contrôle admissibles. Nous montrons que la fonction valeur $V(x) = \inf_{u_. \in \mathcal{A}} E_x[(D_\tau - A_\tau)^2]$ associée au problème de contrôle, est solution (en un sens large) de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman du type :

$$\begin{cases} \inf_{u \in [0;1]} L^u V(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times O, \\ V(t,x)) = \phi(x), \forall (t,x) \in [0,T) \times \partial O, \\ V(T,x) = \psi(x), \forall x \in O \end{cases}$$

où ψ et ϕ se déduisent de la fonction coût, L^u est l'opérateur associé à la diffusion (S,Z,t) avec le contrôle constant u, O est notre domaine ouvert et τ est le temps de sortie de cet ouvert.

Approche numérique. La résolution numérique de l'équation ci–dessus ne permet pas d'exhiber le contrôle optimal, mais construit un contrôle à temps discret qui permet d'approcher la fonction valeur.

Nous avons utilisé l'algorithme itératif de Trotter [LM80], qui conduit à la résolution d'une suite de problèmes de Dirichlet linéaires, chacun des sous–problèmes étant résolu par un algorithme de Monte–Carlo. Cette technique très lourde est due à la complexité de la condition au bord qui rend difficile l'utilisation de méthodes plus économiques comme les éléments finis.

6.4 Collaboration avec le CCF

Participants : Claire Gauthier, Nathalie Pistre.

Mots clés : risque de crédit, choix optimal de niveau de risque, dérivés de crédit.

Modélisation du risque de crédit

La théorie existante sur le risque de crédit contient deux grands types de modèles : les modèles optionnels et les modèles à sauts. Les premiers considèrent que la faillite se déclenche quand la valeur des actifs de la firme atteint (progressivement) un certain seuil exogène ou endogène, les autres voient au contraire le défaut comme un événement soudain qui crée une discontinuité dans la dynamique du prix d'une obligation.

La valeur des actifs de la firme se place comme variable centrale de l'étude du risque de crédit. Le but de nos recherches est d'analyser le choix de la volatilité (et donc du risque) de la valeur des actifs de la firme fait par les actionnaires et de mesurer l'impact du choix de cette volatilité sur le coût d'endettement de la firme, le tout en considérant la valeur des actifs de

[LM80] P. Lions, B. Mercier, « Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman », *R.A.I.R.O. 14*, 1, 1980, p. 369–393.

la firme comme une variable endogène alors que les modèles précédemment cités la supposent exogène.

Nous sommes parvenus, dans le cadre d'un modèle binomial, à exhiber le niveau de volatilité qui maximise les capitaux propres de la firme. Ce choix de risque optimal résultant de la résolution de problèmes de contrôle optimal, nous nous sommes particulièrement intéressés aux adaptations possibles des modèles d'équilibre de Merton (76) et Cox, Ingersoll et Ross (85) au risque de crédit. Une adaptation faite par Chang et Sundaresan (99) est actuellement à l'étude.

Parallèlement, nous avons développé un modèle empirique explicatif des spreads de crédit sur le marché français. Il s'agit d'un modèle multifactoriel qui utilise des variables explicatives de différentes sortes : macroéconomiques, données de marchés, données financières. À l'aide de l'économétrie des données de panel, notre modèle restitue une bonne partie de la variance des spreads de crédit français. L'extension de ce modèle au marché européen est en cours. Pour finir, nous nous intéressons à ces nouveaux instruments, assez récents sur le marché du crédit, que sont les produits dérivés de crédit, ces produits posant notamment des problèmes d'évaluation. Voir [20].

7 Actions régionales, nationales et internationales

7.1 Actions régionales

Omega–Sophia Antipolis a participé à la création et participe aux enseignements du DESS IMAFA d'ingénierie financière (ESSI, université de Nice Sophia Antipolis).

7.2 Actions nationales

D. Talay est président du groupe MAS de la SMAI.

7.3 Actions internationales

D. Talay et P. Protter (université Purdue) sont les responsables d'une collaboration NSF/INRIA sur le thème des applications de la convergence en loi des processus stochastiques.

D. Talay et A. Chorin (département de mathématiques de l'université de Californie à Berkeley) sont responsables d'une collaboration financée par le programme France–Berkeley sur les thèmes des méthodes de vortex aléatoire pour la résolution d'équations de la Mécanique des Fluides et de la simulation numérique de la turbulence.

7.4 Visites et invitations de chercheurs

Brahim Boufoussi (université de Cadi Ayyad, Marrakech) a visité Omega–Nancy en décembre 1998.

Alexander Gottlieb (université de Californie, Berkeley) a visité Omega–Sophia Antipolis en septembre et octobre 1999.

Anatoli Manita (université de Moscou) a visité Omega–Sophia Antipolis en septembre et octobre et Omega–Nancy en novembre 1999.

Ely Merzbach (université de Bar–Ilan, Israel) a visité OMEGA–Nancy en juillet 1999.

Youssef Ouknine (université de Cadi Ayyad, Marrakech) a visité OMEGA–Nancy en janvier 1999.

Francine et Marc Diener (université de Nice) ont visité OMEGA–Sophia Antipolis de septembre 1998 à février 1999 dans le cadre d'un congé sabbatique.

8 Diffusion de résultats

8.1 Animation de la Communauté scientifique

D. Talay est membre des comités d'édition des revues « Mathematics of Computation », « Stochastics and Finance » et « Monte Carlo Methods and Applications ». Il est reviewer permanent pour les Mathematical Reviews. Il est également membre du comité scientifique du programme CNRS « Risques de la complexité des systèmes financiers ».

D. Talay est membre de la commission de spécialistes du département de mathématiques de l'université Blaise Pascal (Clermont–Ferrand). B. Roynette et P. Vallois sont membres de la commission de spécialistes du département de mathématiques de l'université Henri Poincaré. P. Vallois est membre de la commission de spécialistes de Nancy 1–Nancy 2, de l'INPL, et de Besançon.

P. Vallois est l'organisateur des rencontres Évry–Nancy–Strasbourg de Probabilité et Statistiques qui se tiennent à Nancy.

Le séminaire de Théorie et applications numériques des processus stochastiques organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Philip Protter (Purdue University), Anatoli Manita (université d'État Lomonossov de Moscou) Benjamin Jourdain (CERMICS), Patrick Cattiaux (université Paris X), Abdelkarem Berkaoui (université de Cadi Ayyad, Marrakech), B. Rousselet (université de Nice Sophia–Antipolis), Sylvain Maire (ISITV), Alexander Gottlieb (université de Californie, Berkeley).

Le séminaire de Mathématiques financières organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy et N. Pistre a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Francine Diener (université de Nice Sophia–Antipolis), Rama Cont (CMAP - École Polytechnique), Robert Kast (GREQE - Marseille).

M. Deaconu et D. Talay organisent les réunions du Groupe CNRS « Modélisation d'EDS. Méthodes particulaires et dynamiques aléatoires pour la mécanique des fluides ». Ce groupe réunit environ 30 personnes provenant de domaines divers : mathématiciens, physiciens et industriels, qui travaillent sur l'approximation de problèmes de la mécanique des fluides suivant des points de vues assez différents. Les réunions permettent un échange d'informations et des discussions enrichissantes sur le sujet.

M. Gradinaru, B. Roynette et P. Vallois ont organisé les Journées de Probabilités qui ont eu lieu à Nancy du 6 au 10 septembre 1999.

M. Dozzi a été co–organisateur (avec R. Dalang et F. Russo) de la 3ème Conférence sur "Stochastic Analysis, Random Fields and Applications", qui a eu lieu à Ascona du 19 au 24 septembre 1999.

L'équipe de probabilités de Nancy organise chaque semaine un groupe de travail et un séminaire. Parmi les orateurs du séminaire extérieurs du projet on note : A. Sadeghi (université de Kaiserslautern), D. Piau (université de Lyon I), J. Jabbour (université de Versailles), C. Joseph (université de Versailles), G. Louchard (université de Bruxelles), S. Louhichi (université de Paris–Sud), D. Louani (université de Paris 6), C. Stricker (université de Besançon), A. Kosyak (université de Kiev), M. Ouzina (université de Rouen), J.G. Attali (Université de Paris 6), D. Lamberton (université de Marne–la–Vallée), A. Bienvenue (université de Lyon I), M. Mellouk (université de Paris 6), S. Lagaize (université d'Orléans), M. Salah (université de Southern – Illinois), E. Merzbach (université de Bar–Ilan).

B. Roynette a été rapporteur des thèses suivantes : B. Morel (université de Lille), O. Mazet (université Paul Sabatier de Toulouse), A. Bienvenüe (université de Lyon), M. Mellouk (université de Paris 6), B. Guillemeau (université de Rennes I).

B. Roynette a fait partie du Comité Scientifique pour l'évaluation de l'IRMAR de Rennes.

D. Talay a fait partie du Comité Scientifique pour l'évaluation du laboratoire CNRS de mathématiques appliquées de l'université Blaise Pascal (Clermont–Ferrand).

D. Talay a été rapporteur de quatre thèses (deux à l'université Paris 6, une à l'université Blaise Pascal de Clermont–Ferrand, une à l'université de Marrakech).

D. Talay a été rapporteur pour un recrutement à l'université Pompeu Fabra de Barcelone.

8.2 Enseignement universitaire

D. Talay enseigne au DEA de probabilités de Paris 6 (option « mathématiques financières ») (12h) et à la formation doctorale FAME (universités de Lausanne et de Genève)(12h) dont il assure également la coordination des enseignements de mathématiques.

M. Bossy donne un cours d'introduction à la modélisation financière au DEA de « Macrodynamique et de financement des économies ouvertes » de l'université de Nice (10h).

M. Bossy (26h), D. Talay (6h), O. Vaillant (6h) donnent des cours d'introduction aux processus stochastiques et d'analyse numérique au DESS IMAFA (« Informatique et Mathématiques Appliquées à la Finance et à l'Assurance ») de l'université de Nice–Sophia Antipolis. D. Talay est le responsable des enseignements de mathématiques dans cette option, et est membre de son conseil scientifique.

N. Pistre donne un cours de marchés financiers et techniques actuarielles dans le DESS IMAFA.

A. Grorud enseigne dans le Module de "Modèles mathématiques de la Finance" du DESS "Mathématiques de l'Ingénieur", co–habilité avec l'Université Aix–Marseille II.

B. Roynette et P. Vallois sont professeurs à l'université Henri Poincaré, et donnent des cours de DEA sur le calcul stochastique et des cours de DESS.

8.3 Autres enseignements

D. Talay enseigne à l'École Polytechnique en tant que Maître de Conférences à temps partiel, et au mastère de finance internationale d'HEC (15h).

N. Pistre est professeur à l'Ensae et donne un cours sur le choix d'investissement et les options réelles à HEC–Lausanne.

8.4 Participation à des colloques, séminaires, invitations

Participation à des colloques, séminaires

D. Talay a donné deux conférences plénières, l'une au congrès Foundation of Mathematics (Oxford, juillet 1999), l'autre à la conférence ENUMATH-99 (Jyväskylä, Finlande, juillet 1999). Il a exposé à la Journée nationale de dynamique stochastique des structures organisée par l'ONERA (juin 1999), ainsi qu'à la Journée de mathématiques financières organisée à l'EDF. Il a également donné un séminaire à l'École Polytechnique et des exposés à l'EDF–Clamart. Il a organisé une session aux XXXI–èmes journées de statistique de Grenoble (17–21 mai 1999) dont il était membre du comité scientifique.

P. Chassaing a exposé au séminaire du projet Algorithme, à INRIA Rocquencourt (novembre 1998) et deux fois au Math Seminar à l'université de Kiel (décembre 1998).

M. Deaconu a exposé à INRIA–NSF Workshop "Stochastic Numerical Analysis", à Paris (14–16 juin 1999); aux XXXI–èmes Journées de Statistiques de Grenoble (17–21 mai 1999); aux Journées MAS/SMAI/INRIA, à Sophia Antipolis (16–18 septembre 1998) et dans la 3–ème Rencontre Evry–Nancy–Strasbourg de Probabilités et Statistiques, à Strasbourg (26–27 mai 1999).

M. Dozzi a exposé au International Workshop on multiparameter processes (31 janvier–4 fevrier 1999), à l'université de Bari (Italie); au Congrés Franco–Israelien sur l'Espace (21–23 mars 1999), à l'université de Bar–Ilan (Israel); aux Journées de Probabilités (14–15 juin 1999) à l'université Cady Ayyad, Marrakech (Maroc); à l'International Conference on Stochastic Analysis and Mathematical Physics (23–29 mai 1999), université de Lisbonne (Portugal) et aux Journées de Probabilités Evry–Nancy–Strasbourg, (9–10 décembre 1998), à l'université d'Evry.

C. Gauthier a exposé à Eurobanking (Rome).

A. Grorud a exposé à Berlin (Humboldt Universität) en janvier 1999 (Séminaire de travail), à Hammamet (3rd International Workshop on Mathematical Finance) en juin 1999 et à l'Ecole CEA-EDF-INRIA (Mathématiques financières) en juin 1999.

J.-F. Marckert a exposé au séminaire du projet Algorithme, INRIA Rocquencourt, à l'Ecole d'Eté en Probabilité à Saint Flour, à la rencontre Evry–Nancy–Strasbourg (26–27 mai 1999).

O. Vaillant a exposé à l'ISITV et aux XXXI–èmes journées de statistique de Grenoble (17–21 mai 1999).

P. Vallois a exposé aux Journées de Probabilités à Luminy (septembre 1998); aux Journées MAS/SMAI/INRIA, à Sophia Antipolis (septembre 1998); à l'Université de Bar Ilan, Tel Aviv (Isræl, novembre 1998) et a participé au "Concentrated Course and Workshop on Product Integrals and Pathwise Integration" à Aarhus, Danemark (janvier 1999).

M. Deaconu, M. Gradinaru, P. Vallois et B. Roynette ont participé à "Stochastic Analysis Random Fields and Applications" à Ascona en Suisse (20–22 septembre 1999). M. Gradinaru et P. Vallois ont fait un exposé.

M. Deaconu a participé à "Minisymposium on Stochastic Methods in Financial Models" à Ascona en Suisse (23–24 septembre 1999).

N. Pistre a exposé au GDR Fiquam (Carqueranne, mai 1999), à Hammamet (3rd International Workshop on Mathematical Finance) en juin 1999.

Invitations

P. Chassaing a été invité une semaine à l'université de Kiel (décembre 1998).

M. Dozzi a séjourné du 10 au 24 juin 1999 à l'université de Marrakech, Maroc.

N. Pistre a été invitée un mois a l'université d'Ottawa (juillet 1999).

O. Vaillant a séjourné un mois au Lawrence Berkeley National Laboratory (LBLN, University of California, Berkeley).

P. Vallois a sejourné du 9 au 18 novembre 1998 à l'université de Bar Ilan (Tel Aviv, Isræl) et en janvier 1999, à l'université d'Aarhus (Danemark).

S. Wantz–Mézières a séjourné du 8 au 11 juin à Imperial College, Londres.

9 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I) : convergence rate of the distribution function », *Probability Theory and Related Fields 104*, 1, 1996.

[2] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II) : convergence rate of the density », *Monte Carlo Methods and Applications 2*, 1996, p. 93–128.

[3] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, P. Vallois, « Nonlinear self stabilizing processes I Existence, invariant probability, propagation of chaos », *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 173–201.

[4] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Branching process associated with 2d–Navier Stokes equation », *Prépublications n° 30*, Institut Élie Cartan, 1998.

[5] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Nonlinear self stabilizing processes II Convergence to invariant probability », *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 203–224.

[6] P. Bernard, D. Talay, L. Tubaro, « Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients », *Math. Comp. 63*, 208, 1994, p. 555–587.

[7] M. Bossy, D. Talay, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation », *Ann. Appl. Probab. 6*, 1996, p. 818–861.

[8] C. Graham, T. Kurtz, S. Méléard, P. Protter, M. Pulvirenti, D. Talay, *Probabilistic Models for Nonlinear PDE's and Numerical Applications*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1627, Springer-Verlag, 1996, CIME Summer School, D. Talay and L. Tubaro (Eds.).

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[9] H. Régnier, *Vitesse de convergence de méthodes particulaires stochastiques avec branchements*, thèse de doctorat, université de Provence, 1999.

Articles et chapitres de livre

[10] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Explicit solutions of some fourth order partial differential equations via iterated Brownian motion », *Progress in Probability*, 45, 1999, p. 39–61.

[11] L. Denis, A. Grorud, M.Pontier, « Formes de Dirichlet, grossissement de fitration et anticipation dans un marché discontinu », *Séminaire de Probabilités*, 34, 1999.

[12] R. Gibson, F. Lhabitant, N. Pistre, D. Talay, « Interest rate model risk », *in: Asset & Liability management: a synthesis of new methodologies*, R. Books (éditeur), Chapter 4, London, decembre 1998, p. 67–86.

[13] R. Gibson, F. Lhabitant, N. Pistre, D. Talay, « Interest rate model risk », *Journal of risk 1*, 1999.

[14] M. Gradinaru, B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « Abel transform and integrals of Bessel processes », *Annales de l'Institut Henri Poincaré 4*, 35, 1999, p. 531–572.

[15] M. Gradinaru, B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « The laws of Brownian local time integrals », *Comp. Appl. Math.*, 1999, à paraître.

[16] S. Mézières, B. Roynette, « Study of a Brownian impulse », *Ann. Appl. Prob.*, 1999, à paraître.

[17] A. Mézin, P. Vallois, *Mathematics Mechanics of Solids*, 1999, à paraître.

[18] F. Russo, P. Vallois, « Stochastic calculus with respect to a quadratic variation process », *Stochastics and Stochastics Reports*, 1999, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[19] D. Talay, « Approximation of the invariant probability measure of stochastic Hamiltonian dissipative systems with non globally Lipschitz coefficients », *in: Dynamique Stochastique des Structures*, S. Bellizzi, F. Poirion (éditeurs), Éditions du CNRS, 1999.

Divers

[20] C. Gauthier, S. Lardic, « A multifactor model for credit spreads », 1999, working paper CCF.

[21] H. Régnier, D. Talay, « Convergence rate of the Sherman and Peskin stochastic particle method with interacting branching processes », 1999, article soumis.