INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet MATHFI

Mathématiques Financières

Rocquencourt

THÈME 4B

Rapport d'Activité

2001

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique
Agnès Sulem [DR, Inria]
Responsables permanents
Claude Martini [CR, Inria jusqu'en mai]
Vlad Bally [DR, Professeur détaché de l'Université du Maine]
Assistante de projet
Martine Verneuille [SAR, Inria]
Ingénieur associé
Sophie Volle
Collaborateurs extérieurs
Guy Barles [Professeur, Université de Tours]
Jean-Philippe Chancelier [Enseignant Chercheur, Maître de Conférence à l'ENPC]
Emmanuelle Clément [Maître de conférences, Université de Marne la Vallée]
Thierry Jeantheau [Maître de conférences, Université de Marne la Vallée]
Stéphane Villeneuve [Maître de conférences, Université d'Evry]
Personnel Université et ENPC
Marie-Claire Quenez [Maître de conférences, Université de Marne la Vallée]
Valentine Genon-Catalot [Professeur, Université de Marne la Vallée]
Benjamin Jourdain [Enseignant Chercheur, Maître de conférence à l'ENPC]
Damien Lamberton [Professeur, Université de Marne la Vallée]
Bernard Lapeyre [Directeur du Cermics, Professeur à l'ENPC]
Chercheurs invités
David Hobson [Professeur, University of Bath]
Paul Malliavin [Professeur, Académie des sciences - Paris]
Youssef Ouknine [Professeur, Université de Marrakech]
Albert Shiryaev [Professeur, Université de Moscou]
Antonino Zanette [Enseignant chercheur, Université de Udine, Italie]
Chercheur post-doctorant
Pierre Cohort [Post-doctorant industriel]
Ingénieur expert
Christophe Patry
Doctorants
Bouarhi Arouna [Allocataire MENRT, UMLV]
Simone Deparis [Assistant, EPFL]
Youssef Elouerkhaoui [UBS, Université Paris 9]
Sandrine Hénon [Convention Cifre avec CAI, UMLV]
Matthieu Leblanc [Bourse MENRT, Université Paris 7]
Vincent Lemaire [Allocataire Moniteur, UMLV]
David Lefèvre [Bourse Inria, Université Paris 9 Dauphine]
Mohamed Mnif [Bourse Inria, Université Paris 7]
Laurent Nguyen [Convention Cifre, CCF]
Samuel Njoh [Convention Cifre avec EDF, UMLV]

Mouaya Noubir [Crédit Lyonnais, ENPC]
Emmanuel Temam [Allocataire de Recherche MENRT, Université Paris 6]
Xavier Joseph [Bourse Cifre, Coface, Université Paris 6]

Stagiaires

Siddhartha Chattopadhyay [I.I.T Kampur, Inde]
Jean-Francois Bergez [ENPC]
Aurélie Judeau [Institut Galilée]
Maya Briani [Université de Rome]
Roy Cerqueti [Université de Rome]

2 Présentation et objectifs généraux

La pratique d'instruments financiers de plus en plus complexes (options, produits de taux d'intérêt ...) a conduit à une utilisation de techniques avancées d'analyse stochastique et numérique dans les établissements financiers. Ces établissements sont demandeurs de contacts avec le monde de la recherche : c'est un élément réellement nouveau pour les mathématiques appliquées que l'on peut dater, en France, du milieu des années 80. Cet intérêt s'est traduit par des collaborations avec des universitaires renommés, la réalisation de contrats de recherche et le recrutement, au meilleur niveau, de mathématiciens appliqués dans les équipes de recherche et développement des banques. Notons qu'une demande forte de spécialistes se maintient depuis maintenant plus de quinze ans.

En retour, la pratique financière pose aux mathématiciens des problèmes stimulants et une interaction fructueuse s'est ainsi établie entre mathématiciens et financiers. Le développement dans le monde académique de cette nouvelle branche des mathématiques appliquées s'est concrétisé par l'organisation de congrès scientifiques internationaux, la création de plusieurs revues (« Mathematical Finance », « Finance and Stochastics », « International Journal of Theorical and applied Finance », « Applied Mathematical Finance » ...), une explosion de l'offre de cours en troisième cycle et dans les écoles d'ingénieurs ainsi que par la soutenance de nombreuses thèses sur le sujet.

Les compétences scientifiques de l'équipe dans ce domaine concernent la modélisation des prix des actifs par des processus stochastiques, la résolution d'équations aux dérivées partielles par des méthodes probabilistes et d'analyse numérique classique, le contrôle stochastique des diffusions ou des processus de Markov, la statistique des diffusions, les probabilités numériques, avec des applications au calcul des prix d'actifs complexes, à l'optimisation dynamique de portefeuilles en marché imparfait, à la couverture approchée de produits dérivés en marché incomplet, et à la calibration des prix d'actifs financiers.

Le domaine de la finance mathématique est aujourd'hui tellement étendu qu'un seul projet ne peut le couvrir en totalité. Notre projet vise tout particulièrement à développer certains aspects proches des préoccupations des salles de marchés : modélisation plus pertinente des actifs financiers (prise en compte d'événements rares comme d'importantes variations de cours, incertitude structurelle sur les paramètres de la dynamique statistique des cours ...), méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des options et leur mise en œuvre (méthodes de Monte–Carlo, méthodes d'arbres, analyse numérique d'équations aux dérivées partielles), étude de techniques de couverture réalistes (coûts de transaction, couverture en temps discret, contrainte de liquidité, observvation incomplète, ...), applications du contrôle stochastique à la gestion de portefeuilles d'actifs et d'options. Ces sujets concernent des domaines sur lesquels les membres de l'équipe ont contribué de façon active tant sur les aspects théoriques qu'appliqués.

En collaboration avec un consortium de banques, nous développons le logiciel Premia consacré à l'évaluation et la couverture des options , site web : `http://cermics.enpc.fr/~premia`. Le but est de constituer une base de référence sur les algorithmes d'évaluation et de couverture des produits dérivés, ainsi qu'un environnement informatique facilitant l'implémentation et les tests numériques associés aux travaux de l'équipe.

Les activités scientifiques du projet peuvent se regrouper selon les thèmes suivants : méthodes numériques pour les produits dérivés et la gestion de portefeuille, contrôle stochastique et applications à la gestion de portefeuilles et à l'évaluation et la couverture approchée des options, modélisation et calibration des prix des actifs financiers. La réalisation du logiciel de calcul d'options Premia participe à la valorisation des activités scientifiques du projet.

Relations internationales et industrielles

- Collaborations internationales et universitaires
  - Projet franco-russe de « Mathématiques financières » de l'Institut Liapunov à Moscou, site Web : `http://www-direction.inria.fr/international/liapunov.html`.
  - Collaborations avec l'Université d'Oslo, l'université de Bath, et les universités de Rome II et III.
  - Enseignement universitaire dans les DEA Paris I, Paris VI, Paris IX, UMLV, et École Polytechnique, ENPC.
- Contrats industriels :
  - Consortium Premia centré sur le logiciel de calcul d'options Premia. Il est composé de : Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.
  - Conventions Cifre avec EDF (Couverture des options sur électricité), le CAI (modeles de taux d'intérêt à volatilité stochastique), le CCF (Calibration par méthodes de Monte–Carlo).

3 Fondements scientifiques

3.1 Méthodes numériques pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés et la calibration des modèles

Mots clés : Monte-Carlo, méthodes d'arbres, différences finies, méthodes numériques, calibration.

Participants : P. Cohort, B. Jourdain, D. Lamberton, B. Lapeyre, C. Martini, C. Patry, A. Sulem, E. Temam, S. Volle, A. Zanette.

Résumé : *Les problèmes de calcul effectif des prix et des couvertures d'options sont, encore aujourd'hui, l'enjeu essentiel pour les établissements financiers. Bien*

qu'une activité de recherche intense ait été menée dans les banques et le monde universitaire depuis quinze ans, cette préoccupation reste entière tout particulièrement pour le calcul d'options exotiques et sur taux d'intérêt et l'optimisation de portefeuille sous contraintes. Ce thème d'activité, tout en étant au coeur du développement du logiciel Premia, motive des recherches plus théoriques à la fois sur les méthodes de type Monte-Carlo et sur les schémas numériques pour les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires (Kolmogorov, Hamilton-Jacobi-Bellman, Inéquations Variationnelles et quasi-variationnelles), en particulier dans le cas très fréquent dans les applications, où le schéma discrétisé ne vérifie pas le principe du maximum discret. Nous nous interessons également à la calibration des prix des actifs financiers à partir des données du marché.

Méthodes de Monte–Carlo. Les problèmes d'évaluation et de couverture d'options sont liés à des équations de diffusion en dimension (parfois) grande (plus de 10), ou très dégénérées pour lesquelles les méthodes numériques sont délicates voire impossible à mettre en oeuvre. Il n'est donc pas étonnant de constater que des méthodes de Monte-Carlo sont aujourd'hui utilisées de façon massive en finance, très souvent en raison de la simplicité de leur implémentation. Cette simplicité apparente ne doit pas cacher que la mise en oeuvre efficace de ces techniques conduit à des problèmes mathématiques délicats : approximation précise de fonctionnelles du mouvement brownien (option sur moyenne ou maximum ...), justification de l'emploi de suites à discrépance faible pour des fonctions peu régulières comme celles utilisées lors de calculs d'options, pour ne citer que quelques points traités par des chercheurs du projet. Ce domaine de recherche est, bien sûr, directement lié à des activités appliquées et concerne une des parties importantes du logiciel Premia.

Méthodes numériques probabilistes. Les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement l'évaluation numérique de prix d'actifs complexes, en particulier le pricing d'options par des méthodes d'arbres. Si la convergence des schémas d'arbre a été traité notamment par Kushner [HD92], il semble que l'étude de la vitesse de convergence et aussi la compréhension des phénomènes d'enveloppes observés lors de la convergence des schémas d'arbres soit pour une grande part encore à réaliser.

Plus précisément, on peut citer : l'étude de la forme de la convergence de l'algorithme de Cox-Ross-Rubinstein [CRR78] pour une option standard, de la vitesse de convergence pour des algorithmes de type Hull-White [HW93] ou Barraquand-Pudet [BP96] pour des options européennes sur trajectoires, la preuve de la convergence de ce type d'algorithmes pour des options américaines.

[HD92] H.J. Kushner, P. Dupuis, *Numerical Methods for stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer Verlag, 1992.

[CRR78] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein, « Option pricing: a simplified approach », *J. of Economics*, January 1978.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

Méthodes numériques déterministes. Nous étudions les schémas numériques pour des équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées, en particulier les équations en dimension élevée et les questions de stabilité des schémas aux différences finies pour les inéquations variationnelles.

Nous menons aussi l'étude des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, en particulier dans le cas très fréquent dans les applications, où le schéma discrétisé ne vérifie pas le principe du maximum discret.

Méthodes de calibration. Le modèle de Black-Scholes nous donne le prix d'options en fonction de la volatilité (supposée constante) de l'actif sous-jacent. On peut inverser cette relation pour obtenir la volatilité implicite à partir des prix d'options observés sur le marché. Si le modèle était parfait, cette volatilité implicite serait la même pour tous les prix d'options sur un même sous-jacent, mais ce n'est pas le cas : la volatilité depend de la maturité et du prix d'exercice de l'option. Pour remédier à cette contradiction, on introduit une volatilité dépendant du temps et du prix de l'actif sous-jacent. Dans un premier temps, notre objectif est d'implémenter des méthodes déjà existantes dans la littérature dans le logiciel Premia.

3.2 Contrôle stochastique

Mots clés : contrôle stochastique, contrôle singulier et impulsionnel, frontière libre, Hamilton-Jacobi-Bellman, inéquation variationnelle et quasi-variationnelle.

Participants : J.-Ph. Chancelier, C. Martini, M. Mnif, Ch. Patry, A. Sulem.

Résumé : *Le contrôle stochastique est l'étude des systèmes dynamiques perturbés par des événements aléatoires et que l'on peut contrôler dans le but d'optimiser un certain critère.*

On considère des systèmes dynamiques dont l'état est modélisé par un processus de diffusion (éventuellement avec sauts), sur lequel on peut agir au moyen de variables de contrôle. La commande peut être continue, singulière ou impulsionnelle. Le but est d'optimiser un critère sur un horizon de gestion fini ou infini ou de type ergodique ou sensible au risque. La fonction valeur, qui réalise l'optimum du critère satisfait une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ou une inéquation variationnelle ou quasi-variationnelle elliptique, parabolique, ergodique ou sensible au risque, avec des conditions aux limites dépendant du comportement du processus au bord du domaine : arrêté, réfléchi, etc ...

Dans le cas où la dynamique du système suit un processus de diffusion avec sauts, l'équation d'HJB est integro-différentielle.

Les problèmes de temps d'arrêt optimal conduisent par l'approche de la programmation dynamique à des inéquations variationnelles de type obstacle : c'est le cas par exemple du problèmes d'options américaines.

Dans le cas d'un contrôle singulier, (alors le déplacement de l'état du système dû à l'application de la commande est non différentiable par rapport au temps), l'équation de la programmation dynamique est une inéquation variationnelle (I.V.), c'est à dire un système d'inéquations aux dérivées partielles. Les contrôles singuliers sont utilisés pour modéliser par exemple les problèmes de gestion de portefeuille avec coûts de transaction proportionnels.

Le contrôle peut être également de type impulsionnel, c'est-à-dire que l'état du système subit des sauts à certains instants, les instants d'impulsion et la taille des sauts étant des variables de décision. Dans ce cas, la fonction valeur vérifie une inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.). Ces modèles sont utilisés par exemple dans le cas de coûts fixes de transaction. Les I.V. et I.Q.V. correspondent à des problèmes de frontière libre. La théorie des solutions de viscosité fournit un cadre rigoureux pour l'étude des équations de la programmation dynamique.

Nous étudions également les problèmes de contrôle stochastique dans le cas où l'observation est incomplète.

L'étude théorique et numérique de ces problèmes est un de nos sujets de recherche de base. Les applications financières concernent les problèmes de gestion de portefeuille avec coûts de transaction, la couverture approchée d'options financières, les problèmes d'options américaines, les problèmes de maximisation d'utilité en marché incomplet, les problèmes d'assurance et de réassurance.

3.3 Equations differentielles stochastiques rétrogrades

Mots clés : EDSR.

Participants : M.C. Quenez, M. Kobylanski.

Résumé : *Les équation différentielles stochastiques rétrogrades sont liées au principe du maximum stochastique pour les problèmes de contrôle stochastique. Elles permettent également de fournir le prix d'actifs contingents dans le cas de marchés complets et incomplets.*

La solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) consiste en une paire de processus adaptés (Y, Z) satisfaisant

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t' dW_t; \qquad Y_T = \xi, \tag{1}$$

où f est appelé le driver et ξ la condition terminale.

M.C. Quenez, N.El Karoui et S.Peng ont établi différentes propriétés de ces EDSRs, notamment leurs liens avec le contrôle stochastique (cf. [KPQ97], [LQ99]). Ce type d'équations apparaît dans de nombreux problèmes en Finance. Par exemple, dans le cas d'un marché complet, le prix de l'actif contingent B peut être vu comme la solution d'une EDSR avec un driver f linéaire et une condition terminale égale à B. Soulignons le caractère *dynamique* de cette méthode de pricing qui donne le prix de B à tout instant (et pas seulement à l'instant initial). Dans le contexte de marché incomplet, le processus prix défini par Fölmer et Schweitzer (1990)[FS91]

[KPQ97] N. Karoui, S. Peng, M. Quenez, « Backward Stochastic Differential Equations in Finance », *Mathematical Finance* 7, 1, January 1997, p. 1–71.

[LQ99] A. Lazrak, M. Quenez, « Generalized Stochastic Differential Utility », *rapport de recherche*, Université d'Evry, 1999.

[FS91] H. Föllmer, M. Schweizer, « Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied Stochastic Analysis », *Stochastic Monographs*, 5, 1991, p. 389–414, (M.H.A. Davis and R.J. Elliott, eds), Gordon and Beach.

correspond aussi à la solution d'une EDSR linéaire. Le processus prix de vente peut être approximé par des prix « pénalisés » qui sont solutions d'EDSRs non linéaires. D'autre part, des EDSRs de type non linéaire peuvent apparaître dans le cas de *contraintes* non linéaires comme le cas de taxes ou encore le cas du « gros » investisseur (dont la stratégie de portefeuille a une influence sur les prix du marché). Dans ces différents cas, le prix d'un actif contingent B est solution d'une EDSR avec un driver f non linéaire et une condition terminale égale à B. Un autre exemple d'EDSR en Finance est donné par les *utilités récursives* introduites par Duffie et Epstein (1992)[DL92]. Une telle fonction d'utilité associée à un taux de consommation $(c_t, 0 \leq t \leq T)$ correspond à la solution de l'EDSR (1) avec une condition terminale ξ s'interprétant comme un rendement terminal (qui peut être une fonction de la richesse terminale) et un driver $f(t, c_t, y)$ dépendant du taux de consommation c_t. Le cas d'une fonction d'utilité standard correspond à un driver f linéaire du type $f(t, c, y) = u(c) - \beta_t y$, où u est une fonction déterministe croissante et concave, et où β correspond au taux d'actualisation.

Si les EDSRs s'avèrent être un outil efficace en Finance, il en est de même pour les *EDSRs réfléchies* introduites dans [KKP+97]. Dans le cas d'une EDSR réfléchie, la solution Y est contrainte à rester supérieure à un processus donné appelé « obstacle ». Un processus croissant K est introduit dans l'équation de manière à pousser la solution au dessus de l'obstacle, et ceci de manière minimale, c'est à dire que Y satisfait une équation du type :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt + dK_t - Z_t' dW_t; \qquad Y_T = \xi. \tag{2}$$

On peut montrer que le prix d'une option américaine (avec éventuellement des contraintes non linéaires) est solution d'une EDSR réfléchie où l'obstacle est donné par le payoff. Le temps d'arrêt optimal d'une telle option est égal au premier instant où le prix atteint le payoff ([KPMC97] et [KQ97]).

4 Domaines d'applications

4.1 Mathématiques financières

Résumé : *Les applications financières que nous considérons sont les problèmes d'évaluation et de couverture des produits dérivés (options européennes et américaines) et les problèmes de gestion optimale de portefeuilles. Nous tendons à nous rapprocher des conditions du marché par des modélisations réalistes des actifs financiers (prise en compte d'événements rares comme d'importantes variations de*

[DL92] D. Duffie, L.G. Epstein, « Stochastic differential utility and asset pricing », *Econometrica 60*, 1992, p. 353–394.

[KKP+97] N. E. Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. P. S., M.C.Quenez, « Reflected solutions of Backward SDE's and related obstacle problems for PDE's" », *The Annals of Probability 25*, 2, 1997, p. 702–737.

[KPMC97] N. E. Karoui, E. Pardoux, M-C.Quenez, *Numerical methods in Finance*, Cambridge University Press, 1997, ch. Reflected BSDE's and American options, p. 215–231.

[KQ97] N. E. Karoui, M. Quenez, « Non-linear Pricing Theory and Backward Stochastic Differential Equations », *in : Financial Mathematics*, W.J.Runggaldier (éditeur), *Lectures Notes in Mathematics, 1656*, Springer, 1997. Bressanone,1996.

cours par la modélisation des prix des actifs par des processus stables et des mouvements browniens fractionnaires, modélisation aléatoire de la volatilité), ainsi que par l'étude de techniques de couverture approchée (introduction de coûts de transaction, couvertures discrètes). Nous étudions également les problèmes de calibration de modèles.

4.1.1 Modélisation des actifs financiers

Participants : V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, A. Sulem.

Mots clés : lois stables, volatilité stochastique, mouvement brownien fractionnaire.

Les modèles usuels de finance comme le modèle de Black-Scholes et ses différentes variations font intervenir des processus de diffusion. Les actifs peuvent alors être couverts par des stratégies données sous forme explicite, ou bien calculables de manière approchée. Les calculs approchés reposent soit sur des méthodes de Monte–Carlo combinées avec des techniques de simulation de solutions d'équations différentielles stochastiques, soit sur des méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles paraboliques.

Des études statistiques semblent montrer que les prix d'actions suivent en réalité des dynamiques discontinues. Ces modèles rendent mieux compte de certains phénomènes tels que les cracks boursiers, les irrégularités dues aux écarts entre offres d'achat et offres de vente, les interventions d'investisseurs institutionnels.

Application des lois stables en finance. On connaît les limites du modèle de Black-Scholes et les quelques incohérences qu'il entraîne entre les axiomes et les observations empiriques. Parmi les faiblesses on peut citer le « smile de volatilité ». L'objet de la thèse d'A. Tisseyre est l'utilisation de processus géométriques α-stables. L'étude statistique des cours de change permet de trouver une valeur de α de l'ordre de 1.65, ce qui donne en particulier une bonne estimation de fréquence de retour de « crak ». Un modèle de pricing d'options dans ce cadre permet d'apporter une correction significative sur le smile de volatilité. A. Tisseyre a développé de méthodes numériques analytiques permettant d'évaluer la densité, la fonction de répartition et la transformée de Laplace partielle des lois α-stables. Il a obtenu des résultats théoriques permettant d'exprimer ces fonctions à l'aide soit de séries, soit d'intégrales complexes, soit de développements asymptotiques. Ces résultats sont appliqués pour l'évaluation de prix d'options dans le cadre de modèles « stables » (voir [Tis99]). Dans le cadre du projet Premia, on implémente des méthodes numériques pour des processus de diffusion avec sauts.

Statistique des modèles à volatilité stochastique. Pour pallier les insuffisances du modèle de Black et Scholes, de nombreux auteurs ont proposé une modélisation aléatoire de la volatilité. Ces modèles, dits à volatilité stochastique, peuvent être à temps discret (par exemple les modèles ARCH) ou à temps continu (tel que le proposent par exemple Hull and White). Les formules de prix de produits dérivés qui en découlent dépendent des paramètres figurant dans les équations stochastiques associées.

[Tis99] A. Tisseyre, *Stabilité et Finance*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, 1999.

Le problème de l'estimation de ces paramètres à partir de l'observation des prix d'actifs n'est pas standard et nécessite des méthodes spécifiques. Ce travail a déjà été effectué dans différents cadres asymptotiques. par exemple celui des données haute fréquence. Notre équipe y a contribué ; quatre articles [GCJL98], [GCJL99], [GCJL00], [47] et la thèse de A. Gloter sont principalement consacrés à ce sujet. Nos méthodes peuvent être implémentées, et les résultats théoriques sont validés par des simulations numériques.

De nombreux problèmes statistiques sur ces modèles restent ouverts et les résultats obtenus peuvent certainement être améliorés afin de rendre les procédures d'estimation plus efficaces. L'équipe envisage également d'étudier la situation où les browniens régissant le prix des actifs et la volatilité sont corrélés.

Mouvement Brownien Fractionnaire. On considère des marchés financiers de type Black-Scholes gouvernés par des MBF, de paramètre de Hurst $> \frac{1}{2}$. Dans ce cas le système n'est plus Markovien et le contrôle de ces systèmes ne peut pas utiliser la programmation dynamique.

4.1.2 Couverture approchée des produits dérivés

Mots clés : risque modèle, coûts de transaction, couverture discrète.

Participants : C. Martini, Ch. Patry, E. Temam, D. Lamberton, S. Njoh.

Les problèmes de couverture approchée apparaissent lorsqu'on ne peut pas se couvrir directement avec l'actif sous-jacent. La thèse de S. Njoh sur la couverture des options sur l'électricité. Le caractère non stockable de l'électricité rend inopérante toute stratégie de couverture avec le sous-jacent et on ne peut espérer réaliser qu'une couverture approchée à l'aide d'autres actifs.

4.1.3 Évaluation d'actif contingent en marché incomplet

Mots clés : marché incomplet.

Participant : M.C. Quenez.

Dans le cadre d'un marché *incomplet*, l'information disponible peut ne plus se limiter aux titres de référence ; d'autres informations intérieures ou extérieures au marché sont disponibles et peuvent avoir une influence sur les mouvements des titres du marché. A la différence des modèles traditionnels, la structure d'information n'est pas engendrée par des browniens. Contrairement au cas des marchés complets, il existe alors des actifs contingents pour lesquels il n'existe pas de portefeuille réalisant une couverture parfaite. Par conséquent, le prix ne peut pas être a priori déterminé par un raisonnement d'arbitrage. De plus, il existe plusieurs probabilités équivalentes à la probabilité initiale (notée P) sous lesquelles les prix actualisés des

[GCJL98] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Limit Theorems for Discretely Observed Stochastic Volatility Models », *Bernoulli 4*, 3, 1998, p. 283–303.

[GCJL99] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Parameter Estimation for Discretely Observed Stochastic Volatility Models », *Bernoulli 5*, 5, 1999, p. 858–872.

[GCJL00] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Stochastic volatility models as hidden Markov models and statistical applications », *Bernoulli 6*, 6, 2000, p. 1051–1079.

titres de référence sont des martingales ; ces probabilités sont appelées P*-mesures martingales*. A ces probabilités, nous faisons correspondre par dualité différents systèmes de prix. (cf.[KQ91] et [KQ95]). Nous étudions de manière *dynamique* la borne supérieure de ces prix possibles (associés à l'actif contingent B). Cette borne supérieure est caractérisée comme la plus petite surmartingale sous toutes les mesures martingales, égale à B à l'instant T. En utilisant cette propriété, nous montrons que cette Q-surmartingale admet une *décomposition de type Doob-Meyer*, mais *optionnelle* : plus précisément, elle s'écrit comme la différence d'une Q-martingale correspondant à la valeur actualisée d'un portefeuille (dit de *surcouverture*) et d'un processus croissant optionnel. Cette décomposition nous permet alors de conclure que cette borne supérieure correspond au *prix de vente* défini comme le plus petit des prix permettant au vendeur de se « surcouvrir » grâce à un portefeuille.

4.1.4 Gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Participants : M. Akian (projet Metalau), J.-Ph. Chancelier, B. Øksendal (Université d'Oslo), S. Pliska (University of Illinois at Chicago), A. Sulem, M. Taksar (Stony Brook University New York).

On étudie la politique optimale de consommation et d'investissement d'un investisseur ayant un compte en banque et n comptes en actions modélisés par des mouvements browniens géométriques, pouvant dépendre éventuellement de facteurs économiques. Les transactions entre comptes entraînent des coûts modélisées par des contrôles singuliers ou impulsionnels.

L'objectif est de maximiser le taux moyen de profit pour une fonction d'utilité de type HARA, ou l'espérance d'une fonction d'utilité de la richesse finale [ASS95] ou encore une fonction d'utilité de la consommation [1]. Ces problèmes se modélisent comme des problèmes de contrôle stochastique singulier ou impulsionnel. Ils conduisent à des inéquations variationnelles ou quasi-variationnelles que l'on étudie théoriquement au moyen des solutions de viscosité, et numériquement par des algorithmes de type Howard et multigrilles.

Le cas ergodique (maximisation du taux moyen de profit) est étudié dans [16]. Le problème des coûts fixes de transaction est étudié dans [32] et [COS00]. Il se formule comme un problème combiné de contrôle stochastique et de contrôle impulsionnel qui conduit à une inéquation quasi variationnelle non linéaire.

Nous étudions également ces problèmes dans le cas où les prix des actifs risqués sont modélisés par des processus de diffusion avec sauts [FOS98], [31]. Dans ce cas les équations

[KQ91] N. E. Karoui, M. Quenez, « Programmation dynamique et évaluation des actifs contingents en marché incomplet », *C.R.Acad.Sci.Paris 331*, 1991, p. 851–854.

[KQ95] N. E. Karoui, M. Quenez, « Dynamic programming and pricing of a contingent claim in an incomplete market », *SIAM Journal on Control and optimization 33*, 1, 1995, p. 29–66.

[ASS95] M. Akian, A. Sulem, P. Séquier, « A finite horizon multidimensional portfolio selection problem with singular transactions », *in : Proceedings CDC*, p. 2193–2198, News Orleans, Décembre 1995. Vol.3.

[COS00] J. Chancelier, B. Øksendal, A. Sulem, « Combined stochastic control and optimal stopping, and application to numerical approximation of combined stochastic and impulse control », *Preprint series n° 16*, University of Oslo, May 2000, à paraître dans Vol. on Mathematical Finance, Steklov Institute, Moscou, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/16-00.html`.

[FOS98] N. Framstad, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump

d'HJB associées comportent un terme intégral. Le problème sans coût de transaction peut être résolu explicitement : la solution est de la même forme que dans le cas d'une pure diffusion [FOS98]. En particulier, le portefeuille optimal consiste à conserver dans l'actif risqué une fraction constante de la richesse. Cette constante est plus petite que dans le cas d'une diffusion pure. En présence de coûts de transaction proportionnels, on montre [31] que la solution a la même forme que dans le cas d'une diffusion pure traité par Davis and Norman [MN90] : il existe sous certaines hypothèses un cône de non transaction D où il est optimal de ne faire aucune transaction tant que la position de l'investisseur s'y trouve et d'acheter et de vendre selon des temps locaux sur la frontière de D. On établit l'inéquation variationnelle intégro-différentielle associée à ce problème que l'on étudie par la théorie des solutions de viscosité.

5 Logiciels

5.1 Développement d'un logiciel de pricer d'options : Premia

Mots clés : pricer, options, évaluation, couverture.

Participants : B. Jourdain, P. Cohort, A. Gille-Genest, B. Lapeyre, C. Martini, A. Sulem, E. Temam, S. Volle, A. Zanette.

Le logiciel Premia est dédié à l'évaluation (pricing) et à la couverture de produits dérivés (options) sur actions. Premia présente des implémentations rigoureuses et documentées des algorithmes les plus récents dans le domaine et à vise à constituer une contrepartie numérique à l'explosion académique du domaine.

Ce logiciel peut être un outil de formation de traders soucieux de maîtriser l'aspect numérique du pricing d'options, et des étudiants de 3ème cycle en finance ou mathématiques financières. L'objectif n'est pas de réaliser un produit commercial qui traite tous les contrats existants sur le marché mais plutôt de fournir, pour un éventail de cas suffisamment représentatif des difficultés numériques qui se présentent, des codes sources et une documentation hypertexte qui fasse le pont entre la formule théorique du prix et du ratio de couverture de l'option et l'algorithme effectif de calcul. Notre but est de traiter des cas concrets où des questions numériques se posent. Par rapport aux « packages » spécialisés finance associés aux grands logiciels scientifiques, Premia est centré sur les produits dérivés et met l'accent sur l'aspect numérique.

Premia est développé en collaboration avec un consortium de banques. Actuellement, le consortium est composé de : Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web :

Diffusion Market », *in : proceedings du Workshop on Mathematical Finance*, Inria, Paris, 1998, `http://www.nhh.no/for/dp/1999/index.htm`.

[MN90] M.H.A. Davis, A. Norman, « Portfolio selection with transaction costs », *Mathematics of Operation Research 15*, 1990, p. 676–713.

`http://cermics.enpc.fr/~premia`;

Les livraisons de Premia 1 et Premia 2 ont eu lieu en Mai et Décembre 1999 et celle de Premia 3 en Février 2001. Premia 3 est dédié aux méthodes de Monte Carlo pour les options américaines en dimension élevée et est interfacée avec le logiciel Scilab. Les livraisons des prochaines versions Premia 4 et Premia 5 sont prévues au début et à la fin de l'année 2002.

L'interfacage de Premia avec Excel est en cours. La mise à disponibilité de Premia 2 sur le web est imminente.

6 Résultats nouveaux

6.1 Méthodes de Monte-Carlo pour les options américaines

Participants : P. Cohort, E. Clément, B. Jourdain, D. Lamberton, B. Lapeyre, P. Protter.

Mots clés : Monte-Carlo, options américaines.

Méthodes numériques et mise en œuvre dans le logiciel Premia. Le problème des calculs d'options américaines en dimension grande a été étudié cette année. Un groupe de travail a été organisé dès septembre 2000 sur le thème des méthodes de Monte-Carlo pour le cas américain par Benjamin Jourdain. Il vient soutenir une activité logicielle qui est réalisée dans le cadre du consortium Premia par P. Cohort.

Lors de l'arrivée de P. Cohort en Septembre 2000, le logiciel Premia (version 2) contenait environ une centaine de routines de pricing d'options classiques et exotiques, de type européen et américain. Toutes les familles de méthodes étaient abordées (en dimension 1 et 2) sauf celles de Monte–Carlo pour les options américaines.

L'objectif du projet Premia pour l'année 2001 a donc été essentiellement le développement d'une unité « Monte–Carlo américain » en grande dimension. Ce travail a consisté en une étude de la bibliographie récente sur le sujet, une implémentation des méthodes les plus pertinentes, des tests numériques de ces méthodes et la rédaction d'une documentation, le tout aboutissant à l'élaboration d'un produit interfacé avec le logiciel de calcul scientifique Scilab, livré aux membres du consortium Premia, sous le nom de Premia 3.

Les méthodes de Longstaff/Schwartz (1998), Tsitsikliss/VanRoy (2000), Barraquand/Martineau (1995), Broadie/Glasserman (1997) et de quantification (2000) ont été étudiées et exposées lors de notre groupe de travail « Méthodes de Monte–Carlo pour les options américaines ». P. Cohort a amélioré les algorithmes présentés afin d'en donner des versions plus efficaces et plus effectives, notamment en introduisant la simulation rétrograde des actifs. Les méthodes de quantification initialisées par Gilles Pagès ont fait l'objet d'une étude privilégiée.

D'autres articles, présentant des méthodes moins pertinentes, ont également été étudiés (Garcia 1997, Tilley 1993, Zapaterro 2000, Andersen 1998).

Le module Monte–Carlo américain contient 9 routines de pricing écrites en C (les algorithmes pré-cités avec des variantes), des routines de génération du modèle d'actifs (Black–Scholes multidimensionnel), des routines d'outillage mathématique (tri, régression, algèbre linéaire), un compilateur de formules de payoff et le programme de l'interface. Le total représente environ 7000 lignes de code. Ce code a été testé massivement et a atteint un niveau de débogage satisfaisant.

P. Cohort a implémenté les suites de Sobol en dimension grande (jusqu'à 40000) et leurs applications aux algorithmes de Monte–Carlo pour les options américaines. Ces suites seront intégrées à la version Premia 4, livrable au mois de janvier 2002.

P. Cohort a réalisé des tests numériques massifs (plusieurs semaines de calcul sur le cluster du Cermics). Ils ont permis de valider les méthodes de Longstaff/Schwartz, Tsitsikliss/VanRoy et de quantification, et de rejeter les méthodes de Broadie/Glasserman et Barraquand/Martineau.

Une documentation d'une quarantaine de pages a été rédigée pour le module Monte–Carlo américain. Elle contient une description mathématique des algorithmes, une description de chaque implémentation et un mode d'emploi de l'interface avec Scilab.

A la demande des membres du consortium, P. Cohort a réalisé, en collaboration avec S. Chattopadhyay et J.P. Chancelier l'interfaçage du module Monte–Carlo américain avec Scilab. Une telle interface permet d'utiliser comme des fonctions Scilab les routines de pricing écrites en langage C et ainsi de profiter à la fois de la rapidité du langage C et des fonctionnalités de Scilab (graphisme, fonctions statistiques, etc ...). Ce travail exploite les nouvelles fonctions d'interfaçage de la version 2.6 de ce logiciel.

Analyse d'une méthode de régression pour le calcul du prix des options américaines. Cément, Lamberton et Protter ont donné une preuve complète de la convergence d'un algorithme proposé par Longstaff et Schwartz et étudié sa vitesse de convergence. Ce travail a été fortement stimulé par l'activité du groupe de travail du projet mathfi sur le thème « Méthodes de Monte-Carlo pour les options américaines » [2].

6.2 Méthodes de Monte-Carlo pour les options asiatiques

Participants : B. Lapeyre, E. Temam.

Mots clés : Monte-Carlo, options asiatiques.

Les méthodes de Monte-Carlo sont connues pour être utiles en dimension grande. Ceci est vrai, mais le cas des options asiatiques fournit un exemple, surprenant, où les méthodes de Monte-Carlo (combinées à des techniques de réduction de variance) peuvent être plus efficaces que toute autre méthode connue y compris en dimension 2.

Le problème du pricing d'option asiatique est délicat. Ce problème est déjà largement traité soit par des méthodes analytiques [GY93,FMW96], soit par des méthodes numériques [DW95,LS95],

[GY93] H. Geman, M. Yor, « Bessel processes, Asian options, and perpetuities », *Mathematical Finance 3*, 4, 1993, p. 349–375.

[FMW96] M. Fu, D. Madan, T. Wang, « Pricing continous time Asian options: A comparison of analytical and monte carlo methods », *forthcoming in the Journal of Computational Finance*, 1996.

[DW95] J. Dewynne, P. Wilmott, « Asian options as linear complementary problems: Analysis and finite difference solutions », *Advances in Futures and Operations Research 8*, 1995, p. 145–173.

[LS95] L.C.G. Rogers, Z. Shi, « The value of an Asian option », *J. Appl. Probab. 32*, 4, 1995, p. 1077–1088.

soit par des méthodes de Monte-Carlo [AA90]. L'originalité de notre travail est de proposer et de justifier de nouveaux schémas de discrétisation en temps pour l'intégrale du processus de Black et Scholes : ce point pose un vrai problème lorsque l'on met en œuvre une méthode de Monte-Carlo comme l'ont noté Madan, Fy et Wang [FMW96], page 14. Nous montrons alors que pour un schéma en temps et une technique de réduction de variance bien choisis, la méthode de Monte-Carlo obtenue est, pour certaines valeurs de la volatilité, plus efficace que les autres méthodes déjà citées. Nous avons mené des comparaisons numériques détaillées entre notre méthode de Monte-Carlo et les méthodes suivantes : Forward Shooting Grid (FSG)[BP96], Hull et White [HW93] et des méthodes différences finies. Pour des valeurs de la précision relative modérées (1%), il apparaît que les méthodes d'arbres (FSG ou Hull et White) sont les plus efficaces. Mais, de façon surprenante, une grande précision (de l'ordre de 0,01 %) ne peut être obtenue que par une méthode de Monte-Carlo utilisant un pas de temps relativement grand (de l'ordre de 1 mois) (cf. [29]).

6.3 Discrétisation d'équation différentielle stochastique

Participant : E. Clément.

Dans les modèles de diffusion, la mise en œuvre des méthodes de Monte-Carlo nécessite le plus souvent la discrétisation d'une équation différentielle stochastique. Le schéma de discrétisation le plus utilisé dans la pratique est le schéma d'Euler. L'erreur que l'on commet lorsque l'on discrétise un processus de diffusion par un schéma d'Euler peut être contrôlée de différentes manières : norme L_P, contrôle des densités de transition .... L'approche considérée dans l'article [Clé99] est différente et consiste à mettre en évidence un comportement exponentiel de la vitesse de convergence du processus d'erreur convenablement normalisé. Plus précisément, le processus d'erreur satisfait un pseudo-principe de déviations modérées lorsque le pas de discrétisation du schéma d'Euler tend vers zéro. Ces techniques de grandes déviations devraient permettre d'étudier la couverture approchée d'options à des instants régulièrement espacés. Cette année nous avons poursuivi nos recherches sur les déviations modérées pour le processus d'erreur obtenu en approchant un processus de diffusion par un schéma d'Euler [19] et étudié la vitesse de convergence des schémas d'approximation pour des équations différentielles stochastiques réfléchies.

[AA90] A.G.Z. Kemna, A.C.F. Vorst, « A pricing method for options based on average asset values », *J. Banking Finan.*, March 1990.

[FMW96] M. Fu, D. Madan, T. Wang, « Pricing continous time Asian options: A comparison of analytical and monte carlo methods », *forthcoming in the Journal of Computational Finance*, 1996.

[BP96] J. Barraquand, T. Pudet, « The pricing of American Path-Dependent Contingent Claims », *Mathematical Finance 6*, 1, 1996, p. 17–51.

[HW93] J. Hull, A. White, « Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options », *Journal of Derivatives 1*, 1993, p. 21–31.

[Clé99] E. Clément, « Inequalities of moderate deviation type in the Euler method for S.D.E. : the example of the geometric Brownian motion », *Stochastics and Stochastics Reports 67*, 1999, p. 287–307.

6.4 Calibration de modèles par minimisation d'entropie par les méthodes de Monte-Carlo

Participants : L. Nguyen, B. Jourdain.

Dans la problèmatique de la calibration de modèles, Avellaneda&al [ABF+01] ont proposé une méthode de type Monte-Carlo pour obtenir à partir d'une probabilité a priori μ sur l'espace S des scenarii d'évolution possible du marché, une probabilité a posteriori compatible avec les prix de marché $C_1, \ldots, C_d$ de d actifs financiers définis par les fonctions de payoff $f_1, \ldots, f_d : S \to \mathbb{R}$. Pour $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant μ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ces auteurs suggèrent de chercher la probabilité ν_n qui minimise l'entropie relative par rapport à la mesure empirique $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ sous la contrainte $\int_S f d\nu_n = C$.
Dans [25], nous avons obtenu une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ν_n à partir d'un certain rang N. Lorsque cette condition est vérifiée, p.s. $(\nu_n)_{n \geq N}$ converge étroitement vers une limite ν qui est caractérisée comme la solution généralisée du problème de minimisation de l'entropie relative $H(\nu||\mu)$ sous la contrainte $\int_S f d\nu = C$.
Depuis, Laurent Nguyen a démontré le théorème de la limite centrale associé à la convergence de $\int_S \varphi d\nu_n$ vers $\int_S \varphi d\nu$ où φ est la fonction de payoff d'un actif dont on cherche le prix dans le modèle calibré. Puis il s'est intéressé au problème également introduit dans [ABF+01] de la minimisation de la somme $H(\nu_n^\gamma||\mu_n) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{\gamma_j}(C_j - \int_S f_j d\nu_n^\gamma)^2$ de l'entropie relative et d'une pénalisation de l'écart entre les prix de marché qui servent à calibrer et les prix donnés par le modèle.

6.5 Approximation de la mesure invariante d'une diffusion

Participants : D. Lamberton, V. Lemaire, G. Pagès (Université Paris 6).

Nous avons poursuivi l'étude de l'algorithme que nous avons proposé fin 1999, en améliorant en particulier les démonstrations de convergence et les résultats de vitesse de convergence. La thèse de Vincent Lemaire (coencadrée par Pagès et Lamberton) porte sur ce thème.

6.6 Risque modèle pour les produits dérivés, modèle UVM

Participants : L. Denis (Université du Mans), S. Deparis, C. Martini, M. Leblanc.

Mots clés : risque modèle, uvm, unknown volatility, volatilité stochastique.

On poursuit l'étude de la superréplication des options en présence d'incertitude sur le modèle, ce qui revient à spécifier non pas une probabilité mais une famille de probabilités parmi lesquelles le bon modèle a des chances de se situer.

En temps discret (S. Deparis, C. Martini), on peut utiliser la théorie du balayage par un cône de fonctions continues (le cône étant pour nous les stratégies autofinancées), pour obtenir une généralisation très naturelle du cas d'une seule probabilité : le plus petit prix de

[ABF+01] M. Avellaneda, R. Buff, C. Friedman, N. Grandchamp, L. Kruk, J. Newman, « Weighted Monte-Carlo: a new technique for calibrating asset-opricing models », *Int. J. Theor. and Appl. Finance 4*, 1, 2001, p. 91–119.

surcouverture est le supremum des espérances sous les probabilités martingales qui chargent les trajectoires du sous-jacent. Le cas du temps continu (L. Denis, C. Martini) est plus semble ardu. Il est difficile d'adapter les preuves des papiers fondateurs de El Karoui-Quenez[NM95] (processus continus) et Kramkov[Kra96] (processus quelconques), qui répondent à la question pour une seule probabilité et reposent sur des techniques exclusivement probabilistes. On a été amené à prouver un résultat un peu plus faible que celui de El Karoui-Quenez, de façon plus analytique, susceptible de s'étendre à la situation multi-probabilité.

Marco Avellaneda et al. [ALP95] et Terry Lyons [Lyo95] ont proposé en 1995, indépendamment, une nouvelle approche pour prendre en compte l'incertitude sur la volatilité du produit primaire (sous-jacent) dans l'évaluation des produits dérivés : rechercher des stratégies de couvertures qui fonctionnent simultanément pour tous les modèles dont la volatilité est dans un intervalle donné (sans autre hypothèse). Du fait de l'absence de consensus sur des modélisations stochastiques de la volatilité en pratique , ce modèle (dit UVM pour Unknown Volatility Model) a rencontré un grand succès auprès des professionnels (Avellaneda l'ayant développé au cours de son activité de consultant chez Morgan Stanley). Le prix de l'option par cette méthode est donné par la solution d'un problème de contrôle stochastique avec contrôle sur la variance, mais ceci n'est valide que pour des profils d'option théoriques (de régularité C^3). On peut, en se basant sur un résultat sur les lois marginales des intégrales stochastiques, et un résultat de Fleming et Vermes [WV89] de dualité convexe, traiter le cas des payoffs discontinus (options digitales).

D'un point de vue analytique, le modèle UVM conduit à une équation d'HJB totalement non-linéaire, avec une donnée terminale éventuellement discontinue. Nos résultats à cet égard semblent nouveaux [43].

6.7 Interprétation probabiliste des solutions d'EDP

Mots clés : EDP.

Participants : V. Bally, L. Stoica, E. Pardoux.

Nous étudions l'interprétation probabiliste des solutions d'EDP semi-linéaires à coefficients mesurables à l'aide des processus de Markov symétriques.

[NM95] N. El Karoui, M.C. Quenez, « Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market », *SIAM Journal of Control and Optimization 33*, 1995.

[Kra96] D. Kramkov, « Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets », *Probability theory and related fields 105*, 1996.

[ALP95] M. Avellaneda, A. Levy, A. Paras, « Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities », *Journal of Applied Finance 1*, 1995.

[Lyo95] T. Lyons, « Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives », *Journal of Applied Finance 2*, 1995.

[WV89] W.H. Fleming, D. Vermes, « Convex duality approach to the optimal control of diffusions », *SIAM Journal of Control and Optimization 27*, 1989.

6.8 Contrôle stochastique sensible au risque - Application en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction

Mots clés : contrôle sensible au risque , contrôle stochastique impulsionnel, problème min-max.

Participants : T. Bielecki (Northeastern Illinois University, Chicago), J.Ph. Chancelier, S. Pliska (University of Illinois at Chicago), A. Sulem.

Nous développons des méthodes de la théorie du contrôle impulsionnel sensible au risque pour résoudre un problème de gestion de portefeuille avec coûts de transaction et taux d'intérêt stochastique.

Pour $\theta > 0$, le problème est de maximiser par rapport en l'ensemble des stratégies d'investissement admissibles u , la performance

$$\liminf_{t\to\infty} -\frac{2}{\theta} t^{-1} \ln E^{s,x}[(W(t))^{-\frac{\theta}{2}}] \tag{3}$$

où $W(t)$ représente la fortune à l'instant t. Le coefficient θ représente le coefficient d'aversion au risque.

Lorsque $\theta = 0$, le problème se réduit à l'optimisation d'un taux moyen de profit

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1} E^{s,x} \ln(W(t)).$$

Ce problème ergodique a été résolu dans [16].

Lorsque $\theta \neq 0$, La stratégie d'investissement optimale et le taux optimal sont caractérisés par une inéquation quasi-variationnelle risk-sensitive. Ce problème peut s'interpréter comme une équation d'Isaac-Hamilton-Jacobi ergodique associée à un problème de min-max. On résoud ce problème numériquement par un algorithme de type Howard à deux niveaux combiné avec un algorithme développé par Stéphane Gaubert (projet Metalau) et Jean Cochet-Terrasson [CT01]. On donne des résultats numériques dans le cas d'un marché avec 2 actifs risqués et un taux d'intérêt de type Vasicek.

6.9 Principe du maximum pour le contrôle optimal de processus de diffusion avec sauts et application à la couverture de produits dérivés

Mots clés : contrôle stochastique singulier, diffusions avec sauts, processus de diffusion réfléchis, solution de viscosité, inéquation variationelle, équations intégro-différentielles, gestion de portefeuille, coûts de transaction, principe du maximum.

Participants : N.C. Framstad (Univ. d'Oslo), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Nous poursuivons l'étude des problèmes de contrôle stochastique des processus de diffusion avec sauts. Nous avions traité l'an passé le problème de la politique optimale d'investissement et de consommation d'un agent possédant un actif non risqué et un actif risqué modélisé par un

[CT01] J. Cochet-Terrasson, *Algorithmes d'tération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Décembre 2001.

processus de diffusion avec saut (processus de Lévy géométrique) dans le cas de coûts de transaction. Nous avions alors adopté l'approche programmation dynamique et étudié l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman intégro-differentielle correspondante [31].

Cette année, nous avons prouvé un principe du maximum pour le contrôle optimal de processus de diffusion avec sauts (conditions suffisantes d'optimalité). Nous montrons les connections entre l'état adjoint et la programmation dynamique et nous donnons une application à un problème de portefeuille moyenne-variance dans un marché financier gouverné par de tels processus [41].

6.10 Principe du maximum pour le contrôle optimal d'un système gouverné par un mouvement brownien fractionnaire

Mots clés : mouvement brownien fractionnaire.

Participants : F. Biagini(Université de Bologne, Italie), Y. Hu (Univ. Kansas), B. Øksendal (Univ. d'Oslo), A. Sulem.

Nous avons poursuivi l'étude des problèmes de contrôle lorsque le système est gouverné par un mouvement brownien fractionnaire (MBF). L'année passée, nous avions étudié un problème de gestion de portefeuille dans un marché financier gouverné par un MBF, en utilisant la méthode des martingales [HOS00a], [HOS00b]. Cette année nous avons démontré un principe du maximum stochastique pour le contrôle de processus $X(t) = X^{(u)}(t)$ de la forme

$$dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \sigma(t, X(t), u(t))dB^{(H)}(t)$$

où $B^{(H)}(t)$ est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H = (H_1, \cdots, H_m) \in (\frac{1}{2}, 1)^m$.

Nous appliquons ce résultat à un problème de minimal variance hedging dans un marché financier incomplet gouverné par un MBF [18].

6.11 Problèmes de temps d'arrêt optimal et options américaines

Participants : V. Bally, D. Lefèvre, B Jourdain, D. Lamberton, B. Lapeyre, C. Martini, A. Sulem, A. Shiryaev, S. Villeneuve.

Mots clés : option américaine, arrêt optimal.

Le calcul effectif du prix d'une option américaine pose de sérieux problèmes numériques, particulièrement dans les modèles multidimensionnels. L'article [5] utilise le plongement de Skorohod pour établir des estimations d'erreur dans l'approximation d'un problème d'arrêt

[HOS00a] Y. Hu, B. Øksendal, A. Sulem, *Mathematical Physics and Stochastic Analysis*, World Scientific, 2000, ch. Optimal portfolio in a fractional Black & Scholes market, p. 267–279, Essays in Honour of Ludwig Streit, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/13-99.html`.

[HOS00b] Y. Hu, B. Øksendal, A. Sulem, « Optimal consumption and portfolio in a Black-Scholes market driven by fractional Brownian motion », *Preprint*, University of Oslo, 2000, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/23-00.html`.

optimal brownien à l'aide d'une marche aléatoire. L'analyse de la frontière d'exercice est souvent essentielle à la compréhension d'options américaines complexes. L'article [46] donne un équivalent du prix critique au voisinage de l'échéance pour une option américaine sur une action versant des dividendes. Lamberton et Villeneuve prouvent, pour des options sur sous-jacent payant des dividendes, qu'au voisinage de l'échéance, le comportement du prix critique est parabolique (avec pour certaines valeurs des paramètres un facteur logarithmique).

A. Shiryaev et A. Sulem étudient le problème des options américaines avec risque de défaut. B. Jourdain et C. Martini ont poursuivi leurs travail sur les prix d'options américaines déduits d'options européennes [24].

V. Bally, Gilles Pagès et Jacques Printemps développent des algorithmes stochastiques basés sur la quantification pour le calcul du prix d'une option américaine : Ce travail représente la continuation d'une préoccupation qui a commencé il y a deux ans. Une forme antérieure de notre algorithme a déjà été testé l'année dernière dans le cadre des tests comparatifs pour diverses méthodes numériques concernant les options américaines. Nos préocupations actuelles vont dans le sens du calcul de la stratégie et de la mise au point d'une méthode numérique d'ordre un (alors que l'algorithme antérieur était un algorithme d'ordre zéro).

6.12 Maximisation de fonctions d'utilité

Participant : M.C. Quenez.

Mots clés : maximisation d'utilité.

Un problème classique posé par la Finance, est celui de la maximisation de l'utilité de la consommation et de la richesse terminale. Initialement introduit par Merton (1971) dans le cas de coefficients constants et traité par des méthodes de contrôle markovien via l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman, il fut ensuite étudié dans le cas de coefficients aléatoires via une approche martingale (cf. Karatzas et al. (1987) [KJS87]). M.C. Quenez, N.El Karoui et S.Peng (cf. [26]), se sont intéressés au problème d'optimisation d'une utilité non linéaire récursive avec des contraintes non linéaires sur la richesse. Le problème a été étudié par Duffie et Skiadas (1994) dans le cas où l'équation satisfaite par la richesse est linéaire. Pour résoudre notre problème, nous utilisons à la fois des méthodes d'analyse convexe (ce qui est classique) ainsi que des méthodes plus *dynamiques* utilisant des EDSRs. Nous obtenons un principe du maximum donnant une condition nécessaire et suffisante d'optimalité et montrons l'existence d'une stratégie optimale sous des hypothèses de régularité.

Avec Nicole El Karoui, nous nous intéressons au problème d'optimisation d'une fonction d'utilité définie comme un minimum (dans le cas où il y a une ambiguité sur le taux d'actualisation et sur la probabilité a priori) dans le cadre d'un marché complet mais avec des contraintes non linéaires sur la richesse. A l'aide de techniques d'EDSRs et d'analyse convexe (qui ne sont pas sans liens avec le travail de Kramkov et Schachermayer (1999)[KS99]), nous montrons que ce problème s'écrit comme un problème de max-min pour lequel il existe un

[KJS87] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S. Shreve, « Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon », *Siam J. Cont. Optim. 25*, 1987, p. 1557–1586.

[KS99] D. Kramkov, W. Schachermayer, « The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets », *Annals of Applied Probability*, 9, 1999, p. 904–950.

point selle. Le problème dual (min-max) s'écrit explicitement comme un problème de minimisation qui est plus facile à étudier que le problème initial ; en particulier, dans le cas markovien (coefficients déterministes), on peut écrire facilement l'équation d'HJB, permettant de déterminer un contrôle optimal feedback, d'où l'on déduit l'expression du contrôle optimal pour le problème primal.

6.13 Problème de contrôle stochastique en observation partielle

Participants : M.C. Quenez, D. Lefevre, A. Sulem, B. Øksendal.

Mots clés : contrôle en observation incomplète.

6.13.1 Problème de choix de portefeuille

Le problème de maximisation d'utilité de la richesse terminale par un investisseur a été largement étudié dans la littérature, par exemple par Cox et Huang(1989) [JC89], Cox et al(1985) [JJS85], Duffie et Zame(1989) [DZ89], He et Pearson(1991) [HP91], Karatzas et al(1987,1991) [KJS87] [KJSX91] ou Ocone et Karatzas(1991) [OK91]. Dans ces papiers, il est supposé que les agents économiques ont un accès continu à l'histoire d'un mouvement brownien multidimensionnel, qui génère toute l'incertitude dans le marché et dirige le prix des actifs risqués. Cette situation est référencée comme étant le cas de « l'observation complète ».

Cela étant, il semble plus réaliste de supposer que les investisseurs n'ont qu'une information partielle puisque si les prix et les taux d'intérêts sont des données publiées et disponibles pour les acteurs des marchés, le processus de drift ainsi que les trajectoires du mouvement brownien apparaissant dans l'équation différentielle stochastique des prix ne sont, par contre, certainement pas directement observables. Le fait que les investisseurs n'ont alors qu'une information partielle est modélisée en requerrant que les stratégies de trading doivent être adaptées à la filtration engendrée par les prix des titres. Cette situation est appelée le cas de « l'observation partielle ».

Lakner (1998) a résolu le problème de maximisation de la richesse terminale avec information partielle dans le cas *complet*, via une approche martingale (voir aussi Karatzas et Xue

[JC89] J.C. Cox, C.F. Huang, « Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process », *Journal of Economic Theory 49*, 1989, p. 33–83.

[JJS85] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross, « An intertemporal general equilibrium model of asset prices », *Econometrica 53*, 1985, p. 363–384.

[DZ89] D. Duffie, W. Zame, « The consumption-based capital asset pricing model », *Econometrica 57*, 1989, p. 1279–1297.

[HP91] H. He, N. Pearson, « Consumption and portfolio policies with incomplete markets : the infinite dimensional case », *Journal of Economic Theory*, 54, 1991, p. 259–305.

[KJS87] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S. Shreve, « Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon », *Siam J. Cont. Optim. 25*, 1987, p. 1557–1586.

[KJSX91] I. Karatzas, J.P. Lehoczky, S.E. Shreve, G. Xu, « Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market », *Siam J. Cont. Optim. 29*, 1991, p. 702–730.

[OK91] D. Ocone, I. Karatzas, « A generalized representation formula with application to optimal portfolios », *Stochastics and Stochastic Reports 34*, 1991, p. 187–220.

(1991) [KX91] et Karatzas et Zhao (1998) [KZ98] pour le cas bayesien). Quenez et Pham (cf. [33]), se sont intéressés au cas du marché *incomplet* ou plus spécialement au cas du modèle à volatilité stochastique. Grâce aux méthodes de *filtrage*, on peut montrer que dans le cas de l'information incomplète, le prix de vente d'un actif contingent est en général différent du prix de vente dans le cas de l'information complète mais admet également une formulation duale. Quant au problème de maximisation de l'utilité de la richesse terminale, les techniques de filtrage nous permettent de nous ramener au cas de l'information complète. En d'autres termes, il y a *séparation* entre la partie filtrage et la partie contrôle. Le problème d'*optimisation de l'utilité récursive* (dans un marché complet) évoqué précédemment peut être aussi étudié dans le cas de l'*information partielle* (voir [22]). De la même manière, les méthodes de filtrage permettent de se ramener au cas de l'information complète.

Le problème de l'optimisation de portefeuille en observation partielle a également été étudié par Browne et Whitt(1996)[BW96], Kuwana(1995) [Kuw95], Lakner(1995,1998) [Lak95b] [Lak95a], Rishel(1999) [Ris] ou Zohar(2000) [Zoh01]. Le principe de résolution (voir [38] pour plus de détails) est alors essentiellement basé sur des méthodes martingales.

6.13.2 Problème de consommation optimale

Nous considérons un problème de consommation optimale dans une économie où le processus de richesse $(X_t = X_t^{(c)})_{0\leq t\leq T}$ d'un investisseur de taux de consommation $c(t) \geq 0$ suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = (\mu - \rho X_t - c(t))dt + \alpha(t)dW_t \ ; \quad t \in [0,T] \\ X(0) = x > 0 \ , \end{cases} \tag{4}$$

ρ, T et x étant des constantes positives, $\alpha(t)$ une fonction déterministe du temps, μ une variable aléatoire de loi connue, indépendante du mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$. Nous supposons que μ est observée uniquement via les observations du processus $(\xi_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$d\xi_t = \mu\, dt + \alpha(t)dW_t \ ; \qquad t \geq 0 \qquad \xi(0) = 0 \ . \tag{5}$$

[KX91] I. Karatzas, X. Xue, « A note on utility maximization under partial observations », *Mathematical Finance 1*, 1991, p. 57–70.

[KZ98] I. Karatzas, X. Zhao, « Bayesian adaptative portfolio optimization », Preprint, Columbia University, 1998.

[BW96] S. Browne, W. Whitt, « Portfolio choice and the Bayesian Kelly criterion », *Adv. Appl. Probab. 28*, 1996, p. 1145–11176.

[Kuw95] Y. Kuwana, « Certainty equivalence and logarithmic utilities in consumpion/investment problems », *Mathematical Finance 5*, 1995, p. 297–310.

[Lak95b] P. Lakner, « Utility maximization with partial information », *Stochastic Processes and their Applications 56*, 1995, p. 247–273.

[Lak95a] P. Lakner, « Optimal trading strategy for an investor : the case of partial information », *Stochastic Processes and their Applications 76*, 1995, p. 77–97.

[Ris] R. Rishel, « Optimal portfolio management with partial observations and power utility function », Preprint, University of Kentucky.

[Zoh01] G. Zohar, « Dynamic portfolio optimization in the case of partially observed drift process », Preprint, Columbia University, 2001.

Notre problème de contrôle stochastique en observation partielle est alors de maximiser l'utilité espérée totale actualisée $J^{(c)}$, donnée par :

$$J = J^{(c)} = E\Big[\int_0^T e^{-\delta t}\ \frac{c^\gamma(t)}{\gamma} dt\Big], \tag{6}$$

($\delta > 0$, $\gamma \in (0,1)$), sur tous les processus de taux de consommation $c(t,\omega)$ adaptés à la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$ engendrée par le processus $(\xi_t)_{0\le t\le T}$ et satisfaisant la condition terminale $E[X_T^{(c)}] = x_T$ (x_T est une constante donnée). La résolution n'est pas basée sur des méthodes martingales mais sur l'utilisation du principe du maximum stochastique (voir [Ben88], [YX99, Chapter 3] and [Pen91]). Il appararait qu'un principe de séparation est vérifié : le taux de consommation optimal obtenu peut être déduit de l'expression qu'on obtiendrait en observation complète (μ serait alors observée directement et non plus via le processus $(\xi_t)_{0\le t\le T}$), en remplacant μ par $E(\mu)$(cf Théorème 4.5 de [34]). Mais puisque μ est supposée connu a priori, ceci signifie, de manière surprenante peut-être, qu'observer $\xi_s; s \le t$ n'a aucun effet sur notre taux de consommation.

6.13.3 Evaluation d'actifs contingents européens

Nous considérons, comme dans Pham [Pha], le modèle de marché financier suivant : le processus de prix des n actifs risqués suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t \ , t \in [0,T] \ , \tag{7}$$

où W est un mouvement brownien n-dimensionnel, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, le drift μ est un processus à valeurs dans $\Re^n$ adapté à $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ et $\sigma(t,y)$ est une fonction déterministe connue définie sur $[0,T]\times\Re^n$. Nous supposons que le flux de l'information disponible dans ce marché à chaque instant est donnée par la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$ engendrée par le processus $(S_t)_{0\le t\le T}$, de sorte qu'un hedger dans ce marché ne peut observer ni les trajectoires du mouvement brownien W ni le drift μ. Nous discutons alors le problème de la couverture d'actifs contingents européens par des portefeuilles contraints à prendre leurs valeurs dans un sous-ensemble donné, convexe de $\Re^n$. La méthode de résolution consiste d'abord à se ramener à un modèle de marché financier dont les coefficients sont tous adaptés à la filtration$(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$, utilisant des techniques de filtrage stochastique. On peut alors appliquer la théorie connue en observation complète (cf [CK93], [KS96]) du pricing des actifs contingents sous contraintes. Nous montrons que les formules de prix de surréplication

[Ben88] A. Bensoussan, *Perturbation Methods in Optimal Control*, J. Wiley & Sons, 1988.

[YX99] J. Yong, X.Y. Zhou, *Stochastic Controls*, Springer-Verlag, 1999.

[Pen91] S. Peng, « A general stochastic maximum principle for optimal control problems », *SIAM J. Control & Opt.*, 1991, p. 966–979.

[Pha] H. Pham, « Mean variance hedging for partially observed drift processes », *International Journal of Applied and Theoretical Finance*, à paraître.

[CK93] J. Cvitanić, I. Karatzas, « Hedging contingent claims with constrained portfolios », *The Annals of Applied Probability 3*, 1993, p. 652–681.

[KS96] I. Karatzas, S.G Kou, « On the pricing of contingent claims under constraints », *The Annals of Applied Probability*, 6, 1996.

inférieurs et supérieurs restent valides pour un actif contingent européen de la forme $f(S_T)$ où f est une fonction donnée satisfaisant certaines conditions de croissance polynomiale.

6.14 Modèle à probabilités a priori multiples

Participante : M.C. Quenez.

Mots clés : probabilités a priori multiples.

Un des problèmes posés par les économistes est celui où l'on considère un *modèle à probabilités a priori multiples* (cf. Chen et Epstein (1999)[EC99]). Dans ce cas, les croyances sont représentées par un ensemble $\mathcal{P}$ de probabilités et l'utilité de la richesse terminale est définie comme le minimum des utilités espérées, minimum pris sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des probabilités a priori. Le modèle classique de l'utilité espérée correspond au cas où $\mathcal{P}$ est réduit à un singleton $\{P\}$. Dans ce cadre, on peut alors se poser le problème de maximisation de l'utilité de la richesse terminale dans le cas incomplet. Rappelons que dans le cas classique (cf Karatzas et al. (1991)), la résolution du problème de maximisation passe par la résolution d'un problème dual via l'ensemble des mesures martingales relatives à cette probabilité P. Dans le cas d'un modèle à probabilités a priori multiples, notre approche [42] consiste en la résolution d'un problème dual de minimisation sur l'ensemble des mesures martingales relatives aux différentes probabilités a priori. Notons que, bien que l'utilité corresponde à la solution d'une EDSR (voir [KPQ97] ou Chen et Epstein (1999)), l'absence d'hypothèses de régularité ainsi que l'incomplétude du marché ne permettent pas d'utiliser les méthodes développées dans [26], ce qui montre en quelque sorte les limites des techniques d'EDSRs.

6.15 Optimisation stochastique et application en réassurance

Participants : M. Mnif, H. Pham (Université Paris 7), A. Sulem.

L'activité d'une compagnie d'assurance consiste à collecter des primes qui couvrent les assurés contre les sinistres. Cette activité est risquée et nécessite une gestion du risque. Cette gestion de risque ne requiert pas des couvertures dynamiques comme pour le cas d'un vendeur d'options mais consiste à céder une partie du risque : ceci est l'objet de l'activité de réassurance. On s'intéresse à un contrat particulier connu sous le nom de réassurance d'excès de perte. Il consiste à verser une partie des primes que la compagnie d'assurance reçoit à une autre compagnie en échange d'un engagement de celle-ci à payer la différence entre la taille de chaque sinistre qui survient et un certain niveau de rétention donné (voir [AjT00]).

L'objectif de la compagnie d'assurance est de maximiser l'espérance de l'utilité de son capital terminal sous une contrainte de positivité du capital à tout instant. On suppose que la

[EC99] L. Epstein., Z. Chen, « Ambiguity, risk and asset returns in continuous time », working paper, 1999.

[KPQ97] N. Karoui, S. Peng, M. Quenez, « Backward Stochastic Differential Equations in Finance », *Mathematical Finance 7*, 1, January 1997, p. 1–71.

[AjT00] S. Asmussen, B. H. jgaard, M. Taksar, « Optimal risk control and dividend distribution policies. Example of excess-of loss reinsurance for an insurance corporation », *Finance and Stochastics 4*, 2000, p. 299–324.

réassurance engendre un coût proportionel à la taille du risque encouru par la compagnie de réassurance.

On considère un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un horizon T fini. On considère une mesure $\mu(dt, dz)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, associée au processus ponctuel $(N, \{Y(n), n \in \mathbf{N}\})$. Dans notre cas, $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage correspondant à la suite $\{T_n, n \in \mathbf{N}\}$ des instants des sinistres et $\{Y(n), n \in \mathbf{N}\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[b, \infty)$ avec $b > 0$. On suppose que la mesure aléatoire $\mu(dt, dz)$ a une intensité $q(dt, dz) = \pi(dz)dt$ avec $\int_B \pi(dz) < \infty$ et que certaines conditions de non dégénérescence sont satisfaites.

Le processus de réserve de la compagnie d'assurance est donné par

$$X_s^{t,x,\alpha} = x + \int_t^s p(\alpha_u)du - \int_t^s \int_B z \wedge \alpha_u \, \mu(du, dz), \quad t \leq s \leq T,$$

où $\alpha = (\alpha_u, t \leq u \leq s)$ est un processus $(\mathcal{F}_s)$-adapté. Il représente le niveau de rétention. Le drift $p(\alpha)$ est le taux de prime. Il est donné par

$$p(\alpha) = \beta\nu - (1 + k(\alpha))\beta(\nu - E[Y_i \wedge \alpha]),$$

avec $(Y_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant un moment de premier ordre fini $\nu = E[Y_i]$. Le coefficient $k(\alpha)$ est le coût engendré par la réassurance. On suppose que $k(\alpha) = k > 0$ si $\alpha > 0$ et $k(0) = 0$.
Une politique $\alpha = (\alpha_s)_{t \leq s \leq T}$ est admissible si la condition $X_s^{t,x,\alpha} \geq 0$ est vérifiée pour tout $t \leq s \leq T$ et $\alpha_s \leq K$ pour tout $t \leq s \leq T$ avec K une constante strictement positive. On note par $\mathcal{A}(t, x)$ l'ensemble des politiques admissibles.
Soit U une fonction d'utilité uniformément continue, croissante et concave. L'objectif de la compagnie d'assurance est de maximiser

$$J(t, x, \alpha) := E(U(X_T^{t,x,\alpha})),$$

par rapport à l'ensemble des politiques $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$. On définit la fonction valeur v par

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, \alpha).$$

On démontre que la fonction valeur v est uniformément continue en x, continue en (t, x) et que v est solution de viscosité contrainte de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman suivante :

$$\max_{\alpha \in [0,K],\ x \geq z \wedge \alpha\ \forall z \in B} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + A^\alpha(t, x, \psi(t, x), \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x)) \right\} = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbf{R}_+,$$

avec

$$A^\alpha(t, x, \psi(t, x), \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x)) = p(\alpha)\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) + \int_B (\psi(t, x - z \wedge \alpha) - \psi(t, x))\pi(dz).$$

On prouve l'unicité de la solution en adaptant le théorème de comparaison de Pham (1998).
On résoud numériquement l'équation de Bellman en utilisant un algorithme basé sur l'algorithme d'Howard.

6.16 Statistique des modèles à volatilité stochastique

Participants : V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Larédo.

Nous travaillons sur l'estimation des paramètres intervenant dans les équations stochastiques associées à des modèles de volatilité stochastique. Cette année, nous avons étudié en particulier les sujets suivants :

- Consistance d'estimateurs de vraisemblance conditionnelle pour les modèles de Markov cachés [47]. Nous avons poursuivi dans cet article le travail d'un précédent article [GCJL99].
- Nouveaux aspects de l'estimation paramétrique pour les modèles de Markov cachés et les modèles à volatilité stochastique. Nous travaillons sur l'estimation par maximum de vraisemblance exact pour les modèles de Markov cachés avec en vue les modèles à volatilité stochastique [GCJL00].
- Les filtres non linéaires explicites. Nous étudions un modèle à temps discret de Markov cachés (ou de filtre non linéaire) pour lequel tous les calculs du filtre optimal sont très simples et complètement explicites comme dans le filtre de Kalman avec pourtant un modèle non linéaire et non gaussien. Mathieu Kessler et V. Genon Catalot travaillent sur les propriétés de stabilité et les problèmes d'estimation sur ce modèle.
- Etude probabiliste et statistique d'un schéma d'approximation en temps discret du modèle à volatilité stochastique « complet », décrit dans un article de Hobson et Rogers. Les travaux réalisés font le lien entre ces méthodes et l'approche par les modèles ARCH.
- En projet de travail, le thème des équations différentielles stochastiques avec retard en relation avec le modèle à volatilité stochastique d'Hobson et Rogers (en liaison avec la visite d'Hobson dans le projet Mathfi).

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Premia : un pricer d'options

Participants : P. Cohort, B. Jourdain, B. Lapeyre, C. Patry, A. Sulem, E. Temam, A. Zanette.

Un consortium de banques est en place autour du pricer Premia. En contrepartie d'une participation financière, les banques participant au consortium disposent régulièrement des nouvelles versions du logiciel et du droit d'intégrer les routines dans leur chaîne de production.

Actuellement, le consortium est composé de : Caisse des Dépôts et Consignation, Crédit Lyonnais, Crédit Agricole-Indosuez, Crédit Industriel et Commercial, Natexis–Banques Populaires, BNP-Paribas et EDF.

Le fonctionnement de ce consortium et le contenu actuel du projet peuvent être consultés sur la page Web

`http://cermics.enpc.fr/~premia`

[GCJL99] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Parameter Estimation for Discretely Observed Stochastic Volatility Models », *Bernoulli 5*, 5, 1999, p. 858–872.

[GCJL00] V. Genon-Catalot, T. Jeantheau, C. Laredo, « Stochastic volatility models as hidden Markov models and statistical applications », *Bernoulli 6*, 6, 2000, p. 1051–1079.

7.2 Couverture des options sur électricité

Participants : S. Njoh, D. Lamberton.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre UMLV– EDF.

7.3 Calibration par méthodes de Monte–Carlo

Participants : L. Nguyen, B. Jourdain, B. Lapeyre.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre ENPC–CCF.

7.4 Modèles de taux d'intérêt à volatilité stochastique

Participants : S. Hénon, D. Lamberton, M.C. Quenez.

Il s'agit d'une étude menée dans le cadre d'une convention Cifre UMLV–CAI.

7.5 Gestion dynamique de contrats d'assurance sur taux de change

Participants : X. Joseph, A. Sulem.

Le but du travail consiste à étudier la couverture (stratégies, efficacité, risque toléré) de contrats d'assurance sur taux de change (typiquement des risques de change à l'exportation) conditionnés par un facteur exogène aux taux de change, à savoir le taux de conclusion (taux de réussite aux appels d'offre) et de modéliser une gestion dynamique des contrats ainsi couverts.

Les garanties de change usuelles de la Coface sont des ventes à terme avec intéressement, dont la mise en place définitive est soumise à une condition suspensive, qui consiste en la constatation de l'échec de l'assuré exportateur à l'appel d'offre. La délivrance de la garantie s'accompagne du versement d'une prime d'engagement, la levée de la condition suspensive d'une prime de conclusion, toutes deux versées à la Coface par l'assuré.

Il s'agit donc d'un instrument financier soumis à des aléas de type financier (taux de change et d'intérêt) et non financier (taux de conclusion).

Après avoir modélisé le risque de change et le risque de conclusion, le problème est de déterminer des stratégies dynamiques de gestion des risques. Ces stratégies doivent respecter les limites de risque de perte autorisées, prendre en compte les coûts de gestion et de réajustement de couverture et permettre d'optimiser les prix de contrats.

Nous avons étudié 2 types de couvertures : (i)la stratégie 0-100, c'est à dire que le réajustement des positions n'a lieu que si la variation du cours de l'actif se fait au delà du cours fixé garanti de plus ou moins un certain retard prédéfini. (ii) la stratégie optionnelle qui consiste à couvrir chaque garantie par des options de change (cf. [12]).

La Coface a décidé de compléter son dispositif de couverture des garanties par l'implémentation de la stratégie d'option validée par les résultats des calculs effectués.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

- Participation de membres de Mathfi au GDR FIQUAM « Méthodes quantitatives en finance » du CNRS. Ce GDR fait partie du Programme Risques et Complexité des systèmes financiers du CNRS.

8.2 Relations internationales

Projet « Mathématiques financières » de l'Institut franco-russe Liapunov. Responsable français : A Sulem, responsable russe : A. Shiryaev (prolongé jusqu'en juin 2002).

Site Web : `http://www-direction.inria.fr/international/liapunov.html`

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- B. Jourdain : organisation à l'ENPC d'un groupe de travail. Les thèmes abordés au cours de l'année 2001 ont été :
  - les méthodes de calibration des modèles d'actifs financiers
  - le calcul de Malliavin
  - les méthodes de pricing d'options dans les modèles d'actifs comportant des sauts.
- E. Gobet, B. Jourdain, B. Lapeyre, E. Temam : cours de formation continue au Collège de l'École Polytechnique : « Méthodes de Monte-Carlo en finance », juin 2001.
- P. Cohort et B. Lapeyre : cours de formation continue au Collège de l'École Polytechnique : « Méthodes de Monte-Carlo pour les options américaines », septembre 2001.
- M.C. Quenez : organisation du groupe de travail UMLV/ENPC/INRIA à l'UMLV.
- B. Lapeyre et A. Sulem : organisation d'un colloque international sur l'Application du calcul de Malliavin en Finance, 13-14 Décembre 2001, Inria-Rocquencourt.

9.2 Enseignement universitaire

- P. Cohort
  - Travaux dirigés du cours de Bernard Lapeyre « Méthodes de Monte–Carlo, applications en finance » (DEA *analyse et modèles aléatoires* de l'UMLV) (14 h). description mathématique et informatique d'algorithmes de simulation utilisés en finance.
- J.F. Delmas, B. Jourdain :
  - Cours « Modèles aléatoires » à l'École des Ponts et Chaussées.
- V. Genon-Catalot :
  - DEUG de Science Economiques, maîtrise de mathématiques.
  - Participation au Cours de DEA « Développements récents en finance mathématique », Université de Marne-la-Vallée.
  - Cours de DEA (DEA : Statistiques et modèles mathématiques en économie et finance) à Paris 7, titre du cours : « Statistique des diffusions et applications en finance ».

- Participation au cours de DEA de Paris 7 « Modèles autorégressifs non linéaires et modèles de Markov cachés »
- Responsable de la maîtrise de Mathématiques, mention Ingénierie mathématique de l'Université de Marne-la vallée. Cette maîtrise comporte une option assurances qui s'effectue dans le cadre d'un contrat d'apprentissage avec une compagnie d'assurances, une banque ou une société de crédit.

– B. Jourdain :
  - Cours TD de « Probabilités et Applications », 1ère année de l'École des Ponts et Chaussées.
– B. Jourdain, C. Martini :
  - Cours à l'École des Ponts et Chaussées : « Méthodes Mathématiques pour la Finance ».
– B. Jourdain, A. Sulem :
  Cours du DEA de probabilités de l'Université Paris VI, option finance : « Méthodes numériques en finance ».
– D. Lamberton :
  - Cours de DEA « Calcul stochastique et applications », Université de Marne-la-Vallée.
  - DEUG et Licence d'économie, maîtrise de mathématiques.
  - Responsable du DEA « Analyse et Systèmes Aléatoires » (Universités de Marne-la-Vallée, de Créteil et d'Evry et Ecole des Ponts).
– B. Lapeyre, J.F. Delmas :
  - Cours de Processus Aléatoires de l'ENPC
– B. Lapeyre
  - Cours « Modéliser, Programmer, Simuler » (partie consacrée aux processus) de l'ENPC.
  - Cours et travaux dirigés (partie Méthodes de Monte-Carlo), Cours « Processus et Estimation », Majeure de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique.
  - Enseignement d'approfondissement en « Finance », Majeure de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique.
  - Méthodes de Monte-Carlo et Applications en Finance, cours du DEA Analyse et Système Aléatoires de l'Université de Marne La Vallée.
– D. Lefèvre
  - Chargé de TD en statistiques et probabilités (84H) pour le cours de Catherine Pardoux, DEUG Sciences-Economiques Gestion 1ère année, 2ème semestre 2000-2001, Université Paris-IX Dauphine.
– C. Martini
  - Cours de DEA (12h) à l'Université Paris 1 Sorbonne : « Contrôle stochastique et applications ».
  - Cours de DEA (3h) à l'Université Paris VI : « Introduction aux Méthodes d'Arbres en Mathématiques Financières ».
– M. Mnif
  - Cours : TD de microéconomie, niveau maîtrise, 30 heures, Université Paris7.
– M.C. Quenez
  -Cours de Finance mathématique, DEA UMLV.
– A. Sulem
  - Cours de DEA, Université Paris 9 Dauphine, DEA Mase, 21 heures de cours. *Titre* :

« Méthodes numériques en gestion de portefeuilles ».
- Cours de DEA, Université Paris 1, DEA MME, 21 h. de cours, « Méthodes numériques en Finance ».

– E. Temam
- Enseignement à l'ENSTA : Probabilités module du premier trimestre 2001

9.3 Encadrement de stages

– P. Cohort
Encadrement du stagiaire Siddhartha Chattopadhyay (Indian Institute of Technology, Kampur). Son travail a consisté, durant les mois de juin et juillet 01 à écrire une interface Scilab pour Premia 2.

– B. Jourdain
- Jean-François Bergez « Méthode d'éléments finis proposée par Ben Ameur, Breton et l'Ecuyer pour les options européennes et américaines sur moyenne et méthode de Monte-Carlo proposée par Rogers pour les options américaines », stage scientifique ENPC (avril à juin).
- Aurélie Judeau, « Méthode de Monte-Carlo pour le pricing d'options dans un modèle avec volatilité dépendant du temps et du sous-jacent », PFE Institut Galilée, Université Paris 13 (octobre à décembre).

– B. Lapeyre
- Raffaella Carbone, « Approximations numériques d'options sur maximum ».
- Maya Briani, « Calcul numériques de prix d'options pour les modèles avec sauts ».
- Roy Cerqueti, « Calibration par méthodes entropiques ».

– A. Sulem
- Eric Konga, « Méthodes numériques en gestion de portefeuilles avec coûts de transaction », stage de DEA Université Paris 9.
- Celine Lazarègue, « Pricing des Dérivés de taux avec les modèles BGM », stage de DEA Université Paris 9, effectué à la Barep , sous la direction de S. Guglietta.
- Olivier Sultan, « Le calcul de Malliavin et la gestion des produits exotiques », stage de DEA de l'Université Paris 1, effectué au CAI, sous la direction d'E. Koehler.

9.4 Encadrement de thèses

– B. Jourdain
- Laurent Nguyen, convention Cifre avec le CIC : « Méthode de Monte-Carlo pour la calibration de modèles ».

– D. Lamberton
- Samuel Njoh (en troisième année), convention Cifre avec EDF.
- Sandrine Hénon (à partir de septembre 2001) co-encadrée avec Marie-Claire Quenez, convention Cifre avec Crédit Agricole Indosuez.
- Vincent Lemaire (à partir de septembre 2001) co-encadrée avec Gilles Pagès. Allocataire-moniteur à l'université de Marne-la-Vallée.

– B. Lapeyre

- Mouaya Noubir, à l'ENPC : « Calcul de prix d'option exotiques dans les modèles de marché » (soutenue en septembre 2001).
- Emmanuel Temam, à l'Université de Paris 6 : « Méthodes approchées pour l'évaluation et la couverture d'options » (soutenue en décembre 2001).
- Bouhari Arouna, à l'ENPC : « Algorithmes stochastiques, réduction de variance ».

– C. Martini
- Co-encadrement de Simone Deparis (EPFL, avec Robert Dalang),
- Co-encadrement de Matthieu Leblanc (Université Paris VII, avec Laure Elie),

– C. Martini et A. Sulem
Co-Direction de la thèse de Christophe Patry (soutenue en Janvier 2001) sur les « Techniques de couverture approchée des options européennes ».

– A. Sulem
- Direction de la thèse de David Lefèvre sur les problèmes de gestion de portefeuille en observation incomplète.
- Co-Direction de la thèse de Mohamed Mnif (avec Huyen Pham , Université paris 7) sur des problèmes de contrôle stochastique avec contraintes et application en assurance.
- Direction de la thèse de Xavier Joseph (soutenue en Novembre 2001) sur la « Couverture en risque des contrats d'assurance sur taux de change ».

9.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations

– P. Cohort
- « Méthodes de Monte Carlo pour les options américaines » Présentation de la version 3 de Premia aux membres du consortium en mars 2001 , Inria-Rocquencourt.
- « Méthodes de Monte–Carlo pour les options américaines », groupe de travail du projet Mathfi, Inria , Rocquencourt, Fevrier 2001.
- « Calibration par descente de gradient », Avril 2001, groupe de travail du projet Mathfi, ENPC.
- « Algorithmes de Longstaff–Schwartz et de quantification pour le pricing des options américaines », symposium « Méthodes numériques probabilistes pour les EDP », Congrès SMAI , Mai 2001. Arnac–Pompadour, Corrèze.

– B. Jourdain
- Summer school on Stochastics and Finance, Barcelone, 3-6 septembre 2001.

– V. Genon Catalot :
- A non linear explicit filter (congrès Filtrage, Paris, juin 2000).
- New aspects of parameter estimation for stochastic volatility models (congrès Dynstoch, Paris, juin 2000)
- Participation aux Journées Statistiques de l'Irisa - 15-16 novembre 2001. Expose « Statistique des processus en finance : observations discrétisées de processus continus et modèle à volatilité stochastique », Rennes.

– D. Lamberton
- Approximation de la mesure invariante d'une diffusion. Groupe de Travail de l'université d'Evry (avril 2001).
- Critical Price Near Maturity and Dividends. Workshop on Mathematical Finance, Bed-

lewo, Pologne. Juin 2001.

- B. Lapeyre
  - Calibration à l'aide de modèles avec sauts, groupe de travail Mathfi.
  - Pricing d'option par FFT, groupe de travail Mathfi.
  - Une présentation des Mathématiques Financière, préparation à l'agrégation, ENS Ulm.
- C. Martini
  Exposé au groupe de travail Mathfi sur les problèmes de calibration de modèles de volatilité par la méthode d'Avellaneda.
- M. Mnif
  « Optimal risk control under excess of loss reinsurance » Colloque AFFI décembre 2001.
- M.C. Quenez
  - Sur-replication en marche incomplet, groupe de travail Mathfi Inria-Rocquencourt , Juin 2001.
  - Optimisation de portefeuilles avec probabilités à priori multiples, conférence au congrès « Contrôle optimal déterministe et stochastique » à Roscoff, Mai 2001.
- A. Sulem
  - Conférence invitée au worshop sur le mouvement brownien fractionnaire et Applications, Université de Barcelone, Février 2001, Titre : A maximum principle for optimal control of processes driven by Fractional Brownian Motion
  - Communication au groupe de travail Mathfi sur le principe du maximum pour les pocessus de diffusion avec sauts, Inria-Rocquencourt , Mai 2001.
  - Conférence invitée au colloque sur le Contrôle deterministe et stochastique, Mai 2001, Roskoff, titre : A sufficient stochastic maximum mrinciple for optimal control of jump diffusions and applications to finance
  - Conférence invitée au Midnight Sun Workshop on Stochastic Analysis and Mathematical Finance, Kautokeino, Norvège, Juin 2001, titre : Risk sensitive portfolio optimisation with transaction costs.
  - Conférence invitée au séminaire : Mathématiques de l'économie et de la Finance, IHP, Paris, Novembre 2001. titre : Risk sensitive portfolio optimisation with transaction costs.
- E. Temam
  - Application of Malliavin calculus in finance. December 13-14, 2001 : Analysis of the discretization scheme with Malliavin calculus : application to the pricing and the hedging
  - Groupe de travail du projet Mathfi de l'INRIA et du CERMICS, 23 Novembre 2001, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées : Pricing des options avec saut d'après Merton.
  - Séminaire de Modèle stochastique et Finance, 19 Novembre 2001, CMAP École Polytechnique : Formules fermées pour les prix de surréplication en temps discret
  - Séminaire de mathématiques de l'économie et de la finance, 16 Novembre 2001, Institut Henri Poincaré : Formules fermées pour les prix de surréplication en temps discret
- V. Bally
  - cours de cinq séances sur le Calcul de Malliavin et ses applications en finance dans le cadre du groupe de travail de l'équipe Mathfi. (Octobre-Novembre 2001)
  - exposé « Correctors in the numerical quantization algorithm » au colloque sur l'Application du Calcul de Malliavin en Finance, Décembre 2001, Inria Rocquencourt.

9.6 Divers

- V. Genon-Catalot
  - Editeur associé de la revue Bernoulli.
- D. Lamberton
  - « Associate Editor » de la revue *Mathematical Finance*.
- A. Sulem
  - Premier Opponent pour la thèse de PhD de K. Reikvam intitulée « Portfolio Optimisation in Markets with jumps », Université d'Oslo, Août 2001.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] M. Akian, J.L. Menaldi, A. Sulem, « On an Investment-Consumption model with transaction costs », *SIAM J. Control and Optim. 34*, 1, Janvier 1996, p. 329–364.

[2] E. Clément, D.Lamberton, P. Protter, « An Analysis of a Least Squares Regression Method for American Option Pricing », *Finance and Stochastics*, à paraître.

[3] D. Lamberton, B. Lapeyre, « Hedging index options with few assets », *Mathematical Finance*, 1992.

[4] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Une introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, édition Collection Mathématiques et Applications, Ellipses, 1992, traduction anglaise : *An introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman and Hall, 1996.

[5] D. Lamberton, L.C.G. Rogers, « Optimal stopping and embedding », *Journal of Applied Probability 37*, 2000, p. 1143–1148.

[6] D. Lamberton, « Error Estimates for the Binomial Approximation of American Put Options », *Annals of Applied Probability 8*, 1, 1998, p. 206–233.

[7] B. Lapeyre, C. Martini, « The Premia project », *ERCIM news*, 2000.

[8] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Introduction aux méthodes de Monte-Carlo*, édition Collection Mathématiques et Applications, Springer Verlag, 1997.

[9] C. Martini, « Cheapest superstrategies without the optional decomposition », *Rapport de Recherche n°3931*, Inria, Domaine de Voluceau - BP 105 - 78153 Le Chesnay cedex, Avril 2000, à paraître dans le volume Mathematical finance du Steklov Institute (Moscou), `http://www.inria.fr/rrrt/rr-3931.html`.

[10] A. Sulem, A. Shiryaev (éditeurs), *Financial Mathematics*, Inria, Rocquencourt, Paris, May 1998.

Livres et monographies

[11] B. Lapeyre, A. Sulem, D. Talay, *Understanding Numerical Analysis for Option Pricing*, Cambridge University Press, à paraître.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[12] X. Joseph, *Contrôle stochastique appliqué à l'évaluation et à la couverture des garanties de change Coface*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 13 Novembre 2001.

[13] M. NOUBIR, *Calcul de prix d'option exotiques dans les modèles de marché*, thèse de doctorat, ENPC, 2001.

[14] C. PATRY, *Couverture Approchée optimale des options Européennes*, thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, 30 Janvier 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/tu-0659.html`.

[15] E. TEMAM, *Couverture approchée d'options exotiques - Pricing des options asiatiques*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 19 décembre 2001.

Articles et chapitres de livre

[16] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR, « Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs - The logarithmic utility case », *Mathematical Finance 11*, 2, Avril 2001, p. 153–188.

[17] A. BAR-ILAN, A. SULEM, A. ZANELLO, « Time to build and Capacity choice », *Journal of Economic Dynamics and Control*, à paraître.

[18] F. BIAGINI, Y.HU, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « A stochastic maximum principle for processes driven by fractional Brownian motion », *Stochastic Processes and their applications*, à paraître, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/24-00.html`.

[19] E. CLEMENT, « Pseudo-moderate deviations in the Euler method for real diffusion processes », *Stochastics and Stochastics Reports*, à paraître.

[20] E. GOBET, E. TEMAM, « Discrete time hedging errors for options with irregular payoffs », *Finance and Stochastics 5*, 3, 2001, p. 357–367.

[21] I. ELSANOSI, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Some Solvable Stochastic control Problems with Delay », *Stochastics and Stochastics Reports*, à paraître, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/pure_2000.html`.

[22] J.CVITANIC, A. LAZRAK, M.C. QUENEZ, F.ZAPARETO, « Incomplete Information with recursive preferences », *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, à paraître.

[23] B. JOURDAIN, C. MARTINI, « Approximation of American put prices by European prices via an embedding method », *Annals of Applied Probability*, à paraître.

[24] B. JOURDAIN, C. MARTINI, « American prices embedded in European prices », *Annales de l'IHP, analyse non linéaire 18*, 1, 2001, p. 1–17.

[25] B. JOURDAIN, L. NGUYEN, « Minimisation de l'entropie relative par méthode de Monte-CCarlo », *C.R.Acad. Sci. 332*, 4, 2001, p. 245–350.

[26] N. E. KAROUI, S. PENG, M. QUENEZ, « A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints », *Annals of Applied Probability*, à paraître.

[27] D. LAMBERTON, « Brownian Optimal Stopping and Random Walks », *Applied Mathematics and Optimization*, à paraître.

[28] D. LAMBERTON, G. PAGÈS, « Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion », *Bernoulli*, à paraître.

[29] B. LAPEYRE, E. TEMAM, « Competitive Monte-Carlo Methods for the Pricing of Asian Options », *Journal of Computational Finance 5*, 1, 2001, p. 39–57.

[30] M. MNIF, H. PHAM, « Stochastic optimization under constraints », *Stochastic Processes and their Applications 93*, 2001, p. 149–180.

[31] N.C. FRAMSTAD, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Optimal Consumption and Portfolio in a Jump Diffusion Market with Proportional Transaction Costs », *Journal of Mathematical Economics 35*, 2001, p. 233–257, `http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2000/26-00.html`.

[32] B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Optimal Consumption and Portfolio with both fixed and proportional transaction costs : A Combined Stochastic Control and Impulse Control Model », *SIAM J. Control and Optim.*, à paraître, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/1999/19-99.html.

[33] H. PHAM, M.C. QUENEZ, « Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models », *Annals of Applied Probability 11*, 1, 2001, p. 210–238.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[34] B. ØKSENDAL, D. LEFÈVRE, A. SULEM, « An introduction to optimal consumption with partial observation », *in : Mathematical Finance*, M.Kohlman, S. Tang (éditeurs), Birkhauser, p. 239–249, Basel, Suisse, 2001. Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, October 2000, University of Konstanz, Germany, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2001/pure_2001.html.

[35] B. ØKSENDAL, A. SULEM, « A maximum principle for optimal control of stochastic systems with delay, with applications to finance », *in : Optimal Control and PDE*, J. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (éditeurs), IOS Press, p. 64–79, Amsterdam, 2001.

Rapports de recherche et publications internes

[36] Z. CHEN, A. SULEM, « An Integral Representation Theorem of g-expectations », *Rapport de Recherche n°4284*, Inria, Rocquencourt, Octobre 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4284.html.

[37] L.CARASSUS, E. GOBET, E. TEMAM, « Closed Formulae for Super-Replication Prices with Discrete Time Strategies », *Preprint n°213*, CERMICS/ENPC, 2001.

[38] D. LEFÈVRE, « An introduction to Utility Maximization with Partial Observation », *rapport de recherche*, INRIA, 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4183.html.

[39] M.KOBYLANSKI, J. LEPELTIER, M. QUENEZ, S. TORRES, « Reflected BSDE with super-linear quadratic coefficient », *Prepublication*, UMLV, 2001.

[40] M. MNIF, A. SULEM, « Optimal risk control under Excess of loss reinsurance », *Rapport de recherche*, Inria, Rocquencourt, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4317.html.

[41] N.C. FRAMSTAD, B. ØKSENDAL, A. SULEM, « Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Jump Diffusions and Applications to Finance », *Preprint n°22*, University of Oslo, 2001, http://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2001/pure_2001.html.

[42] M. QUENEZ, « Maximization of utility of terminal wealth in an incomplete multiple-priors model », *Prepublication*, Université de Marne-La-Vallée, 2000.

Divers

[43] L. DENIS, S. DEPARIS, C. MARTINI, « Risque modèle pour les produits dérivés », en préparation.

[44] S. DEPARIS, C. MARTINI, « Superstrategies and Balayage in discrete time », en préparation.

[45] V. GENON-CATALOT, « A non linear explicit filter », soumis, octobre 2001.

[46] D. LAMBERTON, S. VILLENEUVE, « Critical price near maturity for an American option on a dividend paying stock », version révisée, octobre 2001.

[47] V. GENON-CATALOT, T. JEANTHEAU, C. LARÉDO, « Conditional likelihood estimators for hidden Markov models and stochastic volatility models », version révisée pour Scand J. of Stat., novembre 2001.