INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet Saga

Systèmes Algébriques, Géométrie et Applications

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

2000

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Jean-Pierre Merlet [DR2 Inria]

Responsable permanent

Bernard Mourrain [CR1 Inria]

Assistante de projet

Corinne Zuzia [AJT Inria, à mi-temps dans le projet]

Personnel Inria

Ioannis Emiris [CR1 Inria]

Yves Papegay [CR2 Inria]

Chercheurs doctorants

Didier Bondyfalat [boursier MENRT boursier Inria jusqu'au 30 septembre 2000]

Laurent Busé [boursier MENESR]

David Daney [boursier MENESR, boursier Inria jusqu'au 31 janvier 2000]

Olivier Ruatta [boursier MENESR]

Luc Rolland [boursier Inria, partagé avec le projet Polka]

Philippe Trébuchet [boursier ENS Cachan]

Chercheurs invités

Marc-André Ameller [doctorant du projet Movi à l'INRIA Rhône-Alpes, du 18 au 22 septembre 2000]

Alexis Bonnecaze [maître de conférence à l'université de Toulon, en délégation dans le projet depuis le 1er septembre 2000]

Carlos D'Andrea [doctorant au laboratoire de mathématiques de l'université de Buenos Aires, Argentine, du 8 au 15 juillet 2000]

Maurice Rojas [professeur au département de mathématiques de l'université de Hong Kong, du 4 au 6 septembre 2000]

Nabil Simaan [doctorant au laboratoire de robotique de construction mécanique à l'université de Technion, Israël, du 19 juillet au 2 août 2000]

Collaborateurs extérieurs

Pierre Comon [DR CNRS-I3S]

Mohamed Elkady [maître de conférence à l'Unsa]

Patrick Solé [DR CNRS-I3S]

David Ruprecht [Ater à l'Unsa]

Stagiaires

Charles Gaudon [stagiaire Essi, jusqu'au 30 avril 2000]

Serge Gerassopoulos [stagiaire du département d'informatique de l'université de Crète, Grèce, du 24 juillet au 25 août 2000]

Yann Gesina [stagiaire de maîtrise à l'université de Nice, du 1er au 31 juillet 2000]

Damien Hasse [stagiaire Essi, à partir du 16 octobre 2000]

Cédric Hyppolite [stagiaire Essi, à partir du 16 octobre 2000]

Pierre Mario [stagiaire Essi, jusqu'au 24 août 2000]

Abhishek Pandey [stagiaire de l'Institut Indien de Technologie de Kanpur, Inde, du 15 mai au 30 juillet 2000]

Mathieu Racois [stagiaire de maîtrise de l'université Paul Sabatier de Toulouse, du 1er mai au 31 juillet 2000]

2 Présentation et objectifs généraux

La géométrie algébrique effective joue un rôle important dans un éventail très large de domaines d'applications, allant de la chimie à l'infographie en passant par la théorie des mécanismes, le traitement du signal et la vision par ordinateur. En pratique, les phases où intervient cette géométrie sont souvent des points bloquants.

En effet, malgré les développements importants de cette discipline lors des dix dernières années, force est de constater que son impact réel est faible, ceci pour quatre raisons :

1. une absence de *travail amont sur la modélisation* : les objets algébriques que nous considérons sont issus d'une phase de modélisation. Or, les différents types de modélisation ne conduisent pas à des objets algébriques de même complexité du point de vue de la résolution ultérieure.

2. un défaut *d'adaptation* : en pratique, les systèmes polynomiaux que nous rencontrons appartiennent à certaines classes de problèmes (problèmes de distances, de déplacements, ...). À l'image de l'algèbre linéaire, les spécificités de ces systèmes polynomiaux doivent être prises en compte.

3. un défaut *d'ergonomie* : les difficultés liées aux choix des méthodes de résolution, à la façon de les utiliser, à leur adéquation avec le problème à résoudre, sont parfois rédhibitoires. Un travail de *transfert* de connaissances, d'intégration des techniques et outils logiciels dans les phases de modélisation et de résolution est donc nécessaire.

4. un défaut *d'implantation* : la communauté mathématicienne a certes produit un effort important dans le domaine théorique mais il se traduit de manière très inégale en termes d'implantations logicielles. Par ailleurs, il y a souvent inadéquation totale entre les capacités des utilisateurs potentiels et le niveau d'expertise nécessaire à l'utilisation de ces outils.

L'objectif du projet `SAGA` est de combler ces lacunes en agissant à quatre niveaux :

1. en recherchant de nouveaux algorithmes en Algèbre et en Géométrie, en développant de nouvelles méthodes formelles et/ou numériques, en relation avec les applications,

2. en dégageant des classes de problèmes de généricité relativement larges et en mettant en place des algorithmes dédiés à ces classes de problèmes,

3. en fournissant à l'utilisateur des outils allant de la mise en équations en passant par des outils d'analyse de la géométrie des solutions, jusqu'aux implantations d'algorithmes de résolution, dans des bibliothèques dédiées, modulaires, d'accès et d'usage faciles ; l'efficacité des codes produits et leur validation sur de gros problèmes sont une préoccupation majeure,

4. en utilisant ces bibliothèques dans le cadre d'applications particulières, soit en connexion directe avec les utilisateurs finaux, soit dans des domaines prometteurs,

Ce transfert de connaissances de la géométrie algébrique effective vers le calcul scientifique et les applications est donc un pari important, qui sous-tend les objectifs de notre projet.

3 Fondements scientifiques

Mots clés : géométrie, théorie des invariants, géométrie algébrique effective, algorithmique des polynômes, lien symbolique-numérique, robustesse, matrices structurées, analyse par intervalles, implantation, applications, robotique, théorie des mécanismes, vision artificielle, chimie moléculaire, santé, télécommunications.

Dans beaucoup de domaines appliqués, le traitement d'un problème passe par des étapes de modélisation, d'analyse du modèle et de résolution. Ainsi, la mise en équation produit un problème mathématique, dont la résolution amène à concevoir à la fois un algorithme puis son implantation et son application.

Notre démarche s'attache donc à dégager, dans des domaines où la géométrie, l'algèbre et l'algorithmique jouent un rôle important, des méthodes reposant sur le calcul formel pour le traitement de ces différentes étapes.

Notre démarche est ainsi motivée à la fois par des considérations théoriques en géométrie algébrique effective, mais aussi par leurs applications en théorie des mécanismes, en vision artificielle, en géométrie algorithmique...

Analyser les propriétés des objets mathématiques qui apparaissent dans ces problèmes à partir d'exemples suffisamment génériques (par leurs occurrences pratiques et les problèmes qu'ils illustrent), rechercher des méthodes puissantes pour les exploiter, développer à la fois les méthodes effectives en mathématiques et les logiciels qui les rendent utilisables sont donc les points forts du projet.

Dans l'étape de modélisation, notre approche s'appuie sur la théorie des invariants et le calcul formel en géométrie. Par exemple, le formalisme de Grassmann-Cayley fournit des outils pour analyser à la fois les correspondances dans les images ainsi que les lieux critiques des mécanismes à plusieurs corps.

Dans la phase d'analyse, la géométrie algébrique effective fournit des méthodes et outils, permettant de mieux comprendre la géométrie des solutions, leur dimension, leur degré, ... La structure des équations et plus particulièrement des monômes dans ces équations, soulève des problèmes liés à la géométrie des polytopes convexes (une autre manière de voir la programmation linéaire, entière ou non) et conduit à des calculs sur les cônes et sous-réseaux de Z^n.

La résolution explicite des problèmes fait, quant à elle, appel à une analyse des structures des objets manipulés (matrice de Toeplitz, Hankel, ...) ou à des méthodes plus numériques, comme l'analyse par intervalles. Elle soulève des questions de complexité théorique, mais aussi de stabilité numérique, devant prendre en compte l'incertitude sur les données. Dans ces problèmes à la frontière entre le calcul numérique et symbolique, les polynômes et les matrices jouent un rôle important.

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

Mots clés : chimie moléculaire, robotique, santé, théorie des mécanismes, télécommunications, vision artificielle.

Clairement, le champ d'application de la géométrie algébrique est extrêmement large, mais il est tout aussi clair qu'au sein d'un projet de la taille de SAGA il ne saurait être question d'aborder l'ensemble des applications. Nous avons donc décidé de nous concentrer sur quatre sujets : la théorie des mécanismes (qui constitue un point commun des recherches passées des membres du projet), la vision par ordinateur, la chimie moléculaire et les télécommunications.

- Théorie des mécanismes : nos activités portent sur la conception optimale des mécanismes, sur la modélisation et l'analyse géométrique, en particulier pour la machine-outil, les suspensions automobiles et la robotique médicale,
- Vision par ordinateur : nous nous intéressons ici aux problèmes algébriques tels que la calibration de caméra à partir d'équations de Kruppa, la modélisation et la reconstruction tridimensionnelle à partir d'images,

- Chimie moléculaire : nous nous intéressons aux particularités géométriques de molécules organiques. Certains problèmes de ce domaine ont des analogues en théorie des mécanismes ce qui a facilité nos recherches dans cette branche,
- Télécommunications : nous nous concentrons sur le problème de l'identification de sources avec le support d'une équipe spécialisée dans ce domaine.

5 Logiciels

5.1 Bibliothèque `ALP`

Participants : Bernard Mourrain [correspondant], Didier Bondyfalat, Ioannis Emiris, Yann Gésina, Pierre Mario, Hélène Priéto, Mathieu Racois, Olivier Ruatta, Philippe Trébuchet.

Mots clés : algèbre linéaire, bézoutien, C++, fft, généricité, géométrie algébrique effective, lien symbolique-numérique, matrice creuse, matrice structurée, méthode itérative, polynômes, résolution, résultant, stabilité, valeur propre.

Les problèmes que nous rencontrons font appel à la fois à des méthodes manipulant des polynômes, des idéaux, des anneaux quotients, ... et aussi à des calculs numériques sur des vecteurs, des matrices, dans des processus itératifs. Ces domaines étaient jusqu'à présent bien séparés avec, d'un côté des logiciels manipulant des formules, souvent peu efficaces pour l'algèbre linéaire numérique, de l'autre, des logiciels stables numériquement et efficaces en algèbre linéaire mais peu adaptés au traitement des polynômes.

L'objectif que nous poursuivons dans la conception de la bibliothèque `ALP` est donc de fournir un environnement performant, dédié aux calculs symboliques et numériques pour les polynômes, en vue d'applications en robotique, vision, ...

Cette bibliothèque comprend un ensemble de structures et de fonctions permettant de manipuler des vecteurs, des matrices, des polynômes en une ou plusieurs variables. Une attention particulière à été apportée à la généricité de ces structures sans pour autant perdre en efficacité. Pour cela, nous avons distingué plusieurs niveaux d'implantation. Le premier niveau concerne les conteneurs qui sont des objets mémorisant de manière à optimiser les données nécessaires au calcul. Le deuxième niveau concerne les vues (vecteur, polynômes, ...) que l'on veut donner à ces conteneurs et les méthodes qui s'y rattachent. Nous y avons ajouté un troisième niveau, correspondant à des modules (`namespace`) regroupant les implémentations génériques associées à catégorie d'objets. Ces niveaux sont implantés à l'aide de classes paramétrées (`template`) et un contrôle précis de certaines étapes de précompilation (inline) permet de générer des codes très efficaces. Pour plus d'information, voir [34].

Voici les principales composantes :

arithmétique (nombre modulaire, infinitésimaux, multiprécision et connexion avec `GMP`), **vecteurs** et **matrices denses** (implémentation générique de la `SVD`, du déterminant, ... connexion avec la bibliothèque LAPACK), **matrices structurées** (Toeplitz, Hankel, produit rapide par `FFT`), **matrices creuses** (connexion avec des outils spécialisés comme `UMFPACK, SparseLib,` SuperLu), **polynômes en une variable** (connexion avec le logiciel de résolution en multi-précision MPSolve de D. Bini et G. Fiorentino), **polynômes en plusieurs variables** (avec coefficients, structure des monômes et ordre sur ces monômes génériques, connexion avec le logiciel RS de F. Rouillier et GB de J.C. Faugère).

Nous avons étendu ces structures en autorisant l'utilisation « transparente » de vues partielles sur les objets, tout en consolidant les implémentations existantes. Par ailleurs, un certain nombre d'algorithmes a été rajouté, tels que les algorithmes liés à la résolution de systèmes polynomiaux par calcul de valeurs et vecteurs propres.

Différentes constructions de résultants basées sur les formulations de Macaulay et de bézoutien sont implémentées. Durant son stage de fin d'étude, P. Mario a par ailleurs travaillé, en collaboration avec I. Emiris, sur l'implémentation de résultants creux et du volume stable, améliorant en particulier les connexions avec les classes de matrices creuses. Ces travaux y sont également intégrés. Cet environnement a aussi servi de support à l'implémentation de nouveaux algorithmes de résolution de sytèmes polynomiaux présentés dans [33]. Nous utilisons ici la connexion avec la bibliothèque SuperLu, pour la résolution de systèmes linéaires creux. La structuration de cet environnement nous a ainsi permis de passer facilement d'une première implémentation expérimentale à une deuxième version nettement plus efficace, en adaptant seulement le type de conteneur au problème à résoudre.

Des méthodes itératives contrôlées telles que la méthode de Sebastio e Sylva pour les polynômes en une variable (calcul de la racine la plus proche d'un point pour un polynôme aléatoire de degré 10^6), ou minimisant (ou maximisant) un certain critère (méthode de la puissance inverse à partir de matrices de résultants) y figure également. Une nouvelle méthode de résolution par dichotomie, basée sur les polygones de contrôle dans la base de Bernstein a été rajoutée par M. Racois pour le tracé de courbes et surfaces implicites, ainsi qu'une connexion à la bibliothèque de visualisation vtk.

Enfin, nous avons ajouté à cette bibliothèque un module dédié au traitement de certains problèmes géométriques tel que le problème inverse d'un robot série.

En voici quelques exemples d'utilisation :

- Résolution du problème du modèle inverse d'un robot série quelconque à 6 degré de liberté. Application à des problèmes de biologie moléculaire,
- Configuration d'une molécule en chaîne fermée,
- Calibration d'une caméra à partir des équations de Kruppa,
- Résolution du problème du modèle direct d'un robot parallèle ayant 2 points d'attache des bras identiques,
- Autocalibration de Caméra (équations de Kruppa),
- Calibration de robot parallèle,
- Identification « aveugle » de sources dans un signal cyclostationnaire,
- Tracé de courbes et surfaces implicites,

– Calcul des cylindres par 5 points, par 4 points de rayon fixé, de rayon extrémal,

– Construction d'outils de résolution spécialisés et connectés à un outil de pilotage d'algorithmes basé sur `yackl` (en collaboration avec S. Moisan, du projet Orion).

Elle est accessible à l'URL `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/ALP/`.

5.2 Bibliothèque `ALIAS`

Mots clés : analyse par intervalles, géométrie algébrique effective, lien symbolique-numérique, robustesse.

Participants :
Jean-Pierre Merlet [correspondant], Didier Bondyfalat, David Daney.

La bibliothèque `ALIAS` (*Algorithms Library of Interval Analysis for Systems*) a pour objet d'appliquer l'analyse par intervalles aux problèmes d'analyse et de résolution des systèmes, principalement, mais pas uniquement, algébriques. L'écriture de cette bibliothèque a été motivée par la fréquence des cas pratiques où l'on ne recherche des solutions que dans des intervalles bien particuliers, où les coefficients peuvent être incertains et qui peuvent parfois impliquer des objets dont l'expression analytique est complexe (déterminant de matrices par exemple).

Dans la version 1.1 de 1999 nous offrions des fonctionnalités de résolution de systèmes de dimension 0, dont l'efficacité a été améliorée, auxquelles nous avons ajouté pour la version 2.0 :

– algorithmes pour le calcul d'approximation de variété de dimension $n > 0$ obtenue sous la forme d'une liste d'intervalles (la figure 1 présente un exemple de tracé d'une variété de dimension 1), qui constitue une alternative aux méthodes étudiées dans l'ARC CoSTIC (voir section 8.1.1),

– algorithmes pour le traitement d'équations où apparaissent formellement des déterminants, sans qu'il soit nécessaire de les développer,

– implantation d'un algorithme pour la résolution des systèmes spécifiques dans lesquels apparaissent une majorité de termes linéaires dans les inconnues,

– parallélisation des algorithmes : par nature, l'analyse par intervalles se prête bien à des calculs distribués. Un mécanisme permettant la distribution des calculs a été implanté et il a été utilisé en conjonction avec `PVM` pour réaliser des implantations parallèles des algorithmes d'`ALIAS`, permettant des gains notables de performance.

La plupart des algorithmes d'`ALIAS` sont aussi interfacés pour pouvoir être utilisés directement à partir de MAPLE.

`ALIAS` a été testée cette année sur des systèmes très variés : mentionnons simplement la détermination de trajectoires de suspension automobile (c.f. section suivante) et la résolution de systèmes trigonométriques réalisée pour le projet Miaou pour l'étude de filtres HF. Ces tests ont montré que, même sur des problèmes avec un nombre relativement élevé d'inconnues

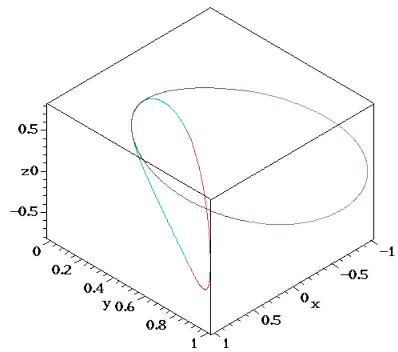

FIG. 1 – *Un exemple de tracé obtenu avec* `ALIAS` *: variété définie par les équations* $x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 1, x^2 - y^3$ *lorsque z varie entre -2 et 2.*

(jusqu'à 60), les méthodes d'`ALIAS` offraient une alternative intéressante et pouvaient même apporter des solutions à des problèmes sans solution connue à ce jour.

La version courante de cette bibliothèque est disponible sous `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/ALIAS`.

5.3 Robots parallèles

Mots clés : robotique, robots parallèles, théorie des mécanismes.

Participant : Jean-Pierre Merlet [correspondant].

Nous mettons à disposition [1] une douzaine de nos logiciels d'analyse des robots parallèles soit sous forme binaire, soit sous forme source. Il s'agit de logiciels permettant la visualisation, l'analyse de l'espace de travail, la résolution de modèle géométrique direct ainsi que la détermination de performances. Ils sont régulièrement mis à jour à partir de l'évolution de nos travaux et des retours des utilisateurs. Notre principal travail cette année en dehors des mises à jour, a été de porter ces logiciels sous LINUX pour en favoriser la diffusion.

5.4 Géométrie combinatoire et résolution de systèmes polynomiaux

Mots clés : algorithmique des polynômes, résultant creux, volume mixte, matrices structurées, dégénérescences algébriques et géométriques, géométrie convexe en dimension

1. `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/RP/catalogue.html`

arbitraire.

Participants : Ioannis Emiris [correspondant], Serge Gerassopoulos, Pierre Mario.

Les logiciels *géométriques* incluent :

1. Une implantation en C d'un algorithme incrémental pour construire *l'enveloppe convexe* et calculer son volume, étant donné un ensemble de points en dimension arbitraire. Les données dégénérées sont traitées d'après une *perturbation* symbolique et efficace. Une phase d'après-traitement enlève les produits artificiels de la perturbation, en petite dimension.

2. Le *volume mixte* borne le nombre de racines toriques (c.à.d. à coordonnées non-nulles) communes d'un système polynomial par des calculs purement combinatoires. Il est fonction des termes non-nuls seulement et son calcul définit une base monomiale de l'anneau quotient ainsi qu'un système de départ pour résoudre les équations par une homotopie numérique. L'implantation en C a été intégrée dans `ALP` et Frisco, et une implantation distribuée a aussi été réalisée. Le *volume stable* généralise le volume mixte aux racines affines, en exprimant la structure creuse du système. Il a été implanté en C et intégré dans `ALP`.

3. Un logiciel en C pour énumérer tous les *points entiers* (à coordonnées entières) à l'intérieur d'un polytope convexe en dimension n. Ce polytope est défini comme la somme de Minkowski (vectorielle) de n polytopes. D'habitude, on s'intéresse au calcul du sous-ensemble des points qui, étant donné une direction, maximisent la distance sur cette direction jusqu'au bord de l'enveloppe convexe associée au polytope.

Les logiciels *algébriques* comprennent :

1. Un programme de construction de la *matrice du résultant creux* (ou torique), qui généralise la matrice de Sylvester et la matrice des coefficients d'un système linéaire. Son déterminant exprime le résultant creux, dont le degré dépend des volumes mixtes et des polytopes de Newton. Des méthodes combinatoires sont appliquées pour la construction soit en MAPLE, soit en C (logiciel intégré dans la bibliothèque `ALP`). Les matrices sont creuses dans le sens des objets `ALP`, mais aussi d'une structure quasi-Toeplitz.

2. Un logiciel MAPLE pour éviter les *cas dégénérés* en définissant le résultant creux par une matrice. Ce logiciel implante une perturbation symbolique et infinitésimale d'après la structure creuse, elle-même exprimée par les constructions combinatoires (polytopes de Newton). Elle est simple à définir et de complexité qui dépend de la structure creuse.

3. La matrice du résultant réduit la résolution d'un système polynomial non-linéaire à un problème d'algèbre linéaire. Le logiciel de *résolution de systèmes polynomiaux* en C fait appel à la bibliothèque LAPACK pour les opérations numériques.

Nous mettons à disposition sous `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/emiris/soft_alg.html`, nos logiciels, y compris les code-sources.

5.5 `Multires`, un module autour des résultants en MAPLE

Participants : Bernard Mourrain [correspondant], Ioannis Emiris, Laurent Busé.

Mots clés : algorithmique des polynômes, lien symbolique-numérique, résultants.

Le logiciel `Multires` écrit en MAPLE contient un ensemble de fonctions permettant de construire des matrices dont le déterminant est un multiple du résultant sur une certaine variété et des algorithmes reposant sur ces formulations, pour résoudre des systèmes d'équations polynomiales. Ce module a comme premier objectif d'illustrer les différentes formulations de résultants qui existent et les méthodes de résolution qui les exploitent (il est ainsi utilisé dans des enseignements en France et à l'étranger : Angleterre, Argentine, ...). Le deuxième objectif est de permettre de générer des codes C++ qui, compilés avec la bibliothèque `ALP`, fournissent des outils de résolution bien adaptés au problème à résoudre et donc efficaces.
Ce module contient en particulier une implantation des bézoutiens en plusieurs variables, de la formulation de Macaulay [Mac02] pour le résultant projectif (ainsi que le calcul du mineur permettant de calculer exactement le résultant), de celle de Jouanolou [Jou91] combinant des matrices de type Macaulay et de Bézout et de résultant (creux) sur une variété torique [CP93, CE00].

Nous avons également rajouté la nouvelle construction que nous proposons pour le résultant résiduel d'une intersection complète [BEM00], ainsi que des fonctions de calcul du degré de cette intersection résiduelle. L'algorithme de décomposition géométrique d'une variété algébrique [EM99a] ainsi que les résolutions à partir de valeurs (ou vecteurs) propres y sont également implémentés.

6 Résultats nouveaux

6.1 Géométrie algébrique effective

6.1.1 Résultants creux

Participants : Ioannis Emiris, Carlos D'Andrea.

Nous avons travaillé sur deux problèmes concernant les matrices du résultant creux (ou toriques). Notre premier souci était de présenter un algorithme simple et efficace qui traite les cas dégénérés dans la construction de ces matrices. Il s'agit de la faiblesse principale de

[Mac02] F. MACAULAY, « Some Formulae in Elimination », *Proc. London Math. Soc. 1*, 33, 1902, p. 3–27.

[Jou91] J. JOUANOLOU, « Le Formalisme du résultant », *Adv. in Math. 90*, 2, 1991, p. 117–263.

[CP93] J. CANNY, P. PEDERSEN, « An Algorithm for the Newton Resultant », *rapport de recherche n° 1394*, Comp. Science Dept., Cornell University, 1993.

[CE00] J. CANNY, I. EMIRIS, « A Subdivision-Based Algorithm for the Sparse Resultant », *J. ACM 47*, 3, mai 2000, p. 417–451.

[BEM00] L. BUSÉ, M. ELKADI, B. MOURRAIN, « Residual resultant of complete intersection », *JPAA*, 2000.

[EM99a] M. ELKADI, B. MOURRAIN, « A new algorithm for the geometric decomposition of a variety », *in : Proc. ISSAC*, S. Dooley (éditeur), ACM Press., p. 9–16, 1999.

l'approche matricielle qui se base sur le résultant creux, à savoir la possibilité que le déterminant correspondant soit identiquement nul même quand il y a des racines isolées qu'on désire justement calculer. La perturbation symbolique et infinitésimale de [19] étend l'idée du « polynôme caractéristique généralisé » de Canny. Elle est définie d'après la structure creuse du système polynomial donné (exprimée de manière combinatoire par les polytopes de Newton). Par conséquent, sa complexité dépend de cette structure, ce qui est important dans le cadre de la théorie d'élimination creuse. Nous avons implanté notre schéma en MAPLE.

La deuxième question concerne la construction de matrices de petite taille. Jusqu'ici, nos matrices du résultant creux étaient du même type que la matrice Sylvester ou la matrice de coefficients d'un système linéaire. Or, Cattani, Dickenstein et Sturmfels [CDS98] ont démontré l'existence de matrices de dimension plus petite et de type hybride entre ces matrices et les matrices de Bézout dont les entrées sont polynomiales en les coefficients des polynômes d'entrée. Nous avons entrepris la conception d'algorithmes combinatoires pour définir de manière constructive et complète les matrices hybrides de [CDS98] (en commençant avec le cas de systèmes de trois polynômes). Ceci demande notamment, la spécification d'une subdivision mixte des polytopes de Newton (par le biais d'un relèvement convenable) afin d'obtenir ces matrices par l'algorithme et le logiciel de Canny et Emiris [CE00].

6.1.2 Géométrie combinatoire pour les polynômes

Participant : Ioannis Emiris.

Un calcul crucial dans la construction d'une matrice du résultant creux par l'algorithme incrémental de [EC95] concerne l'énumération des points à coordonnées entières qui se trouvent à l'intérieur d'un polytope convexe en dimension n. Plus précisément, il s'agit d'un polytope défini comme la somme de Minkowski (vectorielle) de n polytopes, qui sont typiquement les polytopes de Newton associés à un système de polynômes en n variables, donc aux sommets entiers. D'habitude, on s'intéresse au calcul du sous-ensemble des points qui maximisent la distance jusqu'au bord du polytope, une fonction importante pour la construction de la matrice du résultant. Dans [21], nous avons amélioré l'algorithme de la « Pyramide de Mayas » et son implantation en `C` pour obtenir une complexité polynomiale par point et proportionnelle à la taille de la sortie, dans la plupart des cas.

6.1.3 Résultants résiduels

Participants : Laurent Busé, Mohamed Elkadi, Bernard Mourrain.

Etant donné un système de n équations polynomiales homogènes à n variables dépendant de paramètres $t_1, \ldots, t_s$, le résultant est une équation polynomiale en ces paramètres dont l'annulation est une condition nécessaire et suffisante pour que ce système possède une solution. Il

[CDS98] E. Cattani, A. Dickenstein, B. Sturmfels, « Residues and Resultants », *J. Math. Sci. Univ. Tokyo 5*, 1998, p. 119–148.

[EC95] I. Emiris, J. Canny, « Efficient Incremental Algorithms for the Sparse Resultant and the Mixed Volume », *J. Symbolic Computation 20*, 2, août 1995, p. 117–149.

permet ainsi d'éliminer un ensemble de variables et conduit à des méthodes de résolution très efficaces basées sur l'algèbre linéaire et des calculs de vecteur propres. Malheureusement, lorsque le système considéré possède des solutions indépendamment des paramètres, le résultant est nul et donc inutilisable. C'est le cas dans beaucoup de systèmes d'équations qui proviennent de la modélisation d'un éventail très large de problèmes allant de la chimie à l'infographie en passant par la robotique ou la vision par ordinateur. Par exemple, connaître les cylindres de l'espace passant par cinq points donnés distincts, qui est un problème intervenant en métrologie et en reconstruction de surface, revient à résoudre un système d'équations à paramètres possédant une intersection complète commune indépendamment de ces paramètres, correspond des problèmes de ce type. Nous avons ainsi défini la notion de résultant résiduel dont l'annulation est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système homogène possède des solutions en dehors d'une variété algébrique fixée, dans le cas où cette dernière est localement intersection complète. Ce résultant résiduel est construit comme un résultant généralisé de Gelfand *et al.* [GKZ94] du système obtenu en éclatant le long de la variété que l'on veut enlever. De plus, dans le cas où cette variété est une intersection complète, nous avons pu calculer le degré de ce résultant résiduel et donner une matrice dont l'idéal des déterminants des mineurs maximaux est engendré par ce résultant résiduel. Ce travail à été présenté à la conférence MEGA 2000 [BEM00] et va paraître dans *Journal of Pure and Applied Algebra*. L'ensemble des résultats de ce travail a été implémenté dans la bibliothèque `maple` appelée `Multires` permettant des calculs sur les résultants et la résolution de systèmes polynomiaux. Cette bibliothèque est disponible à partir de la page `http://www-sop.inria.fr/saga/logiciels/multires.html`.

6.1.4 Code et théorie des invariants

Participants : Alexis Bonnecaze, Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet.

A l'occasion de la visite d'A. Bonnecaze dans le projet SAGA pour un an, nous nous penchons sur les applications de la géométrie algébrique effective à la théorie des codes correcteurs. Nous continuons notre analyse des codes en blocs auto-duaux avec, comme outil algébrique central, la théorie des invariants. Nous généralisons le travail effectué dans [BMS99] pour considérer des codes définis sur des anneaux finis.

Parallèlement, dans le domaine de la géométrie effective, nous étudions les codes géométriques de Goppa dans une optique de décodage. Le but est d'obtenir des algorithmes de décodage ayant une bonne complexité pour permettre une implantation effective. Nous pensons, en particulier, pouvoir améliorer la complexité des algorithmes qui utilisent des bases de Gröbner.

[GKZ94] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.

[BEM00] L. Busé, M. Elkadi, B. Mourrain, « Residual resultant of complete intersection », *JPAA*, 2000.

[BMS99] A. Bonnecaze, B. Mourrain, P. Solé, « Jacobi Polynomials, Type II Codes, and Designs », *Designs, Codes and Cryptography 16*, 1999.

6.2 Lien symbolique-numérique

6.2.1 Calcul de forme normale dans un quotient

Participants : Philippe Trébuchet, Bernard Mourrain.

Mots clés : polynômes, équations, résolution, algèbre, quotient, calculs approchés, forme normale, valeur et vecteur propre.

Les méthodes algébriques classiques pour résoudre les systèmes d'équations polynomiales se prêtent mal aux calculs approchés ; partant de ce constat, nous avons, sur la base d'un nouveau critère de formes normales [Mou99], élaboré un algorithme permettant de calculer la structure de l'algèbre quotient de manière numériquement robuste.

Une première étude [33] a été faite pour des systèmes dit en intersection complète projective, de dimension 0. La complexité de cet algorithme à été analysée en détail, montrant une amélioration substantielle par rapport aux méthodes connues jusqu'à présent. Nous avons implanté et testé cet algorithme, ce qui nous a permis de constater l'efficacité de cette nouvelle approche sur des problèmes réels provenant d'applications telles que la vision ou le traitement du signal. Ainsi, nous nous sommes intéressés à la résolution des équations de Kruppa, pour nous apercevoir que le problème de stabilité numérique connu depuis longtemps était plus lié à la mise en équations qu'à la résolution proprement dite du système. Nous avons aussi appliqué cette méthode à des problèmes issus du traitement du signal, où un pré-calcul de la structure du quotient permet d'obtenir en temps réel les paramètres recherchés. Enfin, nous nous sommes intéressés à des problèmes de géométrie algorithmique, tel que le calcul de cylindre passant par 5 points génériques de l'espace.

Nous nous penchons actuellement sur des généralisations possibles des précédentes méthodes pour le traitement de systèmes 0-dimensionnels quelconques, avec coefficients approchés. La nécessité d'une représentation du quotient ayant de bonnes propriétés numériques implique ici de pouvoir construire d'autres bases que celles liées à l'ordre monomial, comme c'est le cas pour les bases de Gröbner. Une étude combinant algèbre et analyse est en cours, afin de clarifier les propriétés de robustesse numérique de ces algèbres quotient.

6.2.2 Dualité et méthodes itératives

Mots clés : systèmes algèbriques, dualité, méthodes itératives, algorithmes symboliques-numériques.

Participants : Olivier Ruatta, Bernard Mourrain.

Dans le cadre de la résolution des systèmes polynomiaux, nous étudions l'apport de la dualité algébrique sur le calcul approché des solutions. Cette étude est basée sur le développement d'algorithmes rapides pour les calculs dans l'algèbre quotient (produit ou l'inversion d'éléments) ; ceci permet de mettre en place des algorithmes itératifs permettant de calculer des zéros choisis à l'avance (racine maximisant le module d'un polynôme, par exemple). Ces

[Mou99] B. Mourrain, « A new criterion for normal form algorithms », *in : Proc. AAECC*, M. Fossorier, H. Imai, S. Lin, A. Poli (éditeurs), *LNCS*, Springer, p. 430–443, Berlin, Allemagne, 1999.

algorithmes sont analogues à des algorithmes déjà étudiés pour les matrices (puissances itérées, par exemple). Les points forts de ces méthodes sont leur rapidité et le contrôle numérique qu'elles autorisent.

Par ailleurs, nous nous intéressons également à des généralisations au cas de plusieurs variables de méthodes itératives connues pour une seule variable qui permettent le calcul simultané de tous les zéros. Ici aussi, la structure du quotient et les relations entre coefficients et racines jouent un rôle fondamental.

6.2.3 Degré topologique

Participants : Bernard Mourrain, Mihail Vrahatis.

En collaboration avec M. Vrahatis du laboratoire de mathématiques appliquées de l'université de Patras (Grèce), nous continuons notre exploration de méthodes certifiées pour l'isolation de racines réelles. Nous appliquons le concept de degré topologique pour isoler et calculer les zéros réels d'un système d'équations non-linéaires, la seule information utilisée étant le signe d'expressions algébriques. Les théorèmes de base de la théorie de Kronecker-Picard relient le nombre de zéros réels à ce degré topologique. Une représentation des polynômes dans la base de Bernstein est utilisée pour construire des intervalles de séparation des racines de ces fonctions polynomiales sur les bords du domaine. Ce travail a été présenté dans le cadre des « Summer Research Conferences » de l'AMS à Mount Holyoke, Etats-Unis, juillet 2000.

6.3 Applications

6.3.1 Robotique et Théorie des mécanismes

Participants : David Daney, Jean-Pierre Merlet, Yves Papegay.

Nous poursuivons nos travaux dans ce domaine, actuellement en pleine explosion en raison des applications potentielles pour la machine-outil, l'automobile et le médical. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à :

- la calibration des robots parallèles : déterminer les paramètres géométriques réels d'un mécanisme existant pour en améliorer les performances dans le cadre d'un partenariat avec une PME construisant une machine-outil de ce type et de l'ex-projet Polka, futur Spaces,
- l'amélioration des méthodes de conception optimale et de détection des singularités, ainsi que le traitement des problèmes de vérification de trajectoire, dans le même cadre que précédemment,
- l'analyse du modèle géométrique des mécanismes de suspension automobile : il s'agit ici de déterminer de manière exacte les trajectoires possibles d'un corps particulier du mécanisme.

Dans le domaine médical, nous poursuivons notre développement d'un micro-robot pour l'endoscopie.

6.3.2 Étalonnage de robots parallèles

Participants : David Daney, Ioannis Emiris, Jean-Pierre Merlet.

La précision de positionnement d'un manipulateur parallèle est dépendante de la bonne connaissance de sa modélisation. Cette année, les algorithmes d'identification des paramètres géométriques du robot, proposés dans la thèse de D. Daney soutenue en février 2000, ont été implantés dans un contexte industriel. Ainsi, une étude post-doctorale chez CMW, portant sur l'étalonnage d'un hexapode dédié à un usinage à grande vitesse, a permis de fournir à notre partenaire un logiciel rassemblant différentes fonctionnalités liées à la commande, la visualisation et l'étalonnage du robot.

De plus, nous avons proposé une nouvelle méthode d'étalonnage permettant de supprimer la nécessité de certaines mesures difficiles à obtenir. Pour ce faire, nous utilisons des techniques d'éliminations qui fournissent des conditions algébriques indépendantes de ces paramètres. La résolution (par optimisation, analyse par intervalle) du nouveau système d'équations permet une meilleure robustesse par rapport aux erreurs de mesures. Cette technique devrait être étendue à d'autres domaines d'applications (ex : étalonnage de caméra).

6.3.3 Conception optimale et singularités des robots parallèles

Participants : Jean-Pierre Merlet, Luc Rolland.

Les performances des robots parallèles présentent une sensibilité très forte aux paramètres qui définissent les dimensions du mécanisme [11]. Il est donc important de procéder à une étude soigneuse du dimensionnement afin d'obtenir une machine optimale. Cette approche conception optimale nécessite d'avoir des outils efficaces pour l'analyse des performances d'un robot de dimensions données et une méthodologie permettant de restreindre progressivement l'espace de recherche pour obtenir finalement la solution optimale ou quasi-optimale.

L'analyse de performance est un problème difficile puisqu'il se ramène à un problème d'optimisation sous contraintes, étant entendu que l'on recherche un extremum global, chacune des fonctions intervenant dans le problème ayant une forme complexe, voire même non calculable analytiquement. On a toutefois la chance que, souvent il n'est pas nécessaire de calculer exactement les extremums car on peut se contenter d'en avoir une approximation avec une erreur bornée (par exemple, si ce calcul doit permettre un choix parmi des valeurs discrètes).

Nous avons exploité cette possibilité pour développer une méthode symbolique-numérique permettant de calculer quelles seront les erreurs maximales de positionnement d'un robot étant donné des bornes sur les valeurs des erreurs articulaires [29]. L'algorithme est incrémental dans le sens où il peut réutiliser les calculs effectués pour une certaine borne sur l'erreur de positionnement dans un autre calcul avec une borne inférieure.

La détection des singularités est aussi un problème crucial de l'analyse des performances. Dans ce problème, il s'agit de déterminer si le déterminant d'une matrice de dimension 6, fonction de 6 paramètres, peut s'annuler lorsque les valeurs des paramètres sont limitées à un hypercube. La méthode proposée précédemment reposait sur un calcul symbolique des mineurs d'ordre 5 puis sur une approche analyse par intervalles, utilisant le calcul précédent pour la détermination des bornes sur la valeur du déterminant. Malheureusement, vu la complexité de la matrice, le calcul symbolique des mineurs ne pouvait pas aboutir pour certaines géométries particulières ; nous avons investigué cette année l'utilisation d'une des fonctionnalités de la bibliothèque `ALIAS` qui permet d'une part de déterminer si les extremums d'une fonctionnelle sont de signe opposé et d'autre part, de définir la fonctionnelle à partir de déterminants de matrice, sans qu'il soit nécessaire de les développer. Nos premières investigations ont montré que la méthode est légèrement plus lente que notre méthode précédente (l'implantation est encore loin d'être optimale) mais semble d'une part fonctionner, quelle que soit la géométrie, et d'autre part, peut être utilisée quelque soit l'architecture mécanique.

Dans le domaine de la conception optimale, notre approche repose sur une utilisation de l'espace des paramètres pour lequel chacune des dimensions représente un des paramètres de conception. Dans cet espace chaque point représente une géométrie unique de robot. On considère ensuite un des critères du cahier des charges et l'on détermine les régions de l'espace des paramètres contenant l'ensemble des géométries de robot satisfaisant le critère. En procédant à ce calcul pour différents critères et en calculant les intersections des régions obtenues, on réduit progressivement l'espace de recherche pour les paramètres jusqu'à ce que sa taille permette, par exemple, de recourir à une discrétisation.

Nous avons déjà implanté cette approche pour différents critères en considérant que l'on n'avait que deux paramètres de conception : les rayons de la base et de la plate-forme (dans le cas général, le nombre de paramètres est de 48 et de 10 si l'on considère des tâches symétriques). Nous avons développé une nouvelle méthode qui permet d'obtenir une approximation de la région lorsque le critère est l'espace de travail, ceci avec 5 paramètres de conception. Cette méthode a été utilisée dans le cadre d'un contrat en cours de conclusion avec Alcatel Space Industries.

6.3.4 Vérification de trajectoire

Participants : Jean-Pierre Merlet, Luc Rolland.

Ce problème consiste à déterminer si une trajectoire arbitraire est faisable pour le robot, sachant que les variables de commande sont bornées. On rencontre ici deux difficultés : la première est que la trajectoire n'est pas définie a priori et la seconde est qu'elle ne peut être qu'imparfaitement suivie. Nous avons résolu ce problème en supposant que la trajectoire pouvait être définie pour chacun des paramètres comme une loi analytique fonction du temps. A partir de cette définition, un pré-processing symbolique permet d'obtenir une forme analytique pour les variables articulaires qui ne dépend que du temps (borné par convention entre 0 et 1). Cette forme est écrite explicitement dans un fichier. On utilise alors le parser de la bibliothèque `ALIAS` qui permet de calculer une évaluation par intervalle d'une fonction dont l'expression est écrite dans un fichier, étant donné des intervalles pour les inconnues. Une méthode de bissection permet alors de déterminer s'il existe un temps pour lequel les variables articulaires excèdent leurs bornes [28]. Cette méthode permet de prendre en compte d'éventuelles petites erreurs sur la réalisation de la trajectoire.

6.3.5 Micro-robot

Participant : Jean-Pierre Merlet.

Nous continuons notre développement d'un micro-robot parallèle à 3 degrés de liberté pour l'endoscopie dans le cadre d'un projet de coopération franco-israélien [25]. Dans le cadre de cette collaboration, le laboratoire LMarc de l'Université de Besançon a affiné notre conception mécanique et a fait procéder par la société DG Créations, à sa réalisation. Le prototype a été exposé fin septembre au salon Micronora, le salon européen des micro-technologies, et a reçu à cette occasion le prix du Micron d'Or. Dans sa version actuelle, le robot a un diamètre de 7mm pour une longueur de 28mm et est donc intégrable dans un système endoscopique. Nous allons procéder maintenant à l'élaboration de la commande de ce robot.

6.3.6 Suspension automobile

Participants : Yves Papegay, Jean-Pierre Merlet.

Nous nous intéressons de près depuis l'année dernière à l'étude des mécanismes de suspensions automobiles et de leurs modèles géométriques. En effet, des travaux antérieurs de J.P Merlet ont, d'une part montré que les approches classiques à base d'algorithmes numériques itératifs (de type Newton-Raphson avec estimée initiale) utilisés pour simuler le comportement des suspensions fournissent parfois des résultats incorrects, et en tout cas incomplets, etd'autre part, ont validé l'utilisation de méthodes de calcul exactes pour cette étude. Après avoir utilisé avec succès ces méthodes pour calculer, sur certains exemples de modèles géométriques de suspension, toutes les solutions et séparer les trajectoires, nous avons généralisé cette approche à des mécanismes de suspension plus compliqués.

Ainsi, cette année nous avons réalisé un étude très complète de deux mécanismes largement utilisés dans l'industrie automobile : la béquille Mac Pherson et une suspension parallèle à 5 barres. Sur ces deux mécanismes, nous avons largement testé et comparé les performances de trois types de méthodes : exactes, complètement symboliques, symboliques-numériques implantées dans la bibliothèque `ALP` et les méthodes basées sur l'arithmétique et l'analyse par intervalles implantées dans la bibliothèque `ALIAS`.

L'étude précise de la compléxité des calculs en fonction de la taille des mécanismes, l'analyse fine des propriétés des objets mathématiques qui apparaissent génériquement dans ces calculs, l'amélioration de la modélisation et l'adaptation des méthodes effectives employées sont les prochains défis à relever pour obtenir une simulation robuste et efficace.

6.3.7 Conformations moléculaires et géométrie de distances

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain, Théodore Nikitopoulos.

Étant donné une molécule, il est possible de définir une *matrice de distances*, dont le rang vaut cinq quand la molécule se place dans l'espace à trois dimensions. De manière inverse, une molécule de géométrie inconnue est spécifiée par une matrice des distances où certaines entrées (voire la majorité) sont inconnues. Des expériences (par Résonance Magnétique Nucléaire) fournissent des bornes inférieures et supérieures sur ces inconnues. Des raisonnements combinatoires, basés sur des propriétés géométriques comme l'inégalité triangulaire, nous permettent de déduire des bornes sur les distances qui ne sont pas mesurées par RMN.

Notre collaboration avec T. Nikitopoulos, qui travaille sur son mémoire de DEA à l'Université de Crète (Grèce) sous la direction de I. Emiris, nous a permis d'explorer différentes méthodes de *perturbations structurées* en MATLAB. Le but est, en commençant avec une matrice dont les coefficients ont des valeurs aléatoires dans les intervalles donnés, d'arriver à diminuer le rang de la matrice des distances. Des corrections sont imposées pour forcer les entrées à rester dans les intervalles donnés et maintenir la symétrie et une diagonale de zéros. Nous arrivons à estimer une conformation aléatoire, pour les molécules avec au plus 40 atomes. Pour les molécules avec 6-8 atomes, il s'agit de trouver toutes les conformations possibles, ce qui revient à préciser un ensemble infini dans certains cas (voir aussi [EM99b]). Plusieurs caractéristiques du problème matriciel, surtout pour ce qui concerne la théorie de matrices de distances, sont encore à exploiter.

6.3.8 Vision et modélisation géométrique

Participants : Didier Bondyfalat, Bernard Mourrain.

En architecture, en ingénierie civile, en robotique et dans bien d'autres domaines encore, il est important de pouvoir acquérir des informations structurelles sur une scène ou un objet. Les progrès grandissant de la vision artificielle tendent ainsi à construire des modèles virtuels de scènes, directement à partir de simples photographies. Malheureusement, ces modèles ne traduisent pas exactement la géométrie de la scène. Le travail de thèse de D. Bondyfalat a consisté à étudier et mettre en place des méthodes exploitant ces informations géométriques formelles dans des processus numériques tels que l'étalonnage de caméra ou la construction de modèles tridimensionnels. Ces considérations nous ont amené à étudier comment organiser ces données géométriques de manière à obtenir un algorithme de construction d'un modèle articulé satisfaisant toutes les contraintes. L'obtention d'un tel modèle permet ensuite d'améliorer les modèles approchés obtenus par les techniques classiques de vision artificielle par ajustement des paramètres du modèle articulé. Dans un deuxième temps, nous avons pensé que l'utilisation d'un plan (type plan cadastral) apportait une connaissance géométrique riche qui peut être mise à profit pour l'étalonnage des caméras. Cette année, nous avons beaucoup développé cette voie et nous avons obtenu des formulations très simples et compactes qui permettent d'exploiter directement certaines propriétés de parallélisme et d'orthogonalité vérifiées par la scène. En fait, ces formulations nous fournissent un algorithme d'étalonnage essentiellement linéaire. Une implémentation a été faite en C++, laissant entrevoir un gros potentiel pour le futur. L'ensemble de ces travaux a fait l'objet de deux parties d'une thèse qui a été rédigée et défendue cette année [12].

[EM99b] I. EMIRIS, B. MOURRAIN, « Computer Algebra Methods for Studying and Computing Molecular Conformations », *Algorithmica, Special Issue on Algorithms for Computational Biology 25*, 1999, p. 372–402.

6.3.9 Traitement du signal et équations polynomiales

Participants : Pierre Comon, Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet.

Nous nous intéressons ici à l'utilisation de statistiques d'ordre supérieur à 2 en traitement du signal. Nous considérons le cas où un message reçu y est la superposition d'une convolution d'une matrice H (le canal) par un message x et d'un bruit, supposé Gaussien. Le problème consiste à identifier H. Sous certaines hypothèses réalistes concernant le type de signal en entrée (BPSK, MSK, QPSK), une analyse statistique d'ordre ≥ 2 conduit à des contraintes polynomiales sur les coefficients de la matrice H. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps au cas d'un canal linéaire de longueur L. Nous obtenons alors des équations quadratiques sur nos indéterminées $H = (h_1, \ldots, h_L)$. Ce système définissant une intersection complète projective de dimension 0, nous avons pu appliquer directement le nouvel algorithme présenté dans [33]. Les performances et la qualité numérique des résultats sont tout à fait satisfaisantes et permettent d'envisager une résolution de ce type d'équations en temps réel.

6.3.10 Courbes et surfaces

Participants : Bernard Mourrain, Yves Papegay.

Dans le cadre de l'action de recherche coopérative COSTIC (voir section 8.1.1) sur les courbes et surfaces, nous nous sommes intéressés à certains problèmes algébriques liés aux répresentations et manipulations de ces objets géométriques.

Les logiciels de visualisation de courbes et de surfaces traitent en général assez mal le cas des courbes et des surfaces définies implicitement par des systèmes d'équations polynomiales. Parmi les problèmes à résoudre efficacement pour faire mieux, il y en a trois qui sont prépondérants :

- quels sont les points à calculer pour une interpolation facile et fidèle ?
- comment résoudre les équations polynomiales et calculer ces points ?
- comment relier ces points ?

Après quelques expérimentations, nous avons implémenté un petit outil de visualisation qui utilise pour aborder ces trois problèmes, respectivement, des algorithmes de maillage naïfs, une méthode semi-numérique de résolution d'équations dite d'« exclusion » et un outil pour relier les points reposant sur le concept de « voisins naturels » développé par F. Cazals, du projet Prisme. Ce petit outil produit des tracés encourageants que nous continuons à améliorer.

En collaboration avec S. Lazard, du projet Isa à l'Inria Lorraine, nous nous sommes intéressés aux manipulations algébriques et géométriques de quadriques en trois dimensions. Ces objets sont utilisés pour représenter graphiquement des scènes complexes, offrant souvent une modélisation plus synthétique et donc plus économe en espace mémoire. Un des problèmes de base consiste à calculer de manière robuste et efficace l'intersection de deux ou trois quadriques. Une première implémentation expérimentale, détectant et analysant les cas de dégénérescence d'intersection a été faite en `MAPLE`. Nous envisageons d'étendre cette étude à des prédicats géométriques liés à ces intersections.

6.3.11 Interpolation géométrique

Participants : Bernard Mourrain, Philippe Trébuchet, Olivier Devillers.

Un problème pouvant apparaître en métrologie consiste à déterminer les paramètres d'une forme géométrique à partir d'un certain nombre de mesures. Le cas que nous considérons ici est celui d'une forme cylindrique. Dans un travail en collaboration avec F. Preparata, nous analysons le nombre de cylindres passant par 5 points et leur graphe d'aspect par rapport au lieu singulier. Nous nous intéressons également aux cylindres passant par 4 points et de rayon fixé ou de rayon extrémal et montrons comment calculer efficacement ces solutions.

6.3.12 Algorithme du Roadmap

Participants : Yves Papegay, Bernard Mourrain.

Nous nous intéressons depuis 1993 à la planification de mouvements conservant le contact et notamment aux cas du mouvement de polyèdres dans des environnements polyédraux non convexes en utilisant des méthodes reposant sur le calcul et l'étude de l'espace des configurations. Si la planification de mouvements quelconques ne requiert en général qu'une connaissance approximative de l'environnement, les mouvements conservant le contact correspondent à des mouvements sur la frontière des obstacles de l'espace de configuration, ce qui en nécessite la connaissance précise. Le problème se ramène ainsi à décrire explicitement un sous-ensemble semi-algébrique particulier de l'espace des configurations, ce que nous faisons par la méthode du *Roadmap*, un algorithme de calcul effectif des frontières d'un ensemble semi-algébrique basé sur la stratification et la résolution d'équations polynomiales à l'aide de résultants, dont une originalité est d'être de complexité seulement et simplement exponentielle. L'implémentation totale de cet algorithme pour la planification de mouvements de polygones en contact avec un environnement polygonal non convexe a été un bon terrain expérimental pour tester nos méthodes et nos outils de résolution d'équations polynomiales et notamment les outils de la bibliothèque `ALP`. Malheureusement sa complexité ne permet pas de l'étendre directement au cas tridimensionnel non-linéaire intéressant les applications réelles d'assemblage et d'usinage. Nous allons donc investiguer des méthodes heuristiques s'appuyant sur la double représentation des objets, à la fois dans l'espace de configuration et dans l'espace classique pour contourner ces limitations.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Alcatel-Deltalab

Participant : Jean-Pierre Merlet.

Alcatel Space Industries nous avait contacté en 1998 pour la conception d'hexapodes permettant le test fin de placement d'antennes pour un nouveau satellite, le plus gros jamais réalisé, en cours de conception. Le programme ayant pris du retard, ce n'est qu'en fin d'année que nous avons pu finaliser ce contrat en introduisant le partenaire Deltalab, une société grenobloise, familière avec la construction de telle machine, et qui en assurera la réalisation mécanique, la commande et la maintenance. Du point de vue de la recherche, nous avons ici à gérer un problème de conception optimale avec un cahier des charges sévères, sur lequel nous avons pu expérimenter nos nouvelles méthodes d'analyse de performances et de conception.

7.2 Constructions Mécaniques des Vosges

Participants : David Daney, Luc Rolland, Jean-Pierre Merlet.

Nous continuons notre partenariat avec cette PME, en collaboration avec le projet Polka. D. Daney a rejoint en milieu d'année cette société pour un post-doc industriel. L. Rolland, quant à lui, continue son travail sur l'étude des imprécisions de suivi de trajectoire en utilisant les procédures rapides de calcul de modèle géométrique direct développées par le projet Polka.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Action de Recherche Coopérative CoSTIC

Participants : Bernard Mourrain, Yves Papegay.

Cette Action de Recherche Coopérative est dédiée à l'étude de courbes et surfaces algébriques. Elle se propose d'étudier et de développer des méthodes prenant en compte les spécificités algébriques de ces objets, et permettant de les représenter et de manipuler de manière efficace et robuste. Il s'agit en particulier d'analyser ces objets (singularité, topologie), d'en construire une représentation numérique (maillage) et de les manipuler de manière efficace (intersections). En plus du projet Saga qui en est le coordinateur, elle comprend les projets Prisme (Sophia Antipolis), Isa (Nancy), Gamma (Rocquencourt) et l'UMR CNRS 6621 (Nice).

8.1.2 Autres

B. Mourrain est coorganisateur (avec M. Giusti, G. Villard, J.A. Weil) des Journées Nationales de Calcul Formel, qui se sont déroulées à Aussois (centre Paul Langevin du CNRS,Vallée de la Maurienne, Savoie) du 9 au 12 mai 2000 ; ces journées ont bénéficié du soutien du GdR ALP, de l'UMS Medicis, de l'Inria et de la Région Rhône-Alpes.

8.2 Actions européennes

8.2.1 Effective Computational Geometry

Participants : Ioannis Emiris, Bernard Mourrain, Yves Papegay.

Le projet européen Effective Computational Geometry (FET Open-RTD, IST, 3 ans) vient d'être accepté. En collaboration avec le projet Prisme, nous allons travailler sur le calcul algébrique rapide et fiable en géométrie algorithmique, les problèmes d'intersections et de prédicats pour les objets courbes et l'utilisation de perturbations symboliques infinitésimales pour éviter les dégénérescences et la triangulation de surfaces implicites.

8.3 Actions internationales

8.3.1 Relations bilatérales internationales

- Collaboration bilatérale Procore avec l'équipe du Dr. M. Rojas et du Prof. S. Smale du département de mathématiques de « City University of Hong-Kong ». Elle concerne des méthodes formelles et numériques efficaces pour la résolution de systèmes d'équations polynomiales. Deux visites de I. Emiris en juin et en septembre 2000 et une de B. Mourrain en juin 2000 à Hong-Kong, et une visite du Prof. M. Rojas à Sophia Antipolis en septembre 2000 ont été effectuées.
- Collaboration avec H. Hirosawa, ETL Tsukuba, Japon. Visite de B. Mourrain de 10 jours en Mars 2000.
- I. Emiris a participé au projet bilatéral Aurore d'une équipe du département de mathématiques de l'université de Nice dirigée par le Prof. A. Galligo, avec la société SINTEF à Oslo (Norvège), sur la tracé de courbes et la modélisation géométrique par des outils algébriques et numériques.
- Coopération bilatérale avec le Technion d'Haifa (Israël) et le LMarc de Besançon pour le développement de micro-robot dans le cardre de l'action « Usine du Futur », J.P. Merlet.

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la Communauté scientifique

- M. Elkadi et B. Mourrain ont organisé en collaboration avec E. Hubert du projet Café, une série de séminaires à l'Inria Sophia Antipolis dans le cadre d'un Trimestre d'Algèbre Constructive.
- J.P. Merlet est éditeur du journal électronique « Electronic Journal of Computational Kinematics ». Ce journal est soutenu par la commission technique « Computational Kinematics » de l'IFToMM (International Federation on the Theory of Machines and Mechanisms), dont il est président, il est membre du Conseil Scientifique du laboratoire LMarc de Besançon, membre suppléant du conseil de spécialistes (61^{e} section) de l'université de Nice. Il a participé aux développements du démonstrateur micro-système dans le cadre du « Pôle Micro-systèmes » du CNRS, a été membre du comité de Programme de la conférence « Advances in Robot Kinematics », Piran-Portoroz (Slovénie), juin 2000, et membre du comité scientifique des conférences « IEEE International Conference on Robotics and Automation » (dans laquelle il a co-organisé une session spéciale), Iros, « International Symposium on Experimental Robotics ». Il a été relecteur pour des projets soumis au Fond Canadien pour l'Aide à la Recherche et à l'Inserm.
- B. Mourrain a organisé en collaboration avec T. Sasaki, M.T. Noda et R. Corless, une session « Approximate Algebraic Computation : Towards Symbolic-Numeric Algorithms » à la Conférence Imacs, « Applications of Computer Algebra » à St Petersburg, Russie, en juin 2000.

9.2 Participation à des colloques

- L. Busé et M. Elkadi ont participé et présenté le travail sur les résultants résiduels à la conférence Mega, à Bath, Grande-Bretagne, du 20 au 24 juin 2000.
- I. Emiris s'est rendu deux fois pour une semaine au département de Mathématiques de la « City University of Hong-Kong », Chine, dans le cadre de la collaboration bilatérale Procore, a été invité à la conférence de AMS-IMS-SIAM «Symbolic Computation Solving Equations in Algebra, Geometry and Engineering » à Mt. Holyoke, États-Unis, en juin 2000, a présenté un papier à la conférence ACM de Géométrie Algorithmique à Hong Kong, Chine, en juin 2000 et a participé aux Journées de Géométrie Algorithmique à Luminy en octobre 2000, y compris la rencontre de l'action CoSTIC.
- J.P. Merlet a participé à la conférence «IEEE Robotics and Automation» à San Francisco, Etats-Unis, du 24 au 27 avril 2000, a participé au symposium HMM 2000 à Cassino, Italie, du 11 au 13 mai 2000, a participé au congrès SEA à Toulouse, France, du 14 au 16 juin 2000 et à la conférence Ark à Piran-Portoroz, Slovénie, du 26 au 30 juin 2000.
- B. Mourrain a participé à la conférence AMS-IMS-SIAM « Symbolic Computation: Solving Equations in Algebra, Geometry and Engineering», à Mt Holoyoke, Etats-Unis, du 11 au 15 juin 2000, à ACA'2000, « 6th Imacs Conference on Applications of Computer Algebra» à St. Petersburg, Russie, du 25 au 28 juin 2000, à la conférence « Foundations of Computational Mathematics» en l'honneur des 70 ans du Prof. Steve Smale, à Hong Kong, Chine, du 13 au 17 juillet 2000, à la conférence « Structured matrices: Analysis, Algorithms and Applications » à Cortona, Italie, du 25 au 29 septembre 2000, au Colloquium « Constructive Algebra and Systems Theory » à l'Académie des Arts et des Sciences d'Amsterdam, Pays-Bas, du 1er au 3 novembre 2000 et a participé aux Journées de Géométrie Algorithmique à Luminy en octobre 2000.
- Y. Papegay a participé aux Journées de Géométrie Algorithmique à Luminy en octobre 2000 et a participé au Colloque pour la science «Voyage dans l'imaginaire mathématique» à Paris, France, le 18 septembre 2000.
- O. Ruatta a assisté au cours niveau 2 «Fonctions symétriques, déterminant et polynômes multivariés» co-organisé par l'IMAR et l'UBO qui s'est déroulé au Centre ornithologique d'Ouessant du 4 au 8 octobre 2000.
- P. Trébuchet a participé à la conférence Issac 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, à St Andrews, Ecosse, du 6 au 9 août 2000 où il a présenté ses travaux sur les formes normales et a participé aux Journées de Géométrie Algorithmique à Luminy en octobre 2000.

9.3 Enseignement

Les membres du projet SAGA participent à des enseignements de troisième cycle :

- M. Elkadi : cours de DEA de mathématique de l'université de Nice-Sophia Antipolis, méthodes effectives en géométrie algébrique (15h).

– I. Emiris : cours de DEA d'Informatique de l'université de Crète (Grèce), géométrie algorithmique (28h) ; DEA d'informatique de l'université d'Athènes (Grèce), géométrie algorithmique (42h) ; cours de DEA de mathématiques de calcul et de décisions à l'université de Patras (Grèce) en mai 2000, méthodes matricielles pour la résolution de systèmes algébriques (8h) ; cours de DEA « Effective algebraic geometry and applications » dans le cadre du programme « Mathematics of Computers and Decisions » à l'université de Patras (8h) ; cours de DEA MDFI de l'université d'Aix-Marseille, systèmes polynômiaux et applications (3h).

– B. Mourrain : cours de DEA de mathématique de l'université de Nice-Sophia Antipolis, méthodes effectives en géométrie algébrique (45h) ; cours de DEA «Effective algebraic geometry and applications» dans le cadre du programme «Mathematics of Computers and Decisions» à l'université de Patras (15h) ; cours de DEA Ecole Polytechnique-Ecole National Supérieure, courbes et surfaces (10h) ; cours de DEA MDFI de l'université d'Aix-Marseille, systèmes polynômiaux et applications (3h).

Ils interviennent également en second cycle universitaire et dans des écoles d'ingénieurs :

– L. Busé, D. Bondyfalat, M. Elkadi, P. Trébuchet ont d'importantes activités d'enseignement à l'université de Nice-Sophia Antipolis de par leur statut d'enseignant-chercheur ou de moniteur.

– I. Emiris : cours en maîtrise d'informatique de l'université de Crète (Grèce), mathématiques discrètes (39h) et structures de données (52h).

– J.P. Merlet : cours de robotique à l'Essi (3h), à l'Ensta (3h), à l'Ecole des Mines de Paris (6h) ; organisation de la semaine robotique à l'Isia (Ecole des Mines de Paris).

– B. Mourrain : cours en maîtrise d'ingénierie mathématique de l'université de Nice-Sophia Antipolis, algorithmique (50h).

– Y. Papegay : cours en maîtrise d'ingénierie mathématique de l'université de Nice-Sophia Antipolis, langages et systèmes (50h), cours d'informatique/Maple en Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles Scientifiques au Centre International de Valbonne (90h) .

Les membres du projet Saga ont participé à 6 thèses dont 3 en tant que rapporteur, 1 en tant que président, 2 en tant que membre du jury. Par ailleurs, J.P. Merlet a rapporté pour la promotion au titre de « Full Professor » pour une université australienne et une université américaine.

9.4 Thèses

Thèses en cours :

1. Laurent Busé, *Étude algorithmique des résultants sur une variété algébrique*, université de Nice-Sophia Antipolis.

2. Luc Rolland, *Algorithmes algébriques pour la commande de robots parallèles de haute précision*, université de Nancy.

3. Olivier Ruatta, *Dualité des algèbres et problèmes d'effectivité en géométrie algébrique*, université d'Aix-Marseille II.

4. Philippe Trébuchet, *Vers des algorithmes de résolution d'équations polynomiales stables et rapides*, ENS Cachan.

Thèses soutenues en 2000 :

1. Didier Bondyfalat, *Interaction symbolique et numérique : application à la vision artificielle*, université de Nice-Sophia Antipolis, (12/09/00).

2. David Daney, *Étalonnage géometrique des robots parallèles*, université de Nice-Sophia Antipolis, (02/02/00).

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] J. Canny, I. Emiris, « A Subdivision-based algorithm for the sparse resultant », *J. ACM 47*, 3, 2000, p. 417–451.

[2] I. Emiris, B. Mourrain, « Computer algebra methods for studying and computing Molecular Conformations », *Algorithmica, Special Issue on Algorithms for Computational Biology 25*, 1999, p. 372–402.

[3] I. Emiris, B. Mourrain, « Matrices in elimination theory », *J. of Symbolic Computation 28*, 1&2, 1999, p. 3–44.

[4] I. Emiris, *Algorithmes algébriques et géométriques*, Habilitation à diriger des recherches, université de Nice - Sophia Antipolis, janvier 2000.

[5] H. Hirukawa, Y. Papegay, « Motion planning of objects in contact by the silhouette algorithm », *in : IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 3020–3028, San Francisco, Etats-Unis, mai 2000.

[6] J. Merlet, « Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry », *Int. J. of Robotics Research 8*, 5, octobre 1989, p. 45–56.

[7] J. Merlet, *Les robots parallèles*, Hermès, Paris, France, 1997.

[8] B. Mourrain, V. Pan, « Multivariate polynomials, duality and structured matrices », *J. of Complexity 16*, 1, 2000, p. 110–180.

[9] B. Mourrain, « Isolated points, duality and residues », *J. of Pure and Applied Algebra 117& 118*, 1996, p. 469–493, Special issue for the Proc. of the 4th Int. Symp. on Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA).

[10] B. Mourrain, *Algorithmes et applications en géométrie algébrique*, Habilitation à diriger des recherches, université de Nice-sophia Antipolis, septembre 1997.

Livres et monographies

[11] J.-P. Merlet, *Parallel robots*, Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas, 2000.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[12] D. Bondyfalat, *Interaction symbolique et numérique : application à la vision artificielle*, thèse de doctorat, université de Nice-Sophia Antipolis, septembre 2000.

[13] D. Daney, *Etalonnage géométrique des robots parallèlles*, thèse de doctorat, université de Nice-Sophia Antipolis, février 2000.

[14] I. Emiris, *Algorithmes algébriques et géométriques*, Habilitation à diriger des recherches, université de Nice-Sophia Antipolis, janvier 2000.

Articles et chapitres de livre

[15] L. Busé, M. Elkadi, B. Mourrain, « Generalized resultant over unirational algebraic varieties », *J. of Symbolic Computation 29*, 2000, p. 515–526.

[16] J. Canny, I. Emiris, « A Subdivision-based algorithm for the sparse resultant », *J. ACM 47*, 3, 2000, p. 417–451.

[17] S. Dalmas, Y. Papegay, H. Prieto, « Mathematica as an OpenMath application », *SIGSAM Bulletin*, 4, 2000.

[18] M. Elkadi, B. Mourrain, « Algorithms for residues and Lojasiewicz exponents », *J. of Pure and Applied Algebra 153*, 2000, p. 27–44.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[19] C. D'Andrea, I. Emiris, «Solving degenerate polynomial systems», *in : AMS-IMS-SIAM Conf. on Symbolic Manipulation*, Mt. Holyoke, Etats-Unis, juillet 2000.

[20] D. Daney, S. Lazard, S. Robbins, S. Whitesides, « Géométrie algorithmique pour la CAO et la conception optimale de robots », *in : ACFAS*, Montréal, Canada, mai 2000.

[21] I. Emiris, « Computing integer points in Minkowski sums », *in : ACM Symp. on Computational Geometry*, p. 29–36, Hong-Kong, Chine, juillet 2000.

[22] A. Fronville, O. Devillers, M. Teillaud, B. Mourrain, « Algebraic methods and arithmetic filtering for exact predicates on circle arcs », *in : ACM Symp. on Comp. Geometry*, Hong Kong, Chine, juillet 2000.

[23] H. Hirukawa, B. Mourrain, Y. Papegay, « A symbolic-numeric silhouette algorithm », *in : IEEE International conference on Robotics Systems*, Takamatsu, Japon, novembre 2000.

[24] H. Hirukawa, Y. Papegay, «Motion planning of objects in contact by the silhouette algorithm», *in : IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 3020–3028, San Francisco, Etats-Unis, avril 2000.

[25] J. Merlet, M. Dahan, « Un micro-robot parallèle pour l'inspection industrielle et l'endoscopie médicale », *in : Troisième Journées du Pôle Micro-robotique*, Cachan, France, juillet 2000.

[26] J. Merlet, M. Perng, D. Daney, « Optimal trajectory planning of a 5-axis machine tool based on a 6-axis parallel manipulator », *in : ARK*, p. 315–322, Piran, Slovénie, juillet 2000.

[27] J. Merlet, « ALIAS: an interval analysis based library for solving and analyzing system of equations », *in : SEA*, Toulouse, France, juin 2000.

[28] J. Merlet, « An efficient trajectory verifier for motion planning of parallel machine », *in : Parallel Kinematic Machines Int. Conf.*, Ann Arbor, Etats-Unis, septembre 2000.

[29] J. Merlet, « A formal-numerical approach to determine the accuracy of a parallel robot in a 6D workspace », *in : 13th RoManSy*, Zakopane, Pologne, juillet 2000.

[30] J. Merlet, « An historical perspective of robotics », *in : International Symposium on History of Machines and Mechanisms, HMM2000*, M. Ceccarelli (éditeur), Kluwer, p. 379–386, Cassino, Italie, mai 2000.

[31] J. Merlet, « Kinematics is not dead », *in : IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San-Francisco, Etats-Unis, mai 2000.

[32] J. Merlet, « On the separability of the solutions of the direct kinematics of a special class of planar 3-RPR parallel manipulator », *in : 26th ASME Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Baltimore, Etats-Unis, septembre 2000.

[33] B. Mourrain, P. Trébuchet, « Solving projective complete intersection faster », *in : ISSAC*, p. 231–238, St Andrews, Ecosse, août 2000.

Rapports de recherche et publications internes

[34] B. Mourrain, H. Prieto, « A framework for symbolic and numeric computations », *rapport de recherche n° 4013*, Inria, 2000, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4013.html.

Divers

[35] J. Merlet, « Rapport de fin de contrat Deltalab », août 2000.