INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet Mathfi

Mathématiques Financières

Rocquencourt

THÈME 4A

Rapport d'Activité

2000

Table des matières

1 Composition de l'équipe **3**

2 Présentation et objectifs généraux **5**

3 Fondements scientifiques **6**
3.1 Méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés . . 6
3.2 Contrôle stochastique 8

4 Domaines d'applications **10**
4.1 Mathématiques financières 10
4.1.1 Modélisation des actifs financiers 10
4.1.2 Couverture approchée des produits dérivés 11
4.1.3 Gestion de portefeuilles avec coûts de transaction 12

5 Logiciels **13**
5.1 Développement d'un logiciel de pricer d'options : Premia 13

6 Résultats nouveaux **14**
6.1 Méthodes de Monte-Carlo pour les options asiatiques 14
6.2 Minimisation d'entropie par les méthodes de Monte-Carlo 15
6.3 Stratégies de couverture réelle 15
6.4 Risque modèle pour les produits dérivés 16
6.5 Le modèle UVM: cas extrêmes et payoffs non réguliers 16
6.6 Contrôle optimal de systèmes avec retard 17
6.7 Contrôle stochastique ergodique - Application en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction 18
6.8 Optimisation dynamique de portefeuilles avec coûts fixes et proportionnels: un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel 19
6.9 Gestion de portefeuille dans un marché gouverné par des processus de diffusion avec sauts 19
6.10 Gestion de portefeuille dans le cas d'un marché gouverné par un mouvement brownien fractionnaire 20
6.11 Problèmes de temps d'arrêt optimal et options américaines 21
6.12 Calcul d'options américaines en dimension grande 22
6.13 Choix de portefeuille en observation partielle 22
6.14 Optimisation stochastique sous contraintes et application en réassurance 23

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux) **25**
7.1 Premia : un pricer d'options 25
7.2 Couverture des options sur électricité 26
7.3 Calibration par méthodes de Monte–Carlo 26
7.4 Évaluation d'options exotiques dans les modèles de taux 26
7.5 Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change 26

7.6 Évaluation numérique d'options sur taux 27

8 Actions régionales, nationales et internationales 27

8.1 Actions nationales 27

8.2 Actions européennes 27

8.3 Relations internationales 27

9 Diffusion de résultats 27

9.1 Animation de la communauté scientifique 27

9.2 Enseignement universitaire 28

9.3 Encadrement de stages 29

9.4 Encadrement de thèses 30

9.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations 30

10 Bibliographie 32

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Agnès Sulem [DR, Inria]

Responsable permanent

Claude Martini [CR, Inria]

Assistante de projet

Martine Verneuille [SAR, Inria]

Personnel Université et ENPC

Valentine Genon-Catalot [Professeur, Université de Marne la Vallée]

Benjamin Jourdain [Enseignant Chercheur, Maître de conférence à l'ENPC]

Damien Lamberton [Professeur, Université de Marne la Vallée]

Bernard Lapeyre [Directeur du Cermics, Professeur à l'ENPC]

Collaborateurs extérieurs

Jean-Philippe Chancelier [Enseignant Chercheur, Maître de Conférence]

Thierry Jeantheau [Maître de conférences, Université de Marne la Vallée]

Marie-Claire Kammerer-Quenez [Maître de conférences, Université de Marne la Vallée]

Stéphane Villeneuve [Maître de conférences, Université d'Evry]

Ingénieurs experts

Pierre Cohort

Anne Gilles-Genest

Chercheurs invités

Albert Shiryaev [Professeur, Université de Moscou]

Antonino Zanette [Enseignant Chercheur, Université de Trieste]

Doctorants

Xavier Joseph [Bourse Cifre, Coface depuis octobre 1997, Université Paris 6]

Simone Deparis [EPFL, Assistant]

Frédéric Ksas [Université d'Evry]

Matthieu Leblanc [Bourse MENRT, Université de Paris 7]

David Lefèvre [Bourse Inria, depuis octobre 1999, Université Paris 9 Dauphine]

Mohamed Mnif [Bourse Inria, depuis octobre 1999, Université Paris 7]

Laurent N'Guyen [Convention Cifre, CCF]

Samuel Njoh [Convention Cifre avec EDF, UMLV]

Mouaya Noubir [Crédit Lyonnais, ENPC]

Christophe Patry [Bourse MENRT depuis octobre 1997, Université Paris 9 Dauphine]

Emmanuel Temam [ENSAE, Bourse MENRT, Université Paris 6]

Stagiaires

Razina Abdoul [Institut Galilée, Université Paris 13]

Bernard Bergeron [ENS Ulm]

Fabrice Brassard [ENPC]

Delphine Camilleri [Ensta]

Sophie Deborggraeve [Institut Galilée, Université Paris 13]

Anne Eyraud [ENS Lyon]

Julien Férrière [ENS Lyon]

Youssef Itrib [Institut Galilée, Université Paris 13]

Jérôme Hugueny [ENPC]

Grégory Miermont [ENS Ulm]

Maelle Nodet [ENS Lyon]

2 Présentation et objectifs généraux

La pratique d'instruments financiers de plus en plus complexes (options, produits de taux d'intérêt...) a conduit à une utilisation de techniques avancées d'analyse stochastique et numérique dans les établissements financiers. Ces établissements sont demandeurs de contacts avec le monde de la recherche : c'est un élément réellement nouveau pour les mathématiques appliquées que l'on peut dater, en France, du milieu des années 80. Cet intérêt s'est traduit par des collaborations avec des universitaires renommés, la réalisation de contrats de recherche et le recrutement, au meilleur niveau, de mathématiciens appliqués dans les équipes de recherche et développement des banques. Notons qu'une demande forte de spécialistes se maintient depuis maintenant plus de quinze ans.

En retour, la pratique financière pose aux mathématiciens des problèmes stimulants et une interaction fructueuse s'est ainsi établie entre mathématiciens et financiers. Le développement dans le monde académique de cette nouvelle branche des mathématiques appliquées s'est concrétisé par l'organisation de congrès scientifiques internationaux, la création de plusieurs revues («Mathematical Finance», «Finance and Stochastics», «International Journal of Theorical and applied Finance», «Applied Mathematical Finance» ...), une explosion de l'offre de cours en troisième cycle et dans les écoles d'ingénieurs ainsi que par la soutenance de nombreuses thèses sur le sujet.

Les compétences scientifiques de l'équipe dans ce domaine concernent la modélisation des prix des actifs par des processus stochastiques, la résolution d'équations aux dérivées partielles par des méthodes probabilistes et d'analyse numérique classique, le contrôle stochastique des diffusions ou des processus de Markov, la statistique des diffusions, les probabilités numériques, avec des applications au calcul des prix d'actifs complexes, à l'optimisation dynamique de portefeuilles en marché imparfait, à la couverture approchée de produits dérivés en marché incomplet.

Le domaine de la finance mathématique est aujourd'hui tellement étendu qu'un seul projet ne peut le couvrir en totalité. Notre projet vise tout particulièrement à développer certains aspects proches des préoccupations des salles de marchés : modélisation plus pertinente des actifs financiers (prise en compte d'événements rares comme d'importantes variations de cours, incertitude structurelle sur les paramètres de la dynamique statistique des cours...), méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des options et leur mise en œuvre (méthodes de Monte–Carlo, méthodes d'arbres, analyse numérique d'équations aux dérivées partielles), étude de techniques de couverture réalistes (coûts de transaction, couverture en temps discret, contrainte de liquidité, ...), applications du contrôle stochastique à la gestion de portefeuilles d'actifs et d'options. Ces sujets concernent des domaines sur lesquels les membres de l'équipe ont contribué de façon active tant sur les aspects théoriques qu'appliqués.

En collaboration avec un consortium de banques, nous développons un logiciel consacré à l'évaluation et la couverture des options : Premia (site web :http://cermics.enpc.fr/ premia). Ce logiciel vise à constituer une base de référence sur les algorithmes d'évaluation et de couverture des produits dérivés, ainsi qu'un environnement informatique facilitant l'implémentation et les tests numériques associés aux travaux de l'équipe.

Les activités scientifiques du projet peuvent se regrouper selon les thèmes suivants : méthodes numériques pour les produits dérivés et la gestion de portefeuille, contrôle stochastique et applications en gestion de portefeuilles et à la couverture approchée des options, modélisation des prix des actifs financiers. La réalisation du logiciel de calcul d'options Pemia participe à la valorisation des activités scientifiques du projet.

Relations internationales et industrielles

– Collaborations internationales et universitaires

  - Programme d'action intégrée Aurora franco - norvégien avec le département de mathématiques de l'Université d'Oslo; projet franco-russe de «Mathématiques financières» de l'Institut Liapunov à Moscou, site Web: urlhttp://www-direction.inria.fr/international/liapunov.html; collaborations avec les universités de Rome II et III.

  - Enseignement universitaire dans les DEA Paris I, Paris VI, Paris IX, UMLV, et École Polytechnique, ENPC.

– Contrats industriels :

  - Consortium Premia centré sur le logiciel de calcul d'options Premia. Il est composé de: Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.

  - Conventions Cifre avec la Coface (Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change), EDF (Couverture des options sur électricité), et le CCF (Calibration par méthodes de Monte–Carlo)

  - Contrat avec le Crédit Lyonnais sur les méthodes numériques pour l'évaluation d'options exotiques dans les modèles de taux.

3 Fondements scientifiques

3.1 Méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés

Mots clés : Monte-Carlo, méthodes d'arbres, différences finies, méthodes numériques.

Participants : P. Cohort, A. Genest, B. Jourdain, D. Lamberton, B. Lapeyre, C. Martini, C. Patry, A. Sulem, E. Temam, A. Zanette.

Résumé : *Les problèmes de calcul effectif des prix et des couvertures d'options sont, encore aujourd'hui, l'enjeu essentiel pour les établissements financiers. Bien qu'une activité de recherche intense ait été menée dans les banques et le monde universitaire depuis quinze ans, cette préoccupation reste entière tout particulièrement pour le calcul d'options exotiques et sur taux d'intérêt et l'optimisation de portefeuille sous contraintes. Ce thème d'activité, tout en étant au coeur du développement du logiciel Premia, motive des recherches plus théoriques à la fois sur les méthodes de type Monte-Carlo et sur les schémas numériques pour les équations*

aux dérivées partielles linéaires et non linéaires (Kolmogorov, Hamilton-Jacobi-Bellman, Inéquations Variationnelles et quasi-variationnelles), en particulier dans le cas très fréquent dans les applications, où le schéma discrétisé ne vérifie pas le principe du maximum discret.

Méthodes de Monte–Carlo. Les problèmes d'évaluation et de couverture d'options sont liés à des équations de diffusion en dimension (parfois) grande (plus de 10), ou très dégénérées pour lesquelles les méthodes numériques sont délicates voire impossible à mettre en oeuvre. Il n'est donc pas étonnant de constater que des méthodes de Monte-Carlo sont aujourd'hui utilisées de façon massive en finance, très souvent en raison de la simplicité de leur implémentation. Cette simplicité apparente ne doit pas cacher que la mise en oeuvre efficace de ces techniques conduit à des problèmes mathématiques délicats : approximation précise de fonctionnelles du mouvement brownien (option sur moyenne ou maximum. . .), justification de l'emploi de suites à discrépance faible pour des fonctions peu régulières comme celles utilisées lors de calculs d'options, pour ne citer que des points directement traités par des chercheurs du projet. Ce domaine de recherche est, bien sûr, directement lié à des activités appliquées et concerne une des parties importantes du logiciel Premia.

Dans les modèles de diffusion, la mise en œuvre des méthodes de Monte-Carlo nécessite le plus souvent la discrétisation d'une équation différentielle stochastique. Le schéma de discrétisation le plus utilisé dans la pratique est le schéma d'Euler. L'erreur que l'on commet lorsque l'on approche un processus de diffusion par un schéma d'Euler peut être contrôlée de différentes manières : norme L_P, contrôle des densités de transition . . .. L'approche considérée dans l'article [Clé99] est différente et consiste à mettre en évidence un comportement exponentiel de la vitesse de convergence du processus d'erreur convenablement normalisé. Plus précisément, nous montrons que le processus d'erreur satisfait un pseudo-principe de déviations modérées lorsque le pas de discrétisation du schéma d'Euler tend vers zéro. Ces techniques de grandes déviations devraient permettre d'étudier la couverture approchée d'options à des instants régulièrement espacés.

D. Lamberton travaille également sur les méthodes d'approximation récursives de lois invariantes de diffusion [LG99] (collaboration avec G. Pagès, Université Paris 12).

Méthodes numériques probabilistes. Les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement l'évaluation numérique de prix d'actifs complexes, en particulier le pricing d'options par des méthodes d'arbres. Si la convergence des schémas d'arbre a été traité notamment par Kushner [HD92], il semble que l'étude de la vitesse de convergence et aussi la compréhension des phénomènes d'enveloppes observés lors de la convergence des schémas d'arbres soit pour une grande part encore à réaliser.

[Clé99] E. Clément, «Inequalities of moderate deviation type in the Euler method for S.D.E. : the example of the geometric Brownian motion», *Stochastics and Stochastics Reports 67*, 1999, p. 287–307.

[LG99] D. Lamberton, G.Pagès, « Recursive estimation of the invariant distribution of a diffusion », *Prépublication n° 22/99*, Equipe d'analyse et de mathématiques appliquées, Université de Marne-la-Vallée, novembre 1999.

[HD92] H.J. Kushner, P. Dupuis, *Numerical Methods for stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer Verlag, 1992.

Plus précisément, on peut citer: l'étude de la forme de la convergence de l'algorithme de Cox-Ross-Rubinstein [CRR78] pour une option standard, de la vitesse de convergence pour des algorithmes de type Hull-White [HW93] ou Barraquand-Pudet [BP96] pour des options européennes sur trajectoires, la preuve de la convergence de ce type d'algorithmes pour des options américaines.

Méthodes numériques déterministes. Nous étudions les schémas numériques pour des équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées en particulier les équations en dimension élevée et les questions de stabilité des schémas aux différences finies pour les inéquations variationnelles.

Nous menons aussi l'étude des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, en particulier dans le cas très fréquent dans les applications, où le schéma discrétisé ne vérifie pas le principe du maximum discret.

3.2 Contrôle stochastique

Mots clés : contrôle stochastique, contrôle singulier et impulsionnel, frontière libre, Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquation variationnelle et quasi-variationnelle.

Participants : M. Akian (projet Metalau), J.-Ph. Chancelier, C. Martini, M. Mnif, Ch. Patry, A. Sulem.

Résumé : *Le contrôle stochastique est l'étude des systèmes dynamiques perturbés par des événements aléatoires et que l'on peut commander dans le but d'optimiser un certain critère.*

On considère des systèmes dynamiques dont l'état est modélisé par un processus de diffusion (éventuellement avec sauts), sur lequel on peut agir au moyen de variables de commande. La commande peut être continue, singulière ou impulsionnelle. Le but est d'optimiser un critère sur un horizon de gestion fini ou infini ou de type ergodique. La fonction valeur, qui réalise l'optimum du critère satisfait une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ou une inéquation variationnelle ou quasi-variationnelle elliptique, parabolique ou ergodique, avec des conditions aux limites dépendant du comportement du processus au bord du domaine : arrêté, réfléchi, etc ... Soit par exemple un système dont l'état X_t est gouverné par une diffusion dans un ouvert Ω :

$$dX_t = b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t, \quad X_0 = x \tag{1}$$

[CRR78] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, « Option pricing: a simplified approach », *J. of Economics*, January 1978.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

où u_t est le processus de commande, et W_t un processus de Wiener. On cherche à optimiser un critère qui peut-être de la forme

$$E\left(\int_0^\tau e^{-\alpha t} f(X_t, u_t)dt\right) \tag{2}$$

où E désigne l'espérance, $\alpha > 0$ et τ désigne le premier temps de sortie de X_t du domaine Ω.

Notons

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(x, u)$$

la fonction valeur où la performance à optimiser $J(x, u)$ est donnée par (2) et $\mathcal{U}$ est l'ensemble des commandes admissibles.

La méthode de la programmation dynamique conduit à une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour la fonction valeur V :

$$\begin{cases} \max\limits_{u \in \mathcal{U}}(A^u V + f(u)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où A^u est un opérateur elliptique du deuxième ordre, pouvant être dégénéré :

$$A^u V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1} b_i(x, u) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) - \alpha V(x) \tag{4}$$

avec $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ et donc $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x, u)\eta_i\eta_j \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,\ \eta \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathcal{U}.$

Dans le cas où la dynamique du système suit un processus de diffusion avec sauts, le générateur A contient un terme intégral.

Les problèmes de temps d'arrêt optimal sont reliés par l'approche de la programmation dynamique à des inéquations variationnelles de type obstacle.

Dans le cas d'un contrôle singulier, (alors le déplacement de l'état du système dû à l'application de la commande est non différentiable par rapport au temps), l'équation de la programmation dynamique est une inéquation variationnelle (I.V.), c'est à dire un système d'inéquations aux dérivées partielles.

Le contrôle peut être également de type impulsionnel, c'est-à-dire que l'état du système subit des sauts à certains instants, les instants d'impulsion et la taille des sauts étant des variables de décision. Dans ce cas, la fonction valeur vérifie une inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.). Les I.V. et I.Q.V. correspondent à des problèmes de frontière libre. La théorie des solutions de viscosité fournit un cadre rigoureux pour l'étude des équations de la programmation dynamique.

L'étude théorique et numérique de ces problèmes est un de nos sujets de recherche de base. Les applications financières concernent les problèmes de gestion de portefeuille avec coûts de transaction, couverture approchée d'options financières, problèmes d'options américaines, problèmes de maximisation d'utilité, problèmes d'assurance et de réassurance.

4 Domaines d'applications

4.1 Mathématiques financières

Résumé : *Les applications financières que nous considérons sont les problèmes d'évaluation et de couverture des produits dérivés (options européennes et américaines) et les problèmes de gestion optimale de portefeuilles. Les sujets de recherche que nous développons visent à se rapprocher des conditions du marché par des modélisations plus réalistes des actifs financiers (prise en compte d'événements rares comme d'importantes variations de cours par la modélisation des prix des actifs par des processus stables et des mouvements browniens fractionnaires, modélisation aléatoire de la volatilité), ainsi que par l'étude de techniques de couverture approchée (introduction de coûts de transaction, couvertures discrètes).*

4.1.1 Modélisation des actifs financiers

Participants : V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, A. Sulem, A. Tisseyre.

Mots clés : lois stables, volatilité stochastique.

Les modèles usuels de finance comme le modèle de Black-Scholes et ses différentes variations font intervenir des processus de diffusion browniens.

Les actifs peuvent alors être couverts par des stratégies données sous forme explicite, ou bien calculables de manière approchée. Les calculs approchés reposent soit sur des méthodes de Monte–Carlo combinées avec des techniques de simulation de solutions d'équations différentielles stochastiques, soit sur des méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles paraboliques.

Des études statistiques semblent montrer que les prix d'actions suivent des dynamiques discontinues. Ces modèles rendent mieux compte de certains phénomènes tels que les cracks boursiers, les irrégularités dues aux écarts entre offres d'achat et offres de vente, les interventions d'investisseurs institutionnels.

Application des lois stables en finance. On connaît les limites du modèle de Black-Scholes et les quelques incohérences qu'il entraîne entre les axiomes et les observations empiriques. Parmi les faiblesses on peut citer le «smile de volatilité». L'objet de la thèse d'A. Tisseyre est l'utilisation de processus géométriques α-stables. L'étude statistique des cours de change permet de trouver une valeur de α de l'ordre de 1.65, ce qui donne en particulier une bonne estimation de fréquence de retour de «crak». Un modèle de pricing d'options dans ce cadre permet d'apporter une correction significative sur le smile de volatilité. Un premier travail a été consacré au développement de méthodes numériques analytiques permettant d'évaluer la densité, la fonction de répartition et la transformée de Laplace partielle des lois α-stables. A. Tisseyre a obtenu des résultats théoriques permettant d'exprimer ces fonctions à l'aide soit de séries, soit d'intégrales complexes, soit de développements asymptotiques. Ces résultats sont appliqués pour l'évaluation de prix d'options dans le cadre de modèles «stables» (voir [Tis99]).

[Tis99] A. Tisseyre, *Stabilité et Finance*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, 1999.

Statistique des modèles à volatilité stochastique. Pour pallier les insuffisances du modèle de Black et Scholes, de nombreux auteurs ont proposé une modélisation aléatoire de la volatilité. Ces modèles, dits à volatilité stochastique, peuvent être à temps discret (par exemple les modèles ARCH) ou à temps continu (tel que le proposent par exemple Hull and White). Les formules de prix de produits dérivés qui en découlent dépendent des paramètres figurant dans les équations stochastiques associées.

Le problème de l'estimation de ces paramètres à partir de l'observation des prix d'actifs n'est pas standard et nécessite des méthodes spécifiques. Ce travail a déjà été effectué dans différents cadres asymptotiques. par exemple celui des données haute fréquence. Notre équipe y a contribué; quatre articles [GCJL98], [GCJL99], [16], [31] et la thèse de A. Gloter [41] sont principalement consacrés à ce sujet. Nos méthodes peuvent être implémentées, et les résultats théoriques sont validés par des simulations numériques.

De nombreux problèmes statistiques sur ces modèles restent ouverts et les résultats obtenus peuvent certainement être améliorés afin de rendre les procédures d'estimation plus efficaces. L'équipe envisage également d'étudier la situation où les browniens régissant le prix des actifs et la volatilité sont corrélés.

4.1.2 Couverture approchée des produits dérivés

Mots clés : risque modèle, coûts de transaction, couverture discrète.

Participants : C. Martini, Ch. Patry, E. Temam, D. Lamberton, S. Njoh.

Les modèles utilisés par les praticiens pour décrire les actifs financiers sont des modèles continus. On dispose alors d'une théorie parvenue à maturité ces dernières années, celle des marchés complets qui permet de calculer les prix et les stratégies de couverture des options.

Pourtant, ces stratégies de couverture ne sont pas réalistes. En effet, le trader ne se couvre qu'à des instants discrets et ne peut intervenir qu'un nombre fini de fois sur le marché par séance. Des travaux théoriques montrent les limites de l'application de la stratégie continue à des temps discrets déterministes : un exemple typique est celui d'un call à la monnaie à maturité, ou d'une option digitale. Les praticiens sont conscients de ce phénomène et développent des recettes empiriques pour y pallier.

Des travaux théoriques très récents ont été menés sur ces sujets par Cvitanić et Karatzas (contrainte sur le ratio de couverture, [CK]) et Barles et Soner (coûts de transaction, [BS96]). Nous étudions en particulier la couverture en temps discret, l'introduction des coûts de transaction et leur implémentation numérique.

[GCJL98] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Limit Theorems for Discretely Observed Stochastic Volatility Models », *Bernoulli 4*, 3, 1998, p. 283–303.

[GCJL99] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, «Parameter Estimation for Discretely Observed Stochastic Volatility Models», *Bernoulli 5*, 5, 1999, p. 858–872.

[CK] J. Cvitanić, I. Karatzas, «Hedging and Portfolio optimisation under transaction costs: a martingale approach», *Math. Finance 6*, p. 133–165.

[BS96] G. Barles, M. Soner, « Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation», Preprint, 1996.

Concrètement, l'utilisation de modèles aussi classiques que celui de Black-Scholes en pratique, donc avec des couvertures discrètes, pose la question du choix des instants et ratios de couverture effectifs. Ceci a mené à l'étude de la stratégie de couverture discrète la plus simple, qui correspond à l'approximation de l'intégrale stochastique par une somme de Riemann (travaux de Henrotte [Hen93], Zhang [Zha99]).

Le travail d'étude des couvertures à temps fixes mené par R. Zhang en dimension 1, et pour des fonctions relativement régulières, a été étendu depuis par E. Temam et E. Gobet [GT99] au cas de fonctions moins régulières et en particulier pour les options digitales. Ce travail confirme l'intuition des praticiens des marchés : ces options sont beaucoup plus délicates à couvrir que les options classiques et ceci se traduit par une vitesse de convergence de la couverture approchée plus lente que dans le cas des puts et des calls. Enfin, récemment, E. Temam a étendu ces résultats au cas multidimensionnel, pour une large classe d'options incluant les puts et les calls et les options digitales sur indices.

Cependant, rien n'oblige de se couvrir à intervalle de temps régulier, alors que la couverture semble devoir être plus fréquente dans les zones où le ratio de couverture Black- Scholes varie beaucoup. Une question naturelle dans ce sens est celle du choix optimal des paramètres de couverture pour un nombre de couvertures fixé, par exemple pour un critère de minimisation de la variance de l'erreur de réplication. Le problème correspondant est un problème de contrôle stochastique avec un nombre fini de temps d'arrêt que l'on résout théoriquement par des techniques de solutions de viscosité et numériquement par un algorithme d'Howard[PM99]. Actuellement, le travail en cours concerne l'étude d'autres critères (minimisation de l'espérance de la partie négative de l'erreur de couverture, travail sous la probabilité historique).

Les problèmes de couverture approchée apparaissent aussi dans les situations où on ne peut pas se couvrir directement avec l'actif sous-jacent. La thèse de S. Njoh porte plus particulièrement sur la couverture des options sur l'électricité. Le caractère non stockable de l'électricité rend inopérante toute stratégie de couverture avec le sous-jacent et on ne peut espérer réaliser qu'une couverture approchée à l'aide d'autres actifs.

4.1.3 Gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Participants : M. Akian (projet Metalau), J.-Ph. Chancelier, J.L. Menaldi (Wayne State University), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem, M. Taksar (Stony Brook University New York).

On étudie la politique optimale de consommation et d'investissement d'un investisseur ayant un compte en banque à taux d'intérêt fixe et n comptes en actions modélisés par des mouvements browniens géométriques. Les transactions entre comptes entraînent des coûts proportionnels au montant de la transaction et sont modélisées par des contrôles singuliers.

[Hen93] P. Henrotte, *Transaction costs and duplication strategies*, thèse de doctorat, University of Standford, 1993.

[Zha99] R. Zhang, *Couverture approchée des options europénnes*, thèse de doctorat, ENPC, 1999.

[GT99] E. Gobet, E. Temam, « Discrete time hedging errors for options with irregular poyoffs », *rapport de recherche n° 177*, Cermics, ENPC, Champs sur Marne, 1999.

[PM99] C. Patry, C. Martini, « Variance optimal hedging in the Black-Scholes model for a given number of transactions », Preprint Inria, n^o3767, 1999.

L'objectif est de maximiser le taux moyen de profit pour une fonction d'utilité de type HARA, ou l'espérance d'une fonction d'utilité de la richesse finale [ASS95] ou encore une fonction d'utilité de la consommation [AJS96]. Ces problèmes se modélisent comme des problèmes de contrôle stochastique singulier. Ils conduisent à des inéquations variationnelles que l'on étudie théoriquement au moyen des solutions de viscosité, et numériquement par des algorithmes de type Howard et multigrilles.

Le cas ergodique (maximisation du taux moyen de profit) est étudié dans [13]. Le problème des coûts fixes de transaction est étudié dans [OS99], [17]. Il se formule comme un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel qui conduit à une inéquation quasi variationnelle non linéaire.

Nous étudions également ces problèmes dans le cas où les prix des actifs risqués sont modélisés par des processus de diffusion avec sauts [FOS98], [25]. Dans ce cas les équations d'HJB associées comportent un terme intégral. Le problème sans coût de transaction peut être résolu explicitement.

5 Logiciels

5.1 Développement d'un logiciel de pricer d'options : Premia

Mots clés : pricer, options, évaluation, couverture.

Participants : B. Jourdain, P. Cohort, A. Gille-Genest, B. Lapeyre, C. Martini, A. Sulem, E. Temam, A. Zanette.

Le logiciel Premia est dédié à l'évaluation (pricing) et à la couverture de produits dérivés (options) sur actions, sur taux d'intérêt, taux de change et multi-support. à vocation essentiellement didactique, Premia vise à présenter des implémentations rigoureuses et documentées des algorithmes les plus récents dans le domaine et à constituer une contrepartie numérique à l'explosion académique du domaine.

Ce logiciel peut être un outil de formation de nouveaux market-makers ou traders soucieux de maîtriser l'aspect numérique du pricing d'options, et des étudiants de 3ème cycle en finance ou mathématiques financières. L'objectif n'est pas de réaliser un produit commercial qui traite tous les contrats existants sur le marché mais plutôt de fournir, pour un éventail de cas suffisamment représentatif des difficultés numériques qui se présentent, des codes sources et une

[ASS95] M. Akian, A. Sulem, P. Séquier, « A finite horizon multidimensional portfolio selection problem with singular transactions », *in : Proceedings CDC*, p. 2193–2198, News Orleans, Décembre 1995. Vol.3.

[AJS96] M. Akian, J.L. Menaldi, A. Sulem, « On an Investment-Consumption model with transaction costs », *SIAM J. Control and Optim. 34*, 1, Janvier 1996, p. 329–364.

[OS99] B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio with both fixed and proportional transaction costs: A Combined Stochastic Control and Impulse Control Model », *Preprint series n° 19*, University of Oslo, Department of Mathematics, October 1999, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/pure_1999.html`.

[FOS98] N. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market », *in : proceedings du Workshop on Mathematical Finance*, Inria, Paris, 1998. Discussion Paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, 5/99, March 99.

documentation hypertexte qui fasse le pont entre la formule théorique du prix et du ratio de couverture de l'option et l'algorithme effectif de calcul. Notre but est de traiter des cas concrets où des questions numériques se posent. Par rapport aux «packages» spécialisés finance associés aux grands logiciels scientifiques, Premia est centré sur les produits dérivés et met l'accent sur l'aspect numérique [21].

Premia est développé en collaboration avec un consortium de banques. Cette année, 2 nouvelles institutions ont rejoint le Consortium: BNP-Paribas et EDF. Actuellement, le consortium est donc composé de : Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web :

http://cermics.enpc.fr/ premia

Les livraisons de Premia 1 et Premia 2 ont eu lieu en Mai et Décembre 1999. Les prochaines versions : Premia 3 et 4 auront lieu respectivement au début et à la fin de l'année 2001.

La mise à disponibilité de Premia2 sur le web est prévue à la fin de l'année 2000.

6 Résultats nouveaux

6.1 Méthodes de Monte-Carlo pour les options asiatiques

Participants : B. Lapeyre, E. Temam.

Mots clés : Monte-Carlo, options asiatiques.

Les méthodes de Monte-Carlo sont connues pour être utiles en dimension grande. Ceci est vrai, mais le cas des options asiatiques fournit un exemple, surprenant, où les méthodes de Monte-Carlo (aidées par des techniques de réductions de variance) peuvent être plus efficaces que toute autre méthode connue y compris en dimension 2.

Le problème du pricing d'option asiatique est délicat. Ce problème est, déjà, largement traité soit par des méthodes analytiques [GY93,FMW96], soit par des méthodes numériques [DW95, LS95], soit par des méthodes de Monte-Carlo [AA90]. L'originalité de notre travail est de proposer (et de justifier en détail) de nouveaux schémas de discrétisation en temps pour l'intégrale du processus de Black et Scholes : ce point pose un vrai problème lorsque l'on met en oeuvre une méthode de Monte-Carlo comme l'ont noté Madan, Fy et Wang [FMW96], page 14. Nous montrons alors que pour un schéma en temps et une technique de réduction de variance bien choisis, la méthode de Monte-Carlo obtenue est, pour certaines valeurs de la volatilité, plus

[GY93] H. Geman, M. Yor, « Bessel processes, Asian options, and perpetuities », *Mathematical Finance 3*, 4, 1993, p. 349–375.

[FMW96] M. Fu, D. Madan, T. Wang, « Pricing continous time Asian options: A comparison of analytical and monte carlo methods », *forthcoming in the Journal of Computational Finance*, 1996.

[DW95] J. Dewynne, P. Wilmott, « Asian options as linear complementary problems: Analysis and finite difference solutions », *Advances in Futures and Operations Research 8*, 1995, p. 145–173.

[LS95] L.C.G. Rogers, Z. Shi, « The value of an Asian option », *J. Appl. Probab. 32*, 4, 1995, p. 1077–1088.

[AA90] A.G.Z. Kemna, A.C.F. Vorst, « A pricing method for options based on average asset values », *J. Banking Finan.*, March 1990.

efficace que les autres méthodes déjà citées. Nous avons mené des comparaisons numériques détaillées entre notre méthode de Monte-Carlo et les méthodes suivantes: Forward Shooting Grid (FSG)[BP96], Hull et White [HW93] et des méthodes différences finies. Pour des valeurs de la précision relative modérées (1%), il apparaît que les méthodes d'arbres (FSG ou Hull et White) sont les plus efficaces. Mais, de façon surprenante, une grande précision (de l'ordre de 0,01 %) ne peut être obtenue que par une méthode de Monte-Carlo utilisant un pas de temps relativement grand (de l'ordre de 1 mois) (cf. [22]).

6.2 Minimisation d'entropie par les méthodes de Monte-Carlo

Participants : L. Nguyen, B. Jourdain.

Dans la problématique de la calibration de modèles, Avellaneda & al [ABF+] ont proposé une approche de type Monte-Carlo pour obtenir à partir d'une probabilité a priori μ sur l'espace S des scenarii d'évolution possible du marché, une probabilité a posteriori compatible avec les prix de marché $C_1, \ldots, C_d$ de d actifs financiers définis par les fonctions de payoff $f_1, \ldots, f_d : S \to \mathbf{R}$. Pour $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant μ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, ces auteurs suggèrent de chercher la probabilité ν_n qui minimise l'entropie relative par rapport à la mesure empirique $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$ sous la contrainte $\int_S f d\nu_n = C$. Le début de la thèse de Laurent Nguyen est consacré à l'obtention d'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ν_n à partir d'un certain rang N et à l'étude de la convergence étroite de $(\nu_n)_{n \leq N}$ lorsque cette condition est vérifiée. Il est possible que p.s. $(\nu_n)_{n \geq N}$ converge étroitement vers une limite ν qui ne vérifie pas les contraintes i.e. telle que $\int_S f\ d\nu \neq C$, ce qui constitue un résultat marquant.

6.3 Stratégies de couverture réelle

Participants : C. Martini, Ch. Patry, H. Benamar (Université de Rabat), F. Trabelsi (Université de Tunis).

Mots clés : couverture, hedging.

On étudie la plus petite richesse initiale nécessaire pour surcouvrir une option européenne dans le modèle de Black-Scholes dans le contexte réel suivant: le market-maker ne peut se couvrir qu'à des instants aléatoires de son choix. Dans le cas où le nombre de couvertures est fixé, on montre que ce prix correspond à la stratégie buy-and-hold pour un call, ou la stratégie correspondante pour toute option avec un payoff continu. Dans le cas où le nombre de couvertures peut dépendre de la trajectoire du spot et que le delta de l'option de Black-Scholes de l'actif contingent est un processus à variation finie (ce qui exclut toutes les options

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

[ABF+] M. Avellaneda, R. Buff, C. Friedman, N. Grandchamp, L. Kruk, J. Newman, « Weighted Monte Carlo : A new Technique for Calibrating Asset-Pricing Models », *Intern. J. of Theor. and Appl. Finance*, à paraître.

standards en général), on montre que le plus petit prix est le prix de Black-Scholes de l'option. Dans les autres cas, la question reste ouverte.

6.4 Risque modèle pour les produits dérivés

Participants : C. Martini, L. Denis (Université du Mans), S. Deparis.

Mots clés : risque modèle.

On poursuit cet atelier, initialisé en 1999, de caractérisation de la plus petite surstratégie pour les options en présence d'incertitude sur le modèle, ce qui revient à spécifier non pas une probabilité mais une famille de probabilités parmi lesquelles le bon modèle a des chances de se situer. La situation qu'on ne sait pas traiter théoriquement est celle où la famille en question n'est pas dominée au sens statistique. Cette année, nous avons avancé dans 2 directions:

En temps discret (S. Deparis, C. Martini), on peut utiliser la théorie du balayage par un cône de fonctions continues (le cône étant pour nous les stratégies autofinancées), pour obtenir une généralisation très naturelle du cas d'une seule probabilité: le plus petit prix de surcouverture est le supremum des espérances sous les probabilités martingales qui chargent les trajectoires du sous-jacent. Le cas du temps continu (L. Denis, C. Martini) semble ardu. Il est difficile d'adapter les preuves des papiers fondateurs de El Karoui-Quenez[NM95] (processus continus) et Kramkov[Kra96] (processus quelconques), qui répondent à la question pour une seule probabilité et reposent sur des techniques exclusivement probabilistes. On a été amené à prouver un résultat un peu plus faible que celui de El Karoui-Quenez, de façon plus analytique, susceptible de s'étendre à la situation multi-probabilité.

6.5 Le modèle UVM: cas extrêmes et payoffs non réguliers

Mots clés : uvm, unknown volatility, volatilté stochastique.

Participants : C. Martini, M. Leblanc.

Marco Avellaneda et al. [ALP95] et Terry Lyons [Lyo95] ont proposé en 1995, indépendamment, une nouvelle approche pour prendre en compte l'incertitude sur la volatilité du produit primaire (sous-jacent) dans l'évaluation des produits dérivés: rechercher des stratégies de couvertures qui fonctionnent simultanément pour tous les modèles dont la volatilité est dans un intervalle donné (sans autre hypothèse). Du fait de l'absence de consensus sur des modélisations stochastiques de la volatilité en pratique (malgré une théorie très complète au niveau académique), ce modèle (dit UVM pour Unknown Volatility Model) a rencontré un grand succès

[NM95] N. El Karoui, M.C. Quenez, « Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market », *SIAM Journal of Control and Optimization 33*, 1995.

[Kra96] D. Kramkov, « Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets », *Probability theory and related fields 105*, 1996.

[ALP95] M. Avellaneda, A. Levy, A. Paras, « Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities », *Journal of Applied Finance 1*, 1995.

[Lyo95] T. Lyons, « Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives », *Journal of Applied Finance 2*, 1995.

auprès des professionnels (Avellaneda l'ayant développé au cours de son activité de consultant chez Morgan Stanley). Le prix de l'option dans cette approche est donné par la solution d'un problème de contrôle stochastique avec contrôle sur la variance. Malheureusement ceci n'est valide que pour des profils d'option théoriques (de régularité C^3). C.Martini a traité le cas en 1996 , rencontré dans la pratique, de profils continus. On peut, en se basant sur un résultat nouveau de 1999 sur les lois marginales des intégrales stochastiques, d'une part, et un résultat profond de Fleming et Vermes [WV89] de dualité convexe d'autre part, traiter le cas des payoffs discontinus (options digitales).

D'un point de vue analytique, le modèle UVM conduit à une équation d'HJB totalement non-linéaire, avec une donnée terminale éventuellement discontinue. Nos résultats à cet égard semblent nouveaux [38].

Nous avons aussi traité les cas extrêmes où la volatilité peut s'annuler, et où elle n'est pas bornée supérieurement. Dans le premier cas, C.Martini montre que le prix est celui d'une option américaine dans le modèle de Black&Scholes où la volatilité est la borne supérieure du modèle UVM. Ceci donne une nouvelle caractérisation infinitésimale du problème d'arrêt optimal, qui est la plus compacte dont on dispose, comme une équation d'évolution non-linéaire, sur laquelle on voit directement de nombreuses propriétés de la solution moins immédiates à obtenir sinon. Dans le second cas, on montre que le prix est celui de l'enveloppe concave supérieure du payoff dans le modèle de Black&Scholes dont la volatilité est la borne inférieure du modèle UVM. Ceci est similaire à un résultat de Cvitanić, Pham et Touzi dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique [CPT99].

6.6 Contrôle optimal de systèmes avec retard

Participants : I. Elsanosi (Univ. d'Oslo), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Mots clés : retard, delay.

Nous étudions les systèmes décrits par l'équation stochastique différentielle avec retard suivante :

$$dX(t) = b(t, X(t), X(t-\delta), Y(t))dt + \sigma(t, X(t), X(t-\delta), Y(t))dW(t) - d\gamma(t)$$

avec

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t,s)ds,$$

et les valeurs initiales

$$X(s) = \xi(s), \quad -\delta \leq s \leq 0$$

où b et σ sont des fonctions données, $\delta > 0$, et W est un processus de Wiener. Le processus de contrôle $\gamma(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adapté, croissant, et continu à droite. Il représente des flux de dividendes

[WV89] W.H. Fleming, D. Vermes, « Convex duality approach to the optimal control of diffusions », *SIAM Journal of Control and Optimization 27*, 1989.

[CPT99] J. Cvitanić, H. Pham, N. Touzi, «Super-replication in stochastic volatility models under portfolio constraints», *J. Appl. Probab. 36*, 2, 1999, p. 523–545.

à optimiser ou bien peut modéliser des stratégies de «harvesting» («pêche») pour les systèmes biologiques. Soit

$$T = \inf\{t \geq 0\ ;\ h(s+t)X(t), Y(t)) \leq 0\}$$

où h est une fonction donnée. Le critère à optimiser est le suivant:

$$J^{\gamma}(s,\xi) = E^{s,\xi,\gamma}\left[\int_0^T u(s+t), X(t), Y(t))dt + \int_0^T \pi(s+t)d\gamma(t)\right]$$

où u et π sont des fonctions d'utilité.

Ce problème peut se formuler comme un problème de contrôle stochastique singulier et conduit à des inéquations variationnelles en dimension infinie à cause du retard. Nous avons obtenu des résultats explicites dans quelques cas particuliers (cf [15]) et prouvé un théorème de vérification pour ces inéquations variationnelles.

D'autre part, nous avons aussi établi un principe du maximum pour des problèmes de contrôle avec retard, dans le cas de contrôle régulier et singulier. Ces résultats sont appliqués à la résolution de problèmes de consommation optimale et de gestion de portefeuilles [28].

6.7 Contrôle stochastique ergodique - Application en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Mots clés : contrôle ergodique, contrôle stochastique singulier.

Participants : M. Akian (projet Metalau), A. Sulem, M. Taksar (Stony Brook University New York).

Nous avons achevé l'étude des inéquations variationnelles ergodiques associées à l'optimisation d'un taux moyen de profit.

Le modèle est celui décrit au paragraphe 4.1.3, mais sans consommation ($c(t) \equiv 0$) : soit un agent possédant un actif non risqué et n actifs risqués modélisés par des processus de diffusion log-normaux. On suppose que les transactions entre comptes entraînent des coûts proportionnels au montant de la transaction et sont modélisés par des contrôles singuliers. A chaque politique admissible $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, on associe les deux fonctionnelles de performance suivantes:

$$J^{\gamma}(\mathcal{L},\mathcal{M}) = \liminf_{T\to+\infty} T^{-1}(1-\gamma)^{-1}\log E\left[W(T)^{1-\gamma}\right], \quad \gamma \geq 0,\ \gamma \neq 1. \tag{5}$$

$$J^{1}(\mathcal{L},\mathcal{M}) = \liminf_{T\to+\infty} T^{-1}E\{\log W(T)\} \tag{6}$$

où $\gamma \geq 0$ représente le coefficient d'aversion au risque. Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés au critère J^1 uniquement, c'est à dire au cas $\gamma = 1$. L'objectif est de calculer

$$\sup_{\mathcal{L},\mathcal{M}} J^1(\mathcal{L},\mathcal{M}) =: \pi. \tag{7}$$

Ce problème se réduit à un problème de contrôle stochastique singulier avec critère ergodique. On obtient alors le taux moyen maximal π ainsi que la fonction potentiel correspondante comme solutions d'une inéquation variationnelle ergodique.

L'étude théorique de l'inéquation variationnelle a été menée à l'aide de la notion de solutions de viscosité. Sa résolution numérique a été effectuée à l'aide de l'algorithme FMGH basé sur l'algorithme de Howard et les multigrilles [Aki90]. Nous avons ainsi obtenu la stratégie optimale de transaction. Un article sur ces travaux (cf [13]) a été accepté pour publication dans *Mathematical Finance*.

6.8 Optimisation dynamique de portefeuilles avec coûts fixes et proportionnels: un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel

Participants : J.-Ph. Chancelier, B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Mots clés : inéquations quasi variationnelles, contrôle impulsionnel.

Nous étudions la politique optimale de consommation et d'investissement dans le cas où les transactions entre comptes entraînent non seulement des coûts proportionnels au montant de la transaction mais également un coût fixe $k > 0$ indépendant du montant de la transaction[OS99]. Dans ce cas les transactions sont modélisées par des contrôles impulsionnels et la consommation par un contrôle de type régulier. L'objectif est de maximiser une fonction d'utilité de la consommation sur un certain horizon. On formule ce problème comme un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel qui conduit à une inéquation quasi variationnelle non linéaire. On étudie l'existence et l'unicité de la solution de viscosité de cette équation. Une des difficultés vient ici de ce que la fonction valeur est discontinue sur le bord du domaine et que l'opérateur d'intervention est non local. Pour la résolution de l'inéquation variationnelle [17], nous proposons une méthode itérative permettant de calculer la solution de l'IQV comme la limite croissante d'une suite de solutions d'inéquations variationnelles non linéaires.

Des notes ont également été rédigées portant sur une introduction au contrôle impulsionnel motivé par les applications en économie [26].

6.9 Gestion de portefeuille dans un marché gouverné par des processus de diffusion avec sauts

Mots clés : contrôle stochastique singulier, diffusions avec sauts, processus de diffusion réfléchis, solution de viscosité, inéquation variationelle, équations intégro-différentielles, gestion de portefeuille, coûts de transaction, principe du maximum.

Participants : N.C. Framstand (Univ. d'Oslo), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

On étudie la politique optimale d'investissement et de consommation d'un agent possédant

[Aki90] M. Akian, *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*, thèse de doctorat, Université Paris-IX Dauphine, Paris, 1990.

[OS99] B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio with both fixed and proportional transaction costs: A Combined Stochastic Control and Impulse Control Model », *Preprint series n° 19*, University of Oslo, Department of Mathematics, October 1999, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/pure_1999.html.

un actif non risqué et un actif risqué modélisé par un processus de diffusion avec saut (processus de Lévy géométrique) On suppose donc que le prix $P(t)$ de l'actif risqué est un processus càdlàg satisfaisant l'équation différentielle stochastique

$$dP(t) = \alpha P(t)dt + \sigma P(t)dW(t) + P(t^-)\int_{-1}^{\infty} \eta \tilde{N}(dt, d\eta); \quad P(0) = p > 0. \tag{8}$$

où $\alpha, r, \sigma > 0$, $W(t)$ est un processus de Wiener,

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - tq(A); \quad t \geq 0,\ A \in \mathcal{B}(-1, \infty)$$

est le compensateur d'une mesure aléatoire homogène de Poisson $N(t, A)$ sur $\mathbf{R}^+ \times \mathcal{B}(-1, \infty)$ d'intensité $E[N(t, A)] = tq(A)$, q est la mesure de Lévy associée à N, et $\mathcal{B}(-1, \infty)$ désigne la σ-algèbre de Borel sur $(-1, \infty)$.

On a montré qu'en l'absence de coûts de transaction, la solution est de la même forme que dans le cas d'une pure diffusion [FOS98]. En particulier, le portefeuille optimal consiste à conserver dans l'actif risqué une fraction constante de la richesse. Cette constante est plus petite que dans le cas d'une diffusion pure. En présence de coûts de transaction proportionnels, on montre que la solution a la même forme que dans le cas d'une diffusion pure traité par Davis and Norman [MN90] : il existe sous certaines hypothèses un cône de non transaction D où il est optimal de ne faire aucune transaction tant que la position de l'investisseur s'y trouve et d'acheter et de vendre selon des temps locaux sur la frontière de D. On établit l'inéquation variationnelle intégro-différentielle associée à ce problème que l'on étudie par la théorie des solutions de viscosité.

De plus, nous avons établi un principe du maximum pour les problèmes de contrôle de processus de diffusion avec sauts [45].

6.10 Gestion de portefeuille dans le cas d'un marché gouverné par un mouvement brownien fractionnaire

Mots clés : mouvement brownien fractionnaire.

Participants : Y. Hu (Univ. Kansas), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

On considère un marché de type Black et Scholes mais on remplace dans la dynamique du prix de l'actif risqué le mouvement brownien usuel par un mouvement brownien fractionnaire : Le prix $S(t)$ à l'instant $t \geq 0$ est ainsi donné par :

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t)\ ; \qquad S(0) = s > 0\,, \tag{9}$$

où $a > r > 0$ et $\sigma \neq 0$ sont des constantes.

[FOS98] N. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, «Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market», *in: proceedings du Workshop on Mathematical Finance*, Inria, Paris, 1998. Discussion Paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, 5/99, March 99.

[MN90] M.H.A. Davis, A. Norman, «Portfolio selection with transaction costs», *Mathematics of Operation Research 15*, 1990, p. 676–713.

Pour H constant, $0 < H < 1$, le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H est le processus gaussien $B_H(t) = B_H(t,\omega)$; $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ de moyenne $E[B_H(t)] = 0$ pour tout $t \geq 0$ et de covariance

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \tfrac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$$

pour tout $s, t \geq 0$. On suppose $B_H(0) = 0$.

Si $H = \frac{1}{2}$ alors $B_H(t)$ coincides avec le mouvement brownien standard $B(t)$.

Si $H > \frac{1}{2}$ alors $B_H(t)$ vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty \; .$$

où

$$\rho(n) = \mathrm{cov}(B_H(1), B_H(n+1) - B_H(n)).$$

$B_H(t)$ est *auto-similaire*, ce qui signifie que $B_H(\alpha t)$ a la même loi que $\alpha^H B_H(t)$, pour tout $\alpha > 0$. Cependant, $B_H(t)$ n'est ni une semi-martingale ni un processus de Markov (voir [HB99]). On se restreint ici au cas $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Dans le cas d'un mouvement brownien standard $B(t)$, l'approche naturelle pour le problème de gestion optimale de portefeuille est la programmation dynamique, qui conduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Dans le cas où $B(t)$ est remplacé par $B_H(t)$, il n'est plus possible d'utiliser cette méthode car le système n'est plus markovien. Nous utilisons la méthode des martingales, introduite par Cox et Huang [CC89,CC91]. (voir aussi [KLS87]), ce qui permet, bien que $B_H(t)$ ne soit pas une martingale (ni même une semimartingale) de trouver une solution explicite au problème.

De plus, nous avons établi dans [32] un principe du maximum stochastique pour le contrôle de systèmes gouvernés par des mouvements browniens fractionnaires. Ceci est appliqué à la résolution d'un problème de consommation optimale avec condition terminale [33].

6.11 Problèmes de temps d'arrêt optimal et options américaines

Participants : D. Lefèvre, A. Sulem, A. Shiryaev, B. Øksendal, D. Lamberton, S. Villeneuve, B. Lapeyre, B Jourdain, C. Martini.

Mots clés : option américaine, arrêt optimal.

Le calcul effectif du prix d'une option américaine pose de sérieux problèmes numériques, particulièrement dans les modèles multidimensionnels. L'article [20] utilise le plongement de Skorohod pour établir des estimations d'erreur dans l'approximation d'un problème d'arrêt

[HB99] Y. Hu, B. Øksendal, « Fractional white noise calculus and applications to finance », *Preprint series*, University of Oslo, Department of Mathematics, October 1999, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/pure_1999.html`.

[CC89] J. Cox, C.-F. Huang, « Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process », *Journal of Economic Theory 49*, 1989, p. 33–83.

[CC91] J. Cox, C.-F. Huang, « A variational problem arising in financial economics », *J. Mathematical Economics*, 20, 1991, p. 465–487.

[KLS87] I. Karatzas, J. Lehoczky, S.E. Shreve, « Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon », *Siam J. Control and Optimization*, 25, 1987, p. 1157–1186.

optimal brownien à l'aide d'une marche aléatoire. L'analyse de la frontière d'exercice est souvent essentielle à la compréhension d'options américaines complexes. L'article [35] donne un équivalent du prix critique au voisinage de l'échéance pour une option américaine sur une action versant des dividendes. Dans [46], nous étudions le problème des options américaines avec risque de défaut. B. Jourdain et C. Martini ont poursuivi leurs travail sur les prix d'options américaines déduits d'options européennes [18].

6.12 Calcul d'options américaines en dimension grande

Participants : B. Jourdain, P. Cohort, B. Lapeyre.

Mots clés : Monte-Carlo, option américaine.

Le problème des calculs d'options américaines en dimension grande n'est à ce jour pas résolu de façon satisfaisante. La piste qui semble la plus prometteuse est d'étendre les méthodes de Monte-Carlo au cas américains. Un groupe de travail sur ce thème a été organisé depuis septembre sur ce thème par Benjamin Jourdain. Il vient appuyer une activité logiciel qui est réalisée dans le cadre du consortium Premia. Un gros travail de comparaison numérique a déjà été réalisé par Pierre Cohort. Un travail de clarification théorique paraît nécessaire dans l'année qui vient.

6.13 Choix de portefeuille en observation partielle

Participants : D. Lefevre, A. Sulem, B. Øksendal, M.C. Kammerer-Quenez.

Mots clés : contrôle en observation incomplète.

Le problème de maximisation d'utilité de la richesse terminale par un investisseur a été largement étudié dans la littérature, par exemple par Cox et Huang(1989)[CC89], Cox et al(1985)[JJS85], Duffie et Zame(1989)[DZ89], He et Pearson(1991)[HP91], Karatzas et al(1987,1991) [KJS87] [KJSX91] ou Ocone et Karatzas(1991)[OK91]. Dans tous ces papiers, il est supposé que les agents économiques ont un accès continu à l'histoire d'un mouvement brownien multidimensionnel, qui

[CC89] J. Cox, C.-F. Huang, « Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process », *Journal of Economic Theory 49*, 1989, p. 33–83.

[JJS85] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross, « An intertemporal general equilibrium model of asset prices », *Econometrica 53*, 1985, p. 363–384.

[DZ89] D. Duffie, W. Zame, « The consumption-based capital asset pricing model », *Econometrica 57*, 1989, p. 1279–1297.

[HP91] H. He, N. Pearson, « Consumption and portfolio policies with incomplete markets and Short-Selling Constraints : the infinite dimensional case », *Journal of Economic Theory*, 54, 1991, p. 259–305.

[KJS87] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S. Shreve, « Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon », *Siam J. Cont. Optim. 25*, 1987, p. 1557–1586.

[KJSX91] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve, G. Xu, «Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market », *Siam J. Cont. Optim. 29*, 1991, p. 702–730.

[OK91] D. Ocone, I. Karatzas, « A generalized representation formula with application to optimal portfolios », *Stochastics and Stochastic Reports 34*, 1991, p. 187–220.

génère toute l'incertitude dans le marché et dirige le prix des actifs risqués. C'est le cas de «l'observation complète». Il semble cependant plus réaliste de supposer que les investisseurs n'ont qu'une information partielle puisque si les prix et les taux d'intérêts sont des données publiées et disponibles pour les acteurs des marchés, le processus de drift ainsi que les trajectoires du mouvement brownien apparaissant dans l'équation différentielle stochastique des prix ne sont, par contre, certainement pas directement observables. Le fait que les investisseurs n'ont alors qu'une information partielle est modélisée en requerrant que les stratégies de trading doivent être adaptées à la filtration engendrée par les prix des titres. Cette situation est appelée le cas de «l'observation partielle». Le problème de l'optimisation de portefeuille en observation partielle a été étudié ces dernières années par Browne et Whitt(1996)[BW96], Karatzas et Xue(1991)[KX91], Kuwana(1995)[Kuw95], Lakner(1995,1998)[Lak95b],[Lak95a], Karatzas et Zhao(1998)[KZ98], Rishel(1999)[Ris] ou Zohar(2000)[Zoh], mais toujours dans le cadre d'un marché complet. Des travaux récents menés dans l'équipe [PM] considèrent alors le cas d'un marché incomplet, où le processus de prix des titres suit un modèle à volatilité stochastique. La fonction valeur ainsi que les stratégies optimales sont caractérisées en utilisant des techniques de filtrage, et en adaptant des méthodes de dualité utilisant les probabilités martingales. Un aperçu des méthodes de résolution apparaissant dans les papiers cités ci-dessus est disponible [44].

Par ailleurs, nous souhaitons également nous intéresser aux problèmes d'arrêt optimal en observation partielle en vue de l'évaluation des options américaines dans ce cadre. Ces problèmes font l'objet de la thèse de David Lefèvre débutée en janvier 2000.

6.14 Optimisation stochastique sous contraintes et application en réassurance

Participants : M. Mnif, H. Pham (Université Paris 7).

On étudie un problème général d'optimisation stochastique sous contraintes qui englobe

[BW96] S. Browne, W. Whitt, «Portfolio choice and the Bayesian Kelly criterion», *Adv. Appl. Probab. 28*, 1996, p. 1145–11176.

[KX91] I. Karatzas, X. Xue, «A note on utility maximization under partial observations», *Mathematical Finance 1*, 1991, p. 57–70.

[Kuw95] Y. Kuwana, «Certainty equivalence and logarithmic utilities in consumpion/investment problems», *Mathematical Finance 5*, 1995, p. 297–310.

[Lak95b] P. Lakner, « Utility maximization with partial information », *Stochastic Processes and their Applications 56*, 1995, p. 247–273.

[Lak95a] P. Lakner, «Optimal trading strategy for an investor : the case of partial information», *Stochastic Processes and their Applications 76*, 1995, p. 77–97.

[KZ98] I. Karatzas, X. Zhao, «Bayesian adaptative portfolio optimization», Preprint, Columbia University, 1998.

[Ris] R. Rishe, «Optimal portfolio management with partial observations and power utility function», Preprint, University of Kentucky.

[Zoh] G. Zohar, « Dynamic portfolio optimization in the case of partially observed drift process », Preprint, Columbia University.

[PM] H. Pham, M.C. Quenez, «Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models», *Annals of Applied Probability*, à paraître.

les modèles de réassurance, le modèle des grands investisseurs, les modèles financiers avec contraintes sur les portefeuilles et les modèles à revenu aléatoire (voir [Pha], [HP91]). La richesse est modélisée par une famille $\mathcal{X}$ de semi-martingales, nulle en 0, prévisiblement convexe, fermée pour la topologie des semi-martingales munie de la distance d'Emery.

Soit S^0 le prix de l'actif sans risque et

$$\mathcal{X}(x) \quad = \quad \left\{ S^0(x+\tilde{X}) \ : \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}} \right\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

On impose des contraintes sur le processus $X \in \mathcal{X}(x)$ du type $X_t \geq d_t, \ \ 0 \leq t \leq T$ où $T > 0$ fini. Sans perte de généralité, on étudie les contraintes du type $X_t \geq 0 \ \ 0 \leq t \leq T$. On pose

$$\mathcal{X}^+(x) \quad = \quad \left\{ S^0(x+\tilde{X}) \ : \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}} \ X_t \geq 0 \ \forall \ 0 \leq t \leq T \right\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

On considère une fonction d'utilité $U \ [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ mesurable, scs et concave. L'objectif est de calculer

$$J(x) \quad = \quad \sup_{X \in \mathcal{X}_+(x)} E[U(X_T)], \quad x \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Modèle de réassurance. On considère une compagnie de réassurance qui réassure une fraction $(1-\theta_t)$ contre les prochains sinistres. Le temps de réalisation des sinistres est modélisé par un processus de poisson N_t avec une intensité constante π. La taille des sinistres est constante et vaut $\delta \geq 0$. La prime par unité de temps que reçoit la compagnie est $\alpha \geq 0$. La prime que paye la compagnie pour la réassurance est $\beta \geq \alpha$. Le processus de richesse de la compagnie d'assurance est donné par

$$X_t^{x,\theta} \quad = \quad x + \int_0^t (\alpha - \beta(1-\theta_u))\, du - \int_0^t \theta_u \delta dN_u.$$

Modèle à revenu aléatoire. On considère, comme dans [NJ98], un modèle constitué de n actifs risqués modélisés par des processus d'Itô $S = (S^1, \ldots, S^n)'$:

$$dS_t \quad = \quad \mathrm{diag}(S_t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t).$$

où W est un mouvement brownien à n dimensions, $\mathcal{F}$ est la filtration du mouvement brownien W, μ est un vecteur de $\mathbf{R}^n \mathcal{F}$-adapté et σ est une matrice $n \times n$ F-adaptée telle que $\sigma_t \sigma_t'$ est définie positive pour tout $t \in [0,T]$. Le prix de l'actif sans risque est donné par:

$$S_t^0 \quad = \quad \exp\left(\int_0^t r_s ds \right),$$

[Pha] H. Pham, « Minimizing Shortfall Risk and Applications to Finance and Insurance Problems », `http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/pham/pham.html`.

[HP91] H. He, N. Pearson, « Consumption and portfolio policies with incomplete markets and Short-Selling Constraints : the infinite dimensional case », *Journal of Economic Theory*, 54, 1991, p. 259–305.

[NJ98] N. El Karoui, M. Jeanblanc, « Optimization of Consumption with Labor Income », *Finance and Stochastics 4*, 1998, p. 409–440.

où r est le processus du taux d'intérêt à valeur réelle, $\mathcal{F}$-adapté, borné uniformément en (t,ω). Le processus de richesse de l'investisseur, qui a une richesse initiale x, qui investit la quantité θ dans l'actif risqué et qui reçoit un revenu aléatoire au taux e_t par unité de temps, est défini par

$$X_t^{x,\theta} \quad = \quad S_t^0 \left(x + \int_0^t \theta_u . d\tilde{S}_u + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} e_u du \right).$$

On montre que le problème dynamique (10) est équivalent au problème statique

$$J(x) \quad = \quad \sup_{H \in \mathcal{C}_+(x)} E[U(H)], \quad x \in \mathbf{R}, \tag{11}$$

avec

$$\mathcal{C}_+(x) \quad = \quad \left\{ H \in L_+^0(\mathcal{F}_T) \ : H \leq X_T \ p.s. \ \mathrm{pour} X \in \mathcal{X}_+(x) \right\}.$$

On obtient la caractérisation duale de l'ensemble $\mathcal{C}_+(x)$ en utilisant la décomposition optionnelle de Föllmer Kramkov [FK97] :

$$H \in \mathcal{C}_+(x) \quad \text{ssi} \quad v(H) : = \sup_{Q \in \mathcal{P}^0, \tau \in \mathcal{T}} E^Q \left[\frac{H}{S_T^0} 1_{\tau = T} - \tilde{X}_\tau^0 - \tilde{A}_\tau^0(Q) \right] \ \leq \ x$$

où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[0,T]$ et $\mathcal{P}^0$ est un ensemble de mesures de probabilités équivalentes à P possédant certaines propriétés. On se ramène ainsi à un problème d'optimisation convexe avec une infinité de contraintes linéaires. Sous l' hypothèse (4.1) de [24], (qui est la même hypothèse que dans [BR00]), on prouve l'existence de la solution de (11).

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Premia : un pricer d'options

Participants : P. Cohort, A. Gille-Genest, B. Jourdain, B. Lapeyre, A. Sulem, E. Temam, A. Zanette.

Un consortium de banques est en place autour du pricer Premia. En contrepartie d'une participation financière, les banques participant au consortium disposent régulièrement des nouvelles versions du logiciel et du droit d'intégrer les routines dans leur chaîne de production.

Cette année, 2 nouvelles institutions ont rejoint le Consortium: BNP-Paribas et EDF. Actuellement, le consortium est donc composé de : Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web

http://cermics.enpc.fr/ premia

[FK97] H. Föllmer, D. Kramkov, « Optional Decomposition under Constraints », *Probability Theory and Related Fields 109*, 1997, p. 1–25.

[BR00] P. Bank, F. Riedel, « Optimal consumption choice under Uncertainty with Intertemporal Substitution », Preprint, 2000.

7.2 Couverture des options sur électricité

Participants : S. Njoh, D. Lamberton.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre UMLV– EDF.

7.3 Calibration par méthodes de Monte–Carlo

Participants : L. N'Guyen, B. Jourdain, B. Lapeyre.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre ENPC–CCF.

7.4 Évaluation d'options exotiques dans les modèles de taux

Participants : M Noubir, B. Lapeyre.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'un contrat entre le Cermics et le Crédit Lyonnais. avec le CCF.

7.5 Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change

Participant : X. Joseph.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre avec la Coface. Le but du travail consiste à étudier la couverture (stratégies, efficacité, risque toléré) de contrats d'assurance sur taux de change (typiquement des risques de change à l'exportation) conditionnés par un facteur exogène aux taux de change, à savoir le taux de conclusion (taux de réussite aux appels d'offre) et de modéliser une gestion dynamique des contrats ainsi couverts.

Les garanties de change usuelles de la Coface sont des ventes à terme avec intéressement, dont la mise en place définitive est soumise à une condition suspensive, qui consiste en la constatation de l'échec de l'assuré exportateur à l'appel d'offre. La délivrance de la garantie s'accompagne du versement d'une prime d'engagement, la levée de la condition suspensive d'une prime de conclusion, toutes deux versées à la Coface par l'assuré.

Il s'agit donc d'un instrument financier soumis à des aléas de type financier (taux de change et d'intérêt) et non financier (taux de conclusion).

Après avoir modélisé le risque de change et le risque de conclusion, le problème est de déterminer des stratégies dynamiques de gestion des risques. Ces stratégies doivent respecter les limites de risque de perte autorisées, prendre en compte les coûts de gestion et de réajustement de couverture et permettre d'optimiser les prix de contrats.

Nous avons étudié 2 types de couvertures : (i)la stratégie 0-100, c'est à dire que le réajustement des positions n'a lieu que si la variation du cours de l'actif se fait au delà du cours fixé garanti de plus ou moins un certain retard prédéfini. (ii) la stratégie optionnelle qui consiste à couvrir chaque garantie par des options de change (cf. [42]).

La Coface a décidé de compléter son dispositif de couverture des garanties par l'implémentation de la stratégie d'option validée par les résultats des calculs effectués.

7.6 Évaluation numérique d'options sur taux

Participants : B. Lapeyre, M. Noubir.

Contrat ENPC/Crédit Lyonnais sur l'évaluation d'options dans des modèles de marché (thèse de N. Mouaya, encadrement : B. Lapeyre).

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

- A. Sulem responsable de l'Action coopérative Mathfi sur les mathématiques financières. Adresse web : http://amadeus.inria.fr/ sulem/action.html.
- Participation de membres de Mathfi au GDR FIQUAM «Méthodes quantitatives en finance» du CNRS. Ce GDR fait partie du Programme Risques et Complexité des systèmes financiers du CNRS.

8.2 Actions européennes

Un programme d'action intégrée Aurora franco - norvégien est en place depuis le début de l'année 1999 avec l'Université d'Oslo (responsable français : A. Sulem, responsable norvégien : Professeur B. Øksendal), prolongé jusqu'en Mai 2000.

8.3 Relations internationales

Création et responsabilité du projet «Mathématiques financières» de l'Institut franco-russe Liapunov. Responsable français: A Sulem, responsable russe: A. Shiryaev (prolongé jusqu'en juin 2001).
Site Web: urlhttp://www-direction.inria.fr/international/liapunov.html

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- B. Jourdain : organisation à l'ENPC d'un groupe de travail sur les méthodes de Monte-Carlo pour le pricing des options américaines en dimension grande.
- E. Gobet, B. Jourdain, B. Lapeyre, E. Temam : cours de formation continue au Collège de l'École Polytechnique: «Méthodes de Monte-Carlo en finance», juin 2000.
- B. Lapeyre : Dans le cadre du congrès «Monte-Carlo 2000», organisation d'une session sur les «Applications financières des Méthodes de Monte-Carlo», juillet 2000.
- C. Martini : deux expertises pour l'Anvar Ile de France.

- A. Sulem et B. Lapeyre : organisation du mini-symposium: Mathématiques pour la Finance dans le cadre du Canum 2000 (32e Congrès national d'analyse numérique), juin 2000 Port d'Albret (Landes).

- A. Sulem et E. Rofman : organisation de la conférence «Optimal Control and Partial Differential Equations», en l'honneur du professeur Alain Bensoussan, Ecole Normale Supérieure, Paris, décembre 2000.

9.2 Enseignement universitaire

- B. Jourdain, C. Martini :
  - Cours de 2ème année à l'École des Ponts et Chaussées (15h) : «Méthodes Mathématiques pour la Finance».

- D. Lamberton :
  - Cours de DEA «Calcul stochastique et applications», université de Marne-la-Vallée.
  - Cours de DEA «Développements récents en finance mathématique», université de Marne-la-Vallée. Six heures sur la modélisation des taux d'intérêt.

- B. Lapeyre, J.F. Delmas :
  - Cours de Processus Aléatoires de l'ENPC

- B. Lapeyre
  - Travaux Dirigés du cours de Probabilités, 1ère année, Ecole Polytechnique.
  - Travaux Dirigés du cours «Diffusion et Finance», Majeure de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique.
  - Enseignement d'approfondissement en «Finance», Majeure de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique.
  - Méthodes de Monte-Carlo et Applications en Finance, cours du DEA Analyse et Système Aléatoires de l'Université de Marne La Vallée.

- B. Lapeyre, A. Sulem
  - Cours de DEA de probabilités, option Finance à l'Université Paris 6 : «Méthodes numériques en finances».

- D. Lefèvre
  - Chargé de TD en probabilités (43,5H) pour le cours de Shiqi Song, DEUG Sciences-Economiques Gestion 2ème année, 1er semestre 1999-2000, Université d'Evry.
  - Chargé de TD en probabilités (30H) pour le cours de Shiqi Song, DEUG SDM 2ème année, 2ème semestre 1999-2000, Université d'Evry.

- C. Martini
  - Cours de DEA (12h) à l'Université Paris 1 Sorbonne: «Contrôle stochastique et applications».
  - Cours de DEA (3h) à l'Université Paris VI: «Introduction aux Méthodes d'Arbres en Mathématiques Financières».

- M. Mnif
  - Cours : TD de microéconomie, niveau maîtrise, 30 heures, Université Paris7.
- C. Patry
  - 48 heures de TD de statistiques et probabilités en 1ère année de Deug Gestion et Économie Appliquée (GEA) à Dauphine.
- A. Sulem - Cours de DEA, Université Paris 9 Dauphine, DEA Mase, 18 heures de cours. *Titre*: «Méthodes numériques en gestion de portefeuilles».
  - Cours de DEA, Université Paris 1, DEA MME, 21 h. de cours, «Méthodes numériques en Finance».
  - ESSI (option Imafa «Informatique et mathématiques appliquées à la finance et à l'assurance». Sophia-Antipolis).
  «Bases du contrôle stochastique et applications en finance» (10 heures de cours).

9.3 Encadrement de stages

- B. Jourdain

  - Youssef Itrib «Méthode binômiale de Rogers et Stapelton pour le pricing des options barrière», stage Institut Galilée, Université Paris 13 (février à juin).

  - Jérôme Hugueny «Méthode LUBA de Broadie et Detemple pour le Put Américain», stage scientifique ENPC (avril à juin).

  - Sophie Deborggraeve, «Méthode semi-analytique de Zhang pour les options asiatiques», PFE Institut Galilée, Université Paris 13 (octobre à décembre).

- D. Lamberton

  - Stage de DEA «Couverture d'options avec forte probabilité», Frédéric Husson.

- B. Lapeyre

  - Bernard Bergeron (ENS Ulm), «Application du calcul stochastique à la finance».

  - Fabrice Brassard (ENPC),

  - Julien Ferrière (ENS Lyon), «Application du calcul stochastique à la finance».

  - Grégory Miermont (ENS Ulm), «Vitesse de convergence pour le maximum discrétisé du mouvement brownien».

  - Maëlle Nodet (ENS Lyon), «Application du calcul stochastique à la finance».

- C. Martini

  - Delphine Camilleri, stagiaire ENSTA 2ème année: étude numérique d'un algorithme de type chaîne de Markov pour le modèle UVM.

- A. Sulem

  - Anne Eyraud (stage ENS Lyon) «Application du calcul stochastique à la finance»

- Razina Abdoul «Calcul du prix des options européennes et américaines dans le modèle de Black-Scholes en dimension 2 par la méthode multigrille» stage ingénieur, Institut Galilée, Université Paris XIII.

9.4 Encadrement de thèses

– D. Lamberton

- «Couverture d'options sur le marché de l'électricité», Samuel Njoh (convention Cifre avec EDF).

– B. Lapeyre

- Frédéric Ksas, à l'ENPC : «Techniques de suites à discrépance faible appliquées au calcul d'options», (co-encadrement avec Monique Piquet - Université d'Evry).

- Mouaya Noubir, à l'ENPC : «Calcul de prix d'option exotiques dans les modèles de marché».

- Emmanuel Teman, à l'Université de Paris 6 : «Méthodes approchées pour l'évaluation et la couverture d'options».

– C. Martini

- Co-encadrement de Simone Deparis (EPFL, avec Robert Dalang),

- Co-encadrement de Matthieu Leblanc (Université Paris VII, avec Laure Elie),

– C. Martini et A. Sulem

Co-Direction de la thèse de Christophe Patry (débutée en octobre 1997) sur les «Techniques de couverture approchée des options européennes».

– A. Sulem

- Direction de la thèse de David Lefèvre sur les problèmes de gestion de portefeuille en observation incomplète.

- Co-Direction de la thèse de Mohamed Mnif (avec Huyen Pham , Université paris 7) sur des problèmes de contrôle stochastique avec contraintes et application en assurance.

- Direction de la thèse de Xavier Joseph (débutée en octobre 97) sur la «Couverture en risque des contrats d'assurance sur taux de change».

9.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations

– B. Jourdain

- «Fonction minimale du semi-groupe de Black-Scholes et arrêt optimal», groupe de travail Analyse et Probabilités, université d'Evry.

- «Approximation du put américain par des prix européens», 32ème congrès d'analyse numérique.

- «Yet Another Approximation of the American Put», First World Congress of the Bachelier Finance Society.

– D. Lamberton

- «Critical price and dividends». Congrès Monte-Carlo 2000, Monte-Carlo juin 2000.

- «Approximation récursive de la mesure invariante d'une diffusion», Journées du groupe MAS, SMAI, Rennes, septembre 2000.

– B. - Université de Rome II, septembre 2000, 2 conférences sur les méthodes numériques en finance.

- Présentation du Consortium Premia, dans «Conférence sur les Mathématiques dans l'Industrie et les Services», École Polytechnique, Novembre 2000.

– D. Lefèvre

- Conférencier invité aux «Kolmogorovs days» (colloque en mathématiques financières), Institut Steklov, Moscou, Russie, 26-29 Avril 2000. Intitulé de l'exposé : «A survey of some utility maximization problems with partial information».

– C. Martini

- «Une nouvelle approximation pour le Put Américain», groupe de travail Méthodes stochastiques en finance, Université de Marne-La-Vallée, Janvier 2000.

- Conférence invitée «American prices embedded in european prices», 3^{rd} World Congress in Non-linear Analysis, Catane (Sicile), Juillet 2000.

- Conférence invitée «American prices embedded in european prices», Colloquiun on Numerical methods in Finance, Université Paris Dauphine, Décembre 2000.

- «Plongement d'options américaines dans des options européennes, application au Put», Université François Rabelais de Tours, Octobre 2000.

- Conférence invitée «L'équation d'HJB totalement non-linéaire la plus simple», Journées HJB 2000, IHP, Octobre 2000.

- «Sur une équation d'HJB totalement non-linéaire», Université de Picardie Jules Verne, Octobre 2000.

- Conférence invitée « The simplest fully non-linear HJB equation», Swiss Probability Seminar, Berne (Suisse), Novembre 2000.

- «Arrêt optimal et équations d'HJB dégénérées», Université d'Evry, Décembre 2000.

- Séminaire du CCF : «Nouveaux résultats sur le modèle UVM».

- Groupe de travail MASS de l'Université de Nice Sophia-Antipolis : «Sur-stratégies et balayage en temps discret».

– Ch. Patry

- «Couverture optimale dans le modèle de Black-Scholes pour un nombre de transactions donné» Groupe de travail en probabilités, Université du Mans Mars 2000.

- «Variance optimal hedging in the Black-Scholes model for a given number of transactions» The first World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris Juin 2000.

– A. Sulem

- Présentation d'une communication au Colloquium on Mathematical Finance, Centenary of «Théorie de la spéculation» Bachelier, Besancon, Mars 2000, titre : Optimal streams of dividends in a stochastic market with delay.

- Conférence invitée au colloque de Mathématiques à l'Université Dauphine, Février 2000, Titre : IQV en Finance.

- Conférence invitée aux Kolmogorov's days , Steklov Mathematical Institute, Moscou, Avril 2000, titre: Portfolio Optimisation in a jump diffusion market with transaction costs.

- Conférence invitée au First AMS-Scandinavian International Mathematics Meeting Odense, Danmark, Juin, 2000, titre : Numerical methods for Hamilton-Jacobi-Bellman equations arising in portfolio dynamic optimisation.

- Conférence invitée au «Monte Carlo 2000, International Conference on Monte Carlo and probabilistic methods for Partial Differential Equations», Juillet 2000, Monte Carlo, titre: Numerical approximation of combined stochastic and impulse control problems with application to portfolio optimisation with fixed and proportional transaction costs.

- 4 Conférences invitées dans le cadre de l'École de Finance et Mathématiques , INSEA, Rabat, Septembre 2000.

- Conférence invitée à la conférence sur «Processus optimaux, Phénomènes de Propagation et Équations de Hamilton Jacobi», Institut Henri Poincaré, Paris, Octobre 2000, titre: Résolution d'inéquations quasi variationnelles associées à des problèmes combinés de contrôle stochastique et impulsionnel.

- Conférence invitée au workshop sur les «Processus de Lévy et Modèles de Volatilité Stochastique», CMAP, École Polytechnique, Avril 2000, titre : Optimal Consumption and Portfolio Optimization in a Jump-diffusion market with transaction costs.

- Conférence invitée au workshop «Modélisation numérique en Finance», Université Paris–Dauphine , Décembre 2000, titre: Numerical methods for portfolio optimisation with transaction costs.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] M. Akian, J.L. Menaldi, A. Sulem, «On an Investment-Consumption model with transaction costs», *SIAM J. Control and Optim. 34*, 1, Janvier 1996, p. 329–364.

[2] P. Jaillet, D. Lamberton, B. Lapeyre, «Variationnal inequalities and the pricing of American options», *in : Acta Applicandae Mathematicae*, 1990.

[3] D. Lamberton, B. Lapeyre, «Hedging index options with few assets», *Mathematical Finance*, 1992.

[4] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Une introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, édition Collection Mathématiques et Applications, Ellipses, 1992, traduction anglaise: *An introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman and Hall, 1996.

[5] D. Lamberton, «Error Estimates for the Binomial Approximation of American Put Options», *Annals of Applied Probability 8*, 1, 1998, p. 206–233.

[6] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Introduction aux méthodes de Monte-Carlo*, édition Collection Mathématiques et Applications, Springer Verlag, 1997.

[7] C. Martini, « Polynômes harmoniques sur l'espace du bruit blanc », *Potential Analysis 9*, 4, décembre 1998, p. 351–382.

[8] C. Martini, «Propagation of convexity by markovian and martingalian semigroups», *Potential Analysis 10*, 2, 1999.

[9] H. Pham, M.C. Quenez, «Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models», *Annals of Applied Probability*, à paraître.

[10] A. Sulem, A. Shiryaev, « Mathématiques financières », *in : Actes Journées Mathématiques financières*, Inria Rocquencourt, Paris, mai 1998.

Livres et monographies

[11] J.L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (éditeurs), *Optimal Control and PDE*, IOS Press, Amsterdam, 2000.

[12] B. Lapeyre, A. Sulem, D. Talay, *Understanding Numerical Analysis for Option Pricing*, Cambridge University Press, à paraître.

Articles et chapitres de livre

[13] M. Akian, A. Sulem, M. Taksar, «Dynamic optimisation of a long term growth rate for a mixed portfolio with transaction costs - The logarithmic utility case», *Mathematical Finance*, à paraître.

[14] A. Bar-Ilan, A. Sulem, A. Zanello, « Time to build and Capacity choice », *Journal of Economic Dynamics and Control*, à paraître.

[15] I. Elsanosi, B. Øksendal, A. Sulem, « Some Solvable Stochastic control Problems with Delay », *Stochastics and Stochastics Reports*, à paraître, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/pure_2000.html`.

[16] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Stochastic Volatility as Hidden Markov models and Statistical Applications», *Bernoulli*, à paraître.

[17] J-Ph. Chancelier, B. Øksendal, A. Sulem, «Combined stochastic control and optimal stopping, and application to numerical approximation of combined stochastic and impulse control», *in : Mathematical Finance*, A. Shiryaev (éditeur), Steklov Institute, Moscou, 2000.

[18] B. Jourdain, C. Martini, «American prices embedded in european prices», *Annales de l'IHP, analyse non linéaire*, à paraître.

[19] B. JOURDAIN, C. MARTINI, « Yet Another Approximation for the American Put », *Annals of applied probability*.

[20] D. LAMBERTON, L.C.G. ROGERS, « Optimal stopping and embedding », *Journal of Applied Probability*, à paraître.

[21] B. LAPEYRE, C. MARTINI, « The Premia project », *ERCIM news*, 2000.

[22] B. LAPEYRE, E. TEMAM, «Competitive Monte-Carlo Methods for the Pricing of Asian Options», *Journal of Computational Finance*, 2000, à paraître.

[23] C. MARTINI, «On the marginal laws of one-dimensional stochastic integrals with uniformly elliptic integrand», *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques 36*, 1, Janvier 2000, p. 35–43.

[24] M. MNIF, H. PHAM, « Stochastic Optimization Under constraints », *Stochastic Processes and their applications*, à paraître.

[25] N. C. FRAMSTAD, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market with Proportional Transaction Costs », *Journal of Mathematical Economics*, à paraître, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/pure_2000.html.

[26] B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Introduction to Impulse Control Theory and Applications to Economics », *in : lecture notes*, October 2000.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[27] B. ØKSENDAL, D. LEFÈVRE, A. SULEM, « An introduction to optimal consumption with partial observation», *in : Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, October 2000, University of Konstanz, Germany*, Birkhauser, Basel, Suisse. à paraître.

[28] B. ØKSENDAL, A. SULEM, « A maximum principle for optimal control of stochastic systems with delay, with applications to finance», *in : Optimal Control and PDE*, J. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (éditeurs), IOS Press, Amsterdam, 2000.

Rapports de recherche et publications internes

[29] H. BENAMAR, C. MARTINI, C. PATRY, F. TRABELSI, « Discrete Superstrategies », *Rapport de Recherche n° 4066*, Inria-Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, Novembre 2000, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4066.html.

[30] E.TEMAM, « Rate of convergence of the discrete time hedging stategy in a complete multidimensional model », *Prépublication cermics*, ENPC, Marne la Vallée, Mars 2000, http://cermics.enpc.fr/reports/CERMICS-2000-190.ps.gz.

[31] V. GENON-CATALOT, T. JEANTHEAU, C. LAREDO, « Consistency of Conditional Likelihood Estimators for Stochastic Volatility Models», *Prépublication Equipe de mathématiques appliquées n° 03/2000*, Université Marne la Vallée, Marne la Vallée, Mars 2000.

[32] Y. HU, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Optimal consumption and portfolio in a Black & Scholes market driven by fractional Brownian motion », *Preprint series n° 23*, University of Oslo, Department of Mathematics, October 2000, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/pure_2000.html.

[33] Y. Hu, B. Øksendal, A. Sulem, «A stochastic maximum principle for processes driven by fractional Brownian motion», *Preprint series n° 24*, University of Oslo, Department of Mathematics, October 2000, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/pure_2000.html.

[34] B. Jourdain, C. Martini, « Yet Another Approximation of the American Put », *Rapport de Recherche n° 3851*, Inria-Rocquencourt, Le Chesnay cedex, Janvier 2000, preprint Cermics 2000-188, soumis à Annals of Applied Probability, http://www.inria.fr/rrrt/rr-3851.html.

[35] D. Lamberton, S. Villeneuve, « Critical stock price near maturity for an American option on a dividend-paying stock », *Prépublication n° 12/00*, équipe d'analyse et de mathématiques appliquées, Université de Marne-la-Vallée, septembre 2000.

[36] C. Martini, «American option prices as unique viscosity solution to degenerate HJB equations», *Rapport de Recherche n° 3934*, Inria-Rocquencourt, Domaine de Voluceau - BP 105 - 78153 Le Chesnay cedex, Avril 2000, soumis à Siam Journal on Control and Optimization, http://www.inria.fr/rrrt/rr-3934.html.

[37] C. Martini, « Cheapest superstrategies without the optional decomposition », *Rapport de Recherche n° 3931*, Inria, Domaine de Voluceau - BP 105 - 78153 Le Chesnay cedex, Avril 2000, à paraître dans le volume Mathematical finance du Steklov Institute (Moscou), http://www.inria.fr/rrrt/rr-3931.html.

[38] C. Martini, «Discontinuous payoffs in the Uncertainty Volatility Model», *Rapport de Recherche n° 4065*, Inria-Rocquencourt, Domaine de Voluceau - BP 105 - 78153 Le Chesnay cedex, Novembre 2000, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4065.html.

Divers

[39] L. Denis, S. Deparis, C. Martini, «Risque modèle pour les produits dérivés», en préparation.

[40] S. Deparis, C. Martini, «Superstrategies and Balayage in discrete time», en préparation.

[41] A. Gloter, *Estimation des Paramètres d'une Diffusion Cachée*, Mémoire, Université Marne la Vallée, 2000.

[42] X. Joseph, «Introduction à la couverture des garanties de change Coface», manuscript Coface.

[43] M. Leblanc, C. Martini, « Unbounded volatility in the Uncertainty Volatility Model», sous presse Inria.

[44] D. Lefèvre, « Utility maximization in the case of restricted information», Préprint Inria.

[45] N.C. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, « A sufficient maximum principle for control of jump diffusions», manuscrit.

[46] B. Øksendal, A. Shiryaev, A. Sulem, «Optimal stopping with default», manuscrit.