

*Projet CAFÉ**Calcul Formel et Équations**Sophia Antipolis*

THÈME 2B



*R*apport
d'Activité

2000

Table des matières

1	Composition de l'équipe	3
2	Présentation et objectifs généraux	4
3	Fondements scientifiques	4
3.1	Algorithmes pour équations linéaires	4
3.2	Algorithmes pour équations non linéaires	6
3.3	Aspects logiciels du calcul formel	7
4	Domaines d'applications	9
4.1	Panorama	9
5	Logiciels	9
5.1	Passerelle OpenMath–MathLink	9
5.2	Bibliothèque SALLI	9
5.3	Bibliothèque Σ^{it}	10
6	Résultats nouveaux	10
6.1	Algorithmes pour équations linéaires	10
6.2	Algorithmes pour équations non linéaires	12
6.3	Architectures logicielles pour le calcul formel	13
6.4	Base de formules	14
7	Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)	14
7.1	NAG	14
8	Actions régionales, nationales et internationales	14
8.1	Actions nationales	14
8.1.1	Accueils de chercheurs français	14
8.2	Actions européennes	15
8.2.1	CATHODE-2	15
8.2.2	OpenMath	15
8.3	Réseaux et groupes de travail internationaux	16
8.3.1	Groupe de travail sur les mathématiques du W3C	16
8.3.2	Institut Liapunov	16
8.4	Accueils de chercheurs étrangers	16
9	Diffusion de résultats	17
9.1	Animation de la communauté scientifique	17
9.2	Enseignement universitaire	17
9.3	Thèses et Stages	17
9.4	Participation à des colloques, séminaires, invitations	18

10 Bibliographie**19**

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Manuel Bronstein [DR]

Assistante de projet

France Limouzis [TR, à temps partiel dans le projet]

Personnel Inria

Stéphane Dalmas [IR, jusqu'à février 2000]

Evelyne Hubert [CR]

Ingénieurs experts

Hélène Prieto [jusqu'à août 2000]

Claude Huchet [jusqu'à février 2000]

Personnel UNSA

Marc Gaëtano [Maître de conférences]

Chercheurs doctorants

Raphaël Bomboy [ATER UNSA]

Stéphane Lavirotte [ATER UNSA, jusqu'à juin 2000]

Stagiaires

Thomas Cluzeau [avril–juin 2000]

2 Présentation et objectifs généraux

Notre but est de développer de nouvelles méthodes de résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles, c'est-à-dire d'équations où les inconnues représentent des fonctions plutôt que des valeurs numériques, et de faciliter le transfert de ces méthodes dans les sciences de l'ingénieur en produisant les programmes et outils nécessaires pour les appliquer à des problèmes industriels. Les équations fonctionnelles qui sont l'objet de nos études sont plus particulièrement les équations différentielles et les équations aux (q) -différences.

Nous poursuivons les axes de recherche suivants :

- Algorithmes algébriques : nous étudions des algorithmes efficaces en théorie de Galois différentielle ainsi que leurs généralisations aux équations aux différences et au-delà à des équations plus générales. Nous étudions aussi le traitement des cas non-génériques en présence de paramètres dans les équations.
- Bases de données mathématiques : nous développons une base de données déductive de formules mathématiques, qui permet de stocker naturellement les connaissances non algorithmiques utilisables en calcul formel. Ce thème génère de nombreux problèmes au croisement du calcul formel de la réécriture, et de la déduction automatique.
- Bibliothèques dédiées de calcul formel : nous implantons nos méthodes dans des bibliothèques dédiées utilisables à partir de divers systèmes de calcul formel.
- Composants logiciels : nous développons les outils et protocoles nécessaires à l'utilisation de bases de données et de bibliothèques dédiées comme composants logiciels d'un environnement plus large de calcul scientifique.

Nous avons participé au projet OpenMath (ESPRIT Multimedia Standards 24.969), ainsi qu'aux groupes de travail CATHODE-2 (ESPRIT WG 24.490) et « Math » (W3C). Nous collaborons avec plusieurs laboratoires travaillant dans le domaine du calcul formel : GAGE (École Polytechnique), LACO (Limoges), LMC (Grenoble), ETH (Suisse), UWO (Canada) et le centre de calcul de l'académie des sciences de Russie, ce dernier par l'intermédiaire de projets soutenus par l'institut Liapunov.

3 Fondements scientifiques

3.1 Algorithmes pour équations linéaires

Mots clés : algèbre linéaire, algèbre différentielle, équations différentielles, équations aux différences, intégration formelle, solutions analytiques, quadratures, solutions en forme close, théorie de Galois.

L'objectif de ce thème est d'étudier la résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles linéaires, principalement différentielles et aux (q) -différences. L'importance de l'approche par linéarisation de telles équations dans pratiquement toutes les sciences de l'ingénieur est bien connue, et se reflète dans l'importance des investissements en ordinateurs et temps de

calcul consacrés à leur résolution numérique. Ingénieurs et physiciens essaient d'étendre la connaissance de la linéarisée au problème non-linéaire, ce qui montre d'autant plus l'utilité d'une analyse fine de la structure du linéaire. La connaissance de solutions formelles amène à une meilleure compréhension des modèles étudiés, car les solutions ainsi obtenues contiennent des informations sur la structure même des problèmes résolus.

Une équation différentielle (resp. aux différences) ordinaire linéaire est une équation de la forme :

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y(x) = b(x)$$

respectivement

$$a_n(x)y(x+n) + \dots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

où l'inconnue y , ainsi que les coefficients b et les a_i , sont des fonctions de la variable x . On cherche à déterminer s'il existe des solutions *liouvilliennes*, c'est à dire si on peut exprimer au moins une solution non-nulle par une formule finie faisant intervenir des opérations algébriques, des primitives (resp. des sommes) et des exponentielles (resp. des produits). Ces solutions sont aussi appelées solutions en quadratures ou bien en forme close. Ce type de solution n'existe pas toujours lorsque l'ordre n est plus grand que 1 et que les coefficients a_i ne sont pas constants. Par exemple, l'équation de Bessel :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

n'en admet pas (ses solutions sont les fonctions de Bessel, qui sont définies implicitement par cette équation). Plus difficiles pour les systèmes de calcul formel, les équations :

$$(x^3 + 1)(x^2 + 1)(x - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (x^2 + 2x - 1) \frac{dy}{dx} + 15(x^3 + 1)y(x) = 0 \quad (1)$$

et

$$y(x+2) + y(x+1) + xy(x) = 0 \quad (2)$$

n'en admettent pas non plus, alors que :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{7x - 4}{x(x - 1)} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2592x^2 - 2963x + 560}{252x^2(x - 1)^2} \frac{dy}{dx} + \frac{57024x - 40805}{24696x^2(x - 1)^2} y(x) = 0 \quad (3)$$

et

$$y(x+2) + \frac{(x+1)(5x^2 + 8x + 4)}{(x+2)(x^5 + 2x^4 + x^3 - 1)} y(x+1) - \frac{x^2(x^5 + 7x^4 + 19x^3 + 25x^2 + 16x + 3)}{(x+2)(x^5 + 2x^4 + x^3 - 1)} y(x) = 0 \quad (4)$$

en admettent. On notera que MAPLE V.5 et MATHEMATICA 4.0 ne sont capables ni de trouver des solutions liouvilliennes de (3) ou (4), ni de prouver que (1) ou (2) n'en ont pas. La théorie de Galois différentielle, développée tout d'abord par Picard et Vessiot au début du siècle, puis de façon algébrique principalement par Kolchin dans les années 60, associe un groupe de Galois à une équation de ce type, et donne des critères liant l'existence de solutions en

quadratures à une propriété de ce groupe. Des algorithmes permettant de tester cette propriété à partir de l'équation seulement^[Kov86,Sin80] ont rendu le problème de l'existence de solutions en quadratures décidable dans le cas de coefficients polynomiaux. Une généralisation récente de cette théorie aux équations aux différences finies^[SvdP97] a engendré la découverte d'un premier algorithme de calcul des solutions liouvilliennes de ces équations pour des coefficients polynomiaux^[HS99]. Dans les deux cas, la complexité de ces algorithmes ainsi que leur besoin de résolution d'équations intermédiaires non-linéaires les rendent difficilement applicables en pratique, sauf pour les équations du second ordre.

Notre action dans ce thème a plusieurs buts :

- la généralisation des théories et méthodes à des équations aux (q) -différences,
- la généralisation des algorithmes à des classes de coefficients contenant des fonctions plus générales,
- l'amélioration des algorithmes existants afin de pouvoir résoudre des équations d'ordres supérieurs,
- le développement de bibliothèques dédiées fournissant ces fonctionnalités de résolution.

3.2 Algorithmes pour équations non linéaires

Mots clés : algèbre différentielle, algèbre aux différences, élimination, système d'équations différentielles, solution singulière.

Par système différentiel non linéaire nous entendons toute forme de systèmes d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, explicites ou implicites et éventuellement d'ordre zéro. Les recherches pour l'étude des solutions de tels systèmes ont reçu ces dernières décennies l'attention du monde académique et du monde industriel. Il a fallu en effet constater que des systèmes mécaniques pas si complexes, des réaction chimiques ou des systèmes contrôlés ne peuvent pas toujours être modélisés par des systèmes différentiels explicites.

Pour les systèmes dynamiques (différentiels explicites) et certains types de systèmes aux dérivées partielles, le théorème de Cauchy ou de Cauchy-Kowaleski assure l'existence et l'unicité d'une solution pour une condition initiale donnée. La question de l'existence est déjà délicate dans le cas d'un système différentiel non-linéaire quelconque.

Une fois l'existence d'une solution assurée, plusieurs questions se posent. Quelles sont les conditions initiales qui donnent lieu à une solution? À une solution réelle? Une fonction des inconnues et de leurs dérivées s'anulle-t-elle sur les solutions? Quelle est la variété où vivent les solutions? Quelles sont les équations satisfaites par un sous-ensemble des inconnues? Si le

-
- [Kov86] J. KOVACIC, « An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations », *Journal of Symbolic Computation* 2, 1, March 1986, p. 3-43.
- [Sin80] M. SINGER, « Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Differential Equations », *American Journal of Mathematics* 103, 1980, p. 661-682.
- [SvdP97] M. SINGER, M. VAN DER PUT, *Galois Theory of Difference Equations*, LNM 1666, Springer, 1997.
- [HS99] P. HENDRIKS, M. SINGER, « Solving Difference Equations in Finite Terms », *Journal of Symbolic Computation* 27, 3, March 1999, p. 239-260.

système original est un système aux dérivées partielles, les solutions satisfont-elles une équation différentielle ordinaire?

Par équation différentielle algébrique, nous entendons, le plus souvent, des équations différentielles polynomiales en les inconnues et leurs dérivées. On peut néanmoins aussi considérer les équations qui font intervenir des fonctions, telles \sin et \exp , elles-mêmes définies par des équations différentielles polynomiales.

L'algèbre différentielle^[Rit50,Kol73] donne les fondements théoriques pour répondre aux questions ci-dessus dans le cas des systèmes différentiels algébriques. Les algorithmes de décomposition caractéristique donnent le moyen constructif de répondre à ces questions pour un système différentiel algébrique donné.

Plus précisément, les algorithmes de décomposition caractéristique^[Kol73,BLOP95,BLOP97] [7] donnent une *bonne* représentation d'un système différentiel algébrique donné, disons \mathcal{S} . Le résultat d'un tel algorithme est un ensemble fini de systèmes différentiels *cohérents* $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$ tel que l'ensemble des solutions analytiques de \mathcal{S} soit égal à l'union des solutions non singulières des systèmes \mathcal{C}_i . Les réponses aux questions précédentes - et plus - se lisent sur les \mathcal{C}_i , à condition d'avoir choisi un ordre adéquat pour les calculs.

Alors que les algorithmes lourdement récursifs proposés par Ritt et Kolchin font intervenir des factorisations dans des tours d'extension, les algorithmes récents procèdent sans récursion ni factorisation. Bien qu'enfin effectifs, des algorithmes aussi généraux et potentiellement puissants ne permettent pas toujours d'obtenir une réponse en un temps raisonnable. Il est souhaitable à la fois d'améliorer et de spécialiser ces algorithmes généraux et leurs implantations.

Nous nous intéressons également à l'étude analytique des solutions singulières et des solutions non singulières à leur voisinage^[Rit50] [4]. Ce problème est spécifique aux équations implicites et non linéaires en leur terme de tête. Les décompositions caractéristiques constituent en fait la première étape d'une telle étude. D'autres méthodes algébriques doivent être mises en œuvre pour compléter les résultats.

L'algèbre aux différences^[Coh65] prend un point de vue algébrique sur les équations fonctionnelles similaire à l'algèbre différentielle introduite par Ritt. Néanmoins, il n'y a pas encore d'algorithmes effectifs pour la représentation de l'ensemble des solutions. Nous aspirons à établir une théorie de l'élimination pour les équations aux différences.

3.3 Aspects logiciels du calcul formel

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductives, communication,

-
- [Rit50] J. RITT, *Differential Algebra, Colloquium publications, XXXIII*, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).
- [Kol73] E. KOLCHIN, *Differential Algebra and Algebraic Groups, Pure and Applied Mathematics, 54*, Academic Press, New York-London, 1973.
- [BLOP95] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER, M. PETITOT, «Representation for the radical of a finitely generated differential ideal», *in: ISSAC'95*, A. Levelt (éditeur), ACM Press, New York, 1995.
- [BLOP97] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER, M. PETITOT, «Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals», *rapport de recherche n° IT-306*, LIFL, 1997.
- [Coh65] R. COHN, *Difference algebra*, New York-London-Sydney: Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons. XIV, 1965.

protocole, OpenMath.

Résumé : *L'objectif général de ce thème est l'amélioration des systèmes de calcul formel. Deux directions ont été poursuivies cette année : la conception et la mise en œuvre de bases de données de formules mathématiques et la coopération entre systèmes (échange d'objets mathématiques) avec le développement d'OpenMath.*

La plupart des systèmes de calcul formel intègrent tout un ensemble de connaissances non algorithmiques (déclaratives), directement dans leur code, comme les valeurs d'intégrales ou de sommes particulières. Une idée naturelle est de regrouper ces connaissances dans une base de données pour pouvoir en rajouter facilement et les partager entre plusieurs systèmes. Les bases de données classiques ne conviennent pas, car elles n'ont pas la connaissance mathématique indispensable : prise en compte de la commutativité, des éléments neutres, déterminations d'instances de formules, etc. La réalisation d'une telle base qui soit à la fois suffisamment efficace pour être utilisable en pratique et suffisamment puissante dans son mécanisme de recherche et de reconnaissance, pose divers problèmes qui se situent au carrefour entre les techniques et outils du calcul formel et ceux de la déduction automatique. Le prototype que nous développons depuis plus de deux ans admet des requêtes de la forme « sous les conditions C_1, \dots, C_n , la formule P est-elle vraie? », où P peut contenir des variables particulières qui devront être instanciées par une expression convenable dans la réponse. Ceci permet, par exemple, de poser des questions telles que « quelle est l'expression (une expression) qui représente la primitive d'une fonction donnée ». La réponse à une telle requête est multiple et conditionnelle : des conditions supplémentaires peuvent être données dans la réponse. La base peut ainsi répondre « P est vrai si on rajoute la condition C_{n+1} aux conditions C_i ». Les réponses sont obtenues par un processus de déduction original qui combine une unification associative-commutative entre la requête et les formules de la base (il s'agit en fait d'un cas particulier d'unification associative-commutative) et une ou plusieurs étapes qui s'apparentent à de la para-modulation (certaines des équations provenant des échecs d'unification sont résolues en utilisant la base elle-même ou un algorithme spécialisé).

Une autre application des bases de formules est l'indexation de documents contenant des expressions mathématiques. Les documents scientifiques électroniques (livres, journaux, cours, etc.) sont de plus en plus nombreux, et la possibilité de rechercher dans ces documents les parties contenant une formule mathématique donnée est une fonctionnalité fondamentale qui peut être implantée à l'aide d'une base de formules. Les formules mathématiques apparaissant dans le document forment les entrées de la base. À une entrée sont associées les références aux parties du document qui contiennent cette formule. Dans ce type d'application, le mécanisme de reconnaissance est moins puissant que dans le cas d'une base déductive et c'est plutôt le choix de la structure de données qui détermine les performances de la base.

La communauté de calcul formel a reconnu depuis quelques années l'importance de définir un standard pour la communication d'objets mathématiques (communication inter-processus, par courrier électronique, par archivage dans des bases de données etc). Un effort international, *OpenMath*, a été initié dans ce sens et nous y avons participé très activement. Les problèmes sont multiples : trouver le bon niveau de définition des objets, prendre en compte la variété des applications qui peuvent utiliser un tel standard ou encore intégrer *OpenMath* avec les

standards actuels ou à venir pour les documents électroniques ou la communication entre applications (XML, CORBA, DCOM/OLE. . . cf. aussi notre participation au groupe de travail sur les mathématiques du Consortium Web). Un standard dans ce domaine est aussi un premier pas vers la mise au point d'une nouvelle architecture pour les systèmes de calcul formel (et plus généralement pour les systèmes de calcul scientifique au sens le plus large) à base de composants OpenMath qui devrait permettre de résoudre les difficiles problèmes rencontrés aujourd'hui pour développer et maintenir un système de calcul formel.

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

La stratégie principale du projet est d'enrichir les fonctionnalités des systèmes commerciaux de calcul formel, afin de transférer nos résultats et algorithmes vers leurs utilisateurs par l'intermédiaire de ces systèmes. Du point de vue de la recherche, nous envisageons d'étudier les applications possibles suivantes :

- automatique (application de l'élimination différentielle),
- analyse numérique (détermination de l'index d'un système différentio-algébrique, recherche de conditions initiales cohérentes),
- bases de données mathématiques (consultation de formulaires mathématiques sur Internet).

5 Logiciels

5.1 Passerelle OpenMath–MathLink

Participants : Stéphane Dalmas [correspondant], Hélène Prieto.

Mots clés : communication, protocole, OpenMath, Mathematica, MathLink.

Nous avons continué le développement notre traducteur OpenMath-MathLink, traducteur qui permet d'une part d'utiliser le système Mathematica comme un serveur OpenMath, et d'autre part qui permet à une application OpenMath d'être utilisée depuis Mathematica.

Ce travail a donné lieu à un article dans le numéro spécial du *SIGSAM Bulletin* consacré à OpenMath [8].

5.2 Bibliothèque SALLI

Participants : Manuel Bronstein [correspondant], Hélène Prieto.

Mots clés : Aldor, standard, structures de données.

Suite à un contrat de β -test avec NAG Ltd. pour l'évaluation du compilateur Aldor, la bi-

bibliothèque standard SALLI¹ (STANDARD ALDOR LIBRARY) CONTINUE À ÊTRE DÉVELOPPÉE DANS LE PROJET. NOUS Y AVONS RAJOUTÉ CETTE ANNÉE UNE INTERFACE AUX ENTIERS LONGS ET FLOTTANTS LONGS DE LA BIBLIOTHÈQUE GNU MP, AINSI QUE DES STRUCTURES DE DONNÉES « INFINIES » QUI PERMETTENT DE MANIPULER FACILEMENT DES SUITES ET SÉRIES INFINIES « PARESSEUSES », C'EST-À-DIRE DONT LES COEFFICIENTS NE SONT CALCULÉS QUE LORSQU'ILS INTERVIENNENT DANS D'AUTRES CALCULS [Wat88]. CETTE BIBLIOTHÈQUE REMPLACE LES BIBLIOTHÈQUES `axllib` ET `BasicLib` PRODUITES PAR NAG ET FOURNIT UNE INTERFACE DE HAUT NIVEAU AUX TYPES ET STRUCTURES DE DONNÉES DE BASE DU LANGAGE. SALLI EST DISTRIBUÉE AVEC UN TUTORIAL SUR LA PROGRAMMATION EN ALDOR^[BB98].

5.3 Bibliothèque Σ^{it}

Participants : Manuel Bronstein [correspondant], Hélène Prieto.

Mots clés : calcul formel, équations différentielles, équations aux différences.

La bibliothèque² Σ^{it} incorpore nos algorithmes de résolution d'équations fonctionnelles. Elle continue à être développée dans le projet. Nous avons achevé cette année son portage comme extension de la bibliothèque SALLI (cf. 5.2), et y avons rajouté des implantations modulaires de calcul de déterminant, ainsi qu'un résolveur d'équations aux différences finies linéaires.

Nous distribuons deux programmes interactifs qui permettent d'effectuer des calculs avec Σ^{it} sans utiliser le compilateur Aldor :

- Bernina³, un serveur permettant de manipuler et de résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux,
- Shasta⁴ : un serveur nouvellement produit cette année qui permet de manipuler et de résoudre les équations aux différences finies linéaires à coefficients polynomiaux.

6 Résultats nouveaux

6.1 Algorithmes pour équations linéaires

Participants : Raphaël Bomboy, Manuel Bronstein, Hélène Prieto.

Mots clés : équations différentielles, équations aux différences, coefficients liouvilliens, déterminants, solutions liouvilliennes, solutions analytiques, quadratures, invariants, groupes

1. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/salli.html>

2. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit>

3. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit/bernina.html>

4. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit/shasta.html>

[Wat88] S. WATT, « A fixed point method for power series computation », p. 206–217.

[BB98] P. BROADBERY, M. BRONSTEIN, « A First Course on Aldor with SALLI », novembre 1998, <http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/tutorial.ps.gz>.

de Galois, réductibilité.

Équations différentielles

Pour les équations différentielles, notre activité principale cette année a été d'améliorer le calcul des invariants du groupe de Galois, point de passage coûteux des algorithmes de résolution. Dans l'axe de nos recherches sur la généralisation des algorithmes aux équations dont les coefficients contiennent des fonctions plus générales que les polynômes, nous avons réduit le calcul d'invariants d'équations à coefficients dans un corps différentiel k *quelconque* à la détermination des solutions dans k d'équations (ou de systèmes) linéaires associés. Ces travaux ont été présentés à la conférence MEGA'2000, ainsi qu'au "AMS Eastern Sectional Meeting" et apparaîtront dans les actes de 3ecm courant 2001.

Algèbre linéaire

Notre collaboration avec Thom Mulders (ETH Zurich) a continué cette année avec l'implantation dans la bibliothèque Σ^{it} (cf. 5.3), par Hélène Prieto, d'algorithmes basés sur les images modulaires et le relèvement de Hensel^[ABM99,MS00] pour le calcul du déterminant et du noyau de grandes matrices. Une nouvelle méthode prometteuse basée sur la forme de Popov a été découverte à l'ETH par Mulders et Storjohann et a été implantée par Mulders dans Σ^{it} . Nous cherchons à adapter cette méthode à d'autres calculs en algèbre linéaire ainsi qu'à déterminer une stratégie de sélection de l'algorithme optimal pour une matrice donnée.

Équations aux différences finies

L'essentiel de nos efforts dans ce domaine cette année a été centré sur l'utilisation de la théorie de Galois pour la factorisation et la résolution en forme close de ces équations, ainsi que sur le développement d'algorithmes pour résoudre les équations à coefficients fonctionnels.

Réductibilité et solutions liouvilliennes : nous nous sommes attachés à terminer le travail entrepris visant à utiliser les propriétés de *réductibilité* d'un système d'équations aux différences finies linéaire pour rechercher ses solutions liouvilliennes. L'algorithme de Hendriks et Singer^[HS99] se ramène à la recherche de solutions *hypergéométriques* d'une famille d'équations du même type. Ce problème a été résolu par M. Petkošek^[Pet92]. Notre travail a consisté essentiellement à rechercher des algorithmes se ramenant le plus possible à des calculs d'Eigenring d'équations aux différences finies. Le calcul d'un Eigenring se ramène en effet à la recherche des solutions *rationnelles* d'un système auxiliaire linéaire d'équations aux différences finies, problème plus simple que la recherche de ses solutions hypergéométriques. Nous avons ainsi établi un algorithme de réductibilité des opérateurs aux différences finies linéaires, utilisant le travail théorique effectué précédemment^[Bom99], qui se ramène uniquement à des calculs d'Eigenring pour

-
- [ABM99] J. ABBOTT, M. BRONSTEIN, T. MULDER, « Fast deterministic computation of determinants of dense matrices », *in: Proceedings of ISSAC'99*, S. Dooley (éditeur), ACM Press, p. 197–204, 1999, <http://www.acm.org/pubs/articles/proceedings/issac/309831/p197-abbott/p197-abbott.pdf>.
- [MS00] T. MULDER, A. STORJOHANN, « Rational solutions of singular linear systems », *in: Proceedings of ISSAC'2000*, C. Traverso (éditeur), ACM Press, p. 242–249, 2000.
- [HS99] P. HENDRIKS, M. SINGER, « Solving Difference Equations in Finite Terms », *Journal of Symbolic Computation* 27, 3, March 1999, p. 239–260.
- [Pet92] M. PETKOŠEK, « Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients », *Journal of Symbolic Computation* 14, 2 and 3, August&September 1992, p. 243–264.
- [Bom99] R. BOMBOY, « Réductibilité des opérateurs aux différences finies : une approche Galois-théorique »,

une large famille d'opérateurs (les opérateurs *complètement réductibles*). Nous avons également établi un algorithme de recherche des solutions liouvilleanes d'une équation aux différences finis d'ordre deux qui se ramène uniquement à des calculs d'Eigenring pour toutes les classes d'opérateurs sauf une, et améliore les algorithmes connus dans tout les cas. Ce travail devrait être rédigé dans la thèse de Raphaël Bomboy, dont la soutenance est prévue avant la fin de l'année universitaire. Des implantations expérimentales en langage Maple, utilisant le logiciel *Shasta* (cf. 5.3), sont en cours et ont déjà permis de traiter plusieurs exemples complexes. Nous espérons prochainement généraliser ce travail à des opérateurs d'ordre quelconque.

Équations à coefficients fonctionnels : Nous avons continué cette année le développement de notre théorie algébrique des tours d'extensions de corps aux différences [6] afin de pouvoir traiter les équations aux différences dont les coefficients contiennent des fonctions plus générales que les polynômes. Dans le cadre de notre collaboration avec S.A. Abramov (Moscou), nous avons résolu le problème du calcul de la *dispersion* de deux éléments d'une telle tour, qui se réduit au problème suivant de la théorie des nombres : étant donné deux nombres algébriques α et β , existe-t-il un entier positif n tel que $\alpha^n = \beta$? Nous avons corrigé une erreur dans une solution proposée par Kannan et Lipton^[KL86] et présenté une solution complète à la conférence ISSAC'2000 [9]. Nous nous intéressons maintenant au calcul des solutions rationnelles et hypergéométriques de ce type d'équations.

6.2 Algorithmes pour équations non linéaires

Participants : Thomas Cluzeau, Evelyne Hubert.

Mots clés : équations différentielles, équations aux différences, élimination, ensemble triangulaire, élément primitif différentiel.

Les algorithmes de décomposition caractéristique pour les systèmes différentiels peuvent être perçus comme une généralisation des algorithmes de décomposition caractéristique pour les systèmes polynomiaux. Ce thème a récemment bénéficié de nouveaux algorithmes et d'implantations efficaces^[Kal98,ALMM99,Wan99,AMM99]. Nous nous sommes attachés à étudier ces nouveaux algorithmes et les objets de base qu'ils manipulent : les ensembles triangulaires. Nous avons produit des notes sur le sujet qui présentent des théorèmes plus fins et des améliorations algorithmiques. Ces notes seront publiées prochainement comme rapport de recherche.

Ce travail sur les ensembles triangulaires a permis de généraliser la construction du résolvant

Rapport de recherche n° 3735, INRIA, Juillet 1999, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-3735.html>.

- [KL86] R. KANNAN, R. LIPTON, « Polynomial-Time Algorithm for the Orbit Problem », *Journal of the ACM* 33, 4, October 1986, p. 808–821.
- [Kal98] M. KALKBRENER, « Algorithmic Properties of Polynomial Rings », *Journal of Symbolic Computation* 26, 5, November 1998, p. 525–582.
- [ALMM99] P. AUBRY, D. LAZARD, M. MORENO-MAZA, « On the theories of triangular sets », *Journal of Symbolic Computation* 28, 1-2, 1999.
- [Wan99] D. WANG, *Elimination methods, Texts and Monographs in Symbolic Computation*, Springer-Verlag Wien, 1999.
- [AMM99] P. AUBRY, M. MORENO-MAZA, « Triangular sets for solving polynomial systems: a comparative implementation of four methods », *Journal of Symbolic Computation* 28, 1-2, 1999, p. 125–154.

d'un système différentiel^[Rit50]. La construction de Ritt permet de trouver une équation différentielle rationnellement équivalente au système différentiel donné par l'ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier. Nous avons généralisé ce procédé aux ensembles caractéristiques des idéaux différentiels caractérisables produits par les algorithmes de décomposition sans factorisation. Nous avons de surcroît mis à jour les relations entre ce résolvant, l'élément primitif de l'algèbre commutative et le vecteur cyclique des systèmes différentiels linéaires. Le rapport de projet de DEA de T. Cluzeau est disponible sur demande et devrait être prochainement complété pour aboutir à un rapport de recherche.

Notre principale motivation pour l'étude des nouveaux algorithmes de décomposition caractéristiques pour les systèmes polynomiaux est qu'ils semblent incontournables pour l'établissement d'une théorie, sans factorisation, de l'élimination pour les systèmes d'équations aux différences. En effet, contrairement aux équations différentielles sous l'action de la dérivation, les équations aux différences ne deviennent pas linéaires en leur terme de tête sous l'action du morphisme de décalage. Les premières idées dans cette direction, discutées avec R. Cohn (Rutgers University, NJ), ont été présentées à la séance spéciale *algèbre différentielle* de la conférence de l'AMS en novembre 2000.

Un autre grand chantier a été mis en œuvre. Le but est de pouvoir calculer une décomposition caractéristique de systèmes différentiels présentant une symétrie de Lie. Expérimentalement, les problèmes symétriques sont intractables en raison de l'inexistence d'un ordre naturel avec lequel mener les calculs. L'idée est de factoriser le système par son groupe de symétrie. Ce projet est commun avec E. Mansfield (University of Kent at Canterbury, UK) et est le sujet d'une proposition de PAI. L'approche prise est celle de l'extension de la méthode du repère mobile revue par M. Fels et P. Olver^[FO98,FO99].

Nous avons également entamé une collaboration avec M. Singer (North Carolina State University) sur les questions relatives aux solutions singulières. Comme première étape, nous avons établi des preuves modernes pour les résultats concernant les équations différentielles ordinaires du premier ordre.

6.3 Architectures logicielles pour le calcul formel

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano, Hélène Prieto.

Mots clés : communication, protocole, OpenMath.

Cette année encore, l'essentiel de cette activité a été centré autour d'*OpenMath*, un format standard de représentation d'objets mathématiques.

Ce travail s'est déroulé dans le cadre d'un projet européen Esprit (de la tâche 3.2, Multimedia Standards) intitulé *OpenMath: Accessing and Using Mathematical Information Electronically* (cf 8.2.2) qui a pris fin officiellement le 31 août 2000.

-
- [Rit50] J. RITT, *Differential Algebra, Colloquium publications, XXXIII*, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).
- [FO98] M. FELS, P. J. OLVER, «Moving coframes. I. A practical algorithm», *Acta Appl. Math.* 51, 2, 1998, p. 161–213.
- [FO99] M. FELS, P. J. OLVER, «Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations», *Acta Appl. Math.* 55, 2, 1999, p. 127–208.

Comme l'an passé, nous avons participé à la définition et à l'implantation du standard, et nous avons mis à jour nos bibliothèques C, C++ et Java en conséquence. Nous avons également enrichi un certain nombre de *Content Dictionaries* (recueils de définitions de fonctions et symboles mathématiques).

Suite à la forte implication de CAFÉ dans la définition du standard et des bibliothèques OpenMath, Marc Gaëtano a été nommé *Member at large* du *Steering Committee* de l'*OpenMath Society*.

6.4 Base de formules

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano, Claude Huchet.

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductive.

Nous avons poursuivi les activités autour de notre base de données déductive pour formules mathématiques dans deux directions:

- l'implantation d'un serveur OpenMath : nous avons développé une version serveur OpenMath de la base destiné à indexer des documents par les formules mathématiques qu'ils contiennent. Ce travail s'est fait dans le cadre du projet européen OpenMath (cf. 8.2.2).
- le développement d'une nouvelle version : profitant de l'expérience acquise, nous avons décidé de développer une nouvelle version de la base dans le langage Objective CAML. Cette nouvelle version se présentera comme une bibliothèque de composants permettant la construction de diverses applications comme des bases de données deductives ou des bases et des moteurs d'indexation de documents mathématiques.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 NAG

Participant : Manuel Bronstein.

Ce contrat a pour but d'évaluer les versions préliminaires du compilateur Aldor de NAG Ltd. en vue d'une commercialisation ultérieure. Il nous permet d'obtenir, d'une part, les versions de développement du compilateur et des bibliothèques qui y sont jointes, et, d'autre part, des modifications nécessaires à notre travail.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Accueils de chercheurs français

Dans le cadre du *Trimestre Algèbre Constructive* et du séminaire CAFÉ de calcul formel et équations différentielles, nous avons reçu les visites de François Boulier (université de Lille, 3

jours en janvier 2000), Minh Hoang (université de Lille, une journée en janvier 2000), Mikhail Foursov (INSA Rennes, 2 jours en juillet 2000), Alexandre Sedoglavic (École Polytechnique, 3 jours en septembre 2000) et Marc Moreno-Maza (université de Lille, 3 jours en décembre 2000). Une collaboration avec l'université de Lille est en train de se dessiner et devrait se concrétiser au cours de l'année prochaine.

8.2 Actions européennes

8.2.1 CATHODE-2

Participant : Manuel Bronstein.

Nous avons participé au groupe de travail européen CATHODE-2 (Computer Algebra Tools for Handling Ordinary Differential Equations, ESPRIT-WG 24.490, durée 3 ans) qui s'est terminé mai 2000. Des possibilités de suites sous forme d'euroconférences ou de réseau sont en cours d'étude. Nos partenaires dans ce groupe étaient le GMD (Bonn), l'ETH (Zurich) et les universités de Bruxelles, Grenoble, Groningen, Londres et Madrid.

8.2.2 OpenMath

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano, Hélène Prieto.

CAFÉ a participé durant trois ans au projet européen Esprit 24.969 (Task 3.2, Multimedia Standards) intitulé *OpenMath: Accessing and Using Mathematical Information Electronically*. Ce projet avait pour but la définition d'un standard pour la communication d'objets mathématiques et la réalisation d'un certain nombre d'outils et d'applications utilisant ce standard. Parmi les applications réalisées, on peut citer un prototype de consultation de bases de données d'articles mathématiques, des versions des systèmes de calcul formel Axiom et GAP utilisant *OpenMath* et des logiciels pour l'enseignement à distance à travers le Web.

Les partenaires de l'INRIA dans ce projet étaient NAG (fournisseur de logiciels pour le calcul scientifique, coordonnateur du projet, Grande-Bretagne), Springer-Verlag (éditeur scientifique, Allemagne) et RIACA (Research Institute for Applications of Computer Algebra, Université technique d'Eindhoven, Pays-Bas). Les partenaires associés étaient OVE Interactive (société spécialisée dans les services Web et Internet, France), Stilo Technology Ltd. (spécialisée dans les outils de gestion de documents électroniques, Grande-Bretagne), Trinity College (Dublin, République d'Irlande) et les universités de Bath (Grande-Bretagne) et St-Andrews (Ecosse).

CAFÉ est intervenu dans la définition d'OpenMath, dans la conception et l'écriture des bibliothèques (en C, C++ et Java) et dans l'activité sur les bases de données mathématiques. Le projet a commencé en septembre 1997 et a pris fin officiellement le 31 août 2000. L'évaluation finale du projet a été très positive et les évaluateurs ont conseillé à l'ensemble des partenaires de continuer leurs activités dans le cadre d'un *Working Group*. Une proposition en ce sens a été déposée auprès de la communauté européenne le 30 octobre 2000.

8.3 Réseaux et groupes de travail internationaux

8.3.1 Groupe de travail sur les mathématiques du W3C

Stéphane Dalmas a poursuivi ses activités en tant que membre du groupe de travail sur les mathématiques du World Wide Web Consortium (W3C). Ce groupe, responsable de la définition de la version 2 de MathML (un standard pour inclure des mathématiques dans un document XML) a publié en novembre 2000 la *Candidate Recommendation* MathML 2.

8.3.2 Institut Liapunov

Nous avons achevé avec succès en juin 2000 le projet Liapunov *Méthodes directes de calcul formel pour les solutions rationnelles de systèmes d'équations linéaires fonctionnelles*. Ce projet, dont notre partenaire était le centre de calcul de l'académie des sciences de Russie, avait pour but de développer et d'implanter des algorithmes directs (sans découplage) pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires de type différentielles, aux différences ou q -différence. Les algorithmes issus de ce projet sont implantés dans un prototype Maple ainsi que dans la bibliothèque Σ^{it} (cf. 5.3) De plus, nous avons entamé en juillet 2000, avec les mêmes partenaires, un nouveau projet Liapunov intitulé *Équations linéaires aux (q)-différences à coefficients (q)-hypergéométriques*, dont l'objectif est le développement et l'implantation d'algorithmes efficaces pour la manipulation et la simplification de termes (q)-hypergéométriques, ainsi que pour le calcul de solutions en forme fermées d'équations aux (q)-différences linéaires dont les coefficients contiennent de tels termes.

8.4 Accueils de chercheurs étrangers

Europe (CEE) Carsten Schneider (RISC Linz, Autriche) : 2 jours en juillet 2000. Collaborateur M. Bronstein : équations aux différences à coefficients fonctionnels.

Europe (hors-CEE) Dans le cadre des projets Liapunov mentionnés plus haut (cf. 8.3.2), nous avons reçu Sergei Abramov (Université de Moscou, une semaine en mai 2000 et une semaine en novembre 2000) ainsi que ses étudiants en thèse Denis Khmel'nov, Alla Mitichkina et Anna Ryabenko (tous une semaine en novembre 2000).

Marko Petkovšek (Ljubljana, Slovénie) : une semaine en mai 2000. Collaborateur M. Bronstein : généralisation de l'algorithme **Hyper** aux équations aux différences à coefficients hypergéométriques.

Niklaus Mannhart (ETH Zurich, Suisse) : une semaine en mai 2000. Collaborateur M. Bronstein : bibliothèque de programmation distribuée en **Aldor**.

Thom Mulders (ETH Zurich, Suisse) : une semaine en novembre 2000. Collaborateur M. Bronstein : formes de Popov en algèbre linéaire formelle.

Amérique Richard Cohn (Rutgers University), une journée en septembre 2000. Collaborateur E. Hubert : équations aux différences.

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- E. Hubert, en collaboration avec B. Mourrain et M. Elkadi (SAGA), a organisé un séminaire hebdomadaire⁵ durant le premier trimestre. Ce séminaire a permis de présenter et d’approfondir 3 thèmes : algèbre différentielle, invariants, élimination algébrique. Les intervenants incluaient des spécialistes nationaux et des membres des projets SAGA, MIAOU et CAFÉ, notamment les doctorants de ces projets.
- M. Bronstein a été membre des comités de programme des conférences RWCA’2000⁶ et CALCULEMUS’2000⁷.
- M. Bronstein est membre de l’ILC (Industrial Liaison Committee), commission de conseil et de pilotage du centre de recherche ORCCA⁸ (Ontario Research Centre for Computer Algebra) et a participé à sa réunion annuelle, qui a eu lieu à London (Ontario) les 14 et 15 mai 2000.

9.2 Enseignement universitaire

- F. Boulier (Lille) et M. Bronstein (CAFÉ) offrent un module « Équations différentielles » dans la filière « Calcul formel » du DEA X-ENS d’algorithmique (20h).
- En collaboration avec I. Emiris et B. Mourrain (SAGA), M. Bronstein et E. Hubert offrent un module « Calcul formel » dans le DEA MDFI de l’université d’Aix-Marseille (20h). E. Hubert est intervenue durant la semaine intensive⁹ à l’INRIA de ce DEA (3h).
- E. Hubert assure, depuis septembre 2000, la formation Informatique et Calcul Formel de classes préparatoires scientifiques au Centre International de Valbonne (80 heures).
- Dans le cadre de son service d’enseignement d’ATER en mathématiques à l’université de Nice-Sophia Antipolis, R. Bomboy doit effectuer dans l’année universitaire un service de 96 heures de TD en DEUG scientifique. Certaines de ces séances ont lieu sur machines et comprennent l’utilisation de MAPLE et de WIMS¹⁰.

9.3 Thèses et Stages

Thèses en cours dans le projet :

1. Raphaël Bomboy, « Réductibilité et solutions liouvilliennes des opérateurs aux différences finies », UNSA.

5. <http://www-sop.inria.fr/cafe/Evelyne.Hubert/formule>

6. <http://www.inf.ethz.ch/rwca00>

7. <http://www.mathweb.org/calculemus/meetings/standrews00>

8. <http://www.orcca.on.ca>

9. <http://www-sop.inria.fr/certilab/dea-mdfi/sem-int.html>

10. <http://wims.unice.fr/>

Thèses soutenues :

1. Stéphane Lavirotte, « Reconnaissance structurelle de formules mathématiques typographiées et manuscrites », UNSA, soutenue le 14 juin 2000.

Stages effectués dans le projet :

1. Thomas Cluzeau , « Élément primitif différentiel »

9.4 Participation à des colloques, séminaires, invitations

Raphaël Bomboy a présenté ses travaux sur la factorisation et la recherche des solutions liouvilliennes des équations aux différences finies linéaires dans diverses réunions : au séminaire ALGO (INRIA Rocquencourt, 6 mars 2000), aux journées « Équations différentielles et calcul formel » (Lille, 16–18 mars 2000), aux journées du groupe de travail européen CATHODE–2 (CIRM, 4–7 avril 2000) ainsi qu’aux journées nationales de calcul formel (Aussois, 9–12 mai 2000). Il a également présenté une vulgarisation de ces travaux à la journée des doctorants I3S–INRIA (Sophia, 20 octobre 2000).

M. Bronstein a présenté ses travaux sur l’intégration des équations différentielles et aux différences dans diverses réunions nationales et internationales : au séminaire ALGO (INRIA Rocquencourt, 6 mars 2000), aux journées du groupe de travail européen CATHODE–2 (CIRM, 4–7 avril 2000), ainsi qu’aux conférences MEGA’2000 (Bath, UK, 20–23 juin 2000), ISSAC’2000 (St–Andrews, UK, 7–9 août 2000) et à l’“AMS Sectional Meeting” (New York, USA, 4–5 novembre 2000). européen de mathématiques (3ecm, Barcelone, Espagne, 10–14 juillet 2000) et a présenté un cours d’introduction à l’intégration formelle lors d’un atelier sur l’algèbre différentielle (Rutgers, USA, 2–3 novembre 2000).

T. Cluzeau a participé aux journées nationales de calcul formel (Aussois, 9–12 mai 2000).

S. Dalmas a participé à l’évaluation finale du projet OpenMath (Luxembourg, 3–4 mai 2000) et, avec M. Gaëtano, aux journées OpenMath (St–Andrews, UK, 10–11 août 2000).

E. Hubert a participé au *Cinquième Forum des Jeunes Mathématiciennes* (Institut Henri Poincaré, Paris, 21–22 janvier 2000), aux journées du groupe de travail européen CATHODE–2 (CIRM, 4–7 avril 2000) ainsi qu’aux journées nationales de calcul formel (Aussois, 9–12 mai 2000). Elle a présenté ses travaux sur l’élimination différentielle à plusieurs séminaires : à Queen Mary and Westfield, University of London et à l’université du Kent à Canterbury (UK, mars 2000), à l’Institut de Recherche Mathématique de Rennes (université de Rennes, novembre 2000), ainsi qu’au colloque *AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Symbolic Computation* (USA, juin 2000). Elle a aussi présenté ses travaux sur les aspects constructifs de l’algèbre aux différences à l’“AMS Sectional Meeting” (New York, USA, 4–5 novembre 2000). En outre, elle a été invitée à présenter une revue de l’algèbre différentielle constructive à la conférence NSF–CBMS *on the Geometrical Study of Differential Equations* ainsi qu’au séminaire *Calcul Formel et Complexité* de l’IRMAR (Rennes, novembre 2000).

H. Prieto a présenté les progrès du projet OpenMath aux journées nationales de calcul formel (Aussois, 9–12 mai 2000).

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] M. BRONSTEIN, M. PETKOVŠEK, « An Introduction to Pseudo-Linear Algebra », *Theoretical Computer Science* 157, 1996, p. 3–33.
- [2] M. BRONSTEIN, W. SIT (éditeurs), *Differential Algebra and Differential Equations (Special Issue of the Journal of Symbolic Computation)*, Academic Press, Londres, 1999.
- [3] M. BRONSTEIN, *Symbolic Integration I – Transcendental Functions*, Springer, Heidelberg, 1997.
- [4] E. HUBERT, « Essential Components of an Algebraic Differential Equation », *Journal of Symbolic Computation* 28, 4-5, 1999, p. 657–680.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

- [5] S. LAVIROTTE, *Reconnaissance structurelle de formules mathématiques typographiées et manuscrites*, Thèse d'informatique, Université de Nice, 2000.

Articles et chapitres de livre

- [6] M. BRONSTEIN, « On solutions of linear ordinary difference equations in their coefficient field », *Journal of Symbolic Computation* 29, 6, 2000, p. 841–877.
- [7] E. HUBERT, « Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra », *Journal of Symbolic Computation* 29, 4-5, 2000, p. 641–662.
- [8] H. PRIETO, S. DALMAS, Y. PAPEGAY, « Mathematica as an OpenMath Application », *SIGSAM Bulletin* 34, 2, 2000, p. 22–26.

Communications à des congrès, colloques, etc.

- [9] S. ABRAMOV, M. BRONSTEIN, « Hypergeometric dispersion and the orbit problem », in : *Proceedings of ISSAC'2000*, C. Traverso (éditeur), ACM Press, p. 8–13, 2000.

Rapports de recherche et publications internes

- [10] S. DELLIÈRE, « Pgcd de deux polynômes à paramètres : approche par la clôture constructible dynamique et généralisation de la méthode de S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko », *Rapport de Recherche n° RR-3882*, INRIA, 2000, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-3882.html>.
- [11] C. FAURE, J. DAVENPORT, H. NACIRI, « Multi-Valued Computer Algebra », *Rapport de Recherche n° RR-4001*, INRIA, 2000, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4001.html>.