INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet Saga

Systèmes Algébriques, Géométrie et Applications

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

1999

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Jean-Pierre Merlet [DR2 Inria]

Responsable permanent

Bernard Mourrain [CR1 Inria]

Assistante de projet

Corinne Zuzia [AJT Inria, à mi-temps dans le projet]

Personnel Inria

Ioannis Emiris [CR2 Inria]

Yves Papegay [CR2 Inria]

Jean-Patrick Giacometti [IR Inria, jusqu'en septembre 1999]

Chercheurs doctorants

Didier Bondyfalat [boursier MENRT jusqu'au 31 octobre 1999 puis boursier INRIA du 1er novembre au 31 décembre 1999]

Laurent Busé [boursier MENRT]

David Daney [boursier MENRT jusqu'au 30 septembre 1999 et boursier INRIA du 1er octobre au 31 décembre 1999]

Olivier Ruatta [boursier MENRT à partir du 1er octobre 1999]

Luc Rolland [boursier INRIA, partagé avec le projet POLKA]

Philippe Trébuchet [boursier ENS Cachan, à partir du 1er octobre 1999]

Chercheurs invités

Albert Castellet [doctorant de l'Institut de robotique et d'informatique Industrielle de l'Université Polytechnique de Catalunya (Espagne), du 6 au 15 avril 1999]

Hirohisa Hirukawa [chercheur à l'Electro Technical Lab. à Tsukuba (Japon), du 20 septembre au 15 octobre 1999]

Collaborateurs extérieurs

Mohamed Elkady [maître de conférence à l'Unsa]

Patrick Solé [DR CNRS-I3S Université de Nice]

Pierre Comon [DR CNRS-I3S]

Stagiaires

Laurent Carrot [stagiaire ENS Cachan, du 25 juillet au 7 septembre 1999]

David Emsellem [stagiaire en maîtrise de mathématique et informatique à l'Unsa, du 1er au 31 juillet 1999]

François Garacci [stagiaire en maîtrise à l'INSA Lyon, du 1er juin au 31 juillet 1999]

Laurent Grimaud [stagiaire en maîtrise de mathématique et informatique à l'Unsa, du 1er juillet au 31 août 1999]

Théodore Nikitopoulos [stagiaire de l'Université de Aegean (Grèce), du 20 avril au 20 juin 1999]

Hélène Prieto [stagiaire Essi, du 1er avril au 30 septembre 1999]

Laurent Véronique [stagiaire Cust Clermont-Ferrand, du 2 mai au 31 juillet 1999]

2 Présentation et objectifs généraux

Mots clés : géométrie, théorie des invariants, géométrie algébrique effective, algorithmique des polynômes, lien symbolique-numérique, robustesse, matrice structurée, implantation, applications, robotique, théorie des mécanismes, vision artificielle, chimie moléculaire, santé, télécommunications.

La géométrie algébrique effective joue un rôle important dans un éventail très large de domaines d'applications, allant de la chimie à l'infographie en passant par la théorie des mécanismes, le traitement du signal et la vision par ordinateur. En pratique, les phases où intervient cette géométrie sont souvent des points bloquants.

En effet, malgré les développements importants de cette discipline lors des dix dernières années, force est de constater que son impact réel est faible, ceci pour quatre raisons :

1. une absence de *travail amont sur la modélisation* : les objets algébriques que nous considérons sont issus d'une phase de modélisation. Or, les différents types de modélisation ne conduisent pas à des objets algébriques de même complexité du point de vue de la résolution ultérieure.
2. un défaut *d'adaptation* : en pratique, les systèmes polynômiaux que nous rencontrons appartiennent à certaines classes de problèmes (problèmes de distances, de déplacements, ...). À l'image de l'algèbre linéaire, les spécificités de ces systèmes polynômiaux, doivent être prises en compte.
3. un défaut *d'ergonomie* : les difficultés liées aux choix des méthodes de résolution, à la façon de les utiliser, à leur adéquation avec le problème à résoudre, sont parfois rédhibitoires. Un travail de *transfert* de connaissances, d'intégration des techniques et outils logiciels dans les phases de modélisation et de résolution est donc nécessaire.
4. un défaut *d'implantation* : la communauté mathématicienne a certes produit un effort important dans le domaine théorique mais il se traduit de manière très inégale en termes d'implantations logicielles. Par ailleurs, il y a souvent inadéquation totale entre les capacités des utilisateurs potentiels et le niveau d'expertise nécessaire à l'utilisation de ces outils.

L'objectif du projet `SAGA` est de combler ces lacunes en agissant à quatre niveaux :

1. en recherchant de nouveaux algorithmes en Algèbre et en Géométrie, en développant de nouvelles méthodes formelles et/ou numériques, en relation avec les applications.
2. en dégageant des classes de problèmes de généricité relativement larges et en mettant en place des algorithmes dédiés à ces classes de problèmes.
3. en fournissant à l'utilisateur des outils allant de la mise en équations en passant par des outils d'analyse de la géométrie des solutions, jusqu'aux implantations d'algorithmes de résolution, dans des bibliothèques dédiées, modulaires, d'accès et d'usage faciles. L'efficacité des codes produits et leur validation sur de gros problèmes est une préoccupation majeure.
4. en utilisant ces bibliothèques dans le cadre d'applications particulières soit en connexion directe avec les utilisateurs finaux soit dans des domaines prometteurs.

Ce transfert de connaissances de la géométrie algébrique effective vers le calcul scientifique et les applications est donc un pari important, qui sous-tend les objectifs de notre projet.

3 Fondements scientifiques

Dans beaucoup de domaines appliqués, le traitement d'un problème passe par des étapes de modélisation, d'analyse du modèle et de résolution. Ainsi, la mise en équation produit un problème mathématique, dont la résolution amène à concevoir à la fois un algorithme puis son implantation et son application.

Notre démarche s'attache donc à dégager, dans des domaines où la géométrie, l'algèbre et l'algorithmique jouent un rôle important, des méthodes reposant sur le calcul formel pour le traitement de ces différentes étapes.

Notre démarche est ainsi motivée à la fois par des considérations théoriques en géométrie algébrique effective, mais aussi par leurs applications en théorie des mécanismes, en vision artificielle, en géométrie algorithmique...

Analyser les propriétés des objets mathématiques qui apparaissent dans ces problèmes à partir d'exemples suffisamment génériques (par leurs occurrences pratiques et les problèmes qu'ils illustrent), rechercher des méthodes puissantes pour les exploiter, développer à la fois les méthodes effectives en mathématiques et les logiciels qui les rendent utilisables sont donc les points forts du projet.

Dans l'étape de modélisation, notre approche s'appuie sur la théorie des invariants et le calcul formel en géométrie. Par exemple, le formalisme de Grassmann-Cayley fournit des outils pour analyser à la fois les correspondances dans les images ainsi que les lieux critiques des mécanismes à plusieurs corps.

Dans la phase d'analyse, la géométrie algébrique effective fournit des méthodes et outils, permettant de mieux comprendre la géométrie des solutions, leur dimension, leur degré, ... La structure des équations et plus particulièrement des monômes dans ces équations, soulève des problèmes liés à la géométrie des polytopes convexes (une autre manière de voir la programmation linéaire, entière ou non) et conduit à des calculs sur les cônes et sous-réseaux de Z^n.

La résolution explicite des problèmes fait quant à elle, appel à une analyse des structures des objets manipulés (matrice de Toeplitz, Hankel, ...) ou à des méthodes plus numériques, comme l'analyse par intervalles. Elle soulève des questions de complexité théorique, mais aussi de stabilité numérique, devant prendre en compte l'incertitude sur les données. Dans ces problèmes à la frontière entre le calcul numérique et symbolique, les polynômes et les matrices jouent un rôle central.

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

Mots clés : chimie moléculaire, robotique, santé, théorie des mécanismes, télécommunications, vision artificielle.

Clairement, le champ d'application de la géométrie algébrique est extrêmement large, mais il est tout aussi clair qu'au sein d'un projet de la taille de SAGA il ne saurait être question d'aborder l'ensemble des applications. Nous avons donc décidé de nous concentrer sur quatre sujets : la théorie des mécanismes (qui constitue un point commun des recherches passées des membres du projet), la vision par ordinateur, la chimie moléculaire et les télécommunications. Ces deux derniers domaines constituent un développement récent des centres d'intérêt du projet :

- Théorie des mécanismes : nos activités portent sur la conception optimale des mécanismes, sur la modélisation et l'analyse géométrique, en particulier pour la machine-outil, les suspensions automobiles et la robotique médicale,
- Vision par ordinateur : nous nous intéressons ici aux problèmes algébriques tels que la calibration de caméra à partir d'équations de Kruppa, la modélisation et la reconstruction tridimensionnelle à partir d'images,
- Chimie moléculaire : nous nous intéressons aux conformations et particularités géométriques de molécules organiques. Certains problèmes de ce domaine ont des analogues en théorie des mécanismes ce qui favorisera la transition de nos recherches vers cette branche,
- Télécommunications : nous nous concentrons sur le problème de l'identification de sources avec le support de spécialistes du domaine. L'étude des signaux à partir d'analyses statistiques d'ordre supérieur à 2 (HOS) conduit à des problèmes polynomiaux sur lesquels nous testons et validons nos approches algorithmiques.

5 Logiciels

5.1 Bibliothèque `ALP`

Mots clés : algèbre linéaire, bézoutien, C++, fft, généricité, géométrie algébrique effective, lien symbolique-numérique, matrice creuse, matrice structurée, méthode itérative, polynômes, résolution, résultant, stabilité, valeur propre.

Participants : Bernard Mourrain [correspondant], Didier Bondyfalat, Laurent Carrot, Ioannis Emiris, Hélène Prieto, Olivier Ruatta, Philippe Trébuchet.

Les problèmes que nous rencontrons font appel à la fois à des méthodes manipulant des polynômes, des idéaux, des anneaux quotients, ... et aussi à des calculs numériques sur des vecteurs, des matrices, dans des processus itératifs. Ces domaines étaient jusqu'à présent bien séparés, d'un côté des logiciels manipulant des formules, souvent peu efficaces pour l'algèbre linéaire numérique, de l'autre des logiciels stables numériquement et efficaces en algèbre linéaire mais peu adaptés au traitement des polynômes, par exemple.

L'objectif que nous poursuivons dans la conception du logiciel `ALP` est donc de fournir un environnement performant, dédié aux calculs symboliques et numériques pour les polynômes, en vue d'applications en robotique, vision, ...

Cette bibliothèque comprend un ensemble de structures et de fonctions permettant de manipuler des vecteurs, des matrices, des polynômes en une ou plusieurs variables. Une attention particulière à été apportée à la généricité de ces structures sans pour autant perdre en efficacité. Pour cela, nous avons distingué deux niveaux d'implantation. Le premier niveau concerne les conteneurs qui sont des objets mémorisant de manière optimisée les données nécessaires au calcul. Le deuxième niveau concerne les vues (vecteur, polynômes, ...) que l'on veut donner à ces conteneurs et les méthodes qui s'y rattachent. Ces deux niveaux sont implantés à l'aide de classes paramétrées (template) et un contrôle précis de certaines étapes de précompilation (inline, expression template) permet de générer des codes très efficaces.

Voici les principales structures :

- **Arithmétique** : d'infinitésimaux, d'intervalles (connexion avec `ALIAS`, en cours), connexion avec la bibliothèque multiprécision `GMP`.
- **Vecteur** à coefficients génériques.
- **Matrices** à coefficients et structures génériques :
  - Matrices denses. Implantation générique de la `svd`, du déterminant, ... Connexion avec la bibliothèque LAPACK pour l'algèbre linéaire numérique (`double, complexes`).
  - Matrices de Toeplitz, Hankel. Produit matrice-vecteur par `FFT`.
  - Matrices creuses. Implantation générique de solveur. Connexion avec des outils spécialisés comme `UMFPACK, SparseLib, SuperLU`.
- **Polynômes en une variable**. Méthode de résolution d'Aberth (Connexion avec le logiciel de résolution en multiprécision `mpsolve` de D. Bini et G. Fiorentino, Pise), d'Uspensky (connexion avec le logiciel de F. Rouillier, INRIA, Nancy)
- **Polynômes en plusieurs variables**. Coefficients, structure des monômes et ordre sur ces monômes génériques. Connexion (par `socket`) avec le logiciel RS (F. Rouillier) et GB (J.C. Faugère).

Cette bibliothèque contient également un certain nombre d'algorithmes utilisés dans la résolution de systèmes polynomiaux.

- Résolution d'équations polynomiales à partir de calcul de valeurs et vecteurs propres d'opérateurs de multiplication.
- Différentes constructions de résultants reposant sur les formulations de Macaulay, de Bézoutien. Une connexion avec l'implantation des résultants creux de I. Emiris.

- Transformation de ces matrices à coefficients polynomiaux en vue de la résolution par des calculs de vecteurs propres.
- Des méthodes itératives contrôlées telles que la méthode de Sebastio e Sylva pour les polynômes en une variable (calcul de la racine la plus proche d'un point pour un polynôme de degré 10^6 en $2520s$ sur DEC Alpha, V6), ou minimisant (ou maximisant) un certain critère (méthode de la puissance inverse à partir de matrices de résultants).

Ces outils nous ont permis de résoudre certains problèmes pratiques dont voici quelques exemples :

- Résolution du problème du modèle inverse d'un robot série quelconque à 6 degrés de liberté (moins de $0.05s$ sur Sparc20 pour le calcul des 16 solutions). Application à des problèmes de biologie moléculaires.
- Configuration d'une molécule de type cyclohexane, quand on connaît les distances entre deux atomes consécutifs et les angles entre deux liaisons consécutives.
- Calibration d'une caméra à partir des équations de Kruppa.
- Résolution du problème du modèle direct d'un robot parallèle ayant deux points d'attache des bras identiques (calcul des 40 solutions en moins de $0.5s$ sur Sparc20)
- Calibration de robot parallèle.
- Identification « aveugle » de sources dans un signal (travail en cours).

`ALP` est accessible à l'URL `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/ALP/`.

5.2 Bibliothèque `ALIAS`

Mots clés : analyse par intervalles, géométrie algébrique effective, lien symbolique-numérique, robustesse.

Participants : Jean-Pierre Merlet [correspondant], Didier Bondyfalat.

La bibliothèque `ALIAS` (*Algorithms Library of Interval Analysis for Systems*) a pour objet d'appliquer l'analyse par intervalles au problèmes d'analyse et de résolution des systèmes, principalement mais pas uniquement, algébriques. Diverses raisons ont motivé l'écriture de cette bibliothèque :

- la fréquence dans les cas pratiques de systèmes pour lesquels on ne recherche de solutions que dans des intervalles donnés ou dont l'analyse permet facilement de borner les solutions,
- la possibilité de gérer les erreurs numériques qu'offre l'analyse par intervalles, ce qui permet de garantir la robustesse de la résolution,
- la possibilité de gérer des systèmes dont les coefficients sont incertains, ce qui arrive fréquemment dans les applications.

`ALIAS` repose pour les opérations de base de l'analyse par intervalles sur le logiciel `BIAS/Profil` de l'université de Hambourg et offre actuellement les fonctionnalités suivantes :

- algorithmes de résolution pour les systèmes de dimension 0, algébriques ou non, avec dans une certaine mesure, la possibilité de résoudre des systèmes ayant des intervalles comme coefficients,
- analyse d'équations algébriques et trigonométriques en une variable. Ces méthodes permettent de déterminer des bornes sur les racines ou le nombre de racines dans un intervalle donné sans passer par la résolution. Les coefficients des équations peuvent être des intervalles,
- un « parser » pour l'évaluation par analyse par intervalles de formules. Il permet d'évaluer efficacement les bornes d'une fonction écrite de manière analytique dans un fichier. Un tel « parser », intégré dans un programme applicatif, permet d'utiliser MAPLE pour obtenir la forme analytique la plus favorable à l'évaluation.

`ALIAS` est actuellement en cours d'interfaçage avec la bibliothèque `ALP` qui permet de définir de manière souple et ouverte des systèmes algébriques. Cette interfaçage permettra d'utiliser, sur les mêmes structures de données, les différentes méthodes de résolution proposées dans les deux bibliothèques. Les méthodes de résolution d'`ALIAS` sont aussi interfacées pour pouvoir être utilisées directement à partir de MAPLE. `ALIAS` a été testée sur un ensemble de systèmes faisant partie de la base de systèmes polynomiaux gérée par D. Bini et B. Mourrain `http://www.inria.fr/saga/POL/`, ainsi que sur des problèmes de robotique (section 6.3.1) et de théorie des mécanismes (section 6.3.6). Ces tests ont montré que, sur des problèmes avec un nombre relativement faible d'inconnues (jusqu'à 12), les méthodes d'`ALIAS` offraient une alternative intéressante et pouvaient même apporter des solutions à des problèmes sans solution connue à ce jour. La première version de cette bibliothèque sera disponible à la fin de l'année sous `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/ALIAS`.

5.3 Robots parallèles

Mots clés : robotique, robot parallèle, théorie des mécanismes.

Participant : Jean-Pierre Merlet [correspondant].

Nous mettons à disposition `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/RP/catalogue.html` une douzaine de nos logiciels d'analyse des robots parallèles soit sous forme binaire, soit sous forme source. Il s'agit de logiciels permettant la visualisation, l'analyse de l'espace de travail, la résolution de modèle géométrique direct ainsi que la détermination de performances. Ils sont régulièrement mis à jour à partir de l'évolution de nos travaux et des retours des utilisateurs. Notre principal travail cette année en dehors des mises à jour, a été de porter ces logiciels sous Linux pour en favoriser la diffusion.

5.4 Géométrie combinatoire et résolution de systèmes polynomiaux

Participant : Ioannis Emiris [correspondant].

Mots clés : algèbre linéaire numérique, algorithmique des polynômes, géométrie algorithmique, lien symbolique-numérique, traitement des dégénérescences.

Les logiciels *géométriques* incluent :

1. Une implantation en C d'un algorithme incrémental pour construire *l'enveloppe convexe* et calculer son volume, étant donné un ensemble de points en dimension arbitraire. Les données dégénérées sont traitées d'après une *perturbation* symbolique et efficace. Une phase de post-traitement enlève les produits artificiels de la perturbation, en petite dimension.
2. Le programme du *volume mixte* borne le nombre de racines communes d'un système polynomial par des calculs purement combinatoires. Il est une fonction des termes non-nuls qui exprime la structure creuse du système. Ce calcul définit une base monomiale de l'anneau quotient des polynômes et spécifie un système de départ pour résoudre les équations par une homotopie numérique creuse. L'implantation en C a été intégrée dans `ALP` et FRISCO et une implantation distribuée a aussi été réalisée.
3. Un programme de calcul des *subdivisions mixtes*, qui donne encore plus d'informations sur un système polynomial du point de vue de la théorie de systèmes creux. Tous ces constructions sont visualisées par Geomview.

Les logiciels algébriques comprennent :

1. Un programme de construction de la *matrice du résultant creux* (ou torique), qui généralise la matrice de Sylvester et la matrice des coefficients d'un système linéaire. Son déterminant exprime le résultant creux, dont le degré dépend de la structure géométrique des monômes donnés. Des méthodes combinatoires sont appliquées pour la construction soit en Maple, soit en C (logiciel intégré dans les bibliothèques `ALP` et FRISCO). Les matrices sont caractérisées par une structure quasi-Toeplitz.
2. La matrice du résultant réduit la résolution d'un système polynomial non-linéaire à un problème d'algèbre linéaire. Le logiciel de *résolution de systèmes polynomiaux* en C fait appel à la bibliothèque LAPACK pour les opérations numériques.

Nous mettons à disposition sous `http://www.inria.fr/saga/logiciels/emiris/logiciels.alg-eng.html`, nos logiciels, y compris les codes-sources.

5.5 `multires`, un module autour des résultants en maple

Participants : Bernard Mourrain [correspondant], Laurent Busé.

Mots clés : algorithmique des polynômes, lien symbolique-numérique, résultant.

Le logiciel `multires` écrit en MAPLE contient un ensemble de fonctions permettant de construire des matrices dont le déterminant est un multiple du résultant sur une certaine variété et des algorithmes reposant sur ces formulations, pour résoudre des systèmes d'équations polynomiales. Ce module a comme premier objectif d'illustrer les différentes formulations de résultants qui existent et les méthodes de résolution qui les exploitent (il est ainsi utilisé dans des enseignements en France et à l'étranger : Angleterre, Argentine, ...). Le deuxième objectif est de permettre de générer des codes C++ qui, compilés avec la bibliothèque `ALP`, fournissent des outils de résolution bien adaptés au problème à résoudre et donc efficaces.

Ce module contient en particulier une implantation des Bézoutiens en plusieurs variables, de la formulation de Macaulay [Mac02] pour le résultant projectif (ainsi que le calcul du mineur permettant de calculer exactement le résultant), de celle de Jouanolou [Jou91] combinant des matrices de type Macaulay et de Bézout et de résultants sur une variété torique [CP93].

Nous avons également rajouté la nouvelle construction que nous proposons pour le résultant pour les intersections résiduelles. L'algorithme de décomposition géométrique d'une variété algébrique [30] ainsi que les résolutions à partir de valeurs (ou vecteurs) propres y sont également implantés.

6 Résultats nouveaux

6.1 Géométrie algébrique effective

Mots clés : algorithmique des polynômes, géométrie algébrique effective, géométrie algorithmique, homotopie, lien symbolique-numérique, matrice du résultant, matrice structurée, polyèdre de Newton, polynômes creux, précision numérique, résultat certifié.

Les systèmes polynomiaux sont présents dans nombre d'applications très diverses (robotique, vision artificielle, chimie moléculaire, traitement du signal, ...) et les questions qu'ils soulèvent sont souvent des points bloquants du processus de résolution.

Notre démarche s'attache donc à dégager, dans des domaines où la géométrie, l'algèbre et l'algorithmique jouent un rôle important, des méthodes formelles et numériques, permettant de traiter ces problèmes de manière stable et rapide.

Notre approche repose sur des techniques matricielles, exploitant très fortement la structure des équations, la géométrie des solutions et la stabilité numérique des calculs. Nous nous intéressons donc à la fois à la conception de nouveaux algorithmes en géométrie algébrique effective, prenant en compte les spécificités des problèmes, à la structure des objets manipulés en vue d'améliorer la complexité de ces algorithmes, mais aussi à la qualité numérique des résultats.

6.1.1 Décomposition géométrique d'une variété

Participants : Mohamed Elkadi, Bernard Mourrain.

La décomposition d'une variété algébrique en composantes irréductibles est un problème de base en géométrie algébrique effective. Nous proposons un nouvel algorithme [30] exploitant les propriétés des Bézoutiens pour calculer une telle décomposition. Les méthodes envisagées jusqu'à présent introduisaient des paramètres de déformation ou commençaient par calculer les composantes de dimension maximales, au risque de détruire la structure « creuse » des

[Mac02] F. Macaulay, « Some Formulae in Elimination », *Proc. London Math. Soc. 1*, 33, 1902, p. 3–27.

[Jou91] J. Jouanolou, « Le Formalisme du résultant », *Adv. in Math. 90*, 2, 1991, p. 117–263.

[CP93] J. Canny, P. Pedersen, « An Algorithm for the Newton Resultant », *rapport de recherche n° 1394*, Comp. Science Dept., Cornell University, 1993.

équations initiales. L'approche que nous proposons consiste à calculer d'abord les points isolés de la variété, puis, en cachant successivement une variable, les composantes de dimension plus grande. Nous montrons comment à partir d'un mineur maximal du Bézoutien, nous pouvons calculer une représentation rationnelle des points isolés puis, par récurrence, les autres composantes isolées. Cette méthode nous permet, de plus, de mieux contrôler la taille et la structure des objets manipulés tout en laissant une large place aux optimisations pratiques. Rappelons qu'une implantation en MAPLE de cet algorithme (par S. Tonelli, durant son stage de DEA) est disponible dans le package `multires` `http://www.inria.fr/saga/logiciels/multires.html`.

6.1.2 Résultants classiques

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain.

Le résultant d'un système de $n+1$ équations en n variables est la condition sur les paramètres de ces équations (si elle existe) pour que le système ait une solution. Le cas classique étudié par les anciens (Sylvester, Bézout, Macaulay,...) correspond au cas de $n+1$ équations homogènes. Plus récemment des travaux de l'école Russe, puis Nord Américaine, ont considéré des résultants sur des variétés toriques, définies à partir des monômes qui apparaissent effectivement dans les équations. Ces résultants s'expriment comme facteur de déterminants de matrices, pouvant être exploitées dans la résolution des systèmes polynomiaux. Elles permettent en effet de transformer cette résolution en un problème de calcul de valeurs et vecteurs propres. Dans [21], nous faisons un tour d'horizon des différentes constructions matricielles et des méthodes de résolutions s'appuyant sur ces outils, y compris une étude des cas dégénérées.

6.1.3 Matrices du résultant creux

Participant : Ioannis Emiris.

La matrice du résultant creux (ou torique) généralise les matrices de Sylvester, de Macaulay ainsi que la matrice des coefficients d'un système linéaire. Son déterminant exprime le résultant creux dont le degré dépend de la structure géométrique des termes non-nuls. Une conjecture décrit une généralisation possible en une formule rationnelle exacte du résultant creux, à la façon de Macaulay [16]. Des méthodes combinatoires sont appliquées pour la construction de cette matrice qui demandent surtout l'énumération des *points entiers* dans un polyèdre convexe. Notre logiciel utilise des heuristiques pour accélérer cette recherche en dimension arbitraire (typiquement 5 ou 10).

Récemment, nous nous sommes intéressés au problème des dégénérescences, souvent perçu comme le talon d'Achille de l'approche du résultant creux. Une perturbation qui respecte la structure creuse des polynômes est étudiée en collaboration avec C. d'Andrea de Buenos Aires (Argentine). Elle généralise la construction du polynôme caractéristique d'une matrice.

6.1.4 Résultants généralisés

Participants : Laurent Busé, Mohamed Elkadi, Bernard Mourrain.

Dans la pratique, les constructions classiques des résultants, présentées ci-dessus, peuvent se révéler inadaptées car elles conduisent à des formulations matricielles dégénérées. Nous nous sommes donc intéressés aux généralisations des résultants à d'autres variétés que l'espace projectif ou les variétés toriques. Dans [15], nous donnons des conditions pour que ce résultant soit bien défini et montrons que pour une variété paramétrée généralisant donc les cas connus, un multiple du résultant s'obtient à partir d'un mineur maximal du bézoutien des $n+1$ équations.

Les cas dégénérés pour les constructions classiques de résultants correspondent souvent, dans les applications que nous rencontrons, à des hypersurfaces qui ne se coupent pas proprement « à l'infini ». Il s'agit alors de définir des conditions sur les paramètres pour que ces équations ayant des solutions connues a priori se coupent en dehors des solutions déjà connues. Nous nous sommes donc penchés sur les problèmes d'intersections résiduelles et sur les résultants au-dessus d'éclatements. Nous proposons une nouvelle construction de ces objets et un article sur le sujet est en cours de rédaction.

6.1.5 Calcul de forme normale dans un quotient

Participants : Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet.

Les méthodes algébriques sur lesquelles nous travaillons s'appuient sur le calcul de la structure du quotient par l'idéal des équations que l'on cherche à résoudre. Une approche maintenant classique consiste à combiner ces équations et construire une base de Gröbner pour un certain ordre monomial, permettant de calculer par réduction la forme normale d'un élément dans le quotient. Cependant, cette méthode se prête mal à des calculs approchés. L'approche reposant sur les résultants fournit quant à elle une représentation matricielle continue de l'algèbre quotient, mais nécessite un pré-traitement du problème.

Nous nous sommes donc intéressés à une nouvelle méthode de calcul de forme normale dans un quotient, combinant d'une certaine manière ces deux approches. Une nouveau critère permettant de décider si la réduction est canonique est proposé dans [38]. Nous y décrivons un nouvel algorithme reposant sur une formulation matricielle des réductions et indépendant d'un ordre monomial.

Cette approche a été appliquée dans le cas de systèmes sans zéro à l'infini pour lesquels il est possible de contrôler précisément le déroulement des calculs. Elle permet d'améliorer la complexité connue pour ce type de problème. Une implantation de cette méthode, exploitant la structure creuse des matrices sous-jacentes, est actuellement en cours.

6.1.6 Résidu et exposant de Lojasiewicz

Participants : Mohamed Elkadi, Bernard Mourrain.

Nous nous intéressons ici aux idéaux de polynômes définissant des intersections complètes de dimension 0, ou plus simplement des systèmes de n équations en n variables ayant un nombre fini de solutions. Ces situations sont assez fréquentes en pratique pour mériter une étude approfondie. Une des caractéristiques importantes de ces idéaux est que le dual de l'algèbre quotient $\mathcal{A}$ qu'ils définissent est un $\mathcal{A}$-module libre de rang 1, un de ses générateurs étant le résidu associé aux n équations. En d'autres termes, les propriétés de $\mathcal{A}$ et donc des solutions de notre système d'équations sont « codées » dans cette forme linéaire qu'est le résidu. Son calcul nous fournit donc entre autre un moyen de résoudre un tel système d'équations.

Nous avons proposé un nouvel algorithme de calcul du résidu algébrique des polynômes $\mho = (f_1, \dots, f_n)$ en n variables[19], s'appuyant sur un calcul de relations de dépendance algébrique entre les variables et les polynômes $\mho$ et une loi de transformation généralisée. L'analyse de ces relations de dépendance nous permet par ailleurs de calculer l'exposant de Löjasiewicz, qui caractérise le comportement analytique à l'infini de la fonction $\mho$. Ce travail s'inscrit dans une nouvelle direction de recherche, encore peu explorée pour le moment en géométrie algébrique effective, consistant à étudier non seulement les idéaux et les algèbres quotients, mais aussi leur dual.

6.1.7 Géométrie combinatoire pour les polynômes

Participant : Ioannis Emiris.

Un calcul important concerne le volume mixte de n polyèdres convexes en n dimensions. Cette fonction généralise la fonction du volume d'un polyèdre convexe et borne le nombre de racines toriques communes d'un système algébrique à partir des polytopes de Newton des polynômes. Son calcul produit une base monomiale du quotient et spécifie une homotopie creuse pour approcher ces racines. L'objet qui intervient dans le calcul du volume mixte est la somme de Minkowski (somme vectorielle) des polyèdres de Newton. Ayant dérivé des bornes asymptotiques entre le volume de la somme de Minkowski et le volume mixte [Emi96], nous nous sommes intéressés à la généralisation du volume mixte. Pour estimer le nombre de racines *affines* d'un système algébrique, nous utilisons le *volume stable*, défini par Huber et Sturmfels.

Notre motivation concerne la définition d'une *homotopie* pour approcher toutes les racines, en commençant par un système simple à résoudre. La définition du volume stable offerte était d'intérêt surtout théorique, puisque son calcul direct serait trop coûteux en pratique. Nous avons défini une subdivision mixte de la somme de Minkowski qui essaie d'optimiser l'homotopie creuse du point de vue de la stabilité numérique [24]. Cette approche aboutit au calcul efficace du volume stable et permet la combinaison de plusieurs méthodes pour ce type de calcul, y compris la technique très efficace d'élagage [Emi96] ainsi que le relèvement dynamique et l'utilisation des symétries de Verschelde.

6.1.8 Code et théorie des invariants

Participants : Bernard Mourrain, Patrick Solé.

Nous avons continué nos investigations autour des invariants, des codes, et des formes modulaires en essayant d'exploiter les connexions qui existent entre ces différents domaines. Dans les travaux précédents, nous avions ainsi calculé les énumérateurs de poids de certains codes ou leurs polynômes de Jacobi, à partir d'une description explicite de l'algèbre des invariants d'un groupe fini associé à ces codes [13]. Cette approche utilise des calculs de séries de Molien d'algèbre d'invariants et des procédés de polarisation.

[Emi96] I. Emiris, « On the Complexity of Sparse Elimination », *J. Complexity 12*, 1996, p. 134–166.

Dans un travail en collaboration avec Y. J. Choie [17], nous nous sommes intéressés plus précisément aux liens entre formes modulaires et invariants de certains groupes finis. Nous y proposons une interprétation explicite des opérateurs différentiels de Rankin-Cohen en terme de transvectants.

6.2 Lien symbolique-numérique

Mots clés : algèbre linéaire, arithmétique, certification, calcul modulaire, filtre, lien symbolique-numérique, matrice structurée, précision numérique, résultat certifié, robustesse, signe, stabilité, théorie des mécanismes, traitement des dégénérescences.

6.2.1 Fiabilité en géométrie algorithmique, filtre

Participants : Olivier Devillers, Alexandra Fronville, Bernard Mourrain, Monique Teillaud.

Travail effectué dans le cadre de l'action coopérative FIABLE.

Un algorithme géométrique comprend en général une partie combinatoire, qui calcule une structure de données géométrique, et une partie numérique, qui calcule des points. La robustesse de l'algorithme dépend de choix découlant de prédicats géométriques, ces choix devant être exacts pour que la structure de données soit cohérente, alors que les calculs numériques peuvent rester approchés sans que le bon déroulement de l'algorithme en soit affecté. Les prédicats sont des combinaisons de polynômes, et leur degré est une mesure de la précision nécessaire pour les calculs.

La comparaison des abscisses de deux points d'intersection est un prédicat de base pour un certain nombre d'algorithmes. Les problèmes analogues pour des objets courbes n'ont pas encore été abordés dans la littérature. Nous nous sommes concentrés sur le cas le plus simple, celui des arcs de cercles. Nous proposons une méthode permettant de comparer de façon exacte deux points d'intersection entre arcs de cercles, sans calculer ces points d'intersection. Cette méthode fait intervenir un calcul de résultant à l'aide de Bézoutiens multivariés, dont le degré par rapport aux paramètres du problème indique la complexité de l'algorithme. Nous montrons qu'il peut être nécessaire d'évaluer exactement le signe de polynômes de degré 12, mais que dans certaines configurations, évaluer les signes de polynômes de degré 6 est suffisant. Nous avons implanté la méthode en C++ et évalué expérimentalement ses performances, ce qui nous a permis de démontrer son efficacité pratique. Plusieurs filtres arithmétiques ont été testés et les résultats sont regroupés dans [41].

Par ailleurs, ces prédicats géométriques pouvant être reliés, dans beaucoup de cas, au signe de certains déterminants, nous nous sommes également penchés sur des algorithmes certifiés et rapides utilisant des arithmétiques en simple ou double précision pour le calcul de tels signes. Dans le cas où la matrice est loin d'être singulière, une décomposition LU nous permet de certifier le signe. Sinon, ce même algorithme nous donne des informations sur son noyau, ce qui nous permet de transformer le problème initial en une meilleure situation pour le calcul numérique. Un article est en cours de rédaction sur les différents résultats que nous avons obtenus dans cette direction.

6.2.2 Degré topologique

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain, Vassilis Plagianakos, Mihail Vrahatis.

Nous utilisons le concept de degré topologique pour isoler et calculer les zéros réels d'un système d'équations non-linéaires, la seule information utilisée étant le signe d'expressions algébriques. Les théorèmes de base de la théorie de Kronecker–Picard relient le nombre de zéros réels au degré topologique. De récentes méthodes de calcul rapide de signes, travaillant avec des nombres flottants, sont appliquées pour déterminer le signe d'expressions algébriques. Ces techniques sont combinées avec des méthodes de grilles pour l'isolation des zéros [40]. Une analyse de la complexité de ces techniques est également faite.

Notre collaboration avec le Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Patras (Grèce) au sein du programme PLATON, nous a également conduit à une étude approfondie des racines réelles isolées de fonctions analytiques. L'idée est d'approcher suffisamment les composantes de ces fonctions analytiques par des polynômes de Bézier et d'utiliser les calculs de degré topologique précédents pour certifier le nombre de racines et les isoler. Nous illustrons cette méthode sur des fonctions de Bessel [31].

6.2.3 Arithmétique mixte modulaire-numérique

Participants : Hervé Brönnimann, Ioannis Emiris, Victor Pan, Sylvain Pion.

La détermination du signe des expressions algébriques est de grande importance en géométrie algorithmique, CAO et calcul formel réel. Le calcul exact permet évidemment de s'affranchir des imprécisions de l'arithmétique flottante, mais son inconvénient est le temps de calcul. Or, il est possible de déterminer le signe d'une expression algébrique quelconque en simple précision, étant donné ses résidus par rapport à un nombre suffisant de nombres premiers [14]. L'implantation de nos méthodes par H. Brönnimann et S. Pion du projet PRISME ont permis des expériences qui indiquent qu'elles sont les plus performantes pour le calcul du signe d'un déterminant entier de dimension inférieure à 200. Elles ont été accélérées en employant conjointement un filtre numérique qui donne la bonne réponse pour des larges valeurs. Il est également possible d'employer ces processus pour borner les valeurs minimales et maximales de fonctions, ce qui est indispensable aux méthodes du degré topologique qui n'utilisent que le signe pour approcher les racines de systèmes algébriques.

L'implantation des algorithmes numériques passe toujours par une analyse de la précision numérique requise pour réaliser une tâche spécifique. Le but est de garantir la précision qui va suffire pour le calcul, puisque cela nous permet de minimiser la précision lorsqu'on sait a priori que le résultat sera « petit » ou quand il est combiné avec des données de précision limitée. Il s'agit d'une idée qui a fait ses preuves dans la communauté de calcul formel, surtout avec le calcul modulaire. Par contre, dans l'approche de l'analyse numérique, la perte de chiffres significatifs serait désastreuse. En utilisant des bornes sur la précision de calcul et sur la taille du résultat, nous arrivons à diminuer la première sans affecter la précision du résultat [EPY98]. Nous avons examiné les opérations vectorielles avec comme application la solution itérative d'un

[EPY98] I. Emiris, V. Pan, Y. Yu, « Modular Arithmetic for Linear Algebra Computations in the Real Field », *JSC 26*, 1, juillet 1998, p. 71–87.

système linéaire. Sur trois systèmes standards et un aléatoire, la complexité de nos algorithmes diminue de 14% en moyenne par rapport aux complexités des méthodes classiques.

6.2.4 Méthodes matricielles pour la résolution d'équations polynomiales

Participants : Laurent Carrot, Bernard Mourrain, Hélène Prieto.

La matrice de Bézout (ou bezoutienne) se construit à partir de $n+1$ polynômes en n variables. Un des intérêts, au delà des connexions avec la théorie des résidus et avec certains problèmes d'effectivité en géométrie algébrique [EM98], est de fournir des informations sur les points isolés d'une variété algébrique. Cette propriété permet de calculer un multiple du résultant sur une variété paramétrée [15], mais aussi une représentation rationnelle de ces points isolés. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux applications à la résolution de systèmes polynomiaux par des outils d'algèbre linéaire numérique (décomposition QR, calcul de valeurs et vecteurs propres, ...). Un algorithme de calcul de Bézoutien, d'un mineur maximal non nul et des vecteurs propres d'une matrice associée à ce mineur a été implanté dans la bibliothèque `ALP`. Il a été testé avec succès sur le problème des conformation d'une chaîne de 6 atomes dont les distances entre deux atomes consécutifs et les angles entre deux liaisons consécutives sont fixés (calcul des 16 solutions en moins de $0.01s$ sur Sparc20) ainsi que pour le modèle géométrique direct d'un robot parallèle ayant deux points d'attache confondus (calcul des 40 solutions en moins de $0.5s$ sur Sparc20). D'autres formulations de résultants utilisant les matrices bezoutiennes telles que celle de Jouanolou [Jou91] sont actuellement en cours d'implantations dans la bibliothèque `ALP`. Ces différents résultats vont être regroupés dans un rapport de recherche.

Une étape cruciale de cette approche consiste à transformer un problème du type $A(x)\,v = 0$ (où $A(x)$ est une matrice à coefficients des polynômes en x) en un problème de calcul de valeurs et vecteurs propres. Durant son stage de deuxième année, L. Carrot a ainsi étudié et implanté un algorithme reposant sur un calcul de forme normale de Popov, permettant de résoudre ce problème. Un des gros avantages de cette nouvelle approche par rapport à l'existant est de fournir, pour le calcul des vecteurs propres, une matrice dont la taille est exactement le degré du déterminant de $A(x)$ et donc d'accélérer la dernière phase du processus de résolution.

6.2.5 Matrices structurées et polynômes

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain.

La résolution d'un système polynômial de dimension 0 est équivalente à un calcul de valeurs ou vecteurs propres d'opérateurs de multiplication. Les matrices qui apparaissent dans les problèmes de résolution d'équations polynomiales telles que les matrices de résultants, les Bézoutiens, les matrices de résidus, ... ont une structure. Dans [27], nous étudions en détail ces types de matrices qui généralisent les structures classiques (Toeplitz, Hankel, Vandermonde, ...) au cas multivariable. Nous analysons leurs relations avec des opérateurs de multiplication

[EM98] M. Elkadi, B. Mourrain, « Some applications of Bezoutians in Effective Algebraic Geometry », *Rapport de Recherche n° 3572*, INRIA, 1998.

[Jou91] J. Jouanolou, « Le Formalisme du résultant », *Adv. in Math. 90*, 2, 1991, p. 117–263.

dans l'anneau des polynômes et son dual, plus particulièrement entre les structures « multi-variables » de Toeplitz, Hankel, Vandermonde, les Bézoutiens et les résidus algébriques. Nous y présentons également quelques applications au calcul des solutions d'équations polynomiales et montrons comment cette approche permet une meilleure analyse des problèmes et fournit des améliorations substantielles aux algorithmes connus jusqu'à présent.

La structure de la matrice du résultant creux est proche d'une structure Toeplitz par blocs, dite *quasi-Toeplitz*, liée elle-même à d'autres matrices structurées [22]. Exploiter cette structure réduit la complexité asymptotique par un facteur presque linéaire en la dimension de la matrice, ce qui nous permet de modifier l'algorithme incrémental pour construire cette matrice [23].

6.3 Applications

Mots clés : analyse de graphes, calibrage, chimie moléculaire, géométrie de distances, machine-outil, méthodes matricielles, micro-systèmes, modélisation, perturbations structurées, planification de mouvement, roadmap, robot parallèle, robotique médicale, santé, singularités, structure géométrique, suspension, théorie des mécanismes, vision artificielle
.

6.3.1 Robotique et Théorie des mécanismes

Participants : David Daney, Jean-Pierre Merlet, Yves Papegay, Laurent Véronique.

Nous poursuivons nos travaux dans ce domaine, actuellement en pleine explosion en raison des applications potentielles pour la machine-outil, l'automobile et le médical. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à :

- la calibration des robots parallèles : déterminer les paramètres géométriques réels d'un mécanisme existant pour en améliorer les performances, dans le cadre d'un partenariat avec une PME construisant une machine-outil de ce type et avec le projet POLKA,
- l'analyse de l'espace de travail, des singularités et des erreurs de positionnement des robots parallèles dans le même cadre que précédemment,
- l'analyse du modèle géométrique des mécanismes de suspension automobile : il s'agit ici de déterminer de manière exacte les trajectoires possibles d'un corps particulier du mécanisme.

Dans le domaine médical nous poursuivons notre développement d'un micro-robot pour l'endoscopie.

6.3.2 étalonnage de robots parallèles

Participants : David Daney, Jean-Pierre Merlet.

Un des avantages des robots parallèles est leur possibilité d'avoir une très grande précision de positionnement, sous réserve d'avoir un bon modèle géométrique. Mais il existe un écart entre le modèle théorique et le modèle réel principalement dû à des erreurs d'origine géométrique (tolérance de fabrication et d'assemblage, erreurs d'estimation de la situation des repères...). Afin de compenser ces erreurs, un étalonnage est nécessaire pour déterminer les paramètres géométriques du manipulateur à partir de mesures, soit sur le positionnement de l'organe terminal (mesures externes), soit sur les actionneurs (mesures internes).

L'année dernière, nous avons montré que les méthodes reposant sur des mesures externes de la posture étaient très sensibles aux erreurs de mesure.

Afin d'éviter les problèmes liés à l'utilisation des techniques d'optimisation (convergence, nécessité d'une estimée initiale), nous nous sommes intéressés à des méthodes algébriques [21] et nous les avons adaptées afin qu'elles prennent en compte la redondance d'information fournie par un grand nombre de mesures. Ces méthodes sont soit plus rapides, soit fournissent des informations sur la qualité de l'étalonnage. D'autres voies ont été étudiées, telle que l'utilisation de l'arithmétique d'intervalles, mais les méthodes restent encore à améliorer.

Nous nous sommes alors intéressés à des techniques qui limitent volontairement la mobilité du robot à travers des contraintes soit sur l'organe terminal, soit sur les segments. Dans une première méthode, nous avons montré comment simplifier les équations de contraintes en fixant l'orientation du robot. Par ce biais, nous diminuons le nombre de paramètres à déterminer et nous pouvons rendre le système linéaire, ce qui facilite sa résolution et permet de rendre les résultats plus robustes au bruit de mesures. Mais cette contrainte est difficile à réaliser expérimentalement. Nous avons donc imposé des contraintes sur la mobilité des segments : dans une deuxième méthode, nous fixons la direction et/ou la longueur d'un segment. Cette méthode permet d'obtenir de bons résultats même en présence de bruit, en particulier parce qu'elle conduit, elle aussi, à des équations linéaires [Dan98]. Nous avons alors étendu ces contraintes à deux segments, ce qui limite les mouvements du robot à un seul degré de liberté. Dans ce cas, la redondance d'information fournie par les capteurs interne du robot conduit à un auto-étalonnage du robot [29] (c'est à dire sans la nécessité de pratiquer des mesures externes).

Une collaboration avec un des partenaires du projet SAGA, Constructions Mécaniques des Vosges, nous a permis de définir une nouvelle méthode d'auto-étalonnage. En effet, il peut être intéressant d'ajouter des capteurs proprioceptifs sur un certain nombre d'articulations non-instrumentées. Ceci permet, non seulement de simplifier le MGD, mais aussi de fournir l'information suffisante pour auto-étalonner le robot.

6.3.3 Espace de travail et singularités des robots parallèles

Participant : Jean-Pierre Merlet.

Les performances des robots parallèles présentent une sensibilité très forte aux paramètres qui définissent les dimensions du mécanisme [11, 36]. Un critère important de performance est l'espace de travail : il faut par exemple vérifier qu'un espace de travail donné par l'utilisateur est inclus dans l'espace atteignable du robot. Nous avions proposé l'année dernière un algorithme permettant une telle vérification et nous avons cette année largement réduit son temps de calcul en améliorant la procédure de base qui permet de déterminer les extremums des longueurs des

[Dan98] D. Daney, « Mobility constraints on the legs of a parallel robot to improve the kinematic calibration », *in : New machine concepts for handling and manufacturing devices on the basis of parallel structures*, Braunschweig, Allemagne, novembre 1998.

segments pour toute pose dans un hypercube du groupe des déplacements [25, 34].

Un second critère important dans la phase de conception est l'existence des singularités soit dans un ensemble de poses du robot, soit dans l'espace atteignable. Les positions singulières sont les poses de l'organe terminal où le déterminant de l'inverse jacobienne du robot s'annule, l'expression analytique de ce déterminant étant extrêmement complexe. Nous avions déjà proposé l'année dernière un algorithme permettant de procéder à cette vérification. Le principe utilisé avait été de décomposer sous MAPLE le calcul de ce déterminant en procédant à un développement par les mineurs pour en obtenir une forme générique. Pour un robot donné, on calculait alors les termes de la fonction générique ne dépendant que des paramètres de géométrie, puis on évaluait par analyse par intervalle des bornes sur le déterminant. Si l'intervalle correspondant contenait 0, on subdivisait les intervalles sur les paramètres de pose de l'organe terminal jusqu'à obtenir des sous-régions où le déterminant avait un signe constant. Si dans le processus on obtient des sous-régions où le déterminant a des signes opposés, alors il y a une singularité dans la région. L'inconvénient est que, d'une part la forme générique n'avait pu être obtenue que pour des robots de géométrie particulière (base et plate-forme plane) et que, d'autre part, la forme utilisée pour la décrire n'est pas forcément celle la plus efficace du point de vue de l'évaluation par l'analyse par intervalles. Nous avons donc tout d'abord modifié notre algorithme pour calculer sous MAPLE le développement du déterminant *après* que la géométrie du robot soit fixée. Dans ces conditions, il est possible de calculer ce déterminant quelle que soit la géométrie du robot. De plus, les termes intervenant dans ce déterminant sont écrits, après mise en forme pour en réduire le coût d'évaluation, sous forme analytique dans des fichiers et sont évalués par le « parser » de la bibliothèque `ALIAS`. Si cette manière de faire l'évaluation est plus coûteuse en temps que d'utiliser la forme générique, elle permet cependant d'estimer beaucoup plus finement la valeur du déterminant et donc de réduire sensiblement le nombre de sous-régions créées. Ce lien formel-numérique permet d'obtenir une réduction du temps de calcul de l'ordre d'un facteur 10. Cet algorithme a été utilisé pour démontrer l'absence de singularité dans l'espace de travail du prototype de machine-outil de Constructions Mécaniques des Vosges.

6.3.4 Précision des robots parallèles

Participants : Jean-Pierre Merlet, Luc Rolland.

Un autre problème dans l'analyse des performances des robots parallèles concerne l'évaluation de leur précision. En effet la pose de l'organe terminal est estimée à partir des mesures des variables articulaires, entachées d'une erreur bornée. Cette erreur se répercute sur la position de l'organe terminal de manière linéaire pour une position donnée, mais la matrice jacobienne J du robot qui intervient dans cette relation dépend de la pose de l'organe terminal. Le problème de l'analyse de l'erreur peut se poser alors de deux manières :

- étant donné une trajectoire nominale du robot, quel sera l'écart maximale entre la trajectoire nominale et la trajectoire réellement suivie, sachant que le robot n'est effectivement commandé qu'en temps discret ?
- quelle sera l'erreur maximale de positionnement dans un espace de travail donné du robot ?

Ce problème n'a pas encore été traité dans la littérature, en dépit de son importance pratique. Dans les deux cas de figure, on se trouve confronté à un problème d'optimisation difficile car si l'on connaît une formulation analytique de J^{-1}, son inverse a une formulation très complexe. Pour le cas d'une trajectoire paramétrée, la méthode employée est décrite dans le rapport d'activité du projet POLKA : elle permet de déterminer efficacement l'écart de trajectoire maximale et donc de vérifier la pertinence de la trajectoire par rapport aux objectifs de la tâche.

Dans le cas d'un espace de travail, nous avons adopté une méthode reposant sur un couplage formel-numérique et sur de l'analyse par intervalles avec, comme but, de déterminer les erreurs maximales sur les 6 paramètres définissant la pose de l'organe terminal avec une erreur inférieure à un seuil fixé au départ. Cette technique est efficace jusqu'à 5 degrés de liberté mais est coûteuse en temps de calcul pour 6 degrés de liberté.

6.3.5 Micro-robot

Participant : Jean-Pierre Merlet.

Nous continuons notre développement d'un micro-robot parallèle pour l'endoscopie dans le cadre d'un projet de coopération franco-israélienne. Les dimensions du mécanisme et d'un mécanisme équivalent proposé par nos partenaires israéliens ont été optimisées. Les actionneurs seront des moteurs électriques de 1.9 mm de diamètre et les déplacements articulaires seront mesurés par des LVDT de 1.5mm de diamètre. Les articulations seront fournies par nos partenaires et la mécanique de base est en cours de fabrication au laboratoire LMARC de l'Université de Besançon.

6.3.6 Suspension automobile

Participants : Jean-Pierre Merlet, Yves Papegay, Laurent Véronique.

Les suspensions automobiles sont des mécanismes à un degré de liberté en chaîne fermée. Ils posent plusieurs problèmes intéressants avec, en premier lieu, la détermination de leur modèle géométrique. Il s'agit ici de déterminer la trajectoire suivie par la roue, ceci en fonction d'un paramètre comme, par exemple, la hauteur de la roue par rapport au sol. Ce problème admet plusieurs solutions, c'est-à-dire que la roue peut suivre potentiellement plusieurs trajectoires, celle effectivement suivie dépendant de la manière dont est assemblé initialement le mécanisme. Pour une hauteur donnée de la roue, les poses possibles sont obtenues comme les solutions d'un système algébrique. L'approche classique de la détermination de la trajectoire consiste à déterminer tout d'abord une pose de la roue pour une hauteur donnée, puis à modifier légèrement la hauteur. On obtient la pose à cette hauteur à l'aide d'une méthode itérative à laquelle on donne comme estimée de la solution la pose trouvée à l'étape précédente. Nous avions déjà remarqué dans la littérature que les méthodes itératives pouvaient conduire, entre deux étapes, à des solutions ne se trouvant pas sur la même trajectoire et avions déjà proposé une autre approche permettant la détermination de l'ensemble des trajectoires possibles, ceci sans ambiguïté. Toutefois, cette approche n'avait pas pu être utilisée pour certains mécanismes en raison de la difficulté de la résolution du système algébrique. Nous avons repris ce problème en utilisant nos nouvelles méthodes de résolution proposées dans les bibliothèques `ALP` et `ALIAS`. En raison de la nature particulière du problème, il est relativement aisé de déterminer des bornes sur les solutions et la bibliothèque `ALIAS` s'est révélée particulièrement adaptée. Nous envisageons maintenant d'attaquer le problème de la synthèse de mécanisme, c'est-à-dire de déterminer les dimensions du mécanisme qui permettra d'obtenir au mieux une trajectoire donnée.

6.3.7 Molécules et mécanismes à barres

Participants : Bernard Mourrain, Olivier Ruatta.

Dans le cadre d'une collaboration avec SANOFI-SYNTHELABO, l'adaptation d'un problème classique de la robotique à la chimie a été effectuée et a donné lieu à une communication dans le cadre des douzièmes journées des doctorants en mathématiques appliquées organisées par ELF. Il s'agissait de regarder une molécule comme un système mécanique (dont certaines liaisons peuvent introduire des degrés de liberté en rotation) pour déterminer des configurations de molécules, problème issu de la pharmacologie. Nous avons considéré une molécule à 6 degrés de liberté, conduisant à un système d'équations polynomiales ayant un nombre fini de solutions. Ce travail a comporté :

- une partie de résolution numérique du système par des méthodes d'algèbre linéaire en utilisant `ALP` ($0.08s$ sur Sparc20 pour le calcul des 16 solutions possibles des angles pour une erreur relative de 10^{-6}),
- une partie de test de robustesse des méthodes,
- une partie de visualisation des résultats en trois dimensions.

Enfin un nouveau problème a été abordé. Toujours en considérant une molécule comme un système mécanique, il s'agit de calculer la distance minimale entre deux atomes quelconques de la molécule. Deux approches sont proposées et devraient être exploitées dans la mise au point d'un algorithme efficace.

6.3.8 Conformations moléculaires et géométrie de distances

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain, Théodore Nikitopoulos.

Nous avons considéré la structure géométrique des molécules cycliques dont certains angles et longueurs sont fixes, tandis que les angles dihèdraux sont variables. Ces derniers sont des caractéristiques géométriques dont un changement de valeur nécessite beaucoup moins d'énergie que pour les caractéristiques fixes. Il s'agit d'un problème classique auquel des méthodes de calcul formel ont été appliquées avec succès [20]. Nous avons examiné l'efficacité de nos méthodes matricielles pour la résolution des systèmes polynomiaux. Nous avons aussi développé des fonctions orientées-objet en MAPLE pour traiter ces objets et en dériver les équations.

Pour une molécule il est possible de définir une *matrice de distances*, dont le rang vaut cinq quand la molécule se place dans l'espace à trois dimensions. De manière inverse, une molécule de géométrie inconnue est spécifiée par une matrice des distances où certaines entrées (voire la majorité) sont inconnues. Des expériences (par exemple de Résonance Magnétique Nucléaire) fournissent des bornes inférieures et supérieures sur ces inconnus.

Durant le stage de T. Nikitopoulos, des méthodes de *perturbations structurées* ont été implantées en MATLAB. Le but est, commençant avec une matrice avec des valeurs aléatoires pour toutes les inconnues, d'arriver à diminuer le rang pour que la matrice exprime une structure dans l'espace euclidien de trois dimensions. Des corrections sont imposées pour forcer les entrées à rester dans les intervalles donnés. Des résultats positifs ont été obtenus pour des molécules avec au plus, 40 atomes. Plusieurs caractéristiques du problème matriciel, surtout en ce qui concerne la théorie de matrices de distances, sont encore à exploiter.

6.3.9 Vision, modélisation géométrique et incertitude

Participants : Didier Bondyfalat, Bernard Mourrain, Théodore Papadopoulo.

Nous nous intéressons ici à la modélisation tridimensionnelle et plus particulièrement, architecturale (quartiers de ville, bâtiments) à partir de « photos ». Nos travaux consistent à introduire du calcul symbolique et algébrique dans le processus d'étalonnage de caméras. Nous agissons à plusieurs stades : directement lors de l'étalonnage par l'ajout d'un plan, après un étalonnage projectif à travers la résolution des équations de Kruppa, pour finir par un ajustement de modèles.

L'idée d'utiliser un plan (comme par exemple un plan cadastral ou bien un plan d'occupation au sol) dans le processus d'étalonnage est nouvelle. Elle permet un étalonnage euclidien linéaire des caméras sous la contrainte de connaître quelques propriétés géométriques élémentaires de la scène (essentiellement de la verticalité, du parallélisme et de l'orthogonalité de droite).

Les récentes techniques matricielles de résolutions nous ont permis d'obtenir une solution algébrique aux équations de Kruppa qui constitue une bien meilleure initialisation à une optimisation que l'approche directe.

Les techniques de vision par ordinateur permettent de reconstruire des modèles tridimensionnels qui souvent ne vérifient pas parfaitement la géométrie élémentaire de la scène. Notre but consiste à déformer ces modèles de manière à ce qu'ils satisfassent une description géométrique symbolique de la scène. L'élément essentiel de cet ajustement consiste en une recherche d'une paramétrisation minimale d'un modèle articulé représentant la scène et satisfaisant la géométrie décrite.

Pour chacun de ces travaux, l'information géométrique est déduite des photos ou de la carte. La vérification de la cohérence de ces propriétés est un véritable et difficile problème qui est équivalent à la démonstration automatique. Nous avons pour cela continué et amélioré notre algorithme de recherche d'ordonnancement des propriétés géométriques [28].

Ces travaux reposant sur des modules logiciels hétérogènes doivent maintenant être intégrés dans un ensemble cohérent pour pouvoir montrer de manière effective leurs possibilités.

6.3.10 Algorithme du Roadmap

Participants : Hirohisa Hirukawa, Yves Papegay.

L'implantation de cet algorithme se place dans le cadre général de la planification de mouvements conservant le contact, dont une des applications est l'assemblage de précision. Nous nous intéressons aux cas du mouvements de polyèdres dans des environnements polyèdraux non convexes et utilisons des méthodes reposant sur le calcul et l'étude de l'espace de configuration.

Dans cet espace, la position d'un polyèdre est donnée par un point représentant la position et l'orientation d'un référentiel attaché à ce polyèdre. De même, les obstacles de l'environnement sont représentés par les ensembles des points correspondant à des positions et des orientations du polyèdre, telles qu'il est en collision avec ces obstacles.

La planification de mouvements quelconques ne requiert en général qu'une connaissance approximative de l'environnement de travail et donc de sa représentation, les C-obstacles. Par contre, les mouvements conservant le contact correspondent à des mouvements sur la frontière des C-obstacles, ce qui en nécessite la connaissance précise. Or, ces ensembles se construisent par réunion et par intersection finie à partir de solutions d'inéquations algébriques.

Une implantation de la paramétrisation et de la mise en équations des contacts a été réalisée en `mathematica` et en `EUSLisp` ainsi qu'une implantation des calculs des C-obstacles dans le cas où l'environnement polyèdral est convexe[HPM94]. La complexité de calcul dans le cas non-convexe a été investiguée [HPT94] et un nouvel algorithme paresseux traitant localement la non convexité a été proposé [HP94].

Dans sa thèse J. Canny propose un algorithme de planification de mouvements sur les frontières d'un ensemble semi-algébrique reposant sur la stratification et la résolution d'équations polynomiales à l'aide de résultants. Cet algorithme, dit *du Roadmap*, a l'originalité d'être de complexité seulement simplement exponentielle et n'a, à ce jour, pas été implanté.

Reprenant notre collaboration à la fin 1998, nous avons décidé avec H. Hirukawa, d'implanter en `Maple` cet algorithme, et de l'utiliser pour la planification de mouvements de polygones en contact dans un environnement polygonal non convexe. Même si ce problème en lui-même a déjà été traité [AB88][Bro91], c'est un bon terrain expérimental pour comprendre l'algorithme du Roadmap et tester méthodes et outils de résolution d'équations polynomiales.

La première étape de l'algorithme, la paramétrisation de l'espace et la modélisation équationnelle des différents types de contacts a été implantée par H. Hirukawa. Lors du séjour de Y. Papegay à ETL en février 1999, cette version a été enrichie d'une partie du calcul de la

---

[HPM94] H. Hirukawa, Y. Papegay, T. Matsui, « A Motion Planning Algorithm for Convex Polyhedra in Contact under Translation and Rotation », *in : proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE Robotics and Automation Society, p. 3020–3028, San Diego, California, mai 1994.

[HPT94] H. Hirukawa, Y. Papegay, H. Tsukune, « A Motion Planning Algorithm of Polyhedra in Contact for Mechanical Assembly », *in : proceedings of the 20th International Conference on Industrial Electronics Control and Instrumentation*, IEEE Industrial Electronics Society, p. 924–929, Bologna, Italia, septembre 1994.

[HP94] H. Hirukawa, Y. Papegay, « A Lazy Algorithm for Planning Motions in Contact », *in : proceedings of the 1994 IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE Industrial Electronics Society, p. 2152–2159, Munich, Germany, septembre 1994.

[AB88] F. Avnaim, J. Boissonnat, « Polygon Placement under Translation and Rotation », *Rapport technique n° 889*, INRIA, février 1988.

[Bro91] R. Brost, *Analysis and Planning of Planar Manipulation Tasks*, thèse de doctorat, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, janvier 1991.

silhouette. Parallèlement, il a développé une seconde version dans laquelle la structure et la représentation des objets sont sensiblement différentes.

L'étape suivante est le calcul des points d'intersection de chacune des courbes critiques avec chacune des C-surfaces soit, sur un exemple simple, un peu plus de 4000 intersections, chacune faisant intervenir trois polynômes à trois variables, deux de degré au plus 3, un de degré au plus 2. Le code développé pour calculer ces intersections a été exécuté seulement deux fois avec succès sur des machines (Compaq et SGI) de 2 et 4 Go de RAM, avec respectivement 4 et 16 processeurs. Les temps de calcul sont de l'ordre du million de secondes CPU.

Pour réduire ces temps de calcul, deux nouvelles versions ont été développées : la première à travers un appel au solveur d'équations polynomiales à base de calculs de valeurs propres que l'on peut trouver dans la bibliothèque `ALP`, la deuxième (`fsparse`) à travers la création d'un nouveau processus `Maple` qui exécute indépendamment la résolution. Les résultats ont été extrêmement significatifs puisque ces deux versions effectuent les 4000 intersections respectivement en moins de 2 heures et en moins de 4 heures sur un Sun Ultra30.

La comparaison des résultats entre les deux versions met en évidence des déficiences du `solve` de `Maple` qui ne trouve pas toujours toutes les solutions existantes. L'autre version, qui effectue un calcul de base standard (dans `gb`) puis calcule numériquement les matrices de multiplications (via un `rs-server`) puis leurs valeurs et vecteurs propres grâce à `lapack`, est intrinsèquement exacte, mais l'exécutable `Solve.ex` qui est fourni par `ALP` pour coordonner ces calculs ne traite que les cas de systèmes non dégénérés où la dimension de l'idéal est maximale et où les racines sont simples. De plus, cet exécutable « gaspille » une grande partie de son temps à générer les communications inter-processus.

Aussi, allons-nous poursuivre nos recherches dans ces deux directions : l'amélioration de l'implantation de l'algorithme du Roadmap en prenant en compte la spécificité géométrique des objets et l'extension des fonctionnalités de résolution d'équations d'`ALP`.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Sanofi Synthe-labo

Participants : Bernard Mourrain, Olivier Ruatta.

Une collaboration avec Sanofi Synthelabo est en cours sur les applications d'outils de Géométrie Algébrique Effective à l'étude de conformations de molécules. Ces molécules sont vues ici comme des assemblages d'atomes (sphères) ayant des degrés de libertés en rotation autour de certaines liaisons. Nous nous somme intéressés dans un premier temps aux calculs des configurations (ou *conformations*) possibles d'une molécule (à 6 degrés de libertés) quand on fixe les positions et orientations d'une chaîne d'atomes. Nous avons utilisés une méthode matricielle rapide et stable pour calculer ses conformations (voir la section 6.3.7). Nous nous intéressons actuellement aux problèmes de distance minimale et maximale entre deux atomes de ces chaînes.

7.2 Constructions Mécaniques des Vosges

Participants : David Daney, Jean-Pierre Merlet.

Nous continuons notre partenariat avec cette PME, en collaboration avec le projet Polka. Cette année, nos études ont porté sur la vérification expérimentale de nos méthodes d'étalonnage et sur le problème de calcul de la précision maximale de la machine dans un espace de travail donné.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Démonstrateur micro-robot

Participant : Jean-Pierre Merlet.

Nous avons continué notre participation à ce projet du CNRS pour lequel nous sommes en charge de la conception optimale du mécanisme. Le cahier des charges du robot a été finalement établi et nous avons procédé à son optimisation en développant, en particulier, une nouvelle méthode pour déterminer l'erreur de positionnement maximale du robot, un point crucial pour les applications envisagées.

8.1.2 Fiable

Participants : Ioannis Emiris, Alexandra Fronville, Bernard Mourrain.

L'action coopérative FIABLE se propose d'étudier les méthodes et techniques permettant la réalisation d'un logiciel pour garantir la fiabilité des résultats dans des domaines du calcul scientifique tels que la géométrie (imagerie médicale, robotique, géologie, CAO, etc) et les systèmes dynamiques (réactions chimiques, écoulements de fluides, structures mécaniques, etc).

Il s'agit non seulement de tenir compte des erreurs d'arrondis en calcul flottant, mais aussi de déterminer la qualité d'un résultat en fonction de la précision des données. Dans ces applications, le calcul repose sur la localisation de racines de polynôme (qui peuvent être des valeurs propres) ou sur le signe d'une expression arithmétique. Non seulement le résultat peut être entaché d'erreurs mais l'imprécision des calculs peut conduire à des situations aberrantes et bloquer le programme. Les conséquences peuvent alors être désastreuses s'il s'agit d'un logiciel embarqué, d'une application médicale, de robotique, etc. Le travail effectué dans ce cadre est décrit à la section 6.2.1. Nous l'avons présenté à l'occasion des différentes rencontres de groupe : 9-10 Mars (Paris), 22-24 Septembre (Paris). Voir `http://www-sop.inria.fr/prisme/fiable/` pour plus d'informations sur cette action coopérative.

8.2 Actions européennes

8.2.1 Frisco

Participants : Ioannis Emiris, Jean-Pierre Merlet, Bernard Mourrain, Hélène Prieto.

Nous avons participé au projet européen FRISCO (a Framework for Integrated Symbolic/Numeric Computation, ESPRIT-LTR 21.024, durée 3 ans) qui a débuté au mois de mars 1996 et qui s'est terminé en Avril 1999. FRISCO est dédié à l'étude et à la réalisation de composants logiciels pour la résolution de systèmes polynômiaux, et à leurs applications aux problèmes industriels. Ce projet reprend en partie les travaux réalisés au sein du projet PoSSo et conjugue les efforts de différents partenaires : la société NAG (The Numerical Algorithms Group, Grande Bretagne), l'Université de Pise (Italie), l'Université de Santander (Espagne), l'Université de Rennes et les projets SAFIR et SAGA à l'INRIA Sophia Antipolis.

Le développement des bibliothèques `ALP` et `ALIAS`, s'inscrivant en partie dans ce cadre, a pour but de fournir un environnement pour le calcul symbolique et numérique.

L'environnement `ALP` permet ainsi de manipuler efficacement des polynômes en une ou plusieurs variables, des vecteurs, des matrices denses, structurées, creuses ... De nouveaux algorithmes sur lesquels nous travaillons ont été ajoutés à cet environnement et testés sur des problèmes venant de la vision (autocalibration à partir des équations de Kruppa), de la robotique (modèle géométrique directe d'un robot parallèle, modèle géométrique inverse d'un robot série), configuration de molécules ... Une première version de cet environnement a été présentée lors du workshop final FRISCO à NAG, Oxford (Angleterre) du 28 au 30 Avril 1999. Il est en accès ftp `http://www.inria.fr/saga/logiciels/ALP/`.

La bibliothèque `ALIAS` est quant-à-elle plus spécifiquement dédiée à l'analyse et à la résolution de systèmes pour lesquels des bornes sur les solutions peuvent être établies. Elle a été testée sur des problèmes issus de la vision (équations de Kruppa), de la robotique (modèle géométrique directe d'un robot parallèle, calibration de robots) et la théorie des mécanismes (modèle géométrique de suspensions automobiles).

Voir les sections 5.1 et 5.2 pour plus de détails.

8.3 Actions internationales

8.3.1 Relations bilatérales internationales

- Une collaboration PLATON avec l'équipe de M. Vrahatis du département de mathématiques de Patras (Grèce) est actuellement en cours. Elle porte sur l'application de méthodes de type « degré topologique » à la résolution d'équations polynomiales. I. Emiris et B. Mourrain ont fait un séjour dans ce département et l'équipe grecque est attendue en décembre 1999.
- Dans le cadre de notre collaboration avec le Dr. H. Hirukawa sur la planification de mouvements en contact, I. Emiris, B. Mourrain et Y. Papegay ont été invités à séjourner à l'« Electro-Technical Laboratory » à Tsukuba (Japon) respectivement 2 semaines, 10 jours et deux fois deux semaines.
- Une collaboration PROCORE avec l'équipe du Dr. M. Rojas et du Prof. S. Smale du département de mathématiques de la « City University of Hong-Kong » a été proposée. Elle concerne des méthodes formelles et numériques efficaces pour la résolution de systèmes creux d'équations polynomiales et leurs applications en économie, finance et en théorie des jeux.
- Nous continuons notre collaboration avec la Technion d'Haifa et le LMARC de Besançon dans le cadre d'un contrat AFIRST. Il s'agit du développement de micro-robot pour la manipulation de micro-systèmes et pour des applications de chirurgie endoscopique.

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la Communauté scientifique

- Le projet Saga a organisé une quinzaine de séminaires au cours de l'année 1999. Huit professeurs ou chercheurs invités ont été accueillis provenant des pays suivants : Argentine, Grèce, États-Unis, Hong-Kong, Japon, Espagne.
- I. Emiris a organisé, en collaboration avec le Professeur L. Palios, une session spéciale « Géométrie Algorithmique Appliquée et Calcul Formel » à la 3ème Conférence IMACS-IEEE en Informatique, Automatique et Communications (CSCC-99), Athènes (Grèce), juillet 1999.
- J-P. Merlet est éditeur du journal électronique « Electronic Journal of Computational Kinematics » dont le site Web a été ouvert cette année. Ce journal est soutenu par la commission technique « Computational Kinematics » de l'IFToMM (International Federation on the Theory of Machines and Mechanisms), dont il est président.
- J-P. Merlet est membre du Conseil Scientifique du laboratoire LMARC de Besançon, membre suppléant du conseil de spécialistes (61ème section) de l'Université de Nice et membre de l'Intercommission 1 de l'INSERM, qui a terminé ses travaux en mars 1999. Il a participé aux développements du démonstrateur micro-système dans le cadre du « Pôle Micro-systèmes » du CNRS.
- J-P. Merlet a été membre des comités de Programme des conférences « Parallel Kinematics Machines », Milan (Italie), Novembre 1999, IFToMM World Congress, Oulu (Finlande) juin 1999, IROS (Corée) octobre 1999.
- B. Mourrain a organisé en collaboration avec Tateaki Sasaki, Matu-Tarow Noda et Robert Corless, une session « Approximate Algebraic Computation: towards Symbolic-Numeric Algorithms » à la Conférence IMACS, Applications of Computer Algebra, Madrid, Escorial (Espagne), mai 1999.
- B. Mourrain était co-organisateur des Journées « Outils pour un calcul numérique fiable », clôturant les travaux de l'action incitative FIABLE, Paris, septembre 1999.

9.2 Participation à des colloques

Les membres de l'équipe ont participé à de nombreuses conférences et de nombreux workshops ; on se reportera à la bibliographie pour en avoir la liste exhaustive.

- I. Emiris a participé à l'atelier FRISCO à Oxford (Angleterre) et l'atelier FIABLE à Paris, il s'est rendu au département de Mathématiques de l'Université de Patras (Grèce) pour une semaine, dans le cadre de la collaboration bilatérale PLATON, il a été invité au séminaire « Méthodes Symboliques-algébriques et Méthodes de Vérification : Théorie et Applications », à Dagstuhl (Allemagne) en novembre 1999, il a participé et a organisé une session spéciale sur « Applied Computational Geometry » à la conférence « IEEE International Multiconference on Computers, Signals, Communications and Circuits » à Athènes en Grèce du 4 au 8 Juillet 1999, a participé à la conférence Hellénique en Informatique à Ioannina en Grèce et a été invité à une session spéciale à cette conférence du 26 au 28 août 1999.

- J-P. Merlet a participé à la journée « Santé » organisée par la région PACA et a donné un exposé sur les micro-systèmes pour l'endoscopie dans le cadre des conférences « La recherche en direct » organisées par l'INRIA Sophia Antipolis ; il a également participé au « meeting » FRISCO à Oxford en Grande-Bretagne du 28 au 30 avril 1999, au Congrès Mondial de l'IFToMM à Oulu en Finlande du 20 au 24 juin 1999, à la conférence ACA'99 à Madrid en Espagne qui s'est déroulée du 24 au 27 juin 1999, au « 9th International Symposium on Robotics Research » qui s'est déroulé à Salt Lake City du 8 au 13 octobre 1999, à la conférence « Parallel Kinematics Machine » à Milan le 30 novembre 1999.
- B. Mourrain a participé au « meeting » FRISCO à Oxford en Grande-Bretagne les 28, 29 et 30 avril 1999, à la conférence IMACS ACA'99 à Madrid en Espagne qui s'est déroulée du 24 au 27 juin 1999, à la conférence ISSAC'99 à Vancouver au Canada du 28 au 31 juillet 1999, aux journées Fiable en Mars et Septembre à Paris, aux journées ELF le 13 et 14 Octobre 1999 à Cannes, à la conférence AAECC'99 à Honolulu du 15 au 19 novembre 1999.
- Y. Papegay a donné un exposé intitulé « From Modeling to Simulation with Symbolic Computation » dans le cadre du second « Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing » à Munich (Allemagne) en mai 1999.

9.3 Enseignement

Les membres du projet SAGA participent à des enseignements de troisième cycle :

- DEA de mathématique de l'Université de Nice-Sophia Antipolis - Méthodes effectives en géométrie algébrique par B. Mourrain et M. Elkadi (50h.)
- DEA Aravis de l'Université de Nice-Sophia Antipolis - Robotique par J.P. Merlet (6h.)
- DEA X-ENS - Courbes et surfaces par B. Mourrain (10h.)
- DEA MDFI de l'Université d'Aix-Marseille - Systèmes polynomiaux et applications par B. Mourrain et I. Emiris (6h.)
- DEA d'informatique de l'Université de Crète (Grèce) - Algorithmes algébriques par I. Emiris (28h.)
- DEA « Effective algebraic geometry and applications » dans le cadre du programme « Mathematics of Computers and Decisions » à l'Université de Patras en Mai 1999 par B. Mourrain (15h).

Ils interviennent également en second cycle Universitaire et dans des écoles d'ingénieurs :

- Maîtrise d'ingénierie mathématique de l'Université de Nice - cours d'algorithmique par B. Mourrain (50 h.)
- Maîtrise d'ingénierie mathématique de l'Université de Nice - cours de langages et système par Y. Papegay (20 h.)
- ENSTA Sophia Antipolis, Ecole des Mines de Paris, ISIA - cours de robotique par J.P. Merlet (24h.)
- Y. Papegay donne des cours de Maple en classes préparatoires au grandes écoles (100 h.).
- M. Elkadi et D. Bondyfalat ont d'importantes activités d'enseignement à l'Unsa de par leur statut d'enseignant-chercheur.

9.4 Thèses

Thèses en cours :

1. Didier Bondyfalat, *Démonstration automatique pour la vision*, Université de Nice-Sophia Antipolis,
2. Laurent Busé, *étude algorithmique des résultants sur une variété algébrique*, Université de Nice-Sophia Antipolis,
3. David Daney, *étalonnage de robots parallèles*, Université de Nice-Sophia Antipolis,
4. Luc Rolland, *Algorithmes algébriques pour la commande de robots parallèles de haute précision*, Université de Nancy
5. Olivier Ruatta, *Dualité des algèbres et problèmes d'effectivité en géométrie algébrique*, Université d'Aix-Marseille II,
6. Philippe Trébuchet, *Vers des algorithmes de résolution d'équations polynomiales stables et rapides*, ENS Cachan.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] H. Brönnimann, I. Emiris, V. Pan, S. Pion, « Sign Determination in Residue Number Systems », *Theoretical Computer Science, Special Issue on Real Numbers and Computers 210*, 1, 1999, p. 173–197.

[2] I. Emiris, J. Canny, « Efficient Incremental Algorithms for the Sparse Resultant and the Mixed Volume », *J. Symbolic Computation 20*, 2, août 1995, p. 117–149.

[3] I. Emiris, B. Mourrain, « Matrices in elimination theory », *J. Symbolic Computation 28*, 1999, p. 3–44.

[4] I. Emiris, « On the Complexity of Sparse Elimination », *J. Complexity 12*, 1996, p. 134–166.

[5] H. Hirukawa, Y. Papegay, « A Lazy Algorithm for Planning Motions in Contact », *in : proceedings of the 1994 IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE Industrial Electronics Society, p. 2152–2159, Munich, Germany, septembre 1994.

[6] J.-P. Merlet, *Les Robots parallèles*, Hermès, Paris, 1997.

[7] J.-P. Merlet, « Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry », *Int. J. of Robotics Research 8*, 5, Octobre 1989, p. 45–56.

[8] B. Mourrain, « Isolated points, duality and residues », *J. of Pure and Applied Algebra 117 & 118*, 1996, p. 469–493, Special issue for the Proc. of the 4th Int. Symp. on Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA).

[9] B. Mourrain, « Algorithmes et Applications en Géométrie Algébrique », septembre 1997, Habilitation à diriger les recherches.

[10] B. Mourrain, « Computing isolated polynomial roots by matrix methods », *J. of Symbolic Computation, Special Issue on Symbolic-Numeric Algebra for Polynomials 26*, 6, Dec. 1998, p. 715–738.

Livres et monographies

[11] J.-P. Merlet, *Parallel robots*, Kluwer, 1999.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[12] I. EMIRIS, *Algorithmes Algébriques et Géométriques*, Habilitation à diriger des recherches, université de Nice-Sophia-Antipolis, décembre 1999.

Articles et chapitres de livre

[13] A. BONNECAZE, B. MOURRAIN, P. SOLÉ, « Jacobi Polynomials, Type II codes, and designs », *Designs, Codes and Cryptography 16*, 1999, p. 215–234.

[14] H. BRÖNNIMANN, I. EMIRIS, V. PAN, S. PION, « Sign Determination in Residue Number Systems », *Theoretical Computer Science, Special Issue on Real Numbers and Computers 210*, 1, 1999, p. 173–197.

[15] L. BUSÉ, M. ELKADI, B. MOURRAIN, « Generalized resultant over unirational algebraic varieties », *J. of Symbolic Computation*, 2000, à paraître.

[16] J. CANNY, I. EMIRIS, « A Subdivision-Based Algorithm for the Sparse Resultant », *J. ACM*, 1999, à paraître.

[17] Y. CHOIE, B. MOURRAIN, P. SOLÉ, « Rankin Cohen brackets and Invariant Theory », *J. of Algebraic Combinatorics*, 1999, à paraître.

[18] A. DIAZ, I. EMIRIS, E. KALTOFEN, V. PAN, « Algebraic Algorithms », *in: Handbook of Algorithms and Theory of Computation*, M. Atallah (éditeur), CRC Press, Boca Raton, Floride, USA, 1999, ch. 16.

[19] M. ELKADI, B. MOURRAIN, « Algorithms for residues and Löjasiewicz exponents », *J. of Pure and Applied Algebra*, 1999, à paraître.

[20] I. EMIRIS, B. MOURRAIN, « Computer Algebra Methods for Studying and Computing Molecular Conformations », *Algorithmica, Special Issue on Algorithms for Computational Biology 25*, 1999, p. 37–402.

[21] I. EMIRIS, B. MOURRAIN, « Matrices in Elimination Theory », *J. Symbolic Computation, Special Issue on Elimination 28*, 1999, p. 3–44.

[22] I. EMIRIS, V. PAN, « Applications of FFT », *in: Handbook of Algorithms and Theory of Computation*, M. Atallah (éditeur), CRC Press, Boca Raton, Floride, USA, 1999, ch. 17.

[23] I. EMIRIS, V. PAN, « Symbolic and numeric methods for exploiting structure in constructing resultant matrices », *J. Symbolic Computation*, 1999, à paraître.

[24] I. EMIRIS, J. VERSCHELDE, « How to Count Efficiently all Affine Roots of a Polynomial System », *Discrete Applied Mathematics, Special Issue on Computational Geometry 93*, 1, 1999, p. 21–32.

[25] J.-P. MERLET, « Determination of 6D Workspaces of Gough-Type Parallel Manipulator and Comparison between Different Geometries », *Int. J. of Robotics Research 18*, 9, octobre 1999, p. 902–916.

[26] B. MOURRAIN, V. PAN, « Lifting/descending processes for polynomial zeros », *J. of Complexity*, 1999, à paraître.

[27] B. MOURRAIN, V. PAN, « Multivariate Polynomials, Duality and Structured Matrices », *J. of Complexity*, 1999, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[28] D. BONDYFALAT, B. MOURRAIN, T. PAPADOPOULO, « An Application of Automatic Theorem Proving in Computer Vision », *in: Automated Deduction in Geometry*, X.-S. Gao, D. Wang, L. Yang (éditeurs), *LNAI*, 1669, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[29] D. Daney, « Self calibration of Gough platform using leg mobility constraints », *in: 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, p. 104–109, Oulu, Finlande, juin 1999.

[30] M. Elkadi, B. Mourrain, « A new algorithm for the geometric decomposition of a variety », *in: Proc. ISSAC*, S. Dooley (éditeur), ACM Press., p. 9–16, 1999.

[31] I. Emiris, B. Mourrain, V. Plagianakos, M. Vrahatis, « Robust Methods for Counting, Localizing and Computing with Certainty Simple Zeros of Analytic Functions », *in: Proc. 5th Intern. Symp. Orthogonal Polyn., Spec. Functions & Appl.*, Patras, Greece, 1999. à paraître.

[32] I. Emiris, « Exact and Efficient Determination of Geometric Predicates », *in: Progress in Simulation, Modeling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and Electronic Devices and Systems*, N. Mastorakis (éditeur), World Scientific, p. 336–341, Athènes, Grèce, 1999.

[33] I. Emiris, « The structure of Sparse-Resultant Matrices », *in: Proc. Hellenic Conf. on Informatics*, D. Fotiadis, S. Nikolopoulos (éditeurs), World Scientific, p. II.9–22, 1999.

[34] J.-P. Merlet, « Finding the extrema of the leg lengths of a Gough-type parallel robot when the platform is moving in a given 6D workspace », *in: 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, p. 86–91, Oulu, Finlande, juin 1999.

[35] J.-P. Merlet, « Forward kinematics of parallel robots », *in: IMACS Conf. on Applications of Computer Algebra*, El Escorial, juin 1999.

[36] J.-P. Merlet, « Parallel robot: open problems », *in: 9th Int. Symp. of Robotics Research*, Snowbird, octobre 1999.

[37] B. Mourrain, « An introduction to linear algebra methods for solving polynomial equations », *in: HERCMA'98*, E. Lipitakis (éditeur), p. 179–200, 1999.

[38] B. Mourrain, « A new criterion for normal form algorithms », *in: Proc. AAECC, LNCS*, 1999. à paraître.

[39] Y. Papegay, « From Modeling to Simulation with Symbolic Computation: An Application to Design and Performance Analysis of Complex Optical Devices », *in: proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing*, Springer-Verlag (éditeur), Munich, June 1999.

Rapports de recherche et publications internes

[40] I. Emiris, B. Mourrain, M. Vrahatis, « Sign Methods for Counting and Computing Real Roots of Algebraic Systems », *rapport de recherche n° 3669*, Inria, 1999.

[41] A. Fonville, O. Devillers, M. Teillaud, B. Mourrain, « Algebraic methods and arithmetic filtering for exact predicates on circle arcs », *rapport de recherche*, Inria, 1999, à paraître.