INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet OMEGA

Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les mathématiques financières

Nancy et Sophia Antipolis

THÈME 4B

Rapport d'Activité

2000

Table des matières

OMEGA est un projet bi–localisé entre les unités de recherches de Nancy et de Sophia Antipolis.

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Denis Talay [DR Inria]

Responsable permanent à Nancy

Bernard Roynette [Professeur, université Henri Poincaré]

Assistantes de projet

Sandrine Chevris [TR Inria (à Sophia Antipolis) jusqu'en mai 2000]

Dalila Mana [(à Sophia Antipolis) du 1er octobre au 28 février 2001]

Sabrina Verdenal [CDD Inria (à Nancy)]

Personnel Inria

Mireille Bossy [CR]

Madalina Deaconu [CR]

Personnel Université

Axel Grorud [MC, université de Provence (Marseille) et Ura-CNRS 225]

Pierre Vallois [Professeur, université Henri Poincaré (Nancy)]

Personnel ENSAE

Nathalie Pistre [Professeur à l'ENSAE]

Chercheurs doctorants

Christophe Ackermann [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy), depuis le 1er octobre]

Christophe Berthelot [boursier Cifre Bull et INRIA]

Sébastien Chaumont [boursier Dyade]

Ndeye Awa Diop [boursière CIES]

Marie–Pierre Etienne [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]

Claire Gauthier [boursière Cifre, CCF et Inria]

Jean–Sébastien Giet [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]

Samuel Herrmann [allocataire MESR, université Henri Poincaré (Nancy)]

Sylvain Maire [PRAG, université de Toulon et du Var]

Miguel Martinez [boursier Inria, depuis le 1er octobre]

Hadiza Moussa Saley [boursière du gouvernement nigérien, université Henri Poincaré (Nancy)]

Etienne Tanré [doctorant, bourse Inria - Région Lorraine, université Henri Poincaré (Nancy)]

Olivier Vaillant [ATER, université de Nice-Sophia Antipolis, jusqu'au 31 août]

Zheng Ziyu [boursier INRIA]

Chercheurs invités

Eric Peirano [à partir du 1er octobre, à Sophia Antipolis]

Anatoli Manita [du 15 octobre au 15 novembre et du 25 au 29 juin, à Nancy]

Stagiaires

Romain Barc [avril–août 2000]

Philippe Dahan [juillet–septembre 2000]

Alhassane Diallo [avril–août 2000]

Linda El Alaoui [juin–juillet 2000]

Miguel Martinez [juillet–septembre 2000]

Tomas Pellas [juillet–septembre 2000]

Collaborateurs extérieurs

Philippe Chassaing [MC, université Henri Poincaré (Nancy)]

Bernard De Meyer [Professeur, Esstin (Nancy)]

Francine Diener [Professeur, université de Nice–Sophia Antipolis]

Marc Diener [Professeur, université de Nice–Sophia Antipolis]

Jean-Claude Fort [Professeur, université Henri Poincaré (Nancy)]

Mihai Gradinaru [MC, université Henri Poincaré (Nancy)]

Sophie Wantz–Mézières [MC, IUT, université Nancy 2]

2 Présentation et objectifs généraux

Le projet OMEGA est bilocalisé entre les unités de Sophia Antipolis et de Nancy. Sa composante nancéenne est rattachée à l'Institut Élie Cartan.

Le principal thème de recherche d'OMEGA est l'analyse de méthodes numériques probabilistes, avec deux champs d'application privilégiés : la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires et la modélisation et la simulation en mathématiques financières. Les méthodes que nous étudions impliquent la simulation de processus stochastiques. L'analyse numérique de ces méthodes en est encore à ses débuts, alors qu'elles sont utilisées dans l'ingénierie de pointe de secteurs industriels divers (secteurs nucléaire, électrique, électrotechnique et bancaire par exemple) pour résoudre des problèmes complexes ou de grande dimension. OMEGA effectue des travaux mathématiques portant sur la représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles, la conception d'algorithmes numériques probabilistes et la vitesse de convergence de tels algorithmes. Par ailleurs, OMEGA étudie les performances sur architectures parallèles des algorithmes développés et analysés. En effet, si les méthodes de Monte–Carlo sont souvent très bien adaptées à la programmation parallèle, c'est moins évident pour les méthodes qui font intervenir la simulation de particules dépendantes ou la simulation de processus à temps de vie aléatoire.

La théorie des processus stochastiques, en particulier des problèmes d'approximation de processus, est l'outil mathématique essentiel et commun à tous les problèmes traités.

À propos de la résolution d'EDP non linéaires : En ce qui concerne la résolution probabiliste d'équations aux dérivées partielles non linéaires, OMEGA étudie les méthodes de Monte–Carlo, les méthodes particulaires stochastiques et les méthodes ergodiques. Actuellement, nous nous intéressons essentiellement à leurs applications aux équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier–Stokes, etc.), aux équations du transport neutronique et aux modèles aléatoires de la turbulence ; certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques liées aux conditions aux bords, aux dégénérescences des opérateurs différentiels sous–jacents, aux phénomènes de fausses convergences, etc. Nous effectuons des études d'erreur d'approximation non asymptotiques, afin de donner des bornes pour l'erreur correspondant à tout choix des paramètres numériques : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. En amont, l'étape–clef consiste à interpréter l'algorithme comme la discrétisation d'une représentation probabiliste de la solution de l'EDP : une part de l'activité d'OMEGA concerne donc l'élaboration de représentations probabilistes appropriées. En aval, les estimations théoriques de vitesse de convergence sont systématiquement confrontées aux simulations numériques.

À propos de la modélisation et de la simulation en mathématiques financières : En mathématiques financières et en actuariat, OMEGA s'intéresse plus particulièrement aux méthodes de Monte–Carlo et aux modèles de marché. En ce qui concerne les méthodes de Monte Carlo, OMEGA considère les problèmes d'approximation spécifiques aux modèles financiers, par exemple la simulation de fonctionnelles des historiques de cours et le calcul de dérivées d'espérances de ces fonctionnelles. En ce qui concerne les modèles de marché, les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement la sensibilité des stratégies de couverture des produits dérivés par rapport aux erreurs de modélisation et le calcul de stratégies de gestion du risque. OMEGA s'intéresse aussi à la définition de mesures de risque utilisables en pratique et cohérentes avec un modèle mathématique du marché. On étudie également des problèmes d'adossement et de risques de défaut de trésorerie. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données réelles.

3 Fondements scientifiques

3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Bernard Roynette, Denis Talay, Pierre Vallois.

De nombreux problèmes d'évolution linéaires ou non linéaires :

$$\frac{du}{dt} = A(t,u)u + f(t,u) \tag{1}$$

peuvent être interprétés à l'aide de processus de Markov bien choisis : on interprète u à l'aide du générateur infinitésimal du semigroupe de transition d'un processus de Markov (X_t) ou bien à l'aide de l'adjoint de ce générateur. Les motivations de cette démarche peuvent être d'ordre théorique et/ou numérique. En effet, en particulier lorsque $X = (X_t)$ est solution d'une équation différentielle stochastique, le calcul stochastique permet parfois d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité ou de régularité de la solution de (1) plus efficacement que les techniques d'analyse habituelles : le théorème de Girsanov, le calcul de Malliavin, la propagation du chaos sont des outils puissants qui n'ont pas d'analogues en analyse « déterministe » des équations aux dérivées partielles. D'autre part, dès que l'on peut écrire la solution de (1) sous la forme d'une espérance du type $u(t) = EF(X.)$ avec F fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de X entre 0 et t, on peut chercher à développer une méthode de Monte–Carlo pour approcher $u(t)$ même si on ne sait pas simuler des trajectoires exactes de X : il suffit de construire un processus proche (en loi) de X, en simuler un grand nombre de trajectoires entre 0 et t, évaluer la fonctionnelle F le long de chaque trajectoire simulée et enfin moyenner toutes les valeurs obtenues.

Donnons un exemple élémentaire. Considérons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \Delta u(t,x),\ \forall (t,x) \in]0,T] \times R^d \tag{2}$$

avec pour condition initiale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ une fonction mesurable bornée. Le paramètre ν est strictement positif, et est appelé « paramètre de viscosité » en mécanique des fluides ou « volatilité » en finance.

On vérifie facilement que la fonction

$$\forall (t,x) \in]0,T] \times R^d,\ u(t,x) := E u_0(x + \sqrt{2\nu} W_t)$$

où (W_t) est un mouvement brownien standard à valeurs dans R^d [1] satisfait (2) ainsi que $\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ en tout point de continuité de u_0. Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher $u(t,x)$ par :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(x + \sqrt{2\nu t}\, g_i(\omega))$$

où les $\{g_i(\omega)\}$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeurs dans R^d, centrées et de matrice de covariance Id_{R^d}. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre : on sait effectuer des tirages gaussiens indépendants à l'aide d'appels à un générateur de nombres pseudo–aléatoires uniformément répartis ; en outre il est naturellement parallélisable : le i^e processeur a la tâche d'engendrer $g_i(\omega)$. La vitesse de convergence est décrite par des théorèmes–limite tels que le théorème de limite centrale, la loi du logarithme itéré, l'inégalité de Berry–Esseen : la convergence est d'ordre $1/\sqrt{N}$, elle est donc lente. Toutefois, le coût de l'algorithme croît seulement linéairement avec la dimension d de l'espace puisqu'on simule Nd trajectoires d'un mouvement brownien unidimensionnel standard, et ce coût est indépendant du paramètre ν.

Typiquement, les méthodes de Monte–Carlo pour des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques peuvent permettre de traiter des problèmes extrêmes, en très grande dimension ou avec de très faibles viscosités, lorsqu'il serait difficile, ou démesurément coûteux, d'utiliser des algorithmes classiques.

Soit à présent le problème parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_j^i(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), \quad \forall (t,x) \in]0,T] \times R^d, \tag{3}$$

1. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indicées par le temps : $\{X_t(\omega), t \in R^+\}$; à ω fixé l'application $t \to X_t(\omega)$ est appelée « trajectoire ». Un exemple de processus est le mouvement brownien standard à valeurs dans R^d, processus à trajectoires presque sûrement continues défini de la manière suivante : $W_0 = 0$ presque sûrement ; pour tout $0 < s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $(t-s)Id_{R^d}$, indépendante de la famille $\{W_\theta, 0 \le \theta \le s\}$.

où b est une fonction à valeurs dans R^d et a une fonction à valeurs dans l'espace des matrices symétriques et définies positives. Sous certaines conditions, on sait que l'unique solution régulière vérifie

$$u(t,x) = Eu_0(X_T^{t,x}),$$

où $(X_\theta^{t,x})$ est le processus de Markov solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_\theta^{t,x} = x + \int_t^\theta b(s, X_s^{t,x})ds + \sum_{j=1}^r \int_t^\theta \sigma_j(s, X_s^{t,x})dW^j, \tag{4}$$

où les matrices $\sigma(t,x)$ sont des racines carrées des matrices $a(t,x)$. La discrétisation en temps de (4) conduit naturellement au processus de Markov à temps discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{X}_0^{t,x} & = & x, \\ \bar{X}_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^{t,x} & = & \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x} + b(p\frac{T-t}{n}, \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})\frac{T-t}{n} \\ & & \\ & & + \displaystyle\sum_{j=1}^r \sigma_j(p\frac{T-t}{n}, \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})(W_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^j - W_{p\frac{T-t}{n}}^j). \end{array}\right. \tag{5}$$

Il est facile de simuler des trajectoires indépendantes $(\bar{X}_\cdot^{t,x}(\omega_i))$ de ce processus puisque les variables aléatoires $W_{(p+1)(T-t)/n}^j - W_{p(T-t)/n}^j$ sont mutuellement indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance $(T-t)/n$. On peut donc numériquement approcher $u(t,x)$ par :

$$u(t,x) \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N u_0(\bar{X}_T^{t,x}(\omega_i)).$$

La vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre N de simulations et du nombre n de pas de temps.

Le procédé s'étend dans des directions variées : problèmes elliptiques, problèmes de transport (applications en neutronique), problèmes avec conditions frontière de Dirichlet ou de Neumann, problèmes intégro–différentiels, etc.

Au lieu de vouloir résoudre (3), on peut s'intéresser au problème adjoint :

$$\begin{array}{r} \displaystyle\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(t,x)p(t,x)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_j^i(t,x)p(t,x)), \\ \forall (t,x) \in]0,T] \times R^d, \end{array} \tag{6}$$

avec la condition : $p(t,x)dx$ converge faiblement vers une mesure de probabilité donnée lorsque t tend vers 0. Supposons (ce n'est pas une restriction) que cette mesure soit la masse de Dirac en x. Soit $(X_\cdot^{0,x}(\omega_i))$ des trajectoires indépendantes de la solution de (4) avec $t=0$. Sous de bonnes hypothèses, la mesure empirique :

$$\mu_N : = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{0,x}}(\omega_i)$$

converge faiblement vers $p(t,x)dx$. Cette remarque sous–tend une famille de méthodes particulaires stochastiques pour les équations aux dérivées partielles non linéaires de type *équation de McKean–Vlasov* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_t}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}\Delta U_t - \operatorname{div}\left(U_t \displaystyle\int_{R^d} b(x,y)U_t(dy)\right), \ (x,t) \in R^d \times]0,T], \\ U_{t=0} \ = \ U_0. \end{cases} \tag{7}$$

La fonction $b(\cdot,\cdot)$, à valeurs dans R^d, qui intervient dans la partie non linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*. L'équation ci–dessus est considérée au sens des distributions. La théorie probabiliste de la *propagation du chaos* montre que la solution U_t s'interprète à l'aide de la loi limite d'un système de particules interagissant entre elles. La dynamique des particules est décrite par le système différentiel stochastique de dimension $N \times d$:

$$\begin{cases} X_t^i = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b\left(X_s^i, X_s^j\right) ds + \sigma w_t^i, \ , \ i = 1, \ldots, N, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } U_0, \text{ indépendante de } X_0^j, \ i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

La *propagation du chaos* implique la convergence au sens des mesures, quand N tend vers l'infini, de la mesure empirique $1/N \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^i}$ vers U_t. En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction U_t. À partir de cette interprétation probabiliste, on développe un algorithme d'approximation de U_t fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$; la mesure initiale U_0 est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui fournit les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ci–dessus.

La complexité de l'analyse de la vitesse de convergence dépend essentiellement de la singularité éventuelle du noyau d'interaction $b(\cdot,\cdot)$. Pour la plupart des équations provenant de problèmes physiques (et en particulier pour les équations de Burgers ou de Navier–Stokes en dimension 2), le noyau d'interaction est singulier. La vitesse de convergence dépend du nombre N de particules et du pas de temps utilisé pour la discrétisation de (8).

Pour un aperçu de résultats sur les méthodes de Monte–Carlo et certaines méthodes particulaires stochastiques, on pourra consulter [8].

3.2 Analyse stochastique des algorithmes

Participant : Philippe Chassaing.

D'après Flajolet et Prodinger, le but de l'analyse des algorithmes est la compréhension de la complexité (coût de calcul) des algorithmes. L'évaluation de ce coût dans le pire des cas a suscité énormément de travaux, mais l'intérêt pour l'analyse en moyenne ou probabiliste va croissant. Le fondateur du domaine est Knuth, qui a consacré l'expression « analyse des algorithmes » dans les années soixante, et l'a illustré dans sa série monumentale d'ouvrages, « The Art of Computer Programming ». Ce domaine est très lié aux mathématiques discrètes, à l'analyse combinatoire, et à la théorie des probabilités.

D'après Sedgewick et Flajolet, l'analyse des algorithmes requiert un examen attentif de ces algorithmes qui conduit souvent à améliorer leur implémentation. Spécifiquement l'analyse en moyenne des algorithmes permet de mieux comparer plusieurs algorithmes remplissant la même tâche. Les exemples où l'on a démontré l'optimalité en moyenne d'un algorithme, parmi tous les algorithmes remplissant la même tâche, sont assez rares. Les exemples les plus classiques sont la recherche ou l'insertion d'une clé dans une liste rangée de longueur n, en $1,442\ldots\log(n)(1+o(1))$ comparaisons en moyenne (et $\log_2 n$ comparaisons aussi dans le pire des cas), et, plus délicat peut–être, la complexité du *sorting*: le problème de ranger dans l'ordre une liste désordonnée de n nombres, en effectuant un minimum de comparaisons 2 à 2. Ce dernier problème a été posé par H. Steinhaus en 1950, et résolu par Ford & Johnson en 1959 ($1,442\ldots n\log(n)(1+o(1))$ comparaisons en moyenne). Il est abondamment traité, souvent comme exemple introductif, dans la plupart des livres d'algorithmique (voir Aho, Hopcroft & Ullman, Cormen, Leiserson & Rivest, Motwani & Raghavan, Reingold, Nivergelt & Deo, Sedgewick & Flajolet).

Dans les problèmes d'optimalité en moyenne, la difficulté principale est souvent de trouver une borne inférieure pour le coût moyen de tous les algorithmes remplissant la même tâche. Les exceptions célèbres sont justement le *sorting* et l'insertion, évoqués plus haut : la borne inférieure pour le coût moyen est aussi la borne inférieure bien connue de la profondeur moyenne d'une feuille de l'arbre de décision, ce qui peut aussi être vu comme un argument simple de théorie de l'information. Malheureusement ce type d'argument semble hors sujet dans d'autres problèmes classiques, comme le problème de sélection : il s'agit de déterminer le k^{me} plus petit nombre d'une liste de n nombres en désordre, en faisant le minimum de comparaisons 2 à 2. Cunto & Munro ont fini par prouver en 1984 que le coût moyen optimal est de $n+k+o(n)$ ($k < n/2$) par des arguments ad hoc (pour un intéressant historique de ce problème, qui remonte à Lewis Carroll, et a été étudié par Steinhaus, Rivest, Tarjan, Milton Sobel, Picard, entre autres, voir Knuth [Knu81, tome III, p. 209-219])

Parmi les résultats d'optimalité en moyenne qu'on connait, citons le résultat d'Odlyzko sur la recherche du maximum d'une marche aléatoire, le résultat d'Alonso et Reingold et Schott sur le problème de la majorité. Parmi les problèmes encore ouverts, un des plus célèbres est celui de trouver le nombre moyen de comparaisons minimal nécessaire pour fusionner deux listes bien rangées de n et m nombres respectivement en une liste bien rangée de $n+m$ nombres (voir Knuth).

4 Domaines d'applications

4.1 Méthodes numériques probabilistes en ingéniérie

Mots clés : transport neutronique, mécanique des fluides, turbulence, polymère, mécanique aléatoire.

Les méthodes numériques probabilistes sont utilisées dans des domaines variés. Nous avons abordé les sujets suivants : les calculs de criticité pour des modèles de transport neutronique par méthodes de Monte–Carlo, la simulation de modèles stochastiques d'écoulements turbulents, les simulations moléculaires de chaînes de polymères, les méthodes de vortex aléatoire pour la résolution des équations de la Mécanique des Fluides. Pour beaucoup de ces questions, un cadre

[Knu81] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1981.

général de travail est la résolution numérique probabiliste d'équations aux dérivées partielles de type *équation de McKean–Vlasov* introduites au paragraphe 3.1.

4.2 Mathématiques financières

Mots clés : finance, évaluation d'options, gestion de bilan, risque financier.

Le projet s'intéresse à divers aspects des mathématiques financières, liés principalement à l'évaluation et à la couverture des options d'une part, à la gestion de portefeuilles ou de bilans d'autre part.

Un premier champ de recherches concerne l'étude de stratégies de gestion de portefeuilles d'options correspondant à des actifs sous–jacents dont les volatilités sont des processus stochastiques à valeurs dans des intervalles bornés. Le marché est incomplet, il n'existe donc pas de stratégie de couverture parfaite. Il semble particulièrement intéressant de pouvoir calculer la plus faible valeur initiale des stratégies conduisant à des portefeuilles dont la valeur à l'échéance majore le payoff d'une option donnée, et ceci pour tout état futur du marché ou bien pour tout état appartenant à un ensemble pertinent en pratique.

Un autre champ de recherches concerne le calcul numérique de prix d'options complexes par des méthodes de Monte–Carlo, la simulation de bilans correspondant à des stratégies de gestion ou de couverture mal spécifiées et la gestion de portefeuilles sous contraintes. Ces questions motivent, par exemple, des études spécifiques sur l'approximation en loi de fonctionnelles diverses (et irrégulières) de solutions d'équations différentielles stochastiques.

5 Résultats nouveaux

5.1 Méthodes numériques probabilistes pour les EDP

Mots clés : méthode de Monte Carlo, méthode particulaire, propagation du chaos.

5.1.1 Simulation de systèmes hamiltoniens stochastiques dissipatifs

Participant : Denis Talay.

Mots clés : systèmes hamiloniens, probabilités invariantes.

Nous avons étendu nos résultats précédents sur le schéma d'Euler implicite pour certains systèmes hamiltoniens dissipatifs et stochastiques à coefficients non globalement lipschitziens, et établi la vitesse de convergence optimale pour l'approximation de mesures invariantes à l'aide de la méthode de Monte Carlo ou de la simulation d'une seule trajectoire en temps long. Le travail de cette année a consisté à élargir la classe des systèmes hamiltoniens pour lesquels nous pouvons montrer la décroissance exponentielle en temps des moments.

5.1.2 Méthode probabiliste pour la résolution d'équations elliptiques et application aux problèmes EEG-MEG

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

Avec Emmanuel Gobet (CMAP), nous entamons une collaboration avec Robotvis sur le problème de la reconstruction de l'activité électrique du cerveau à partir d'électro–encéphalographie (EEG) et magnéto–encéphalographie (MEG).

Les projets Robotvis, Ondes et Estimes ont développé un algorithme d'identification des coefficients de conductivité et de permittivité du cerveau. À chaque étape de cet algorithme récursif, on est amené à comparer des mesures effectuées en quelques points de la surface du crâne et les valeurs en ces points de la solution d'un problème elliptique paramétré par les résultats obtenus à l'étape précédente. Les projets mentionnés ci–dessus ont développé des codes de calcul par éléments finis pour résoudre le problème elliptique en question.

Or, un tel problème elliptique admet une représentation probabiliste à l'aide des transitions et de la mesure de probabilité invariante d'un processus de diffusion réfléchi à la frontière. Nous avons donc proposé de calculer la solution approchée à l'aide d'une méthode de Monte Carlo et de discrétisation du processus réfléchi sous–jacent. Les problèmes de vitesse de convergence et de simulation de la réflexion des trajectoires du processus, sont tout à fait originaux. Des résultats optimaux ont été déjà obtenus pour des modèles à coefficients plus réguliers que le modèle MEG.

5.2 Approximation de l'espérance de fonctionnelles de la trajectoire d'une diffusion par le schéma d'Euler

Participants : Jean–Sébastien Giet, Etienne Tanré.

Pour certaines fonctionnelles $\phi : \mathcal{C}([0,\infty[, R^d) \mapsto R$, l'espérance de la variable aléatoire $\phi(X(s)_{s\geq 0})$, où $(X(s)_{s\geq 0})$ est une diffusion, représente une quantité intervenant dans de nombreux problèmes d'E.D.P. et de mathématiques financières. J-S. Giet et E. Tanré ont étudié des fonctionnelles où intervient l'intégrale de la trajectoire de la diffusion $\phi(X(s)_{s\geq 0})$ pendant un intervalle de temps borné. Ils ont considéré des expressions telles que :

$$E\left\{\int_0^T \exp\left(-\int_0^s r(u)\ du\right)\ g(s)\ ds\right\}$$

qui représente le prix de couverture d'une option asiatique de taux de paiement $(g(s))_{0\leq s\leq T}$. les diffusions $\phi(X(s)_{s\geq 0})$ considérées sont des solutions d'E.D.S., homogènes en temps, dont les coefficients σ et b sont très réguliers :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s))\ dB(s) + \int_0^t b(X(s))\ ds \qquad (t \geq 0). \tag{9}$$

On désigne par $(X(s))_{0\leq s\leq 1}$ sa solution et par $\left(\bar{X}^\delta(.)\right)_{0\leq s\leq 1}$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler de pas $\delta > 0$. Le but de cette étude est de préciser les vitesses de convergence de $E\left\{\Phi_k(\bar{X}^\delta(\frac{1}{k}),\ldots,\bar{X}^\delta(\frac{k}{k}))\right\}$ vers $E\left\{\Phi(X(.))\right\}$ en fonction des paramètres δ et

k, où $\Phi : \mathcal{C}([0,1]\ ;\ R^d) \longrightarrow R$ est une fonctionnelle donnée et $\Phi_k : \left(R^d\right)^k \longrightarrow R$ représente une approximation de Φ. Les cas où $\Phi(x(.)) = \left(\int_0^1 f(x(s))\ ds\right)^l$ et $\Phi(x(.)) = \exp\left(\int_0^1 f(x(s))\ ds\right)$ sont étudiés ; l est un entier positif et f une fonction mesurable et bornée.

5.3 Vitesse de convergence optimale de l'algorithme particulaire pour les équations de conservation scalaires

Participant : Mireille Bossy.

Ce travail porte sur l'analyse de la convergence d'un algorithme particulaire stochastique pour les équations de McKean–Vlasov et les équations de lois de conservation scalaires visqueuses. Nous montrons que la vitesse de convergence théorique optimale par rapport au pas de discrétisation en temps est en $\mathcal{O}(\Delta t)$ lorsqu'on utilise le schéma d'Euler pour simuler le déplacement des particules. La principale difficulté dans ce travail consiste à mettre en évidence et à itérer de pas en temps en pas de temps l'erreur au sens faible du schéma d'Euler pour des EDS non linéaires dans la décomposition de l'erreur de l'algorithme. Cette méthode s'appuie sur des résultats de régularité de l'EDP associée à la diffusion considérée. Pour cette raison, la vitesse de convergence optimale est obtenue pour des équations de conservation scalaires de conditions initiales de classe C^2.

Nous cherchons maintenant à étendre ce résultat au cas d'une condition initiale dont la dérivée est une mesure signée et bornée.

D'autre part, en collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa (Université de Barcelone), nous travaillons sur le développement de l'erreur du schéma d'Euler dans le cadre des méthodes particulaires stochastiques pour les équations de McKean–Vlasov, dans le but de valider l'utilisation d'accélérateur de convergence comme l'extrapolation de Romberg. Durant son stage, Linda El Alaoui a travaillé sur la mise en œuvre de cette méthode et la vérification numérique de l'accélération effective de la convergence par rapport au pas de temps.

5.3.1 Méthode particulaire pour la résolution de l'équation d'une loi de conservation scalaire visqueuse avec condition de Dirichlet

Participant : Mireille Bossy.

Nous nous intéressons aux méthodes particulaires pour la résolution d'EDP non linéaires avec condition aux bords. Par sa simplicité, l'équation de Burgers unidimensionnel est un cas test intéressant pour la mise au point de méthodes numériques en mécanique des fluides.

En collaboration avec Benjamin Jourdain (CERMICS), nous avons établi une interprétation probabiliste d'une loi de conservation scalaire visqueuse dans un intervalle avec condition au bord de type Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}A(v(t,x)) \ \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1), \\ \forall x \in [0,1], \ v(0,x) = v_0(x), \\ \forall t \geq 0, \ v(t,0) = 0 \text{ et } v(t,1) = 1, \end{cases} \tag{10}$$

le cas $A(x) = x^2/2$ correspondant à l'équation de Burgers.

Nous montrons que la solution de (10) est obtenue comme la fonction de répartition (ou une modification simple de cette fonction) de la loi d'un processus stochastique non linéaire réfléchi au bord de l'intervalle. Nous avons obtenu la propagation du chaos pour le système de particules réfléchies associé au processus non linéaire. Ce résultat justifie la convergence de l'algorithme particulaire stochastique qui consiste à simuler en temps (avec un pas uniforme Δt) un grand nombre N de particules réfléchies sur le bord. Nous montrons que la vitesse de convergence théorique d'une telle méthode est d'ordre $\mathcal{O}(1/\sqrt{N} + \Delta t)$ lorsque que le schéma de discrétisation en temps utilisé pour simuler les processus réfléchis est le schéma de Lépingle. Des essais numériques menés sur l'équation de Burgers confirment que le résultat théorique est optimal.

Nous nous intéressons maintenant aux méthodes particulaires pour la résolution de systèmes d'EDP non linéaires.

5.3.2 Simulation de solutions statistiques d'EDP non linéaires

Participants : Denis Talay, Olivier Vaillant.

Mots clés : solution statistique d'EDP, estimateur non paramétrique de régression, propagation du chaos.

Nous avons achevé notre travail sur les solutions statistiques d'EDP non linéaires de type McKean–Vlasov sur $[0,T] \times R$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(t,x,p_0)}{\partial t} &= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_b(t,x,p_0)p(t,x,p_0)\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2}\left(u_\sigma(t,x,p_0)\right)^2 p(t,x,p_0)\right), \\ p(0,x,p_0) &= p_0(x), \\ u_b(t,x,p_0) &= \displaystyle\int_R b(x,y)p(t,y,p_0)dy, \\ u_\sigma(t,x,p_0) &= \displaystyle\int_R \sigma(x,y)p(t,y,p_0)dy, \end{cases} \tag{11}$$

dont la condition initiale p_0 n'est pas connue explicitement.

Nous avons montré comment représenter, à l'aide d'un processus stochastique, les « moments» $M_k(t)$ d'une solution statistique de (11), définis par

$$(M_k(t),\phi)_{L^2(k)} = \int \left(\int_{R^k} \phi(x^1,\ldots,x^k)p(t,x^1,p_0)...p(t,x^k,p_0)dx^1\ldots dx^k\right)\mu(dp_0),$$

où

$$L^2(k) = \underbrace{L^2(R) \otimes \ldots \otimes L^2(R)}_{k \text{ fois}},$$

et $\phi \in L^2(k)$.

Nous avons ensuite défini des algorithmes particulaires stochastiques pour la simulation numérique de ces moments : pour toute fonction ψ continue et bornée sur R :

$$(M_1(t), \psi)_{L^2(R)} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi\left(X_t^{i,N}\right),$$

où $\left(X^{1,N}, \ldots, X^{N,N}\right)$ est le système de processus stochastiques en interaction défini par :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \left\{ \begin{array}{lcl} dX_t^{i,N} & = & \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N})dt + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \sigma(X_t^{i,N}, X_t^{j,N}) dW_t^i, \\ X_t^{i,N}\ |_{t=0} & = & X_0^i. \end{array} \right.$$

Les poids α_{ij} sont des fonctions positives de variables aléatoires $\theta^1, \ldots, \theta^N$ indépendantes et de même loi μ. Ils sont définis à partir d'estimateurs non paramétriques d'une fonction de régression. Nous avons étudié la vitesse de convergence de cet algorithme pour différentes familles de poids α_{ij}, puis validé les résultats théoriques obtenus par des essais numériques.

5.3.3 Simulation de fluides viscoélastiques

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

Mots clés : fluide viscoélastique, polymères.

M. Bossy et D. Talay étudient, en collaboration avec M. Picasso (École Polytechnique Fédérale de Lausanne), un modèle moléculaire stochastique pour les fluides viscoélastiques. Des chaînes de polymères baignant dans un fluide sont modélisées par des haltères (deux billes liées par un ressort). Dans le cas d'un écoulement dans un canal plan, la dynamique d'une haltère est décrite par un système EDS en dimension 2 couplé à une EDP de type Navier–Stokes décrivant la vitesse du fluide. Après avoir étudié un modèle simple autorisant l'haltère à s'allonger indéfiniment, nous considérons maintenant le cas où l'élongation maximale de la chaîne de polymères est finie, égale à b. Cela nous conduit à étudier un système couplé du type

$$\left\{ \begin{array}{l} dP_t(y) = -\dfrac{1}{2\lambda} \dfrac{P_t(y)}{1 - \dfrac{P_t^2(y) + Q_t^2(y)}{b}} dt + \dfrac{\partial V}{\partial y}(y,t) Q_t(y) dt + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} dw_t^1, \\ dQ_t(y) = -\dfrac{1}{2\lambda} \dfrac{Q_t(y)}{1 - \dfrac{P_t^2(y) + Q_t^2(y)}{b}} dt + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} dw_t^2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = K \dfrac{\partial}{\partial y} E\left(\dfrac{P_y(y) Q_t(y)}{b - (P_t^2(y) - Q_t^2(y))} \right). \end{array} \right. \tag{12}$$

La démonstration de l'existence d'une solution à ce système est en cours, les essais numériques sont menés à l'EPFL par M. Picasso.

Une collaboration a été entamée sur ce sujet avec plusieurs chercheurs du Cermics : Claude Le Bris, Benjamin Jourdain, Jean–François Delmas.

5.3.4 Calcul approché de quantiles de lois marginales de diffusions

Participants : Denis Talay, Ziyu Zheng.

Mots clés : quantiles, discrétisation de diffusions.

Avec pour motivation des applications en mathématiques financières (calculs de quantités de type Value at Risk) et en fiabilité de systèmes dynamiques stochastiques, nous étudions la vitesse de convergence du schéma d'Euler pour les équations différentielles stochastiques lorsqu'il s'agit d'approcher les quantiles de marginales à temps fixes de la solution exacte à l'aide de la méthode de Monte Carlo.

Grâce à un travail antérieur de Bally et Talay, D. Talay et Z. Zheng ont pu établir la vitesse de convergence par rapport au pas de discrétisation en temps. La constante d'erreur s'exprime à l'aide d'une minoration de la densité marginale à laquelle on s'intéresse. Une telle minoration intervient aussi dans l'estimation d'erreur par rapport au nombre de simulations. D. Talay et Z. Zheng ont établi de telles estimations des cas particuliers, par exemple issus de modélisations de risques de modèles en finance.

5.3.5 Livre en cours

Participant : Denis Talay.

D. Talay et L. Tubaro (université de Trento) poursuivent la rédaction de leur livre « Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations ».

5.4 Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles

Mots clés : processus stochastique, système de particules, équation aux dérivées partielles.

5.4.1 Équations aux dérivées partielles paraboliques à faible viscosité et à coefficients irréguliers

Participants : Mireille Bossy, Awa Diop, Denis Talay.

On s'intéresse au comportement quand la viscosité tend vers zéro de la solution faible de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u^\epsilon + \mathrm{div}(a(t,x)u^\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon^2\Delta u^\epsilon = 0 \text{ dans } (0,T)\times\mathbf{R}^n, \\ u^\epsilon(t,x) \rightharpoonup \delta_x, \text{ quand } t\to 0, \end{cases} \tag{13}$$

où la fonction a est supposée mesurable, bornée. Du point de vue probabiliste, cette EDP peut être interprétée comme une équation de Fokker Planck associée à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = a(t, X_t^\epsilon)dt + \epsilon dW_t, \\ X_0^\epsilon = x. \end{cases} \tag{14}$$

Nous montrons d'abord que le flot des marginales de la loi de $X_\cdot^\epsilon$, qui sont les lois des X_t^ϵ, t fixé, est l'unique solution faible de l'équation de Fokker Planck dans $\mathcal{C}([0,T]; \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) - w*) \cap L^1([0,T]; L^2(\mathbf{R}^n))$. Ceci nous permet de ramener le problème de la convergence de la solution de (13) à celle de la loi du processus, solution de (14). Ensuite, nous montrons que si le drift a satisfait l'inégalité :

$$(x-y)(a(t,x) - a(t,y)) < \alpha(t)|x-y|^2 \text{ pour presque tout } (t,x,y), \tag{15}$$

le processus $X_\cdot^\epsilon$, converge en loi vers l'unique solution *au sens de Filippov* de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} dX^0(t) = a(t, X^0(t))dt, \\ X^0(0) = x. \end{cases} \tag{16}$$

Enfin, en nous référant à l'article de F. Poupaud et M. Rascle [PR97], nous concluons que la solution faible de (13) converge vers la solution mesure de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + div(a(t,x)u) = 0 \text{ dans } (0,\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = \delta_x \text{ dans } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{17}$$

5.4.2 Interprétation probabiliste de l'équation de coagulation de Smoluchowski

Participants : Madalina Deaconu, Etienne Tanré.

M. Deaconu et E. Tanré ont fourni des interprétations probabilistes à certaines solutions d'équations de coagulation de Smoluchowski. Ces équations modélisent les phénomènes de coagulation en divers domaines, par exemple en chimie (coagulation des polymères), en physique (évolution des particules colloïdales) et en astrophysique (formation des étoiles et planètes). Ils ont reformulé une partie de leurs résultats antérieurs en terme de mesures à temps fixé, en utilisant une construction donnée par Norris [Nor99]. Cette nouvelle interprétation permet la généralisation des résultats précédents.

Une autre direction de recherche consiste à interpréter la solution de l'équation de Smoluchowski comme étant la densité d'un processus stochastique à sauts purs. C'est un travail en cours réalisé en collaboration avec N. Fournier (maître de conférences à l'université Henri Poincaré).

[PR97] F. Poupaud, M. Rascle, « Measure Solutions to the Multi-dimensional Transport Equation with Non-smooth Coefficients», *Comm. Partial Differential Equations*, 1-2, 1997, p. 337–358.

[Nor99] J. Norris, « Smoluchowski's coagulation equation: uniqueness, non-uniqueness and hydrodynamic limit for the stochastic coalescent», *Ann. Appl. Probab.*, 9, 1999, p. 78–109.

5.4.3 Comportement en temps long des processus non-linéaires

Participant : Madalina Deaconu.

L'étude des processus non-linéaires auto-stabilisants libres ou réfléchis a été effectuée à Nancy par M. Deaconu, B. Roynette, P. Vallois et S. Wantz-Mézières. Lors de ce travail, nous avons remarqué que les hypothèses imposées sur le terme de dérive fournissaient seulement une condition suffisante pour la validité de notre résultat de convergence.

M. Deaconu collabore avec A. Manita (professeur à l'université de Moscou) sur ce problème. Pendant la visite de A. Manita en novembre 1999 à Nancy, nous avons commencé l'étude des conditions optimales qui assurent la convergence du processus libre vers la mesure stationnaire.

Plus précisément nous considérons l'EDS particulaire :

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (\beta * u)(s, X_s)ds + B_t, \\ I\!P(X_t \in dx) = u(t,x)dx, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{18}$$

dans le cas particulier $\beta(x) = 4x^3 + 2\gamma x$. Le but est de montrer que, suivant les valeurs du paramètre γ, le processus X_t converge ou non vers la mesure stationnaire. Les techniques réposent sur des techniques introduites par Tamura dans une série d'articles.

Ce travail est en cours de réalisation.

5.4.4 Sur une E.D.S. à mémoire longue.

Participants : Samuel Herrmann, Bernard Roynette.

Nous avons cherché à généraliser certains résultats concernant les marches aléatoires renforcées aux solutions d'E.D.S. à mémoire longue du type :

$$X_t = B_t - \int_0^t \int_0^s \Phi(X_s - X_u)duds.$$

Nous montrons en particulier que si Φ est une fonction croissante impaire et continue qui vérifie de plus des hypothèses d'équivalence au voisinage de l'origine, alors les trajectoires de cette solution convergent presque sûrement. La preuve s'inspire de celle donnée par Cranston et Le Jan pour la solution de l'E.D.S. où Φ est la fonction signe, et repose surtout sur des arguments de comparaison.

5.4.5 Temps de séjour dans le disque unité de certains mouvements browniens réfléchis

Participants : Madalina Deaconu, Mihai Gradinaru.

En collaboration avec J-R. Roche (université de Nancy), M. Deaconu et M. Gradinaru ont étudié le temps de séjour dans le disque unité de certains mouvements browniens réfléchis.

On considère le mouvement brownien plan absorbé au bord du disque unité. Soit donc B_t le mouvement brownien plan issu d'un point z tel que $|z| < 1$. Quel point de départ z doit-on choisir pour réaliser le maximum de l'espérance du temps de séjour de B_t à l'intérieur du disque unité ? La réponse est presque évidente : l'espérance recherchée est dans ce cas égale à $\frac{1}{2}(1-|z|^2)$ et son maximum est atteint lorsque le mouvement brownien est issu de $z=0$.

Naturellement, on peut se poser la même question si on place à l'intérieur du disque unité, un obstacle qui réfléchit le mouvement brownien B_t. Supposons, par exemple, que B_t est réfléchi sur un petit cercle γ_0 de rayon R_0. On note $(x_t^0)_{t\geq 0}$ ce processus issu de z, $|z|<1$, situé à l'extérieur du disque de frontière γ_0 et tué au premier temps d'atteinte du cercle unité γ_1. Dans le cas où les cercles γ_0 et γ_1 sont concentriques, on peut montrer que l'espérance du temps de séjour est donnée par $\frac{1}{2}(1-|z|^2+R_0^2 \log|z|^2)$, et le maximum est situé sur le cercle γ_0.

Quelle sera alors l'espérance pour une position arbitraire de γ_0 ? On fournit la réponse à cette question dans ce travail.

On considère également le processus $(x_t^1)_{t\geq 0}$, mouvement brownien plan réfléchi sur le cercle unité γ_1 et tué au premier temps d'atteinte de γ_0.

Le résultat principal de cette étude donne la forme explicite de $E_z(\tau_j)$ pour $j=0$ ou $j=1$, où τ_j est le temps de séjour correspondant. Trouver le point z auquel le maximum est atteint n'est pas en général facile. C'est pourquoi dans notre travail nous avons calculé numériquement $E_z(\tau_j)$ pour évaluer le point $\zeta = \operatorname{Arg\,max} E_z(\tau_j)$. Bien sûr, il existe une situation pour laquelle ce calcul est facile, à savoir lorsque les cercles sont concentriques.

La démonstration du résultat principal (la forme explicite de $E_z(\tau_j)$) est analytique. Plus précisément, nous associons à notre problème une EDP et utilisons la méthode de la solution fondamentale. L'idée pour trouver la forme de cette solution apparaît naturellement lors de l'étude du mouvement brownien réfléchi linéaire. On commence par traiter le cas de cercles concentriques. Pour réduire le cas général au cas de cercles concentriques, on utilise une transformation fractionnaire linéaire convenable. Cette transformation géométrique laisse invariant le cercle unité et transforme un cercle centré à l'origine dans un cercle dont le centre est sur le segment $]0,1[$. Le passage au cas général se fera à l'aide de cette transformation et de la solution fondamentale.

Nous effectuons ensuite une étude numérique pour obtenir la localisation du maximum de cette espérance, dans les cas $j=0$ ou $j=1$.

Ce travail a été publié dans Probability and Mathematical Statistics ([12]).

5.4.6 Systèmes de particules aléatoires en temps long

Participants : Mireille Bossy, Anatoli Manita, Denis Talay.

Nous avons entamé l'étude en temps long de systèmes de particules stochastiques en interaction champ moyen et à valeurs dans une variété compacte, ainsi que de leurs approximations discrétisées (celles qui sont effectivement simulées sur ordinateur). Le but de cette étude est de construire des méthodes numériques probabilistes efficaces pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles non linéaires stationnaires.

De premiers exemples de laboratoire ont été analysés en profondeur, pour lesquels des phénomènes de bifurcation sont apparus : selon l'amplitude du noyau d'interaction, on peut observer la non existence, l'unicité ou la non unicité d'une loi de probabilité invariante pour la diffusion non linéaire au sens de McKean qui décrit le comportement limite du système de particules quand le nombre de particules tend vers l'infini.

5.4.7 Etude du score local concernant un problème de génomique

Participants : Marie-Pierre Etienne, Pierre Vallois.

Dans les méthodes d'alignement de deux séquences génomiques, il est courant d'associer à chaque comparaison élément par élément un résultat numérique. On forme ensuite la somme $(S_n)_{n\geq 0}$ des différents scores obtenus. On s'intéresse plus particulièrement au maximum entre deux valeurs successives du score cumulé: $H_n = max_{0\leq i\leq j} S_j - S_i$.

En collaboration avec J.J. Daudin (INAPG), M–P. Etienne et P. Vallois ont étudié le comportement asymptotique de H_n lorsque n tend vers l'infini et lorsque la moyenne de chaque évaluation est nulle ou "petite".

Ce travail est en cours de rédaction.

5.4.8 Modélisation d'une phénomène de fissuration

Participant : Pierre Vallois.

En collaboration avec A. Mézin (laboratoire de génie des surfaces à l'Ecole des Mines de Nancy) nous avons modélisé un phénomène de fissuration unidirectionnelle avec l'hypothèse de non-relaxation de contrainte. Le modèle prend en compte à la fois la localisation des fissures et la contrainte exercée.

Avec A. Koudou, maître de conférence à l'IUT de Nancy II, nous travaillons sur un modèle plus réaliste prenant en compte la relaxation de contrainte : lorsque une fissure a lieu en x, il existe une zone "relaxée" autour de x dans laquelle de nouvelles fissures ne peuvent pas se former.

Nous nous sommes intéressés au nombre de fissures formées sur une longueur L, et plus particulièrement à la loi de cette v.a. Nous étudions également le comportement asymptotique du nombre moyen de fissures pouvant se former sur le segment $[0, L]$, avec $L \to +\infty$.

5.5 Théorie des processus stochastiques et applications

Mots clés : processus stochastique, analyse stochastique.

5.5.1 Quelques temps d'arrêt du mouvement brownien

Participants : Bernard De Meyer, Bernard Roynette, Pierre Vallois.

En collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), B. De Meyer, B. Roynette et P. Vallois s'intéressent aux problèmes suivants (B_t désigne un mouvement brownien issu de zéro) :

- les lois μ sur $R_+ \times R$ telles qu'il existe un temps d'arrêt T tel que $(T,\, B_T)$ soit de loi μ,
- les temps d'arrêt T tels que T et B_T soient indépendants,

- les temps d'arrêt T tels que B_T^1 et B_T^2 soient indépendants, $(B^1,\ B^2)$ étant un mouvement brownien en dimension 2,

- les temps d'arrêt T bornés, non constants, tels que B_T soit une gaussienne. Un exemple de tel résultat est la construction d'un temps d'arrêt borné non constant tel qu'un mouvement brownien arrêté à ce temps ait une distribution gaussienne. Ceci fournit un contre-exemple à une conjecture de Tortrat.

En collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), B. Roynette et P. Vallois ont par ailleurs étudié la loi du couple (B_T, L_T) où T est un temps d'arrêt brownien, et $(L_t; t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 du mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$.

5.5.2 Calcul stochastique généralisé

Participants : Mihai Gradinaru, Pierre Vallois.

Dans une série de travaux précédents, avec F. Russo, nous avions défini la notion d'intégrale stochastique et de crochet généralisés.

Errami et Russo ont montré récemment une formule d'Itô avec une fonction f de classe C^3 et un processus stochastique admettant un crochet "fort" d'ordre trois.

Avec M. Gradinaru et F. Russo, nous venons de montrer une formule d'Itô avec une fonction f de classe C^4 et le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \geq 1/4$. Ce processus stochastique est moins régulier que ceux considérés par Errami et Russo car il n'admet pas de crochet "fort" d'ordre trois. En revanche un crochet faible d'ordre trois et une variation d'ordre quatre peuvent être définis.

Ce travail est en cours de rédaction.

5.5.3 Amplitude de certaines chaines de Markov

Participant : Pierre Vallois.

Avec C. Tapiéro, nous avons essayé de modéliser la volatilité des marchés par leur amplitude. Plus précisément, lorsque le processus des prix est une marche aléatoire à sauts unités (± 1), nous avons étudié les instants successifs où l'amplitude prend les valeurs $1, 2, ..., k$.

Avec H. Ganidis[2] nous avons étudié les propriétés trajectorielles d'une famille chaînes de Markov appelées ultra-sphériques. Chaque processus est à valeurs dans $\{0, 1, 2, ...\}$ et la dynamique est au plus proche voisin. Convenablement renormalisée, chaque chaîne converge vers un processus de Bessel. Ceci permet d'approximer un processus de Bessel de dimension positive par une certaine chaîne ultrasphérique. Nous avons particulièrement étudié les temps de passage en un niveau donné (i.e. calcul de la transformée de Laplace de ce temps d'arrêt). Ceci nous a permis, dans certains cas, de calculer les deux premiers moments de ces variables. Nous avons pu aussi en déduire des résultats sur l'amplitude et, en particulier, sur le premier instant où l'amplitude atteint une valeur fixée.

Ce travail est en cours de rédaction.

2. H. Ganidis a soutenu sa thèse en décembre 1999, elle a obtenu un poste de maître de conférences en septembre 2000 à l'université de Bordeaux II.

5.6 Analyse stochastique des algorithmes

Participant : Philippe Chassaing.

Coalescence et parking

En collaboration avec G. Louchard (Université Libre de Bruxelles), P. Chassaing étudie le problème de coalescence et de parking. Le résultat principal est l'étude asymptotique du comportement au cours du temps (au fur et à mesure de l'arrivée des voitures) des blocs de voitures garées consécutivement. Ce comportement (largeur et position des blocs) est asymptotiquement celui des excursions (largeur et position) du pont brownien conditionné à avoir un temps local au niveau 0 égal à a, si, pour un nombre de places égal à n, le nombre de places vides est approximativement $a\sqrt{n}$. La loi des largeurs et des positions est décrite explicitement.

La dépendance en le paramètre temps a est étudiée, et le comportement asymptotique se révèle être gouverné par le coalescent additif standard d'Aldous et Pitman. L'approximation du coalescent additif par le parking permet de comprendre le lien entre les deux constructions connues du coalescent additif, apparemment très différentes, celle d'Aldous et Pitman d'une part, celle de Bertoin d'autre part.

Arbres

En collaboration avec J.-F. Marckert (université de Versailles), P. Chassaing utilise la correspondance entre arbres et parking due à Schutzenberger-Foata-Riordan-Françon, et une correspondance moins connue entre parking et processus empiriques, pour ramener une question ouverte d'Odlyzko et Wilf sur la largeur moyenne des arbres étiquetés (trouver les premiers et deuxièmes termes du développement asymptotique de la largeur moyenne) au théorème de Komlos, Major et Tusnady concernant les processus empiriques. On obtient un résultat analogue pour les moments d'ordre supérieur. En collaboration avec M. Yor (université de Paris 6), P. Chassaing et J.-F. Marckert obtiennent le comportement asymptotique du couple largeur-hauteur pour les arbres simples (incluant arbres binaires, arbres généraux et arbres étiquetés) à n noeuds : la loi limite normalisé par $\sqrt{n}$ le couple largeur-hauteur converge en loi vers

$$\Big(\sigma \max_{0\leq s\leq 1} e(s), \int_0^1 \frac{ds}{\sigma e(s)}\Big),$$

où e désigne l'excursion Brownienne normalisée, et σ est un paramètre dépendant du modèle d'arbres simples choisi.

Mouvement brownien

En collaboration avec S. Janson (université d'Uppsala), P. Chassaing décrit une transformation de trajectoire reliant le pont brownien réfléchi conditionné à avoir un temps local en 0 égal à a, noté X_a, au pont brownien non conditionné, noté b, ou à l'excursion brownienne non conditionnée. Le cas $a = 0$ redonne la transformation de Vervaat reliant le pont et l'excursion. On en déduit simplement la densité d'occupation de X_a :

$$E[\text{mes}(\{0 \leq s \leq 1 \mid X_a(s) \geq x\})] = e^{-2ax-2x^2}.$$

Intelligence artificielle

En collaboration avec S. Zylberstein (université de Massachussets) et F. Charpillet (INRIA–LORIA), P. Chassaing prouve que le facteur d'accélération minimal à imprimer à un ordinateur pour qu'un algorithme interruptible produise un résultat d'aussi bonne qualité qu'un algorithme non interruptible, est égal à 4.

5.7 Mathématiques financières

5.7.1 Modèles financiers avec asymétrie d'information

Participant : Axel Grorud.

Mots clés : asymétrie d'information, marché financier, agent informé, grossissement de filtration, stratégie optimale, équilibre économique.

Nous continuons l'étude des marchés financiers avec asymétrie d'information, c'est-à-dire un modèle mathématique d'évolution d'actifs boursiers dans lequel on suppose la présence d'un investisseur informé ([GP98],[15]).

On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), P)$ sur lequel sont définies les dynamiques des prix de d actifs, semi-martingales càdlàg, par exemple régies par l'équation :

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i (\sigma_s^i, dW_s) \\ &\quad + \int_0^t \int_E S_s^i \phi^i(s,x) dN(s,x), 0 \leq t \leq T, S_0 \in R^d, i = 1, \cdots, d, \end{aligned}$$

où W est un d-mouvement brownien, N un processus ponctuel. On suppose que, en $t = 0$, un agent informé connait une variable $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T; R^\kappa), \kappa \in N$.

Marchés Incomplets

Mots clés : marché incomplet, grossissement de filtration, prix des actifs.

Nous faisons dans [GP98] le lien entre différentes hypothèses qui permettent d'obtenir le grossissement de filtration, c'est-à-dire la comparaison entre les $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Y}$-martingales, lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration des prix observés et $(\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)), t \in [0,T])$ la filtration grossie par l'information de l'agent informé. Nous étudions la complétude du marché, l'existence des probabilités neutres au risque et le prix des actifs à atteindre du point de vue d'un agent informé ou d'un agent non informé. Ce travail a été soumis à la revue "International Journal of Theoretical and Applied Finance" et complète une note aux C.R.A.S. publiée en 1999.

Marchés avec sauts

Mots clés : processus de Poisson marqué, stratégie optimale.

Dans [15], nous avons considéré un modèle de marché dont la dynamique est régie par un mouvement brownien W de dimension m et un processus de Poisson marqué N, indépendant

[GP98] A. Grorud, M. Pontier, «Probabilités neutres au risque et asymétrie d'information», *rapport de recherche n° 98-10*, L.A.T.P., 1998.

de W, de dimension n et d'intensité λ. Le fait d'avoir un processus de Poisson multivarié permet de décrire complètement la famille des probabilités neutres au risque, et ainsi nous pouvons expliciter les stratégies optimales de l'agent informé. Ce travail est publié dans la revue "International Journal of Theoretical and Applied Finance".

Travaux en cours

Participants : Axel Grorud, Nathalie Pistre.

Mots clés : Modèle de pari, marchés complétés, équilibre économique.

Dans le modèle de pari, nous étudions la stratégie financière d'un agent faisant un pari à propos d'une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu de l'instant final. Cela rejoint des problèmes de grossissement de filtration. En mettant en présence deux agents faisant des paris différents, on peut obtenir un équilibre économique.

Nous étudions de manière précise les coefficients d'un marché avec friction, à l'équilibre, qui a été complété par une option. On sait que, dans un modèle à temps continu, une option peut compléter un marché, mais l'étude précise n'a pas été menée dans le cas d'un marché avec friction. Le travail est presque terminé ; il reste à écrire le code de simulation qui permettra d'étudier les différents équilibres obtenus selon les valeurs des paramètres.

Thèse en cours

Mots clés : statistiques, modèles mal spécifiés, robustesse.

Marian Ciuca prépare une thèse sur "La robustesse et les statistiques dans les modèles financiers mal spécifiés". Il s'agit d'étudier les propriétés de stabilité des stratégies financières de couverture et des stratégies optimales lorsque les coefficients du marché sont mal spécifiés. Marian Ciuca étudiera aussi les propriétés des estimateurs non paramétriques de ces coefficients. La thèse est financée par le groupe « Communications and Systems ».

5.7.2 Optimisation d'un bilan bancaire simplifié

Participants : Mireille Bossy, Nathalie Pistre, Denis Talay.

Nous modélisons le bilan simplifié d'une institution financière (au passif : obligations et capitaux propres ; à l'actif : portefeuille d'investissement en actions, portefeuille de zéro–coupons et liquidités) afin de décrire et calculer une allocation d'actif pour une gestion actif passif optimale (le passif étant considéré comme donné). Les aléas portent sur l'évolution des taux d'intérêt (décrite par un modèle de Vasicek avec une prime de risque quelconque) qui agitent les obligations à l'actif et au passif et celle des actions détenues à l'actif de la banque.

Nous nous intéressons au problème de contrôle optimal stochastique correspondant à la maximisation de l'espérance intertemporelle de l'utilité des capitaux propres. Les variables de contrôles sont les proportions de zéro–coupons, d'actions et de liquidités à détenir à l'actif.

Nous regardons le problème dual en considérant l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) adjointe et cherchons à obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité. Deux problèmes se posent : les coefficients de l'équation de HJB ne sont pas réguliers et nous travaillons dans un ouvert non borné. Nous résolvons l'EDP de HJB numériquement, ce qui nous permet de mettre en évidence l'impact relatif de tous les paramètres en particulier de la valeur de la prime de risque du modèle de Vasicek.

La résolution numérique de ce type d'équation pose par ailleurs différents problèmes. L'influence du choix des conditions aux bord artificiels et l'accélération de la convergence par l'application de méthodes multi-grilles ont fait l'objet des stages de Romain Barc et Alhassane Diallo.

5.7.3 Sur l'origine stratégique du mouvement brownien

Participants : Bernard De Meyer, Hadiza Moussa Saley.

Le mouvement brownien est souvent utilisé en finance pour modéliser l'évolution des cours des actifs. La théorie interprète souvent ce mouvement brownien comme une conséquence de fluctuations exogènes au marché. B. De Meyer et H. Moussa Saley montrent dans [3] qu'il peut aussi s'interpréter de manière endogène, comme une conséquence de l'utilisation stratégique de l'information par les acteurs économiques. Nous nous proposons, dans ce travail, de justifier l'apparition du mouvement brownien dans l'équation qui modélise l'évolution stochastique du cours de l'actif financier risqué en étudiant le comportement stratégique d'agents économiques inégalement informés sur la valeur de liquidation de l'actif.
Les séquences d'enchères succesives auxquelles prennent part les agents sont alors représentées sous la forme d'un jeu répété de deux personnes à somme nulle et à information incomplète sur un côté, avec des ensembles infinis (non dénombrables) d'actions.
Dans le modèle que nous considérons nous suppposons que la valeur finale de l'actif risqué est une variable de Bernouilli de paramètre P relative à deux états de la nature notés H (haut) et B (bas).
P est également la probabilité *à priori* du jeu et nous appelons ce jeu n-fois répètè $G_n(P)$.
La partie centrale de notre travail est l'étude asymptotique des processus de prix π^n. Ceci fait apparaître un mouvement brownien qui provient *grosso modo* du comportement stratégique adopté par les joueurs à chaque étape du jeu $G_n(P)$.
L'étude du modèle dual s'est révèlée essentielle dans l'établissement de tous nos principaux résultats. En outre, le jeu dual obtenu à partir de $G_n(P)$ pourrait être utilisé pour modéliser des problèmes de défaut en théorie financière.

5.7.4 Asymptotiques d'oscillations des prix d'options standard dans un modèle d'arbre

Participants : Francine Diener, Marc Diener.

Le prix d'une option européenne standard, calculé dans un modèle d'arbre à n étapes, est une fonction oscillante de n qui converge, lorsque n tend vers l'infini, vers le prix calculé dans le modèle de Black-Scholes, en présentant des oscillations d'amplitude variable. Le calcul de la "forme" des oscillations et en particulier de leur ordre de grandeur est obtenu par transformation des sommes binômiales en intégrales de Laplace, puis par mise en œuvre de techniques d'asymptotique de ces intégrales.

On obtient un développement en puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dont le premier terme est nul, et dont le second terme fournit l'approximation cherchée des enveloppes des oscillations. Cependant ce développement n'est pas un développement asymptotique au sens habituel du terme, car chacun de ses termes non nuls est le quotient par une puissance de $\sqrt{n}$ d'une quantité $C(n)$ qui reste bornée mais n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. Il en résulte notamment qu'un développement asymptotique n'existe pas dans ce cas.

5.7.5 Livre en cours

Participant : Denis Talay.

En collaboration avec B. Lapeyre (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) et A. Sulem–Bialobroda (INRIA Rocquencourt), D. Talay a poursuivi la rédaction du livre « Understanding Numerical Analysis for Option Pricing» à paraître chez Cambridge University Press.

6 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

6.1 Risklab

Participants : Mireille Bossy, Nathalie Pistre, Denis Talay, Zheng Ziyu.

Le projet collabore avec l'association Risklab qui réunit notamment les plus grandes banques suisses et l'E.T.H. Zurich. L'objectif de la coopération est d'élaborer des mesures de risque pour la gestion de portefeuilles de produits dérivés sur taux d'intérêt. Ce thème est crucial pour les praticiens : en effet, des encours importants sont gérés sur les marchés dérivés avec des stratégies dont le comportement est parfaitement identifié au sein d'un modèle probabiliste donné. Le risque réside alors dans le choix du modèle utilisé.

À la suite de nos travaux précédents, nous nous sommes intéressés cette année à l'approximation de quantiles du bilan de stratégies de couverture erronées (cf. supra). Nous avons aussi développé une approche originale pour tenter de définir une stratégie de gestion du risque de modèle. Cette approche repose sur une formalisation en termes de jeux stochastiques. Nous avons étudié l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs associée, et montré qu'elle admet une unique solution de viscosité.

6.2 Collaboration avec EDF–Chatou

6.2.1 Etude de schémas numériques pour les équations différentielles stochastiques intervenant dans les écoulements diphasiques turbulent et dispersés

Participant : Eric Peirano.

En collaboration avec EDF et l'université de Chalmers (Suède), nous nous intéressons à l'intégration numérique des équations différentielles stochastiques (EDS) qui interviennent dans la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche lagrangienne. Les écoulements diphasiques turbulent et dispersés se caractérisent par l'existence d'une phase continue (un fluide en régime turbulent) au sein de laquelle se trouve une autre phase sous forme dispersée (des particules sous forme liquide, solide ou gazeuse selon la nature de la phase continue). Ces écoulements sont omniprésents aussi bien dans les applications industrielles que dans les phénomènes naturels.

L'approche lagrangienne consiste à simuler l'écoulement fluide avec des méthodes de résolution classiques pour équations aux dérivées partielles et à décrire le comportement dynamique des particules discrètes par des EDS de type Mc-Kean :

$$dZ_i(t) = A_i(t, \mathbf{Z}, \langle \mathbf{Z} \rangle)dt + B_{ij}(t, \mathbf{Z}, \langle \mathbf{Z} \rangle)\, dW_j, \tag{19}$$

où $\mathbf{Z}$ est le vecteur d'état qui contient les variables qui caractérisent les particules discrètes. Nous nous intéressons ici à une approche faible, c'est à dire à l'approximation de quantité de type $Ef(Z_i(T))$, ce qui, dans la pratique, correspond aux préoccupations de l'ingénieur qui aura à donner des estimations sur les différents moments des variables aléatoires.

Le but de notre travail est ici d'implanter différent schémas dans un code de calcul industriel en se plaçant dans le cas d'écoulements simples pour pouvoir étudier les différents schémas et retenir les plus performants. Nous nous intéresserons aussi par la suite aux problèmes de conditions aux limites et de réduction de variance.

6.2.2 Etude de la capacité de production d'un parc de centrales

Participant : Madalina Deaconu.

En collaboration avec Jean–Pierre Minier (EDF–Chatou), M. Deaconu étudie la modélisation de la capacité de production pour un parc de centrales électriques.

Plus précisément, le but de cette étude est de présenter un modèle mathématique pour évaluer la capacité de production d'un parc de centrales fournissant l'électricité. Les centrales sont de plusieurs types et chaque type a un fonctionnement et une réparation spécifiques. Nous évaluons le premier instant où, à cause de pannes, la capacité de production passe en-dessous d'un seuil donné.

Dans une première partie, nous considérons le cas simplifié d'un seul type de centrales. Nous présentons le modèle mathématique associé au problème et nous caractérisons le premier instant où la capacité de production descend au dessous d'un niveau fixé (qui correspond à un seuil critique). Dans ce cas, nous calculons explicitement la moyenne du temps d'atteinte. La transformée de Laplace du temps d'atteinte est donnée par une formule récursive difficilement utilisable dans la pratique.

Nous considérons ensuite la situation de plusieurs types de centrales. Nous introduisons le modèle mathématique associé. L'évaluation mathématique du temps d'atteinte étant très compliquée, nous n'étudions que les cas simples (des niveaux bas). Nous présentons ensuite une approche numérique pour le temps moyen d'atteinte d'un niveau. L'outil mathématique utilisé est une chaîne de Markov à temps continu. La méthode numérique est une méthode de Monte Carlo. On simule la trajectoire de la chaîne et ensuite on calcule le temps d'atteinte d'un niveau. Les temps de saut d'un état à l'autre sont des variables exponentielles de paramètre bien défini.

6.3 L'action AMAZONE du G.I.E Dyade Bull/INRIA

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Sébastien Chaumont, Madalina Deaconu, Denis Talay.

Omega est le projet d'accueil de l'action Amazone du G.I.E Dyade entre Bull et l'INRIA. Cette action, démarrée en mars 1999, s'intéresse aux problèmes de performance de codes de calcul numérique intensif en finance. Dans ce domaine, l'utilisation de calculateurs puissants est nécessaire pour traiter soit des problèmes simples de très grande dimension ou nécessitant des temps de réponse rapides (évaluation d'option, prévisions et sensibilité de bilan), soit des problèmes complexes comme la résolution de problèmes de contrôle stochastique (gestion de bilan).

Pour les calculs numériques, Amazone utilise les machines de la gamme SX de NEC à architecture vectorielle/parallèle.

6.3.1 Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Nathalie Pistre.

Le premier exemple de calcul en finance développé sur le SX reprend et étend la problématique du code LICS, développé par Omega, sur la simulation et le calcul de sensibilité du bilan de contrat financier de type assurance–vie (voir le paragraphe **Formulation du problème** dans la section suivante ainsi que [BPT97]).

Nous cherchons à caractériser les risques associés à un contrat d'assurance–vie pour la compagnie d'assurance. Nous avons choisi l'exemple d'un portefeuille fermé constitué d'un contrat à versement de prime unique qui comporte un taux garanti fixe plus une participation aux bénéfices de la compagnie. Nous nous intéressons uniquement aux chutes des contrats dus aux rachats anticipés liés à l'évolution des conditions de marchés. Notre but est d'analyser ce risque en fonction des caractéristiques du contrat (fiscalité, taux garanti, participation), de la composition de l'actif et des variables financières.

Le code LICS.v2

L'utilisation du SX permet d'augmenter considérablement la dimension du portefeuille d'investissement à simuler (de l'ordre de 1000 lignes de titres) jusqu'à obtenir un problème en vraie grandeur. Le programme LICS.v2, développé dans le cadre d'Amazone, inclut également des routines d'optimisation de la composition du portefeuille d'investissement de la compagnie. Cet optimisation est statique, c'est à dire maximise un critère de rentabilité à l'échéance du contrat seulement. Cependant, le critère intègre la dynamiques des prix des actifs composant le portefeuille. Par ailleurs, l'optimisation peut se faire sous contrainte de gestion, les proportions entre les différents type d'actifs (immobiliers, actions, obligations) devant parfois respecter des contraintes légales.

[BPT97] M. Bossy, N. Pistre, D. Talay, «Étude numérique de sensibilité d'un bilan de société d'assurance dans le cadre de contrats avec option de sortie», *Banques et Marché*, 28, 1997, p. 21–31.

À partir de simulations Monte Carlo, la version actuelle de LICS.v2 calcule des statistiques sur les différentes composantes du bilan associé au contrat d'assurance–vie.

Analyse du risque associé au contrat d'assurance–vie

Affirmer simplement que la valeur du risque associé au contrat est la somme des prix "Black&Scholes" des options implicites détourne de l'analyse rigoureuses du risque réel.

À l'aide de LICS.v2, nous quantifions le risque couru par les actionnaires au regard de la valeur des capitaux propres en mettant en évidence la distribution de probabilité de leur rentabilité et développons une analyse de sensibilité du risque en fonction des paramètres du contrat.

6.3.2 Gestion optimale de contrat de type assurance–vie avec option de sortie

Participants : Mireille Bossy, Sébastien Chaumont, Madalina Deaconu, Denis Talay.

Nous nous intéressons au problème de la gestion du bilan d'un contrat financier de type assurance–vie émis par une compagnie. Le problème est posé en termes de contrôle stochastique et est étudié théoriquement et numériquement avec la mise en place d'un programme de simulation.

Formulation du problème.

Ce travail étudie un cas particulier de contrat de type assurance–vie introduit par M. Bossy, N. Pistre et D. Talay [BPT97]. Nous considérons un modèle simplifié de contrat, d'échéance T, garantissant à l'assuré un revenu minimum augmenté d'une participation aux gain de la compagnie sur ses placements financiers : la prime du contrat versée par le client est investie par la compagnie dans un portefeuille financier (actions, obligations). Ce portefeuille est la partie actif du bilan du contrat, sa valeur de marché à l'instant t est noté A_t. Si l'assuré décide de sortir du contrat d'assurance avant son échéance T, il perçoit la somme :

$$D_t = p(t)(e^{\rho t} + \gamma(A_t - e^{\rho t})_+)$$

où :

- $p(t)$ est une fonction de pénalisation incitant le client à ne pas sortir avant T,
- ρ est le taux minimal garanti par le contrat,
- $0 < \gamma \leq 1$ représente le pourcentage du gain du portefeuille reversé au client.

On modélise le comportement de l'assuré en supposant que celui- ci calcule à chaque instant la rentabilité passée de son contrat et utilise ce taux de rendement historique pour évaluer la valeur de son contrat à l'échéance. La comparaison à chaque instant de cette prévision et des opportunités offertes sur le marché au même moment permet d'élaborer un critère de sortie comme un temps d'arrêt τ, représentant la date aléatoire à laquelle le client quitte le contrat.

Nous considérons le processus controlé X, solution d'une équation différentielle stochastique contrôlée :

$$\begin{cases} dX_t & = \sigma(X_t, u_t)dB_t + f(X_t, u_t)dt \\ X_0 & = x = (r, A, t_0) \end{cases}$$

où $(u_t; 0 \leq t \leq T)$ est le processus de contrôle. Notre but est de trouver un processus u qui réalise :

$$\inf_{u.\in\mathcal{A}} E[(D_\tau - A_\tau)^2]$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des processus de contrôle admissibles. Nous montrons que la fonction valeur $V(x) = \inf_{u.\in\mathcal{A}} E_x[(D_\tau - A_\tau)^2]$ associée au problème de contrôle, est solution (en un sens large) de l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman du type :

$$\begin{cases} \inf_{u\in[0;1]} L^u V(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T) \times O, \\ V(t,x)) = \phi(x), \forall (t,x) \in [0,T) \times \partial O, \\ V(T,x) = \psi(x), \forall x \in O \end{cases}$$

où ψ et ϕ se déduisent de la fonction coût, L^u est l'opérateur associé à la diffusion (S, Z, t) avec le contrôle constant u, O est notre domaine ouvert et τ est le temps de sortie de cet ouvert.

Etude d'un problème simplifié

Le problème original d'optimisation de bilan contient un certain nombre de difficultés non-classiques qui ne permettent pas d'appliquer les résultats connus et de conclure ainsi simplement à l'existence et l'unicité de la fonction valeur. Le problème est exprimé en terme de contrôle optimal stochastique. En premier lieu, nous avons imaginé un problème simplifié, dont le but était d'éviter toute dégénérescence du processus contrôlé au bord du domaine. Dans ce cas, les principales difficultés proviennent alors de la non-bornitude du domaine. Ce problème est résolu en deux étapes :

- Existence : On établit un "Principe de la programmation dynamique" (dans le cadre continu) à partir d'un résultat de N.V. Krylov (1980). La principale difficulté fut de généraliser ce résultat au cas où la fonction valeur est construite à partir d'un temps aléatoire de sortie d'ouvert.

- Unicité : On met au point "Un principe de comparaison parabolique non-homogène" (à partir d'un article de Barles, Buckdahn et Pardoux de 1997 traitant d'équations paraboliques linéaires homogènes). Ici, la difficulté à surmonter fut la non-bornitude du domaine, qui restreint l'unicité à une classe de fonctions à croissance douce à l'infini ; on met en particulier en évidence le rapport entre la croissance maximale à l'infini des solutions et celle des coefficients de l'équation.

6.4 Unicité des enveloppes semicontinues des solutions de viscosité HJB

S. Chaumont travaille en collaboration avec E. Rouy (université de Tours), sur la principale difficulté du problème original, à savoir la dégénérescence du processus contrôlé au bord du domaine. Ceci induit généralement des discontinuités de la fonction valeur (plus précisément, dans ce cas, on obtient une fonction valeur continue dans l'ouvert mais non-prolongeable à une fonction continue sur la frontière du domaine). On a alors imaginé un second problème simplifié qui présente les mêmes caractéristiques que le problème original (mais dans un domaine borné, régulier, etc.). Le résultat le plus proche de ce cas est le "principe de comparaison fort pour HJB" de Guy Barles et Elisabeth Rouy (1998), mais il est clair que ce résultat ne s'applique pas à ce type d'équation (car il nous permettrait de conclure à la continuité de la fonction valeur). On cherche à obtenir un résultat voisin du principe de comparaison fort (où l'on affaiblit les hypothèses et la conclusion du théorème). Ce résultat permettrait de conclure à l'unicité de la fonction valeur en tout point où elle est continue. On espère ensuite, essentiellement par des arguments probabilistes, arriver à prouver la continuité de la fonction valeur (à l'intérieur du domaine, ou, à défaut, en dehors d'un ensemble d'intérieur non-vide).

6.5 Collaboration avec le CCF

Participants : Claire Gauthier, Nathalie Pistre.

Mots clés : spreads de crédit, évenements extrêmes, reconstitution de gammes de taux risquées.

Modélisation du risque de crédit

Les risques de crédit extrêmes :

L'analyse et l'exploitation des modèles dits structurels de risque de crédit, et la construction d'un modèle empirique explicatif des risques de crédit sur le marché obligataire français ont révélé qu'une part importante des spreads de crédit demeure inexpliquée. En effet, le marché cherche principalement à déceler les événements inattendus sur les spreads, comme une révision de la notation d'un émetteur à la baisse, ou une anticipation de faillite liée à de mauvais investissements.

La théorie des valeurs extrêmes semble être un outil particulièrement pertinent dans ce cadre d'analyse. Nous avons donc appliqué cette théorie au marché obligataire français, mettant ainsi en évidence la non normalité générale des rendements continus des spreads. Les distributions des extrema étant quasiment toutes de Fréchet, nous pouvons déduire que les distributions des rendements continus des spreads suivent principalement une loi de Levy.

Reconstitution de courbes de taux risqués :

Il serait souhaitable pour les opérateurs de marché de connaître chaque jour non seulement la gamme de taux sans risque, mais aussi les différentes gammes de taux associées à chaque classe de rating. Appliquant la modélisation proposée par Duffie et Singleton (98), nous avons reconstitué quelques unes de ces courbes. Néanmoins, l'exploitation systématique de ces résultats en vue de pricer des instruments dérivés de crédit; par exemple, reste hasardeuse, car nous avons été confrontés à l'éternel problème de l'étroitesse du marché obligataire français et européen. En effet, la reconstition de chaque gamme nécessite une nombre d'émissions importants que nous ne trouvons pas sur chaque classe de risque, particulièrement sur les classes de risques élevés. Dans un contexte privilégiant la recherche de rendement par les investisseurs, nous pouvons cependant espérer qu'à moyen terme le marché européen du crédit va suffisament se rapprocher de son homologue américain en terme de maturité et liquidité, pour pouvoir réellement utiliser ce type d'outils de reconstitution en pratique.

7 Actions régionales, nationales et internationales

7.1 Actions régionales

OMEGA–Sophia Antipolis a participé à la création et participe aux enseignements du DESS IMAFA d'ingénierie financière (ESSI, université de Nice Sophia Antipolis).

7.2 Actions nationales

D. Talay est président du groupe MAS de la SMAI.

7.3 Actions internationales

À l'initiative du Consulat Général de France à Hong Kong et à la suite de la mission d'étude de Denis Talay à Hong Kong en février, le « France Hong Kong Center for Financial and Insurance Engineering » vient d'être créé sous la triple tutelle de la City University of Hong Kong (City U), l'INRIA et l'École Polytechnique.

Les objectifs de ce Centre sont de favoriser les échanges de chercheurs en mathématiques financières entre Hong Kong et la France, les thèses en co–tutelle d'étudiants chinois et la création de collaborations avec des institutions financières établies à Hong Kong.

Denis Talay est membre du comité scientifique et du comité de gestion.

7.4 Visites et invitations de chercheurs

Nigel Newton (University of Essex, Colchester) a visité OMEGA–Sophia Antipolis en février 2000.

Arturo Kohatstu-Higa (universitat Pompeu Fabra, Barcelone) a visité OMEGA–Sophia Antipolis en mai 2000.

Anatoli Manita, Carlos Mora et Wolfgang Runggaldier ont visité OMEGA–Sophia Antipolis en juillet 2000.

Anatoli Manita a visité OMEGA– Nancy en novembre 1999 et en juillet 2000.

8 Diffusion de résultats

8.1 Animation de la Communauté scientifique

D. Talay est membre des comités d'édition des revues « Mathematics of Computation », « Stochastics and Finance » et « Monte Carlo Methods and Applications ». Il est reviewer permanent pour les Mathematical Reviews. Il est également membre du comité scientifique du programme CNRS « Risques de la complexité des systèmes financiers ».

D. Talay est membre de la commission de spécialistes du département de mathématiques de l'université Blaise Pascal (Clermont–Ferrand). B. Roynette et P. Vallois sont membres de la commission de spécialistes du département de mathématiques de l'université Henri Poincaré. P. Vallois est membre de la commission de spécialistes de Nancy 1–Nancy 2, de l'INPL et de Besançon.

P. Vallois est l'organisateur des rencontres Évry–Nancy–Strasbourg de Probabilité et Statistiques qui se tiennent à Nancy.

Le séminaire de Théorie et applications numériques des processus stochastiques organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Nigel Newton (University of Essex, Colchester), Nicolas Fournier (université de Paris 6), Antoine Lejay (université de Provence), K. Pakdaman (INSERM U444, Paris), Arturo Kohatsu-Higa (universitat Pompeu Fabra, Barcelone).

Le séminaire de Mathématiques financières organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy et N. Pistre a accueilli l'orateur extérieur au projet suivant : Uwe Schmock (ETH, Zurich).

L'équipe de probabilités de Nancy organise chaque semaine un groupe de travail et un séminaire. Cette année, le thème du groupe de travail a été le calcul de Malliavin. Les orateurs du séminaire extérieurs à Nancy sont : M. Yor (université Paris 6), A. Manita (université de Moscou), J. Bertoin (université Paris 6), V. Bally (université du Mans), F. Coquet (université de Rennes), M. Bossy (INRIA Sophia Antipolis), A. Raugi (université de Rennes), N. Privault (université de la Rochelle), E. Rouy (université de Tours), J.J. Daudin (université de Paris XI), F. Malrieu (université de Toulouse), S. Beghdadi-Sakrani (université Paris 6), O. Garet (université de Lille), S. Pescat (université de Cracovie), T. Lyons (université de Oxford), F. Delcoigne (INRIA Rocquencourt), O. Vaillant (INRIA Sophia-Antipolis), R. Gielerak (université de Wroclaw), C. Leuridan (université de Grenoble), P. Robert (INRIA Rocquencourt), C. Cuny (université de Rennes).

D. Talay (président) et B. Roynette ont fait partie du Comité Scientifique de la conférence internationale Monte Carlo 2000 qui s'est déroulée à Monaco du 3 au 5 juillet. M. Bossy et M. Deaconu ont fait partie du Comité d'organisation de cette conférence.

P. Chassaing a organisé deux sessions "Probabilités, combinatoire et algorithmes" aux Journées MAS de la SMAI à Rennes, en septembre 2000 et en collaboration avec Gilles Schaeffer il organise les Journées ALEA au CIRM, en mars 2001.

B. Roynette a été rapporteur des thèses suivantes : B. Morel (université de Lille), G. Schæffer (université Paul Sabatier de Toulouse), A. Bienvenüe (université de Lyon), C. Cuny (université de Rennes).

P. Vallois a été examinateur aux thèses suivantes : Errami (Paris XIII), Bakht Sajid (Nancy).

N. Pistre est membre du jury d'actuariat et également membre du comité scientifique de l'Association Française pour la Gestion Actif Passif (AFGAP).

8.2 Enseignement universitaire

D. Talay enseigne au DEA de probabilités de Paris 6 (option « mathématiques financières ») (12h) et à la formation doctorale FAME (universités de Lausanne et de Genève)(12h) dont il assure également la coordination des enseignements de mathématiques.

M. Bossy (30h), D. Talay (6h), O. Vaillant (6h) donnent des cours d'introduction aux processus stochastiques et d'analyse numérique au DESS IMAFA (« Informatique et Mathématiques Appliquées à la Finance et à l'Assurance ») de l'université de Nice–Sophia Antipolis. D. Talay est le responsable des enseignements de mathématiques dans cette option, et est membre de son conseil scientifique.

B. Roynette et P. Vallois sont professeurs à l'université Henri Poincaré, et donnent des cours de DEA sur le calcul stochastique et des cours de DESS. B. Roynette a donné des cours et M. Gradinaru des TDs à l'Ecole CIMPA Marrakech (EDP et EDS nonlineaires).

N. Pistre donne un cours de marchés financiers et techniques actuarielles dans le DESS IMAFA.

A. Grorud enseigne dans le Module de “Modèles mathématiques de la Finance” du DESS “Génie Informatique et Statistique”, co–habilité avec l'Université Aix–Marseille II.

8.3 Autres enseignements

D. Talay enseigne à l'École Polytechnique en tant que Professeur chargé de cours à temps partiel, et au mastère de finance internationale d'HEC (15h).

B. De Meyer a donné 30 heures de cours de microéconomie et théorie des jeux dans le cadre de l'École des Mines de Nancy.

N. Pistre est professeur à l'Ensae.

C. Gauthier donne un cours sur le risque de crédit à l'ENSAE et dans le module "Gestion des risques bancaires" à l'ESSEC.

8.4 Participation à des colloques, séminaires, invitations

D. Talay a exposé à l'EPFL (janvier, Lausanne), aux Journées « Modélisations probabilistes » à l'ASCI (février), à l'université de Zürich (avril), à l'université de Rennes (mai), à la City University de Hong Kong (février et juin), aux journées MAS (septembre, Rennes), à ECCOMAS (septembre, Barcelonne).

Participation à des colloques, séminaires

M. Bossy a exposé aux 3^{e} journées "Modelisations probabilistes" à l'ASCI (février), aux journées MAS (septembre, Rennes) et à ECCOMAS (septembre, Barcelonne).

M. Bossy et N. Pistre ont fait un exposé commun à la conférence Monte Carlo 2000 (juillet, Monaco).

M. Deaconu a exposé à la conférence Monte Carlo 2000 (3-5 juillet, Monaco) et a participé aux Journées MAS (6-8 septembre, Rennes), au Bachelier Colloquium on Mathematical Finance (29-31 mars, Besançon), à la Journée Coalescence (24 mars 2000, Paris 6), au Projet ASCII (19 janvier, Paris) et aux rencontres Evry-Nancy-Strasbourg.

B. Roynette a exposé au colloque "Mathématiques pour l'ingénieur et héritage de Poincaré" à l'Ecole des Mines de Nancy, (4-6 septembre, Nancy), au MJC Pichon, Fête de la Science (20 octobre 2000, Nancy).

P. Vallois a exposé à Jouy-en-Josas (5 octobre 1999), à Orléans (25 novembre), à la quatrième Rencontre Evry-Nancy-Strasbourg, au colloque "Mathématiques pour l'ingénieur et heritage de Poincaré" à l'Ecole des Mines de Nancy, (4-6 septembre, Nancy), à 12th winter-school on stochastic processes (27 février-4 mars, Siegmundsburg-Allemagne), dans le cadre de la Science en fête (Nancy) et a participé aux Journées JOBIM (3-5 mai 1999, Montpellier).

P. Chassaing a exposé aux Journées de Probabilités (6-10 septembre 1999, Nancy), aux Journées ALEA 2000 (mars 2000), et à la Journée Coalescence (24 mars, Paris 6) et au Sixth Seminar on the Mathematical Analysis of Algorithms (1-8 juillet 2000, Krynica Morska).

S. Chaumont a exposé aux Journées MAS (6-8 septembre, Rennes), à la Rencontre Evry-Nancy-Strasbourg (17-19 mai, Evry) et a participé au Colloque "Processus Optimaux, Phénomènes de Propagation et Equations d'Hamilton-Jacobi" de la SMAI (2-4 octobre, Paris).

M-P. Etienne a exposé aux Journées MAS (6-8 septembre, Rennes), à JOBIM (3-5 mai, Montpellier), à la Rencontre Evry-Nancy-Strasbourg (mai, Evry) et a participé à l'Ecole d'Eté Analyse in silico de séquences génomiques (17-28 juillet, Marseille) et à la Rencontre Evry-Nancy-Strasbourg (septembre 1999, Nancy).

B. De Meyer a donné une Conférence plénière aux journées du groupe MODE de la SMAI (23-25 mars, Toulouse) et a exposé au Séminaire Bachelier, Institut Henri Poincaré (28 avril, Paris); au Séminaire "Mathématiques de l'économie et de la finance", Institut Henri Poincaré (12 mai, Paris); à la CORE summer school on "Economics and information" (2 juin); à Summer school "The economics of finance", The Institute for Advanced Studies, the Hebrew University of Jerusalem, (12-22 juin, Israël); au colloque "Mathématiques pour l'ingénieur et héritage de Poincaré" à l'École des Mines de Nancy, (4-6 septembre, Nancy). Il a participé à la Rencontre Évry-Nancy-Strasbourg (9-10 décembre, Strasbourg).

C. Gauthier a exposé à EFMA 2000 (Athènes).

N. Pistre et Z.Zheng ont fait un exposé commun au colloque "Finance et Assurance" de la Société Francaise de Statistique (Paris, mars 2000) et au séminaire séminaire du GDR Fiquam (Evry, avril 2000)

Z. Zheng à donné un séminaire à l'ETH (Zurich, février 2000), a exposé à la conférence Monte Carlo 2000 (juillet, Monaco), au colloque "Processus optimaux, phénomenes de propagation et équations de Hamilton-Jacobi" (Paris, octobre 2000) et au colloque "Risk Day 2000" (Zurich, octobre 2000).

A. Grorud a exposé au Colloquium Louis Bachelier (Besançon, mars 2000). Il a donné un cours à l'École CEA-EDF-INRIA "Mathématiques Financières : modèles économiques et mathématiques des produits dérivés", INRIA Rocquencourt, 7-10 juin 1999.

J-S. Giet a exposé aux rencontres Evry-Nancy-Strasbourg, au séminaire de probabilités de l'université de Warwick, au colloque des jeunes Probabilistes et Statisticiens (24-28 avril, Aussois) et aux journées MAS (6-8 septembre, Rennes).

M. Gradinaru a exposé au Séminiare triangulaire Rennes-Le Mans-Angers-Brest (février 2000), au Séminaire de probabilités de l'université de Versailles (mars 2000), au Séminiare de probabilités de l'université Paul Sabatier de Toulouse (mai 2000) et a participé à l'Ecole CIMPA : EDP et EDS Marrakech (avril 2000), à la Conference on stochastic analysis and harmonic analysis, Evanston (juin 2000) et aux rencontres Evry-Nancy-Strasbourg.

S. Herrmann a exposé au Groupe de Travail en Analyse et Probabilités à Evry, aux rencontres Evry-Nancy-Strasbourg, au colloque des jeunes Probabilistes et Statisticiens (24-28 avril, Aussois), et il a participé à l'école d'été de Saint-Flour, aux journées MAS (6-8 septembre, Rennes) et aux journées de Probabilités au CIRM (11-15 septembre, Luminy).

H. Moussa Saley a participé à CORE-FRANCQUI Summer School à Louvain-La-Neuve (2-9 juin, Belgique), au colloque des jeunes Probabilistes et Statisticiens (24-28 avril, Aussois), aux 8èmes journées du groupe MODE de la SMAI, thème: "Mathématiques de l'Optimisation et de la Décision" (23-25 mars, Toulouse) et à la Rencontre Evry-Nancy-Strasbourg (9-10 décembre, Strasbourg).

E. Tanré a exposé aux Journées de Probabilités au CIRM, (11-15 septembre, Luminy), aux Journées MAS (6-8 septembre, Rennes), au Colloque des jeunes Probabilistes et Statisticiens (23-29 avril, Aussois), à la Journée Coalescence (24 mars, Paris 6), au Groupe de travail Arbres Aléatoires et Algorithmes (31 mars 2000, Versailles) et a participé aux Rencontres Evry-Nancy-Strasbourg.

Invitations

P. Chassaing a été invité une semaine à Urbana-Champaign, chez Edward Reingold, en mai 2000.

H. Moussa Saley a étéinvité, dans le cadre de son travail de recherche, au *Center Of Research in Econometrics* (CORE) à Louvain-la-Neuve (Belgique) du 3 au 7 juillet 2000.

P. Vallois a été invité du 17 au 26 novembre 1999 à l'université de Bar Ila- Tel Aviv (Israël).

9 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I): convergence rate of the distribution function», *Probability Theory and Related Fields 104*, 1, 1996.

[2] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II): convergence rate of the density», *Monte Carlo Methods and Applications 2*, 1996, p. 93–128.

[3] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, P. Vallois, «Nonlinear self stabilizing processes I Existence, invariant probability, propagation of chaos», *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 173–201.

[4] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Branching process associated with 2d–Navier Stokes equation», *Prépublications nº 30*, Institut Élie Cartan, 1998.

[5] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, «Nonlinear self stabilizing processes II Convergence to invariant probability», *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 203–224.

[6] P. Bernard, D. Talay, L. Tubaro, «Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients», *Math. Comp. 63*, 208, 1994, p. 555–587.

[7] M. Bossy, D. Talay, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles: application to the Burgers equation», *Ann. Appl. Probab. 6*, 1996, p. 818–861.

[8] C. Graham, T. Kurtz, S. Méléard, P. Protter, M. Pulvirenti, D. Talay, *Probabilistic Models for Nonlinear PDE's and Numerical Applications*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1627, Springer-Verlag, 1996, CIME Summer School, D. Talay and L. Tubaro (Eds.).

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[9] O. Vaillant, *Une méthode particulaire stochastique à poids aléatoires pour l'approximation de solutions statistiques d'équations de McKean-Vlasov-Fokker-Planck*, thèse de doctorat, université de Provence, 2000.

Articles et chapitres de livre

[10] C. Berthelot, M. Bossy, N. Pistre, «Risque Associés au Contrat d'Assurance–Vie pour la Compagnie d'Assurance», article soumis.

[11] M. Bossy, R. Gibson, F.-L. Lhabitant, N. Pistre, D. Talay, Z. Zheng, «Volatility Model Risk measurement and strategies against worst case volatilities», Accepté pour publication dans le Journal de la Société Française de Statistiques.

[12] M. Deaconu, M. Gradinaru, J.-R. Roche, «Reflected Brownian motion in the unit disk», *Probability and Mathematical Statistics 20*, 1, 2000.

[13] C. Gauthier, S. Lardic, « Modélisation multifactorielle des spreads de crédit.Une analyse empirique des secteurs industriel et bancaire de Janvier 1995 à Décembre 1998 », *Banque et Marchés Novembre-Décembre*, 2000, à paraître.

[14] A. Grorud, M. Pontier, «Asymmetrical information and incomplete market», *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, article soumis.

[15] A. Grorud, « Asymmetric information in a financial market with jumps », *I.T.J.A.F.*, 3(4), 2000.

[16] C. Henin, N. Pistre, « A note on the generalized convex put price and put/call spread : stochastic dominance arguments », *The current state of business disciplines 3*, February 2000, p. 1343–1354.

[17] N. Pistre, *Start up high tech : Création et développement d'entreprises technologiques*, Dunod, août 2000, ch. Comment évaluer financièrement les décisions stratégiques de la jeune entreprise de haute technologie?

[18] H. Régnier, D. Talay, «Vitesse de convergence d'une méthode particulaire stochastique avec branchements», Note au C.R.A.S. acceptée pour publication.

[19] B. Roynette, S. Mézières, «Study of a Brownian impulse», *The Annals of Applied Probability 10*, 2, 2000, p. 493–516.

[20] F. Russo, P. Vallois, «Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes», *Stochastics and Stochastics Reports 70*, 2000.

[21] D. Talay, O. Vaillant, « A stochastic particle method to compute the statistical solution of McKean Vlasov equations. Part I: Foundation of the method and numerical evidence», 2000.

[22] D. Talay, O. Vaillant, « A stochastic particle method to compute the statistical solution of McKean Vlasov equations. Part II: convergence rate», 2000.

[23] D. Talay, O. Vaillant, «Vitesse de convergence d'une méthode particulaire stochastique avec poids d'interaction aléatoires», *Note au C.R.A.S. t.330*, Série I, 2000, p. 821–824.

[24] D. Talay, Z. Zheng, « Approximation of quantiles of diffusion processes and application to model risk measurements », 2000.

[25] D. Talay, Z. Zheng, « Model risk management against worst case volatility processes for discount bond options », 2000.

[26] S. Tapiero, P. Vallois, « The range inter-event process in a symmetric birth-death random walk and the detection of chaos », *Neural Network World 1–2*, 2000.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[27] M. Bossy, B. Jourdain, « A Stochastic Particle Method for the Solution of a 1D Viscous Scalar Conservation Law in a Bounded Interval », Monte Carlo 2000, article accepté.

[28] P. Chassaing, J.-F. Marckert, M. Yor, « The height and width of simple trees », Actes des Journées Arbres 2000.

[29] M. Deaconu, E. Tanré, « A generalization of the Connection Between the Additive and Multiplicative Solutions for the Smoluchowski's Coagulation Equation », Monte Carlo 2000, article accepté.

[30] D. Talay, Z. Zheng, « A Hamilton Jacobi Bellman Isaacs Equation for a Financial Risk Model », *in : Optimal Control and Partial Differential Equations*, IOS Press, 2000.

[31] D. Talay, « Discretization of Stochastic Differential Equations. Application to Simulation. Stochastic Numerical Methods for Partial Differential Equations », *in : ENUMATH 99 - Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Jyväskylä, Finland, July 26-30, 1999*, T. T. P. Neittaanmäki, P. Tarvainen (éditeurs), World Scientific, Singapore, 2000.

[32] D. Talay, « Simulation of Stochastic Processes and Applications », *in : Foundations of Computational Mathematics 99*, R. DeVore, A. Isarles (éditeurs), Cambridge University Press, 2000.

Rapports de recherche et publications internes

[33] M. Bossy, « Optimal Rate of Convergence of a Stochastic Particle Method to Solutions of 1D Viscous Scalar Conservation Law Equations », *rapport de Recherche n° RR-3924*, INRIA, 2000.

[34] P. Chassaing, S. Zilberstein, F. Charpillet, « Optimal Sequencing of Contract Algorithms », *rapport de recherche*, 2000, accepté à Annals of Mathematics and AI.

[35] B. D. Meyer, B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « On the independence of times and positions for Brownian motion », *Prépublications n° 1*, Institut Élie Cartan, 2000.

Divers

[36] C. Gauthier, N. Pistre, « Événements extrêmes sur les spreads de crédit », 2000, article soumis.