INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet CAFÉ

Calcul Formel et Équations

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

2001

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Manuel Bronstein [DR]

Assistante de projet

France Limouzis [TR, à temps partiel dans le projet]

Personnel Inria

Stéphane Dalmas [IR, 10%]

Evelyne Hubert [CR]

Alban Quadrat [CR, depuis décembre 2001]

Jacques–Arthur Weil [CR (MdC en détachement de l'université de Limoges), depuis septembre 2001]

Personnel UNSA

Marc Gaëtano [Maître de conférences]

Chercheur doctorant

Raphaël Bomboy [ATER UNSA, jusqu'à septembre 2001]

Stagiaires

Gaurav Chatley [mai–juillet 2001]

Emmanuelle Dottax [avril–juin 2001]

Sébastien Lafaille [avril–juin 2001]

2 Présentation et objectifs généraux

Notre but est de développer de nouvelles méthodes de résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles, c'est-à-dire d'équations où les inconnues représentent des fonctions plutôt que des valeurs numériques, et de faciliter le transfert de ces méthodes dans les sciences de l'ingénieur en produisant les programmes et outils nécessaires pour les appliquer à des problèmes industriels. Les équations fonctionnelles qui sont l'objet de nos études sont plus particulièrement les équations différentielles et les équations aux différences et q–différences.

Axes de recherche

- Algorithmes algébriques : nous étudions des algorithmes efficaces, basés sur l'algèbre différentielle (théorie des idéaux différentiels et théorie de Galois différentielle) ainsi que leurs généralisations aux équations aux différences et au-delà à des équations plus générales. Nous étudions aussi le traitement des cas non-génériques en présence de paramètres dans les équations.
- Bases de données mathématiques : nous développons une base de données déductive de formules mathématiques, qui permet de stocker naturellement les connaissances non algorithmiques utilisables en calcul formel. Ce thème engendre de nombreux problèmes au croisement du calcul formel, de la réécriture, et de la déduction automatique.
- Bibliothèques dédiées de calcul formel : nous implantons nos méthodes dans des bibliothèques dédiées utilisables à partir de divers systèmes de calcul formel.

- Composants logiciels : nous développons les outils et protocoles nécessaires à l'utilisation de bases de données et de bibliothèques dédiées comme composants logiciels d'un environnement plus large de calcul scientifique.

Relations internationales et industrielles

- Projets internationaux : nous avons participé au projet OpenMath (ESPRIT Multimedia Standards 24.969), ainsi qu'aux groupes de travail CATHODE–2 (ESPRIT WG 24.490) et « Math » (W3C), et au projet *Direct Computer Algebra Methods for Exact Solutions of Systems of Linear Functional Equations* de l'institut Liapunov. Nous participons maintenant au réseau thèmatique *OpenMath* (IST-2000-28719), à un nouveau projet de l'institut Liapunov, à un projet du PRA franco–chinois et à deux PAI bilatéraux (Angleterre et Slovénie).
- Contacts industriels : nous sommes en contact avec les groupes de développement des principaux systèmes de calcul formel (NAG, SciFace, WMI, WRI) ainsi qu'avec l'éditeur scientifique Springer-Verlag.
- Relations universitaires : nous collaborons activement avec plusieurs laboratoires travaillant dans le domaine du calcul formel : GAGE (École Polytechnique), LACO (Limoges), ETH (Suisse), RIACA (Hollande), ORCCA (Ontario, Canada), l'université de Kent (UK), l'Academia Sinica (Chine), le centre de calcul de l'académie des sciences de Russie (Moscou) et l'université de Ljubljana (Slovénie).

3 Fondements scientifiques

3.1 Algorithmes pour les équations linéaires

Mots clés : algèbre linéaire, algèbre différentielle, équations différentielles, équations aux différences, intégration formelle, solutions analytiques, quadratures, solutions en forme close, fonctions spéciales, théorie de Galois.

L'objectif de ce thème est d'étudier la résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles linéaires, principalement différentielles et aux (q)–différences. L'importance de l'approche par linéarisation des équations différentielles dans pratiquement toutes les sciences de l'ingénieur est bien connue, et se reflète dans l'importance des investissements en ordinateurs et temps de calcul consacrés à leur résolution numérique. Ingénieurs et physiciens essaient d'étendre la connaissance du linéarisé au problème non–linéaire, ce qui montre d'autant plus l'utilité d'une analyse fine de la structure du linéaire. La connaissance de solutions formelles amène à une meilleure compréhension des modèles étudiés, car les solutions ainsi obtenues contiennent des informations sur la structure même des problèmes résolus.

Une équation différentielle (resp. aux différences) ordinaire linéaire est une équation de la forme

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y(x) = b(x)\,,$$

respectivement

$$a_n(x)y(x+n) + \ldots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = b(x)\,,$$

où l'inconnue y, ainsi que les coefficients b et les a_i, sont des fonctions de la variable x. On cherche à déterminer s'il existe des solutions *Liouvilliennes*, c'est à dire si on peut exprimer au moins une solution non–nulle par une formule finie faisant intervenir des opérations algébriques, des primitives (resp. des sommes) et des exponentielles (resp. des produits). Ces solutions sont aussi appelées solutions en quadratures ou bien en forme close. Ce type de solution n'existe pas toujours lorsque l'ordre n est plus grand que 1 et que les coefficients a_i ne sont pas constants. Par exemple, l'équation de Bessel :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

n'en admet pas (ses solutions sont les fonctions de Bessel, qui sont définies implicitement par cette équation). Plus difficiles pour les systèmes de calcul formel, les équations :

$$(x^3+1)(x^2+1)(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2+2x-1)\frac{dy}{dx} + 15(x^3+1)y(x) = 0 \tag{1}$$

et

$$y(x+2) + y(x+1) + xy(x) = 0 \tag{2}$$

n'en admettent pas non plus, alors que :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{7x-4}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2592x^2-2963x+560}{252x^2(x-1)^2}\frac{dy}{dx} + \frac{57024x-40805}{24696x^2(x-1)^2}y(x) = 0 \tag{3}$$

et

$$y(x+2) + \frac{(x+1)(5x^2+8x+4)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x+1) - \frac{x^2(x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+3)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x) = 0 \tag{4}$$

en admettent. On notera que Maple 7 et Mathematica 4.0 ne sont capables, ni de trouver des solutions Liouvilliennes de (3) ou (4), ni de prouver que (1) ou (2) n'en ont pas. La théorie de Galois différentielle, développée tout d'abord par Picard et Vessiot au début du siècle, puis de façon algébrique principalement par Kolchin dans les années 60, associe un groupe de Galois à une équation de ce type, et donne des critères liant l'existence de solutions en forme close à une propriété de ce groupe. Des algorithmes permettant de tester cette propriété à partir de l'équation seulement[Kov86,Sin80] ont rendu le problème de l'existence de solutions en forme close décidable dans le cas de coefficients polynomiaux. Une généralisation récente de cette théorie aux équations aux différences finies[SvdP97] a engendré la découverte d'un premier algorithme de calcul des solutions Liouvilliennes de ces équations pour des coefficients polynomiaux[HS99]. Dans les deux cas, la complexité de ces algorithmes ainsi que leur besoin

[Kov86] J. Kovacic, « An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations », *Journal of Symbolic Computation 2*, 1, March 1986, p. 3–43.

[Sin80] M. Singer, « Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Differential Equations », *American Journal of Mathematics 103*, 1980, p. 661–682.

[SvdP97] M. Singer, M. van der Put, *Galois Theory of Difference Equations*, *LNM 1666*, Springer, 1997.

[HS99] P. Hendriks, M. Singer, « Solving Difference Equations in Finite Terms », *Journal of Symbolic Computation 27*, 3, March 1999, p. 239–260.

de résolution d'équations intermédiaires non–linéaires les rendent difficilement applicables en pratique, sauf pour les équations du second ordre.

Notre action dans ce thème a plusieurs buts :

- la généralisation des théories et méthodes à des équations aux (q)-différences,
- la généralisation des algorithmes à des classes de coefficients contenant des fonctions plus générales,
- le développement d'algorithmes permettant de calculer des solutions contenant des fonctions plus générales,
- l'amélioration des algorithmes existants afin de pouvoir résoudre des équations d'ordres supérieurs,
- le développement de bibliothèques dédiées fournissant ces fonctionnalités de résolution.

3.2 Algorithmes pour les systèmes différentiels non linéaires

Mots clés : algèbre différentielle, algèbre aux différences, élimination, système d'équations différentielles, invariants différentiels, symétrie.

Des systèmes mécaniques pas si complexes, des réaction chimiques ou des systèmes contrôlés ne peuvent pas toujours être modélisés par des systèmes différentiels explicites ni même déterminés. Apparaissent naturellement les systèmes différentiels implicites. Ces systèmes peuvent être sur-contraints ou sous-contraints et les contraintes n'apparaissent pas forcément explicitement.

Pour les systèmes dynamiques (différentiels explicites) et certains types de systèmes aux dérivées partielles, le théorème de Cauchy ou de Cauchy–Kowaleskaya assure l'existence et l'unicité d'une solution pour certaines conditions initiales. La question de l'existence est déjà délicate dans le cas d'un système différentiel non-linéaire quelconque.

Une fois l'existence d'une solution assurée, plusieurs questions se posent. Quel est le *degré de liberté* du système ? Combien de fonctions où constantes doivent être fixées pour déterminer de façon unique la solution ? Quelles sont les conditions initiales qui donnent lieu à une solution ? À une solution réelle ? Quelle est la variété où vivent les solutions ? Une fonction des inconnues et de leurs dérivées s'annulle-t'elle sur les solutions ? Quelles sont les équations satisfaites par un sous-ensemble des inconnues ? Si le système original est un système aux dérivées partielles, les solutions satisfont elles une équation différentielle ordinaire ?

Par équation différentielle algébrique, nous entendons, le plus souvent, des équations différentielles polynomiales en les inconnues et leurs dérivées. On peut néanmoins aussi considérer les équations qui font intervenir des fonctions, telles sin et exp, elles-mêmes définies par des équations différentielles polynomiales. L'algèbre différentielle[Rit50,Kol73] donne les fondements théoriques pour répondre aux questions ci-dessus dans le cas des systèmes différentiels algébriques. Les algorithmes de décomposition caractéristique, ou de triangulation-décomposition,

[Rit50] J. Ritt, *Differential Algebra*, *Colloquium publications*, *XXXIII*, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).

[Kol73] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, *Pure and Applied Mathematics*, *54*, Academic Press, New York-London, 1973.

donnent le moyen constructif de répondre à ces questions pour un système différentiel algébrique donné.

Plus précisément, les algorithmes de décomposition caractéristique [Kol73,BLOP95,BLOP97,?] donnent une *bonne* représentation d'un système différentiel algébrique donné, disons $\mathcal{S}$. L'algorithme prend en entrée le système $\mathcal{S}$ et un classement des indéterminées différentielles, ou variable dépendantes, c'est à dire un ordre total sur toutes les dérivées de ces indéterminées qui soit compatible avec les dérivations. Le résultat de l'algorithme est alors un ensemble fini de systèmes différentiels $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$, tel que l'ensemble des solutions analytiques de $\mathcal{S}$ soit égal à l'union des solutions non singulières des systèmes $\mathcal{C}_i$. Les systèmes $\mathcal{C}_i$ ont une forme particulière : ils sont *différentiellement triangulaires* par rapport au classement choisi. Ils sont de plus minimaux, en un certain sens, parmi les systèmes admettant le même ensemble de solutions non singulières. Par conséquents les réponses aux questions précédentes se lisent sur les $\mathcal{C}_i$, à condition d'avoir choisi un classement adéquat.

Alors que les algorithmes lourdement récursifs proposés par Ritt et Kolchin font intervenir des factorisations dans des tours d'extension, les algorithmes récents procèdent sans récursion ni factorisation [BLOP97,?]. Bien qu'enfin effectifs, des algorithmes aussi généraux et potentiellement puissants ne permettent pas toujours d'obtenir une réponse en un temps raisonnable. Il est souhaitable à la fois d'améliorer ces algorithmes généraux et leurs implantations ainsi que d'apporter des alternatives pour des classes de problèmes spécialisés.

Les systèmes symétriques forment une classe de problèmes qui ne sont pas traitables en pratique par une triangulation-décomposition directe. En effet, l'introduction d'un ordre entre les dérivées casse la symétrie et engendre des expressions intermédiaires de taille excessive. Une idée naturelle est de vouloir utiliser cette symétrie pour, au contraire, diminuer les calculs.

Ce idée est développée en collaboration avec E. Mansfield, University of Kent, et I. Kogan, Yale University. L'approche que nous considérons est de ré-écrire le système en termes des invariants différentiels du groupe de symétrie et d'utiliser les opérateurs différentiels invariants au lieu des dérivations par rapport aux variables indépendantes.

Le premier écueil est le calcul effectif des invariants différentiels. Pour cela nous nous basons sur la méthode du repère mobile de Fels et Olver [FO99]. Le second écueil provient du fait que les opérateurs différentiels invariants ne commutent pas entre eux. On sort du cadre actuel de l'algèbre différentielle et des algorithmiques existantes où la commutativité des opérateurs de dérivation est une hypothèse fondamentale. Une généralisation de l'algèbre différentielle est à établir.

L'algèbre aux différences [Coh65] adopte un point de vue algébrique sur les équations fonctionnelles similaire à l'algèbre différentielle introduite par Ritt. Néanmoins, il n'y a pas encore

[BLOP95] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, M. Petitot, « Representation for the radical of a finitely generated differential ideal », *in : ISSAC'95*, A. Levelt (éditeur), ACM Press, New York, 1995.

[BLOP97] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, M. Petitot, « Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals », *rapport de recherche n°IT-306*, LIFL, 1997.

[?] *** ERROR: citation '**hubert00**' undefined ***

[FO99] M. Fels, P. J. Olver, « Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations », *Acta Appl. Math. 55*, 2, 1999, p. 127–208.

[Coh65] R. Cohn, *Difference algebra*, New York-London-Sydney: Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons. XIV, 1965.

d'algorithmes effectifs pour la représentation de l'ensemble des solutions. Nous aspirons à établir une théorie de l'élimination pour les équations aux différences.

3.3 Analyse des solutions singulières

Mots clés : algèbre différentielle, solutions singulières.

Un problème spécifique aux équations implicites et non linéaires en leur terme de tête est l'existence de solutions dites singulières. Les propriétés de ces solutions singulières apportent des éléments pour l'étude globale des solutions de l'équation. Néanmoins seul le cas des équations différentielles du premier ordre est relativement bien connu[Ham93,Rit45] : les solutions singulières, qui sont alors des fonctions algébriques, sont soit des enveloppes de solutions non singulières soit peuvent être analytiquement plongées dans une famille de solutions non singulières.

Les algorithmes de décompositions caractéristiques permettent de calculer les équations des solutions singulières. Ceci constitue donc une première étape de l'analyse des solutions singulières. Une seconde étape consiste à calculer la décomposition minimale [Rit50,Hub99]. Pour les équations du premier ordre, la décomposition minimale permet de trancher sur la nature des solutions singulières.

De nouvelles recherches doivent apporter des éclaircissement sur les propriétés des solutions singulières des équations d'ordre supérieur. Si ces résultats ont aussi une nature algébrique, on pourra espérer mettre au point des algorithmes pour la détermination des propriétés des solutions singulières.

3.4 Algorithmes pour les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles

Mots clés : systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles, analyse algébrique, D-modules, théories formelles des systèmes d'équations aux dérivées partielles, intégrabilité formelle, involution, systèmes holonomes, solutions polynomiales et rationnelles, théorie du contrôle.

Ce thème de recherche a pour but l'étude de systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles linéaires à l'aide de la théorie des D-modules (ou analyse algébrique) et des théories formelles développées par E. Cartan, C. Riquier, M. Janet et D. Spencer. La première approche utilise des techniques algébriques (anneaux d'opérateurs différentiels, modules différentiels, théorie des modules, algèbre homologique...), alors que les secondes sont plutôt

[Ham93] M. Hamburger, « Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differenzialgleichnungen erster Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik 112*, 1893, p. 205–246.

[Rit45] J. Ritt, « Analytical Theory of Singular Solutions of Partial Differential Equations of the First Order », *Annals of Mathematics 46*, 1, 1945, p. 120–143.

[Rit50] J. Ritt, *Differential Algebra*, *Colloquium publications*, *XXXIII*, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).

[Hub99] E. Hubert, « Essential Components of an Algebraic Differential Equation », *Journal of Symbolic Computation 28*, 4-5, 1999, p. 657–680.

basées sur la géométrie différentielle (opérateurs différentiels, variétés différentielles, espaces de jets, intégrabilité formelle, involution, groupes de Lie...). L'intérêt d'étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à l'aide de ces deux approches est qu'elles sont duales (modules différentiels–opérateurs différentiels). Cette dualité permet d'utiliser simultanément différents résultats, techniques et algorithmes qui ont été développés de manière indépendante dans ces deux approches.

Les théories formelles des équations aux dérivées partielles ont pour but d'étudier des systèmes d'équations aux dérivées partielles surdéterminés et, en particulier, de connaître la dimension de l'espace des solutions du système − séries formelles ou fonctions analytiques − sans avoir à intégrer explicitement le système (ce qui est en général impossible). Pour déterminer le degré de généralité d'une solution d'un système d'équations aux dérivées partielles, il faut pouvoir déterminer quelles sont les dérivées que l'on doit fixer à chaque ordre afin de pouvoir développer une solution en série. Ceci est possible si, à partir des équations du système, on peut connaître toutes les relations différentielles pour un ordre donné, c'est-à-dire si l'on n'obtient pas d'équations d'ordre plus bas par combinaisons différentielles des équations du système. Un tel système est appelé formellement intégrable et un développement en série peut alors être obtenu en fixant au départ des valeurs numériques pour un certain nombre de dérivées bien déterminées des variables du système. Par exemple, si l'on note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, ce n'est qu'en rendant le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = -\partial_1 u(x_1, x_2) + x_2\, u(x_1, x_2) = 0, \\ P_2 = \partial_2 u(x_1, x_2) = 0, \end{array} \right. \tag{5}$$

formellement intégrable que l'on se rend compte que la seule solution analytique de (5) vaut

$$u(x_1, x_2) = \partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 - x_2\, P_2 = 0.$$

Depuis plusieurs décennies, de nombreux algorithmes permettant de rendre un système formellement intégrable ont été développés sous différentes approches par E. Cartan [Car45] (systèmes extérieurs), C. Riquier [Riq28], M. Janet [Jan29] (intégrabilité formelle), J. Ritt [Rit50], E. Kolchin [Kol73] (algèbre différentielle), D. Spencer [Spe65] (intégrabilité formelle, involution)... et récemment grâce au développement des bases de Gröbner sur des anneaux d'opérateurs différentiels (pour les algèbres d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux appelées algèbres de Weyl). Ces algorithmes consistent tous à saturer le système par certaines conséquences différentielles des équations du système initial afin de le mettre sous une certaine forme canonique. Une fois que le système est rendu formellement intégrable, on peut y lire plusieurs informations

[Car45] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, 1945.

[Riq28] C. Riquier, *La Méthode des Fonctions Majorantes et les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles*, Gauthier-Villars, 1928.

[Jan29] M. Janet, *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Cahiers Scientifiques IV, Gauthier-Villars, 1929.

[Kol73] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, *Pure and Applied Mathematics*, *54*, Academic Press, New York-London, 1973.

[Spe65] D. C. Spencer, « Overdetermined systems of partial differential equations », *Bull. Amer. Math. Soc. 75*, 1965, p. 1–114.

importantes dont la dimension de l'espace des solutions (séries formelles ou fonctions analytiques) [Car45,Jan29,Riq28,Spe65], déterminer les conditions de compatibilité du système différentiel inhomogène associé [Jan29,Riq28,Spe65] (c'est-à-dire, faire de l'élimination différentielle), étudier la variété caractéristique, *etc.* Cependant, les liens entre ces différents algorithmes ne semblent pas encore être bien compris. De plus, l'étude de nombreuses propriétés des systèmes différentiels fait intervenir l'étude de l'intégrabilité formelle de plusieurs systèmes différentiels. Il est donc important de bien comprendre les liens entre ces différents algorithmes afin de pouvoir implanter les plus efficaces. Nous nous intéresserons à ce problème.

Dans les années 70, les travaux de B. Malgrange [Mal63], V. Palamodov [Pal70], M. Kashiwara [Kas95],... ont montré comment la théorie des D-modules permettait d'obtenir de nouveaux résultats sur les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à coefficients polynomiaux ou analytiques (conditions pour la résolution d'un système différentiel inhomogène, étude des propriétés algébriques, de leurs liens avec les propriétés analytiques, de la variété caractéristique, classification des systèmes différentiels, paramétrisations des solutions, représentation intégrale des solutions, prolongement des solutions à l'intérieur ou à l'extérieur de certains domaines de $\mathbb{R}^n$, systèmes holonomes, études des solutions polynomiales ou rationnelles, b-fonctions...). L'idée centrale de cette théorie est de voir un système linéaire d'équations aux dérivées partielles comme un système d'équations linéaires à coefficients dans un anneau D d'opérateurs différentiels, c'est-à-dire comme D-module. Ainsi, on peut étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à l'aide de la géométrie algébrique, de la théorie des modules, de l'algèbre homologique, *etc.* La théorie des D-modules a eu de profondes applications dans la théorie des groupes de Lie, la physique mathématique, l'analyse microlocale, la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, la théorie des hyperfonctions, la théorie des systèmes holonomes et des fonctions spéciales, la théorie des singularités, *etc.*

Récemment, certaines techniques de la théorie des D-modules ont été rendues effectives grâce au développement des bases de Gröbner sur des anneaux d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux (algèbres de Weyl) [OT01,OTT01] ou rationnelles [Chy98]. Les bases de

[Car45] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, 1945.

[Jan29] M. Janet, *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Cahiers Scientifiques IV, Gauthier-Villars, 1929.

[Riq28] C. Riquier, *La Méthode des Fonctions Majorantes et les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles*, Gauthier-Villars, 1928.

[Spe65] D. C. Spencer, « Overdetermined systems of partial differential equations », *Bull. Amer. Math. Soc. 75*, 1965, p. 1–114.

[Mal63] B. Malgrange, *Systèmes à coefficients constants*, *8*, Exp. No. 246, Soc. Math. France, 1962/63, p. 79–89.

[Pal70] V. Palamodov, *Linear Differential Operators with Constant Coefficients*, Springer-Verlag, 1970.

[Kas95] M. Kashiwara, *Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations*, Mémoires de la Société Mathématiques de France, no. 63, 1995.

[OT01] T. Oaku, N. Takayama, « Algorithms for D-modules – restriction, tensor product, localization, and local cohomology groups », *J. Pure Appl. Algebra 156*, 2-3, 2001, p. 267–308.

[OTT01] T. Oaku, N. Takayama, H. Tsai, « Polynomial and rational solutions of holonomic systems », *J. Pure Appl. Algebra 164*, 1-2, 2001, p. 199–220.

[Chy98] F. Chyzak, *Gröbner Bases, Symbolic Summation and Symbolic Integration*, *251*, LMS, 1998,

Gröbner sur les algèbres d'opérateurs différentiels sont un des moyens effectifs permettant d'étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles surdéterminées (voir le premier paragraphe). L'analyse algébrique a permis de montrer les liens entre certaines propriétés structurelles d'un système différentiel sous-déterminé et celles d'un système surdéterminé correspondant à l'adjoint formel (dont la dimension de ses solutions, d'où l'intérêt du premier paragraphe) [Kas95,Pal70,PQ98,PQ99b,PQ99a,PQ00]. Ainsi, il est maintenant possible d'étudier de manière effective un système général d'équations aux dérivées partielles. Notre action autour des D-modules a pour but :

- le développement d'algorithmes effectifs basés sur les différents résultats obtenus dans la théorie des D-modules,
- de développer des algorithmes permettant de calculer les solutions polynomiales ou rationnelles de systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles,
- l'amélioration des algorithmes existants,
- d'étudier les liens entre les propriétés algébriques et les propriétés analytiques d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles (la vérification effective des premières permettant alors de déduire des informations sur les secondes),
- développer des algorithmes effectifs pour l'étude et l'analyse des systèmes de contrôle.

3.5 Aspects logiciels du calcul formel

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductives, communication, protocole, OpenMath.

Résumé : *L'objectif général de ce thème est l'amélioration des systèmes de calcul formel. Deux directions ont été poursuivies cette année : la conception et la mise en œuvre de bases de données de formules mathématiques et la coopération entre systèmes (échange d'objets mathématiques) avec le développement et l'utilisation d'OpenMath.*

La plupart des systèmes de calcul formel intègrent tout un ensemble de connaissances non algorithmiques (déclaratives), directement dans leur code, comme les valeurs d'intégrales ou de sommes particulières. Une idée naturelle est de regrouper ces connaissances dans une base de données pour pouvoir en rajouter facilement et les partager entre plusieurs systèmes. Les bases de données classiques ne conviennent pas, car elles n'ont pas la connaissance mathématique indispensable : prise en compte de la commutativité, des éléments neutres, déterminations d'instances de formules, *etc.* La réalisation d'une telle base qui soit à la fois suffisamment

p. 32–60.

[PQ98] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Generalized Bezout identity », *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 9*, 2, 1998, p. 91–116.

[PQ99b] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Localization and parametrization of linear multidimensional control systems », *Systems and Control Letters 37*, 4, 1999, p. 247–260.

[PQ99a] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Algebraic analysis of linear multidimensional control systems », *IMA Journal of Control and Information 16*, 3, 1999, p. 275–297.

[PQ00] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Formal elimination for multidimensional systems and applications to control theory », *Mathematics of Control, Signals, and Systems 13*, 3, 2000, p. 193–215.

efficace pour être utilisable en pratique et suffisamment puissante dans son mécanisme de recherche et de reconnaissance, pose divers problèmes qui se situent au carrefour entre les techniques et outils du calcul formel et ceux de la déduction automatique. Le prototype que nous développons se présente comme une boite à outils permettant la construction de base de formules mathématiques et des mécanismes de recherche qui lui sont associés. Différents types d'application peuvent être réalisés à partir d'une telle bibliothèque de composants.

La première application est une base de formules déductive qui traite des requêtes de la forme « sous les conditions $C_1, \ldots C_n$, la formule P est-elle vraie ? », où P peut contenir des variables particulières qui sont instanciées par une expression convenable dans la réponse. Cette base permet, par exemple, de répondre à des questions telles que « quelle est l'expression (une expression) qui représente la primitive d'une fonction donnée ». La réponse à une telle requête est multiple et conditionnelle : des conditions supplémentaires peuvent être données dans la réponse. La base peut ainsi répondre « P est vrai si on rajoute la condition C_{n+1} aux conditions C_i ». Les réponses sont obtenues par un processus de déduction original qui combine une unification associative–commutative entre la requête et les formules de la base (il s'agit en fait d'un cas particulier d'unification associative–commutative) et une ou plusieurs étapes qui s'apparentent à de la para-modulation (certaines des équations provenant des échecs d'unification sont résolues en utilisant la base elle-même ou un algorithme spécialisé).

La deuxième application en cours est un outil d'indexation de documents contenant des expressions mathématiques. Les documents scientifiques électroniques (livres, journaux, cours, *etc*) sont de plus en plus nombreux, et la possibilité de rechercher dans ces documents les parties contenant une formule mathématique donnée est une fonctionnalité fondamentale qui peut être implantée à l'aide d'une base de formules. Les formules mathématiques apparaissant dans le document forment les entrées de la base. À une entrée sont associées les références aux parties du document qui contiennent cette formule. Dans ce type d'application, le mécanisme de reconnaissance est moins puissant que dans le cas d'une base déductive et c'est plutôt le choix de la structure de données qui détermine les performances de la base.

La communauté de calcul formel a reconnu depuis quelques années l'importance de définir un standard pour la communication d'objets mathématiques (communication inter-processus, par courrier électronique, par archivage dans des bases de données *etc*). Un protocole de communication et d'échange d'objets mathématiques a été développé dans le cadre du projet européen *OpenMath* auquel nous avons très activement participé. Les problèmes rencontrés sont multiples et nombre d'entre eux restent à résoudre à l'issue du projet : trouver le bon niveau de définition des objets, prendre en compte la variété des applications qui peuvent utiliser un tel standard ou encore intégrer *OpenMath* avec les standards actuels ou à venir pour les documents électroniques ou la communication entre applications (XML, CORBA, DCOM/OLE...) En parallèle à la définition d'*OpenMath*, nous participons au groupe de travail sur les mathématiques du Consortium Web, qui se concentre également sur la définition d'un standard pour la présentation des formules mathématiques sur le Web. Les deux projets apparaissent comme complémentaires. Des standards dans ce domaine sont un premier pas vers la mise au point d'une nouvelle architecture pour le calcul formel et plus généralement pour le calcul scientifique au sens le plus large, architecture au sein de laquelle il sera possible d'accéder de manière uniforme à différents services et d'integrer dynamiquement de nouveaux composants.

4 Domaines d'applications

4.1 Panorama

Mots clés : multimédia, base de formules, ingénierie, automatique.

La stratégie principale du projet est d'enrichir les fonctionnalités des systèmes commerciaux de calcul formel, afin de transférer nos résultats et algorithmes vers leurs utilisateurs par l'intermédiaire de ces systèmes. Du point de vue de la recherche, nous envisageons d'étudier les applications possibles suivantes :

- Automatique :
  - Le problème de la *platitude* des systèmes de contrôle non-linéaires est apparu en automatique à la fin des années 90. Il s'intéresse à la possiblité de trouver un bon système de coordonnées dans lequel un système de contrôle non-linéaire est équivalent à un système linéaire contrôlable (problème de linéarisation par feedback). Ce problème revient à savoir quand un système non-linéaire sous-déterminé d'équations différentielles peut être *paramétrisé* par un opérateur différentiel injectif. L'existence de ce problème remonte à des travaux de D. Hilbert et E. Cartan sur l'équivalence des systèmes et constitue un des problèmes difficiles de l'automatique de ces dernières années. Il a été longuement étudié par l'équipe de M. Fliess (CNRS, ENS Cachan) et par le projet MIAOU à l'INRIA[Pom97]. Aucun test effectif de platitude n'est actuellement connu pour les systèmes différentiels non-linéaires. On a seulement pu prouver au cas par cas que certaines classes de systèmes étaient plates, dont certaines classes de systèmes mécaniques. Un problème difficile est donc de savoir reconnaître quand un système est plat et de calculer de manière effective ses paramétrisations. Cependant, on sait que la recherche d'une paramétrisation d'un système à un ordre donné revient à l'étude de l'intégrabilité formelle d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, la platitude des systèmes de contrôle est lié à l'étude de l'intégrabilité formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles.
  - Depuis quelques années, la théorie des D-modules a été utilisée dans l'étude des *systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels* (systèmes à retards, équations aux dérivées partielles...). De nouveaux algorithmes effectifs ont été obtenus pour vérifier certaines propriétés structurelles (contrôlabilité, platitude, observabilité, pôles et zéros, équivalences...) de ces systèmes ainsi que pour leur analyse (placement de pôles, commande optimale, commande robuste...). Voir [PQ98,PQ99b,PQ99a,PQ00] ainsi que leurs

[Pom97] J.-P. Pomet, « On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs », *ESAIM-COCV 2*, 6, 1997, p. 151–230.

[PQ98] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Generalized Bezout identity », *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 9*, 2, 1998, p. 91–116.

[PQ99b] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Localization and parametrization of linear multidimensional control systems », *Systems and Control Letters 37*, 4, 1999, p. 247–260.

[PQ99a] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Algebraic analysis of linear multidimensional control systems », *IMA Journal of Control and Information 16*, 3, 1999, p. 275–297.

[PQ00] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Formal elimination for multidimensional systems and applications to control theory », *Mathematics of Control, Signals, and Systems 13*, 3, 2000, p. 193–215.

références.
- Analyse numérique : détermination de l'index d'un système différentio-algébrique, recherche de conditions initiales cohérentes.
- Bases de données mathématiques : consultation de formulaires mathématiques sur Internet.

5 Logiciels

5.1 Bibliothèque *diffalg*

Participante : Evelyne Hubert.

Mots clés : systèmes différentiels non linéaires, élimination différentielle, algèbre différentielle, algorithme de triangulation-décomposition, solutions singulières.

La `biblioth\'eque\emph{diffalg}` fait partie du logiciel commercial de calcul formel Maple. Cette bibliothèque a initialement été développée en 1996 par François Boulier (à présent membre du LIFL), pour Maple V.5. Un développement a par la suite été repris par Evelyne Hubert pour les versions ultérieures de Maple.

La bibliothèque *diffalg* implante un algorithme de décomposition caractéristique pour les systèmes différentiels (systèmes d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles) ainsi que des outils pour l'analyse des solutions singulières d'équations différentielles non linéaires.

Dans le cadre du contrat de maintenance et de développement avec Maple nous avons remis à jour la bibliothèque en vue de la sortie de Maple 7. Nous avons de plus refondé et rendu plus accessible la documentation de la bibliothèque.

Par la suite, nous avons développé un mode compatible avec la bibliothèque *Vessiot*, développé à l'Utah State University. La bibliothèque *Vessiot* implante des méthodes géométriques pour les équations différentielles. Elle contient des outils pour le calcul des invariants différentiels par la méthode du repère mobile.

Certains utilisateurs de Maple ont recours à la bibliothèque *diffalg* pour la la triangulation-décomposition de systèmes purement polynomiaux. Nous avons donc implanté une première version simple de l'algorithme de Kalkbrener. Cet algorithme, reconnu comme le plus rapide[AMM99] a déjà plusieurs implantations efficaces, notamment par les membres du projet SPACE et par les membres de l'équipe calcul formel du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille. Il n'y avait néanmoins pas d'implantation en Maple. Ces nouveaux développements sont disponible sur le Web à `http://www-sop.inria.fr/cafe/Evelyne.Hubert/webdiffalg`.

[AMM99] P. Aubry, M. Moreno-Maza, « Triangular sets for solving polynomial systems: a comparative implementation of four methods », *Journal of Symbolic Computation 28*, 1-2, 1999, p. 125–154.

5.2 Bibliothèque Salli/Aldorlib

Participant : Manuel Bronstein.

Mots clés : Aldor, standard, structures de données.

La `biblioth\'eque{\scSalli}` , développée depuis plusieurs années dans le projet, a été renommée Aldorlib et s'est imposée comme bibliothèque standard pour le langage Aldor, ses compétiteurs étant les bibliothèques `axllib` et `BasicLib` produites par NAG, qui seront stopées. Nous y avons rajouté cette année les nombres complexes exacts et flottants, ainsi que de nouvelles structures de données non linéaires. La bibliothèque Aldorlib fait partie de la distribution officielle du `compilateur{\scAldor}`, et s'accompagne d'un tutorial sur la programmation en Aldor[BB01].

5.3 Bibliothèque Algebra

Participants : Manuel Bronstein [correspondant], Marc Moreno-Maza.

Mots clés : calcul formel, algèbre linéaire, algèbre commutative, polynômes.

La bibliothèque Algebra est une nouvelle bibliothèque de calcul formel en Aldor, écrite en collaboration avec Marc Moreno-Maza du LIFL (université de Lille). Elle se compose de l'ancien noyau d'algèbre commutative et d'algèbre linéaire de la bibliothèque Σ^{it} (cf. 5.4) et d'une nouvelle implémentation de polynômes multivariés par Marc Moreno-Maza. Tout comme la bibliothèque Aldorlib (cf. 5.2) dont elle est une extension, la bibliothèque Algebra fait partie de la distribution officielle du `compilateur{\scAldor}`.

5.4 Bibliothèque Σ^{it}

Participant : Manuel Bronstein.

Mots clés : calcul formel, équations différentielles, équations aux différences, systèmes d'équations.

La `biblioth\'eque$\Sigma{}^{{\rmit}}$` incorpore nos algorithmes de résolution d'équations fonctionnelles. Elle continue à être développée dans le projet. Nous avons extrait cette année son noyau d'algèbre commutative et linéaire, qui fait maintenant partie de la bibliothèque Algebra (cf. 5.3), et dont Σ^{it} est dorénavant une extension. L'effort d'implémentation principal cette année a été consenti pour la résolution directe de systèmes linéaires d'équations différentielles ou aux différences. Ainsi, nous y avons rajouté des résolveurs en séries, polynomiaux et rationnels, basés sur notre méthode [10]. En particulier, le résolveur rationnel de systèmes d'équations aux différences a servi pour les calculs d'eigenring de [9]. Σ^{it} a aussi servi comme plate-forme pour le stage de Gaurav Chatley, qui a implémenté la version commutative de [10] et l'a comparée aux méthodes préexistantes dans Σ^{it}.

[BB01] P. Broadbery, M. Bronstein, « A First Course on Aldor with aldorlib », octobre 2001, `http://www.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/aldorlib/tutorial.pdf`.

Nous distribuons deux programmes interactifs qui permettent d'effectuer des calculs avec Σ^{it} sans utiliser le compilateur Aldor :

- `\ttBernina`, un serveur permettant de manipuler et de résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux, et depuis cette année les systèmes d'équations ;
- `\ttShasta` : un serveur permettant de manipuler et de résoudre les équations aux différences finies linéaires à coefficients polynomiaux, et depuis cette année les systèmes d'équations ;

Une démonstration interactive d'un résolveur d'équations différentielles du second ordre basé sur `Bernina` et MAPLE et incluant nos résultats sur la recherche de solutions en termes de fonctions spéciales (cf. 6.1) est utilisable à `http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/cathode/kovacic_demo.html`.

6 Résultats nouveaux

6.1 Algorithmes pour les équations linéaires

Participants : Raphaël Bomboy, Manuel Bronstein, Gaurav Chatley, Emmanuelle Dottax, Sébastien Lafaille, Jacques–Arthur Weil.

Mots clés : équations différentielles, équations aux différences, coefficients liouvilliens, déterminants, solutions liouvilliennes, solutions analytiques, fonctions spéciales, quadratures, invariants, groupes de Galois, réductibilité.

Solutions en termes de fonctions spéciales

Dans le cadre du stage de DEA de Sébastien Lafaille, nous avons développé et implémenté un nouveau résolveur d'équations du second ordre en termes de certaines fonctions spéciales. Pour cela, nous avons amélioré une méthode heuristique de Willis [Wil01] en la rendant algorithmique et complète pour trouver toute solution de la forme $y(x) = g(x)F(h(x))$ où $h(x)$ est une fonction rationnelle arbitraire inconnue, $g(x)$ est une fonction arbitraire inconnue, et $F(x)$ est une fonction spéciale donnée (l'algorithme est applicable à une grande classe de fonctions spéciales, nous n'avons implémenté que les cas où F est une fonction d'Airy, de Bessel, de Bessel modifiée, de Kummer ou de Whittaker). Nous avons aussi décrit comment cette méthode pouvait se généraliser à des équations d'ordre supérieur. Par exemple, MAPLE 7 et MATHEMATICA 4.0 ne trouvent aucune solution de l'équation

$$4(x-1)^8\frac{d^2y}{dx^2} - (3 - 50x + 61x^2 - 60x^3 + 45x^4 - 18x^5 + 3x^6)y(x) = 0$$

alors que notre logiciel trouve sa solution générale

$$y(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}\left(C_1 Ai\left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right) + C_2 Bi\left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right)\right)$$

où Ai et Bi forment une base de solutions de l'équation d'Airy $d^2y/dx^2 = xy(x)$. Le programme MAPLE correspondant a été intégré à notre `r\'esolveurinteractif`. Ce travail a fait l'objet d'une soumission à la conférence ISSAC'2002.

[Wil01] B. WILLIS, « An extensible differential equation solver », *SIGSAM Bulletin 35*, 1, 2001, p. 3–7.

Systèmes linéaires fonctionnels

En collaboration avec S.A. Abramov (Moscou, cf. 8.3.1), nous avons développé et implémenté une nouvelle méthode directe pour calculer les solutions formelles, polynomiales et rationnelles de systèmes d'équations fonctionnelles, par exemple différentiels, ou au différences ou (q)–différences. Cette méthode, qui est une généralisation aux systèmes de notre approche par la récurrence induite[ABP95], transforme le système en un système de récurrences satisfait par les coefficients des solutions formelles du système initial, puis transforme le système de récurrence afin d'en extraire des bornes sur les ordres et degrés des solutions rationnelles. Cette transformation est plus faible que le calcul d'une forme super–irréductible[AB98,Bar99] et représente une amélioration de complexité par rapport à l'EG–élimination d'Abramov[Abr99]. Ces travaux ont été présenté à la conférence ISSAC'2001 [10].

Algèbre linéaire

Bien que conçue pour des matrices d'opérateurs, la transformation mentionnée ci-dessus s'applique tout aussi bien aux matrices de polynômes usuels, où elle s'avère avoir une complexité comparable aux meilleures méthodes[MS00a,MS00b]. Dans le cadre du stage de Gaurav Chatley (IIT Kanpur), le cas des polynômes usuels a été implémenté, et comparé aux autres méthodes disponibles dans Σ^{it} (relèvement de Hensel, théorème chinois, forme de Popov faible et Gauss–Bareiss). Ces expériences ont confirmé que sa complexité arithmétique était comparable aux meilleures méthodes, mais que la croissance de la taille des coefficients limitait son utilisation aux matrices de polynômes à coefficients dans un corps fini. Une analyse de cette transformation, de son champ d'applicabilité et de sa complexité à été soumise au *Journal of Symbolic Computation*.

Applications aux courbes algébriques

Le calcul des propriétés topologiques (genre, composantes connexes,...) d'une courbe algébrique plane peut se réduire à l'étude d'un opérateur différentiel linéaire qui lui est associé[CSTU01]. Dans le cadre du stage de DEA d'Emmanuelle Dottax, nous avons implémenté et testé cette méthode de calcul du genre en MAPLE, et conclut que le coût du calcul de l'opérateur différentiel associé est prohibitif. Nous avons aussi testé une nouvelle méthode qui utilise un système différentiel linéaire au lieu d'un opérateur scalaire, ainsi qu'une conjecture sur le lien entre la transformation décrite dans [10] et les exposants du système, pour en déduire le genre de la courbe. Ce travail nous a permis de vérifier la conjecture ainsi que de constater que l'ap-

[ABP95] S. ABRAMOV, M. BRONSTEIN, M. PETKOVŠEK, « On Polynomial Solutions of Linear Operator Equations », *in: Proceedings of ISSAC'95*, ACM Press, p. 290–296, 1995.

[AB98] S. ABRAMOV, M. BARKATOU, « Rational solutions of first order difference systems », *in: Proceedings of ISSAC'98*, O. Gloor (éditeur), ACM Press, p. 124–131, 1998.

[Bar99] M. BARKATOU, « On Rational Solutions of Systems of Linear Differential Equations », *Journal of Symbolic Computation 28*, 4 and 5, October/November 1999, p. 547–568.

[Abr99] S. ABRAMOV, « EG–eliminations », *Journal of Difference Equations and Applications 5*, 1999, p. 393–433.

[MS00a] T. MULDERS, A. STORJOHANN, « On Lattice Reduction for Polynomial Matrices », *Technical Report n°356*, Dpt. of Computer Science, ETH Zurich, 2000.

[MS00b] T. MULDERS, A. STORJOHANN, « Rational solutions of singular linear systems », *in: Proceedings of ISSAC'2000*, C. Traverso (éditeur), ACM Press, p. 242–249, 2000.

[CSTU01] O. CORMIER, M. SINGER, B. TRAGER, F. ULMER, « Linear Differential Operators for Polynomial Equations », *manuscript submitted to the Journal of Symbolic Computation*, 2001.

proche par un système est plus efficace que celle par un opérateur scalaire, mais reste moins efficace que l'approche classique par le polygone de Newton. En collaboration avec B. Trager, nous continuons à étudier cette méthode dans le but d'engendrer un système différentiel explicitement régulier.

Réductibilité et solutions Liouvilliennes des équations aux différences finies

Nous avons achevé cette année la description d'un algorithme effectif et complet qui calcule les solutions Liouvilliennes d'équations aux différences finies linéaires d'ordre arbitraire.

Rappelons que Peter A. Hendriks et Michael F. Singer avaient donné[HS99] un algorithme de recherche de telles solutions. Cet algorithme avait cependant pour défaut d'être basé sur la recherche des solutions *hypergéométriques* d'une famille d'opérateurs associés, recherche susceptible de nécessiter un grand nombre de calculs dans diverses extensions —n'apparaissant pas forcément dans le résultat final— du corps de base considéré.

L'algorithme que nous donnons se base largement sur notre précédent algorithme de factorisation des équations aux différences finies linéaires au moyen de leur Eigenring. Il a l'avantage de se ramener uniquement :

- à la recherche des solutions *rationnelles* (c'est à dire dans le corps de base) d'une famille d'opérateurs, recherche moins coûteuse que celles des solutions hypergéométriques
- dans certains cas, à la recherche de solutions hypergéométriques *sans extension du corps de base*.

Des exemples complexes ont déjà été traité par cet algorithme au moyen des logiciels MAPLE et SHASTA (cf. 5.4).

Ces deux algorithmes (de factorisation et de recherche des solutions liouvilliennes) sont décrits dans la thèse de Raphaël Bomboy [9], et doivent faire prochainement l'objet de soumissions à la conférence ISSAC 2002 et au *Journal of Symbolic Computation*.

Équations à coefficients fonctionnels

Nous avons continué cette année l'étude d'algorithmes pour résoudre les équations aux différences dont les coefficients contiennent des fonctions plus générales que les polynômes. Nous avons proposé un nouvel algorithme de calcul de solutions rationnelles d'équations à coefficients dans une extension hypergéométrique simple d'un corps de fonctions rationnelles, et continuons notre collaboration avec S.A. Abramov (Moscou) et M. Petkovšek (Ljublana) pour le calcul des solutions rationnelles et hypergéométriques d'équations à coefficients dans une tour d'extension hypergéométriques imbriquées (cf. 8.2.3).

6.2 Algorithmes pour les systèmes non linéaires

Participante : Evelyne Hubert.

Mots clés : algèbre différentielle, systèmes différentiels, ensembles triangulaires, élément primitif différentiel, invariants différentiels, systèmes symétriques.

Triangulation-décomposition des systèmes polynomiaux et différentiels

[HS99] P. HENDRIKS, M. SINGER, « Solving Difference Equations in Finite Terms », *Journal of Symbolic Computation 27*, 3, March 1999, p. 239–260.

Les algorithmes de décomposition caractéristique pour les systèmes différentiels peuvent être perçus comme une généralisation des algorithmes de décomposition caractéristique pour les systèmes polynomiaux. Ce thème a récemment bénéficié de nouveaux algorithmes et d'implantations efficaces [Kal98,ALMM99,Wan99,AMM99]. Nous nous avons poursuivi l'étude de ces algorithmes et produit une première implantation en MAPLE disponible à présent avec la bibliothèque *diffalg* (cf. 5.1).

Ce travail sur les ensembles triangulaires a permis de généraliser la construction du résolvent d'un système différentiel [Rit50]. Ce travail avait été entamé en 2000 lors du stage de DEA de T. Cluzeau. Le sujet a cette année reçu une plus grande généralisation et aussi un algorithme effectif pour son calcul. Il est à présent publié sous forme de rapport de recherche [12] et soumis à publication.

La construction de Ritt permet de montrer l'existence d'une équation différentielle, la résolvante, dont la solution générale est rationnellement équivalente au zéro générique d'un idéal différentiel premier. Nous avons généralisé ce résultat pour les idéaux différentiels réguliers c'est à dire définis par des ensembles différentiellement triangulaires. Ce sont les idéaux différentiels intermédiaires obtenus par les algorithmes de décomposition. Ceci a nécessité de généraliser des résultats de Ritt sur l'ordre et la dimension différentielle des idéaux différentiels. Ces résultats nouveaux, quoique très naturels, sont intéressants par eux-mêmes. Nous avons donné de surcroît un algorithme effectif pour calculer la résolvante d'un idéal différentiel régulier à partir de l'ensemble différentiellement triangulaire le définissant. L'algorithme est en fait un algorithme de changement de classement, et là encore, les idées développées sont intéressantes en elles-mêmes.

Repère mobile et systèmes différentiels symétriques

Le grand objectif du projet *Repère Mobile et Systèmes Différentiels* (cf. 8.2.2) est d'obtenir une alternative aux algorithmes de décomposition caractéristique pour les systèmes invariants sous l'action d'un groupe de Lie. Un exemple d'un tel problème, issu de l'optique, est le système formé d'un Laplacien $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(u)$ combiné avec une contrainte $u_x^2+u_y^2+u_z^2=1$, qui est également invariante par l'action des rotations sur les variables indépendantes. Dans son article prospectif[Man01], E. Mansfield a réussi a répondre à la question afférente à ce système — à savoir pour quelle fonction f le système admet une solution. De nombreuse difficultés sont déjà exposées par le traitement de cet exemple. Nous recherchons les fondements algébriques et algorithmiques pour mettre en place un traitement général des systèmes symétriques.

Nous avons cette année mis au point la généralisation, montrée nécessaire par les études

[Kal98] M. KALKBRENER, « Algorithmic Properties of Polynomial Rings », *Journal of Symbolic Computation 26*, 5, November 1998, p. 525–582.

[ALMM99] P. AUBRY, D. LAZARD, M. MORENO-MAZA, « On the theories of triangular sets », *Journal of Symbolic Computation 28*, 1-2, 1999.

[Wan99] D. WANG, *Elimination methods*, *Texts and Monographs in Symbolic Computation*, Springer-Verlag Wien, 1999.

[AMM99] P. AUBRY, M. MORENO-MAZA, « Triangular sets for solving polynomial systems: a comparative implementation of four methods », *Journal of Symbolic Computation 28*, 1-2, 1999, p. 125–154.

[Rit50] J. RITT, *Differential Algebra*, *Colloquium publications*, *XXXIII*, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).

[Man01] E. MANSFIELD, « Algorithms for Symmetric Differential Systems », *FoCM journal*, 2001.

prospectives, de la méthode du repère mobile de Fels et Olver [FO99] et son algébrisation. Un algorithme complet en découle pour le calcul des invariants différentiels et des opérateurs différentiels invariants. Ces résultats sont en cours de rédaction.

Nous avons également cerné une structure différentio-algébrique dans laquelle il semble possible d'élaborer une théorie et des algorithmes pour les systèmes ré-écrits en termes des invariants différentiels et soumis à l'action des opérateurs différentiels invariants, qui, rappelons le, ne commutent pas.

6.3 Base de formules

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano.

Mots clés : calcul formel, base de formules, base de données déductive.

Nous avons poursuivi le développement de notre base de données déductive pour formules mathématiques dans plusieurs directions :

- l'implantation d'un serveur OpenMath : nous avons continué le développement d'une version serveur OpenMath de la base destiné d'une part à indexer des documents par les formules mathématiques qu'ils contiennent et d'autre part à fournir un formulaire en ligne pour les formules usuelles.
- le développement d'une nouvelle version : afin d'améliorer la qualité des réponses fournies par la base de formules, nous avons travaillé sur une nouvelle version de l'algorithme de pattern-matching ainsi qu'à une nouvelle structure de données pour stocker les formules. Il s'agit d'une part d'organiser les formules dans une structure de données qui reflète mieux la structure des formules, et d'autre part d'appliquer l'associativité-commutativité lors du pattern-matching dans un ordre particulier donnant les *bonnes* formules d'abord (les *bonnes* formules sont celles qui sont le plus proche du modèle).
- le développement d'un serveur Web : nous travaillons à la conception et au développement d'une interface Web à la version serveur OpenMath de la base de formules. Le but est d'obtenir un service mathématique en ligne pour la consultation et la recherche de formule usuelle à partir d'une instance de l'une de ces formules.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Airbus

Participants : Stéphane Dalmas, Yves Papegay [projet Coprin].

Ce contrat de 3 mois porte sur la gestion et l'analyse de modèles aérodynamiques par des techniques de calcul formel. Nous avons conçu et réalisé un prototype en MATHEMATICA qui sera évalué par les ingénieurs d'Airbus pour les choix de développement de leur futur outil (dont la réalisation devrait commencer l'année prochaine). Dans ce cadre, nous avons aussi

[FO99] M. FELS, P. J. OLVER, « Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations », *Acta Appl. Math. 55*, 2, 1999, p. 127–208.

apporté à notre partenaire notre expertise MathML, format qu'Airbus souhaitait adopter pour la représentation de leurs équations et données mathématiques.

7.2 MAPLE

Participante : Evelyne Hubert.

Nous avons cette année signé avec Waterloo Maple Inc. un contrat pour la maintenance et la mise à jour de la bibliothèque *diffalg* (cf. 5.1). Des négociations avec WMI sont en cours pour l'extension de ce contrat à des développements dans les résolveurs MAPLE d'équations différentielles et aux différences linéaires.

7.3 NAG

Participant : Manuel Bronstein.

Ce contrat a pour but d'évaluer les versions préliminaires du compilateur Aldor de NAG Ltd. en vue d'une commercialisation ultérieure. Il nous permet d'obtenir, d'une part, les versions de développement du compilateur et des bibliothèques qui y sont jointes, et, d'autre part, des modifications nécessaires à notre travail. Ce contrat se termine fin 2001 avec la distribution officielle du compilateur Aldor à partir de `http://www.aldor.org`.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Accueils de chercheurs français

Dans le cadre du séminaire commun CAFÉ et GALAAD (cf. 9.1), nous avons reçu la visite de Olivier Cormier et Félix Ulmer (université de Rennes, 3 jours en juin 2001). Dans le cadre de notre collaboration avec Marc Moreno-Maza (université de Lille) pour l'écriture conjointe de la bibliothèque `Algebra` (cf. 5.3), nous l'avons reçu une semaine en avril 2001 et une semaine en juillet 2001.

8.2 Actions européennes

8.2.1 OpenMath

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano.

CAFÉ participe au réseau thèmatique *OpenMath* (IST-2000-28719) qui a débuté ses travaux en juillet, pour trois ans. Ce réseau fait suite au projet intitulé *OpenMath : Accessing and Using Mathematical Information Electronically* (IST 24.969) qui s'etait terminé fin août 2000. L'objectif est de continuer à développer et promouvoir OpenMath, un standard pour la communication d'objets mathématiques.

Ce réseau est coordonné par NAG (Grande-Bretagne) et regroupe l'université de Bath (Grande-Bretagne), l'université technique d'Eindhoven (Pays-Bas), l'université de Saint Andrews (Grande-Bretagne), l'université de Nice–Sophia Antipolis, l'université de Sarrebruck (German Research Center for Artificial Intelligence, Allemagne), le ZIB (Allemagne), RISC (Research Institute for Symbolic Computation, Autriche), Springer Verlag (Allemagne), Stilo Technology Ltd (Grande-Bretagne) et Explo-IT Research (Italie).

8.2.2 PAI Alliance

Le Programme d'Actions Intégrées ALLIANCE a retenu le projet *Repère Mobile et Systèmes Différentiels* conjointement présenté par Elizabeth Mansfield (University of Kent) et Evelyne Hubert. Ce projet propose de développer des algorithmes pour l'étude et l'analyse des systèmes différentiels non linéaires invariants sous l'action d'un groupe de Lie. La première année de ce projet a été vouée à la généralisation et l'algébrisation de la méthode du repère mobile pour mettre en place une version entièrement algorithmique.

8.2.3 PAI Proteus

Le Programme d'Actions Intégrées PROTEUS a retenu le projet *Hypergeometric solutions of linear* (q)*-difference equations with* (q)*-hypergeometric coefficients* conjointement présenté par Marko Petkovšek (université de Ljubljana) et Manuel Bronstein. Ce projet propose de généraliser l'algorithme `Hyper`[Pet92] aux équations aux différences à coefficients dans une tour d'extensions hypergéométriques d'un corps de fonctions rationnelles. Durant la première année, l'ossature générale du nouvel algorithme a été développée et les problèmes apparaissant lors de la récurrence ont été identifiés. Ces travaux se font aussi en collaboration avec S.A. Abramov (Moscou), soutenu par l'institut Liapunov (cf. 8.3.1).

8.3 Actions internationales hors CE

8.3.1 Institut Liapunov

Nous avons continué à collaborer avec S.A. Abramov (Moscou) dans le cadre du projet Liapunov *Équations linéaires aux* (q)*-différences à coefficients* (q)*-hypergéométriques*, dont l'objectif est le développement et l'implantation d'algorithmes efficaces pour la manipulation et la simplification de termes (q)-hypergéométriques, ainsi que pour le calcul de solutions en forme close d'équations aux (q)–différences linéaires dont les coefficients contiennent de tels termes. Ces travaux se font aussi en collaboration avec M. Petkovšek (Ljubljana), soutenu par le PAI Proteus (cf. 8.2.3).

8.3.2 PRA franco–chinois

Le Programme de Recherche Avancées franco–chinois de `l'AFCRST` a retenu le projet *Algorithmes efficaces pour polynômes de Ore* conjointement présenté par Ziming Li (Academia

[Pet92] M. Petkovšek, « Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients », *Journal of Symbolic Computation 14*, 2 and 3, August&September 1992, p. 243–264.

Sinica) et Manuel Bronstein. Ce projet proposait de développer des algorithmes modulaires efficaces pour le calcul de pgcd et la factorisation de polynômes de Ore, mais s'est orienté cette année vers la factorisation d'opérateurs différentiels linéaires *partiels*, qui fait l'objet d'une demande de bourse en co-tutelle pour une doctorante chinoise.

8.4 Réseaux et groupes de travail internationaux

8.4.1 Groupe de travail sur les mathématiques du W3C

Stéphane Dalmas est membre du nouveau groupe de travail sur les mathématiques du World Wide Web Consortium (W3C), mis en place en juin. C'est le troisième groupe sur ce sujet, succèdant aux groupes qui ont produit les recommandations MathML 1.0 et 2.0 (MathML est un standard pour inclure des mathématiques dans un document XML). Ce nouveau groupe continuera son travail jusqu'en mai 2003. Il devrait concentrer son activité sur la maintenance de MathML 2.0 et toutes les actions pouvant aider l'adoption de ce standard (jeux de tests, guide pour les implémenteurs, traducteurs depuis d'autres formats, feuilles de style...) en liaison avec les autres activités du W3C (notamment CSS et XSL, Schémas, Web sémantique et services Web).

8.5 Accueils de chercheurs étrangers

Europe (CEE) Dans le cadre de notre PAI Alliance (cf. 8.2.2), nous avons reçu Peter Clarkson, Liz Mansfield et Agnes Szantö (University of Catnterbury at Kent) pour 10 jours en mai 2001. Collaborateur E. Hubert : méthode du repère mobile.

Europe (hors–CEE) Dans le cadre de notre projet Liapunov (cf. 8.3.1), nous avons reçu Sergei Abramov (Université de Moscou) pour deux semaines en avril 2001. Collaborateur : M. Bronstein : résolution de systèmes fonctionnels linéaires.

Niklaus Mannhart (ETH Zurich, Suisse) : une semaine en juin 2001. Collaborateur M. Bronstein : bibliothèque de programmation distribuée en `Aldor`.

Dans le cadre de notre PAI Proteus (cf. 8.2.3), nous avons reçu Marko Petkovšek (Université de Ljubljana) ainsi que son étudiante en thèse Helena Zakrajšek pour une semaine en mai 2001. Collaborateur M. Bronstein : équations aux différences à coefficients hypergéométriques.

Amérique du Nord Irina Kogan (Yale, USA) : 4 semaines en juin 2001. Irina Kogan a soutenue un thèse de doctorat sous la direction de Peter Olver, University of Minneapolis. Elle a développé des extensions de la méthode du repère mobile pour le calcul incrémental des invariants différentiels d'un groupe de Lie. Son expertise est très intéressante pour le développement du projet. Cette visite a permis de développer une proche collaboration avec E. Hubert.

Barry Trager (IBM Research, USA) : 2 jours en juin 2001. Collaborateur M. Bronstein : calcul du genre d'une courbe algébrique.

Stephen Watt (UWO, Canada) : 5 jours en mai 2001. Collaborateur M. Bronstein : bibliothèques de calcul formel en `Aldor`.

Chine Dans le cadre de notre PRA franco–chinois (cf. 8.3.2), nous avons reçu Ziming Li (Academia Sinica) pour 10 jours en mars 2001. Collaborateurs M. Bronstein et E. Hubert : algorithmes pour polynômes de Ore et ensembles triangulaires.

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- E. Hubert a organisé au printemps un `s\'eminaire` hebdomadaire commun avec l'équipe Galaad, dont le programme comportait des orateurs d'envergure internationale et des jeunes chercheurs. Les collaborateurs du projet Café qui ont pris la parole à ce séminaire sont :
  - Ziming Li, Institute of Systems Science, Beijing (cf. PRA)
  - Marc Moreno-Maza, université de Lille ;
  - Helena Zakrajsek, université de Ljubljana (cf. 8.2.3) ;
  - Alban Quadrat, université de Leeds ;
  - Barry Trager, IBM research ;
  - Olivier Cormier et Félix Ulmer de l'université de Rennes ;
  - Agnes Szanto, Peter Clarkson et Elizabeth Mansfield de l'université de Kent (cf. 8.5) ;
  - Irina Kogan, Yale University (cf. 8.5)
- M. Bronstein a participé à la section d'audition de l'INRIA Rocquencourt du concours CR2 (2001) ainsi qu'au jury d'admissibilité du concours INRIA DR2 (2001).
- M. Bronstein est membre de l'ILC (Industrial Liaison Committee), commission de conseil et de pilotage du centre de recherche `ORCCA` (Ontario Research Centre for Computer Algebra) et a participé à sa réunion annuelle, qui a eu lieu à London (Ontario) les 7 et 9 mai 2001.
- M. Bronstein est membre du comité de lecture du *Journal of Symbolic Computation*, et participe au comité de programme de la conférence `RWCA'2002`.
- J.-A. Weil est animateur avec Gilles Villard (LIP, Lyon) pour 2002 de `l'ActionSpecifique46` (Calcul Formel) du departement Stic du CNRS (animation scientifique et developpement des interactions du calcul formel avec d'autres champs disciplinaires).

9.2 Enseignement universitaire

- Dans le cadre de son service d'enseignement d'ATER en mathématiques à l'université de Nice-Sophia Antipolis, R. Bomboy doit effectuer dans l'année universitaire un service de 96 heures de TD en DEUG scientifique.
- F. Boulier (Lille) et M. Bronstein (Café) ont enseigné en 2000/2001 un module « Équations différentielles » dans la filière « Calcul formel » du DEA `X--ENSd'algorithmique` (20h). Ce module est de nouveau enseigné en 2001/2002 (20h).
- E. Hubert en collaboration avec I. Emiris et B. Mourrain (équipe Galaad) ont enseigné un module de Calcul Formel du DEA de `Math\'ematiquesDiscr\`etesetFondementdel' Informatique` (20h).

- E. Hubert assure la formation Informatique et Calcul Formel de classes préparatoires scientifiques au Centre International de Valbonne (60h).
- J.-A. Weil a enseigné un cours d'algèbre différentielle (13h) lors de l'école CIMPA-UNESCO-VIETNAM (Hanoi, Vietnam, du 26 novembre au 7 décembre 2001).
- M. Bronstein a participé en tant que rapporteur aux jurys de thèse d'Alexandre Sedoglavic (École Polytechnique, 25 septembre 2001) et d'Olivier Cormier (Université de Rennes, 5 novembre 2001).
- M. Bronstein et J.-A. Weil ont participé respectivement en tant qu'examinateur et directeur au jury de thèse d'Anne Fredet (École Polytechnique, 6 novembre 2001).

9.3 Thèses et Stages

Thèses soutenues dans le projet :

1. Raphaël Bomboy, « Réductibilité et résolubilité des équations aux différences finies », UNSA, soutenue le 7 septembre 2001.

Stages effectués dans le projet :

1. Gaurav Chatley, « Benchmarking and extension of fast linear algebra algorithms »
2. Emmanuelle Dottax, « Calcul du genre d'une courbe algébrique »
3. Sébastien Lafaille, « Résolution d'équations différentielles en termes de fonctions spéciales »

9.4 Participation à des colloques, séminaires, invitations

R. Bomboy a présenté ses travaux sur la factorisation et la recherche des solutions Liouvilliennes des équations aux différences finies linéaires au séminaire de combinatoire de l'université de Ljubljana (Ljubljana, Slovénie, 11 septembre 2001).

M. Bronstein a présenté ses travaux sur les systèmes fonctionnels linéaires dans divers séminaires et conférences :
- au séminaire GAGE (École Polytechnique, 17 janvier 2001),
- au LIFL (Université de Lille, 24 janvier 2001),
- à la société Waterloo Maple (Waterloo, Ontario, 8 mai 2001),
- au séminaire ALGO (INRIA Rocquencourt, 11 juin 2001),
- à la conférence `ISSAC'2001` (London, Ontario, 22–25 juillet 2001),
- au séminaire de combinatoire de l'université de Ljubljana (Ljubljana, Slovénie, 11 septembre 2001).

S. Dalmas a participé à la réunion de lancement de l'OpenMath Thematic Network (Berlin, 6 et 7 août 2001, cf. 8.2.1).

M. Gaëtano a participé à la première réunion de l'OpenMath Thematic Network (Linz, 27 et 28 septembre 2001, cf. 8.2.1).

E. Hubert a
- rendu visite à Elizabeth Mansfield à Canterbury pendant deux semaines en août 2001 dans le cadre du PAI Alliance (cf. 8.2.2).

- présenté les résultats de [12] au congrès de `l'InternationalSocietyforAnalysis, itsApplicationsandComputation` (Berlin, août 2001) et à la conférence `GROSTATV`, applications of commutative algebra to statistics, (Nouvelle Orleans, septembre 2001).
- été invitée a donner un exposé sur la triangulation des systèmes différentiels à la conférence `SymbolicandNumericScientificComputations` (Linz, septembre 2001).
- présenté ses travaux au cours de deux séminaires donnés à l'*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* lors de sa visite dans le cadre du PRA franco-chinois (cf. 8.3.2). Cette visite a eu lieu en octobre 2001.

J.-A. Weil a visité l'équipe d'algèbre différentielle de NYU (New York) du 16 au 22 octobre et a présenté ses travaux en théorie de Galois différentielle dans divers séminaires et conférences :

- au séminaire Kolchin (NYU, 18 et 20 octobre 2001),
- à la Texas Tech University (Lubbock, Texas, 23 octobre 2001),
- au séminaire Waldshmidt-Cartier (IHP, Paris, 19 novembre 2001),
- à la conférence `DifferentialEquations,ApproximationsandApplications` (Hanoi, Vietnam, 10–15 décembre 2001).

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] M. Bronstein, M. Petkovšek, « An Introduction to Pseudo–Linear Algebra », *Theoretical Computer Science 157*, 1996, p. 3–33.

[2] M. Bronstein, W. Sit (éditeurs), *Differential Algebra and Differential Equations (Special Issue of the Journal of Symbolic Computation)*, Academic Press, Londres, 1999.

[3] M. Bronstein, *Symbolic Integration I – Transcendental Functions*, Springer, Heidelberg, 1997.

[4] M. Bronstein, « On solutions of linear ordinary difference equations in their coefficient field », *Journal of Symbolic Computation 29*, 6, 2000, p. 841–877.

[5] E. Hubert, « Essential Components of an Algebraic Differential Equation », *Journal of Symbolic Computation 28*, 4-5, 1999, p. 657–680.

[6] E. Hubert, « Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra », *Journal of Symbolic Computation 29*, 4-5, 2000, p. 641–662.

[7] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, « Algebraic analysis of linear multidimensional control systems », *IMA Journal of Control and Information 16*, 3, 1999, p. 275–297.

[8] M. Van Hoeij, J.-F. Ragot, F. Ulmer, J.-A. Weil, « Liouvillian Solutions of Linear Differential Equations of Order Three and Higher », *Journal of Symbolic Computation 28*, 4 and 5, 1999, p. 589–610.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[9] R. Bomboy, *Réductibilité et résolubilité des équations aux différences finies*, Thèse de mathématiques, Université de Nice, 2001.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[10] S. Abramov, M. Bronstein, « On Solutions of Linear Functional Systems », *in : Proceedings of ISSAC'2001*, B. Mourrain (éditeur), ACM Press, p. 1–6, 2001.

[11] M. Bronstein, « Computer algebra algorithms for linear ordinary differential and difference equations », *in : Proceedings of the third European congress of mathematics, vol. II*, *Progress in Mathematics*, *202*, Birkhäuser, Basel, 2001.

Rapports de recherche et publications internes

[12] T. Cluzeau, E. Hubert, « Resolvent Representation for Regular Differential Ideals », *Rapport de Recherche n°RR-4200*, INRIA, 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4200.html`.