INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet MEVAL

Modélisation et évaluation de systèmes aléatoires

Rocquencourt

THÈME 1B

Rapport d'Activité

2001

Table des matières

1 Composition de l'équipe

Responsable Scientifique
Guy Fayolle [DR]
Assistante de projet
Karolin Usner [Agent temporaire, en commun avec le projet Verso]
Personnel Inria
Christine Fricker [CR]
Jean-Marc Lasgouttes [CR]
Vadim Malyshev [DR]
Collaborateurs extérieurs
Pierre Brémaud [Ensta et Supelec]
Franck Delcoigne [EDF Clamart]
Arnaud de La Fortelle [X-Ponts, mis à disposition par le ministère de l'Équipement]
Roudolf Iasnogorodski [Université d'Orléans]
Ingénieur expert
Cyril Furtlehner

2 Présentation et objectifs généraux

Le but essentiel des activités du projet est de parvenir à une bonne compréhension du comportement de systèmes aléatoires issus de l'informatique et des télécommunications, mais aussi de la physique et de la biologie, par la mise en œuvre de méthodes quantitatives d'évaluation. Deux moyens d'approche sont proposés :

- principalement, l'élaboration et la résolution de modèles mathématiques ;
- à titre complémentaire, la simulation.

Les compétences acquises par l'équipe couvrent largement les domaines liés à la *modélisation stochastique*, point n'étant besoin de rappeler que l'utilisation de la théorie des probabilités s'avère fructueuse dans nombre de branches de la science moderne (physique, économie, sociologie, etc.). L'évolution de la technologie (parallélisme, vitesse, modularité), la complexité et la taille sans cesse croissantes des systèmes ont eu des conséquences importantes :

- d'abord une demande plus forte d'analyse prévisionnelle de performance, afin d'assister les choix de conception ;
- ensuite, un impact considérable sur la théorie (réseaux de files d'attente, graphes et complexes aléatoires, séquences biologiques, etc.).

Les recherches menées sont éclectiques et touchent à des domaines d'applications variés : réseaux téléinformatiques et de transport, architecture des ordinateurs, physique statistique, réseaux de neurones, graphes et structures aléatoires. L'analyse macroscopique, temporelle et spatiale, de ces divers objets conduit inexorablement à l'étude de processus stochastiques, souvent physiquement significatifs (temps de séjour dans un système, répartition des clients ou des données, régime stationnaire, etc.). Les thèmes abordés comportent à la fois des aspects méthodologiques et des modèles particuliers. La démarche scientifique est toujours, à partir de problèmes concrets, de proposer des méthodes de portée générale, permettant d'obtenir des résultats quantitatifs sur l'efficacité, la stabilité ou le contrôle de telle ou telle structure

Axes de Recherche

Depuis une vingtaine d'années, des théories originales sont développées au sein de l'équipe dans les domaines d'expertise suivants.

- Réseaux et marches aléatoires : résolution d'équations fonctionnelles de plusieurs variables complexes ; classification des chaînes de Markov dans des polyèdres avec frontières à l'aide de systèmes dynamiques équivalents ; méthodes de construction de semi-martingales pour déterminer les conditions de stabilité des systèmes.
- Grands systèmes : lorsque la taille ou le volume d'un système augmente (on parle alors de limite thermodynamique), des phénomènes de propagation du chaos ou de transition de phase apparaissent, comme en physique classique.
- Grammaires et complexes aléatoires : on bâtit de nouveaux ponts théoriques entre la physique et l'informatique (chaînes aléatoires, énumération, gravité quantique).
- Grandes déviations : il s'agit d'estimer les probabilités d'événements rares, qui parfois n'en sont pas moins cruciaux ! (ouragan, réacteur nucléaire divergeant, réseau internet en panne). Une exploitation fouillée de la notion d'entropie permet d'obtenir des résultats généraux.

Relations Internationales et Industrielles

- MEVAL entretient des relations suivies avec les universités de Berkeley, Braunschweig, Cambridge, CWI, Columbia, Moscou, Novosibirsk, Monterey, San Diego.
- Une action contractuelle avec France Télécom R&D, sur l'analyse des performances de réseaux large bande, s'est achevée cette année. Le projet est également partenaire de IMARA programme national d'expérimentation de nouvelles technologies pour le transport routier.

3 Fondements scientifiques

Mots clés : factorisation, file d'attente, fonction analytique, fonction de Lyapounov, grammaire, grande déviation, limite thermodynamique, marche aléatoire, modélisation, neurone, processus stochastique, protocole, réseau, semi-martingale, système dynamique, transition de phase..

Résumé : *Le ciment existant entre les diverses activités s'est constitué à partir des champs scientifiques suivants : marches aléatoires (méthodes analytiques, classification), réseaux et grands systèmes, réseaux neuronaux et physique statistique. On donne ici un aperçu des domaines d'expertise du projet, mettant en exergue les techniques originales qui y ont été inventées.*

3.1 Réseaux et marches aléatoires dans $\mathbf{Z}_+^n$

Si on choisit l'exemple des systèmes de télécommunications ou de transport, la plupart d'entre eux se laissent modéliser de façon assez réaliste par un ensemble de stations de service, où les serveurs sont les ressources (logiques ou physiques) du système considéré et où les entités circulant entre les stations représentent les requêtes, messages, programmes partageant ces ressources. À un réseau formé de n stations avec plusieurs classes de clients, on pourra souvent associer un processus Markovien vectoriel

$$X(t) = \big(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\big),$$

$X_i(t)$ décrivant la configuration des clients à la station i au temps t. L'étude de ces processus nécessite, principalement, des outils de deux natures :
- probabiliste, pour trouver les conditions d'existence de régimes stationnaires ;
- analytique, lorsqu'on veut calculer des distributions, estimer des vitesses de convergence, etc.

Pour des raisons physiques évidentes de positivité des quantités mises en jeu, il appert que les marches aléatoires dans $\mathbf{Z}_+^n$ sont isomorphes à des familles de réseaux comportant n sites. La difficulté majeure provient de l'existence des frontières naturelles.

3.1.1 Méthodes analytiques

Participants : Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, Vadim Malyshev.

Ce thème est fondamental et en perpétuel approfondissement. Lorsque $n = 2$, les sauts étant d'amplitude 1, la détermination de la mesure invariante équivaut souvent à résoudre une équation fonctionnelle de la forme

$$Q(x,y)\pi(x,y) + q(x,y)\pi(x) + \tilde{q}(x,y)\widetilde{\pi}(y) + \pi_{00}q_0(x,y) = 0.$$

Il s'agit de trouver des fonctions $\pi(x,y), \pi(x), \widetilde{\pi}(y)$, holomorphes dans les régions $|x|, |y| < 1$ et continues dans $|x|, |y| \leq 1$. Ici, $Q, q, \widetilde{q}, q_0$ sont des polynômes. En se plaçant sur la courbe algébrique $Q(x,y) = 0$ (en général elliptique), deux approches fondamentales ont été développées, conduisant (par factorisation ou uniformisation) à des formes explicites des solutions.
- Dans [7] est introduit le *groupe* $\mathcal{G}$ de la marche aléatoire, dont l'étude, via les automorphismes de Galois et en uniformisant la courbe algébrique, permet un calcul effectif sous forme de série.
- Dans [4], on se ramène à la résolution d'un problème aux limites de type Riemann-Hilbert-Carleman, pour une fonction d'une variable, posé dans le plan complexe et dont la forme la plus simple s'énonce ainsi : *trouver une fonction analytique dans un domaine simplement connexe* $\mathcal{D}$ *et satisfaisant une condition sur la frontière* $\delta\mathcal{D}$.

Vers la fin des années 70, cette méthododologie a été reprise avec fruit dans certains laboratoires étrangers (CWI, Université de Newcastle) et elle fait toujours l'objet d'études immédiates ou à long terme (Bell Laboratories, IBM Yorktown Heights, Universités du Michigan, d'Ottawa, etc.). Le livre [3], écrit par les trois auteurs précités, présente une synthèse, esquissée ci-dessous, des principaux résultats.
- Liaison avec la géométrie algébrique et le prolongement analytique des fonctions inconnues.
- Lorsque le groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre fini, détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions soient rationnelles ou algébriques.

- Lorsque $\mathcal{G}$ est d'ordre infini, un problème de factorisation est formulé, dont *l'indice*, calculé analytiquement, donne les conditions d'ergodicité (i.e. pour que les fonctions cherchées n'aient pas de pôle dans le disque unité) ; la représentation des fonctions inconnues est donnée sous forme intégrale, à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass.
- Pour le genre 0 (problème posé sur la sphère de Riemann), expression des solutions au moyen des fonctions automorphes.
- Comportement asymptotique des probabilités stationnaires, par une analyse fine de type méthode du col + résidus sur la surface de Riemann sous-jacente.

Toujours en dimension 2, lorsque les sauts à l'intérieur du quart de plan sont non bornés selon les directions cardinales Est, Nord, Nord-Est, certaines généralisations ont été effectuées par J. W. Cohen (alors professeur à l'université d'Utrecht, décédé le 12 novembre 2000). Par contre, il n'existe actuellement aucune technique de portée générale à partir de la dimension 3.

Le potentiel des méthodes évoquées ci-dessus est loin d'être épuisé. On citera par exemple :

– la détermination de la *vitesse intrinsèque* de convergence (i.e. invariante par rapport aux perturbations dans un domaine fini), pour des chaînes de Markov dans $\mathbf{Z}_+^2$;

– la description analytique de certaines *frontières de Martin* ;

– certaines équations fonctionnelles rencontrées en *gravité quantique*.

3.1.2 Classification et théorie constructive des chaînes de Markov dans $\mathbf{Z}_+^n$

Si les conditions de non explosion ou de non saturation des réseaux ont un intérêt pratique évident, leur caractérisation à l'aide de formules explicites résiste encore souvent à l'analyse, même pour des dimensions faibles ($n = 2$ ou 3). On a vu ci-dessus, qu'il est difficile de disposer de la forme analytique de la mesure invariante, voire très vite impossible, sauf dans des cas bien répertoriés, tel celui des réseaux éponymes (Jackson, BCMP), dits à *formes produit* car leur mesure invariante est factorisable. Cependant, il existe maintenant une approche très générale pour obtenir les conditions d'ergodicité de marches aléatoires fortement homogènes dans $\mathbf{Z}_+^n$ ou dans des domaines similaires, qui donne une explication structurelle globale de la situation, en ramenant le problème de l'ergodicité d'une marche dans $\mathbf{Z}_+^n$ à une série de problèmes en dimension $n-1$, par construction de semi-martingales et de systèmes dynamiques (paragraphes suivants). Ces travaux fondamentaux ont reçu un cadre, avec la parution de l'ouvrage [6], dans lequel sont consignés des résultats originaux obtenus depuis une vingtaine d'années, sur la classification détaillée en termes d'ergodicité, de récurrence et de transience. Ce champ de recherches très vivant constitue l'un des points d'ancrage du projet.

Techniques de martingales

Participants : Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, Vadim Malyshev.

L'idée est de construire des *fonctions de Lyapounov* (FL) idoines, via des techniques de semi-martingales, la difficulté principale étant due à la présence de frontières. Cette approche a été décisive pour la résolution de nombreux problèmes (cf. rapports d'activité antérieurs) :

Fonctions de Lyapounov pour les réseaux En exhibant une FL linéaire par morceaux pour les fameux réseaux de Jackson, on a pu retrouver les équations de conservation de flux liées à l'existence d'un régime stationnaire. Le phénomène intéressant est qu'il est possible d'appliquer cette fonction à des politiques de service ou d'arrivées en groupes, alors que la mesure invariante pour ce système est hors de portée (D. Botvitch et A. Zamyatin à l'Université de Moscou).

Dérives nulles En dimension 2 et 3, lorsque les sauts moyens sont nuls à l'intérieur du cône positif, on a introduit de nouvelles classes de FL, non linéaires (en particulier de la forme $Q^\delta(x, y, z)$, Q étant une forme quadratique ; mais aussi des objets plus complexes faisant intervenir des caractéristiques géométriques). La classification complète des processus peut ainsi être obtenue et il existe des liens directs avec les diffusions.

Stabilité Récemment, ont été menées une série de recherches sur l'intégrabilité de certaines fonctionnelles des temps d'atteinte τ_A d'ensembles compacts A, pour des chaînes de Markov, en collaboration avec S. Aspandiiarov (Université Paris 5) et M. Menshikov. Les moments $E\tau_A^p$ jouent en effet un rôle important dans les théorèmes limites concernant ces chaînes. En liaison avec la théorie du mouvement brownien réfléchi, on donne notamment la valeur critique p_0 maximale, telle que $E\tau_A^p < \infty$, $\forall p < p_0$, lorsque l'espace d'états est $\mathbf{Z}_+^2$. Là encore, les critères donnés reposent sur la construction explicite de semi-martingales et permettent d'étudier le comportement fin de la queue de distribution de τ_A, ainsi que la vitesse de convergence vers le régime stationnaire.

Systèmes dynamiques

Participants : Frank Delcoigne, Guy Fayolle, Christine Fricker, Jean-Marc Lasgouttes, Vadim Malyshev.

Comme il est montré dans [8] et [6], il est toujours possible d'associer à une marche aléatoire fortement homogène dans $\mathbf{Z}_+^n$, un système dynamique linéaire par morceaux, dont le champ de vecteurs associé (vitesses) ne dépende que des faces du domaine considéré. Cette propriété est équivalente à *l'approximation d'Euler* en physique statistique : on effectue des changements d'échelle identiques en temps et en espace (disons x/ϵ et t/ϵ) pour se placer dans le contexte de la loi des grands nombres. [Il est utile de remarquer d'emblée que, si certaines vitesses sont nulles, la situation se complique, car elle impose de mélanger la normalisation d'Euler avec celle du théorème central limite (diffusions) et la plupart des problèmes restent alors ouverts]. Ces méthodes, plus profondes que celles dites des *approximations fluides*, sont utilisées et développées pour la résolution de modèles très divers :

Réseaux à une classe de clients Il s'agit principalement des systèmes dits à *polling* (scrutin), où V serveurs partagent leur puissance entre N stations, et des réseaux de files d'attente classiques avec routage Markovien. Ici, un point agréable est qu'on peut souvent donner une caractérisation complète du champ de vecteurs, à l'aide de systèmes d'équations linéaires.

En collaboration avec R. Jaibi (Université de Tunis), ont été trouvées les conditions de stabilité des systèmes de polling à V serveurs homogènes, avec routage Markovien, pour une large classe de politiques de service (incluant notamment celles dites limitées, illimitées exhaustives ou à barrière), les distributions étant générales. La condition nécessaire est donnée par un argument direct classique, l'obtention de la condition suffisante reposant sur l'étude d'un modèle fluide associé (voir `http://www.inria.fr/rrrt/rr-3347.html`).

Chaînes aléatoires en interaction On propose diverses lois de stabilisation pour l'évolution stochastique de chaînes modifiables à leurs extrémités gauche ou droite. Cette représentation à base de chaînes est commode et permet de dégager des liens entre des domaines apparemment disjoints : réseaux multiclasses, marches aléatoires sur des groupes (libres non commutatifs, modulaires, graphes, etc.), théorie des champs quantiques en dimension 3, réseaux de neurones, etc. En collaboration avec des chercheurs du LLRS (Univ. de Moscou), a été amorcée la construction d'une théorie décrivant les interactions mutuelles d'un nombre quelconque de chaînes. Elle englobe en particulier les réseaux de files multi-classes de type PAPS (premier arrivé, premier servi) ou DAPS (dernier arrivé, premier servi), et généralise le cadre des marches aléatoires homogènes classiques. Une vision synthétique des objets ci-dessus est donnée dans la section 3.4.

3.2 Grands systèmes aléatoires

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Christine Fricker, Jean-Marc Lasgouttes, Vadim Malyshev.

Schématiquement, on peut dire que la résolution de modèles raisonnablement réalistes (ce vocable étant bien sûr subjectif !) n'est possible que pour les dimensions extrêmes : faible (disons ≤ 3) ou très grande. Dans ce dernier cas, on parle de systèmes en *limite thermodynamique*, i.e. dont la taille (volume, graphe associé, nombre de nœuds, etc.), représentée par un paramètre N, augmente indéfiniment. S'il y a clairement une analogie avec les systèmes de particules rencontrés en physique, de nouvelles difficultés surgissent par suite de la non homogénéité des composants (sites). Les questions essentielles sont liées aux phénomènes suivants :

3.2.1 Propagation du chaos

Elle existe dans un réseau si, par définition, tout p-uplet de nœuds se comporte, lorsque $N \to \infty$, comme un ensemble de p nœuds indépendants : on peut alors obtenir des renseignements quantitatifs sur la dynamique, l'état stationnaire et les vitesses de convergence. Pour les systèmes à fort degré de symétrie, les techniques utilisées sont issues de la mécanique statistique et dites *à champ moyen* : asymptotiquement, chaque site aura tendance à évoluer comme un processus de saut Markovien non homogène en temps, dont les taux de transition sont déterminés par calcul de la mesure empirique des actions dues aux autres sites, laquelle devient en fait déterministe. Une des difficultés provient de la rencontre d'équations différentielles non linéaires. Nous avons démontré la propagation du chaos pour diverses classes de réseaux (BCMP, *polling*). Quand la dissymétrie est totale, la plupart des problèmes restent encore largement ouverts.

3.2.2 Condensation et transition de phase

Considérons un réseau fermé du type standard BCMP, non symétrique, comportant M clients et N noeuds. On veut trouver des fonctions $M = f(N)$ conduisant, lorsque $N \to \infty$, à un *bon* comportement, autrement dit à une bonne utilisation des ressources disponibles. Cette problématique a de multiples origines : gestion de parcs de véhicules en libre service, réseaux informatiques, etc. À l'aide de facettes fines du théorème central limite, on montre dans [5] que, pour des conditions initiales indépendantes, il y a propagation du chaos, mais différentes situations peuvent se produire :

– les files restent toutes uniformément bornées ;
– certaines files, en nombre peut-être infini, se saturent : on parle alors de *condensation*.

On a ainsi très logiquement introduit une classe de fonctions $f(N)$, dites *critiques*, non nécessairement linéaires, différenciant les zones de *stabilité* et les zones de *saturation*. En outre, la vitesse de convergence vers l'état chaotique est d'ordre $O(f^{-1}(N))$.

3.3 Réseaux de neurones

Participant : Vadim Malyshev.

Globalement, on distingue trois classes de réseaux de neurones : ceux de *Hopfield*, les réseaux *biologiques* et le perceptron. Si des progrès concernant l'état stationnaire ont été accomplis par diverses équipes ces quinze dernières années, la dynamique de ces modèles, beaucoup plus délicate, reste encore assez mystérieuse. Sur ce dernier point, plusieurs études significatives ont été menées au sein du projet.

Le modèle de Hopfield (1982), très répandu en mécanique statistique, est caractérisé par le nombre de nœuds N, qui peut tendre vers l'infini, et le nombre d'images p. Lorsque p est arbitraire, la dynamique à température finie est analogue à celle d'une marche aléatoire évoluant dans une union de polyèdres, avec discontinuités aux frontières (comme dans les réseaux de communications !). Les propriétés temporelles locales et globales ont été abordées en analysant les limites fluides obtenues à l'aide de changements d'échelle appropriés. Il a ainsi été montré que le temps pour atteindre un point fixe, à température zéro, est presque sûrement uniformément borné en p, lorsque $p \to \infty$. En ce qui concerne la région des températures finies, il faudra trouver les répartitions spatiales des minima locaux d'énergie et les distributions correspondantes.

La seconde catégorie de réseaux intervient fréquemment en biologie (modèle dit *hourglass*) pour analyser le fonctionnement de cellules cérébrales. En fait, ils sont assez proches de certains réseaux de files d'attente et ont été étudiés par des techniques d'approximations fluides, conjointement avec l'IPPI de Moscou et l'Université de Lund en Suède. Il s'agissait principalement de décrire des attracteurs, ainsi que leur structure de Gibbs, pour divers types de connexions (asymétriques, aléatoires, d'inhibition et d'excitation, en dimension 2 aux températures extrêmes).

Enfin, la dernière classe de réseaux, analysée en collaboration avec le centre de physique théorique de Luminy, est plus connue des ingénieurs et apparaît comme une généralisation du *perceptron* multi-couches, proposé par Rosenblatt dans les années 60. Le point de vue adopté part d'une représentation sous forme de réseaux *feedforward*, i.e. sans réaction, dont la topologie est relativement simple.

3.4 Grammaires aléatoires, grammaires de graphes, grammaires quantiques

Participant : Vadim Malyshev.

Cette activité vise à développer les liens entre l'informatique et la physique théorique moderne, au delà des réseaux. Un mot dans un alphabet peut être vu comme une file d'attente, dont seules les extrémités sont modifiées de façon aléatoire, les symboles jouant le rôle des clients. Une généralisation immédiate consiste à admettre qu'arrivées et départs de clients puissent avoir lieu à un endroit arbitraire dans la file : il devient alors possible de décrire nombre de nouvelles applications, grâce à la notion de grammaire aléatoire (connue en informatique) et, plus généralement, de *grammaire de graphe*. Ces grammaires conduisent à des constructions géométriques (complexes aléatoires) maintenant très populaires en théorie de la gravité quantique ; elles participent à la modélisation de processus rencontrés en informatique (e.g. machine de Turing, fractales, graphes aléatoires) ; elles décrivent également l'évolution de longues séquence d'ADN en biologie. La dynamique et le comportement stationnaire des objets considérés sont analysés sous un angle nouveau, dans une série d'articles, notamment [Mal98]. Les méthodes probabilistes utilisées sont fortement liées à la physique statistique (perturbations d'opérateurs, changements d'échelle, processus à interaction locale, limite thermodynamique).

On traite également des grandes grammaires de graphes multi-dimensionnelles, selon deux lignes directrices :

- d'abord, en faisant ressortir les propriétés qualitatives de ces objets : croissance asymptotique du nombre de composantes connexes, degré de compacité locale, chaos et phases topologiques, etc.
- Ensuite, en définissant la limite thermodynamique, plus exactement les aspects de dynamique en grappes (*clusters*) sur des configurations infinies. En particulier, on discute des différences entre grammaires de graphes et champs de Gibbs sur les treillis, en introduisant la notion de *complexe infini statistiquement homogène*.

Il est important de noter qu'existe une correspondance naturelle entre grammaires quantiques et systèmes à spins quantiques.

3.5 Complexes aléatoires

Participants : Guy Fayolle, Vadim Malyshev.

Les *complexes* interviennent dans différents domaines : topologie, géométrie, physique, etc. Il existe plusieurs points de vue.

- En mathématiques discrètes, il s'agit surtout de l'énumération de certaines classes de complexes bi-dimensionnels.
- En probabilités, la croissance de certains complexes fait appel à des processus de Markov, parfois non linéaires.
- Enfin, en physique, on s'intéresse à la gravité quantique, plus précisément aux conditions stochastiques laissant invariante la distribution stationnaire de cette gravité. Partant de

[Mal98] V. A. Malyshev, « Random Grammars », *Russian Math. Reviews 2*, 1998, p. 107–134.

l'étude théorique de la dynamique, il est possible de donner des résultats sur l'existence et les propriétés de fonctions de corrélations locales en limite thermodynamique.

3.6 Grandes déviations

Participants : Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle.

La théorie des grandes déviations s'intéresse principalement aux événements *rares*. Par exemple, pour un processus $(X_n, n \geq 1)$ prenant ses valeurs dans un espace métrique E et dont les moyennes $\hat{S}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ admettent une limite (e.g. les suites de variables i.i.d. ou les chaînes de Markov), on étudie le comportement asymptotique de $\mathsf{P}(\hat{S}_n \in \Gamma)$, où Γ est un borélien de l'espace E. De façon plus générale, il s'agit d'analyser le comportement de certaines familles de distributions dépendant d'un paramètre.
Partant du travail fondamental d'Ellis en mécanique statistique, qui considère la mesure empirique d'ordre 2

$$L_n(\omega) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega), X_{i+1}(\omega)} + \delta_{X_n(\omega), X_1(\omega)}\right),$$

il a été montré dans [10] un théorème de Sanov généralisé, valable pour toute chaî ne de Markov à espace d'états discret, irréductible mais non nécessairement ergodique. Plus précisement, L_n verifie le *principe faible de grandes déviations* (PGD) : pour tout ouvert O (resp. fermé K) dans l'ensemble $M_s(E^2)$ des mesures équilibrées, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Pr[L_n \in O] \geq - \inf_{A\in O} H(A\|P),$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \Pr[L_n \in K] \leq - \inf_{A\in K} H(A\|P),$$

où la fonctionnelle d'action H est l'entropie relative [10]. On retrouve le principe de moindre action : *pour atteindre un état exceptionnel, un système emprunte la trajectoire de moindre information.* Ce résultat est une amélioration de l'état de l'art, car habituellement les PGD soit supposent la finitude de E, soit imposent sur X une forte condition d'uniformité, qui exclut d'importantes classes de chaînes, notamment les réseaux de files d'attente à sauts bornés. Plusieurs conséquences intéressantes ont été mises en évidence. Ainsi,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P^n(x,y) = - \inf_{A\in M_s(E^2)} H(A\|P) = -\alpha, \ \forall (x,y), \tag{1}$$

la constante α étant nulle pour tout système ergodique. L'équation ci-dessus montre le lien existant entre le PGD et la frontière de Martin (i.e. l'ensemble des fonctions harmoniques), laquelle, dans le cas de transience, rend compte de la façon dont s'effectue la dérive vers l'infini. La plupart des résultats ci-dessus sont généralisables au temps continu et aux processus semi-markoviens, grâce à la notion de générateur empirique développée dans [2]. Il est en outre conjecturé, et vérifié dans plusieurs cas, que le PGD permet généralement d'accéder à l'information sur les queues des distributions stationnaires.

4 Domaines d'applications

Résumé : *Si la section précédente mettait l'accent sur la méthodologie, en liaison avec les processus stochastiques, il faut souligner que l'évolution des problèmes que nous traitons reste souvent guidée par les développements technologiques. Le mot « réseau » évoque aujourd'hui immanquablement les technologies de l'information, mais il couvre une problématique beaucoup plus large. En effet, l'information véhiculée peut avoir des contenus sémantiques aussi variés que le sont communications téléphoniques, transactions boursières, calculs scientifiques, marchandises, énergie, etc.* « Timeo hominem unius libri »*, disait Saint-Thomas d'Aquin : de fait peu de domaines sont, par essence, foncièrement étrangers à la modélisation. Nous en énumérons trois, dont l'importance relative varie au fil des temps et qui ont de fortes dépendances mutuelles : Télécommunications, Systèmes et Architectures Parallèles, Transports.*

4.1 Télécommunications

Il s'agit d'un terrain de prédilection pour l'application des outils présentés dans le paragraphe 3.1. De nombreuses études ont été réalisées au sein du projet dès le début des années 1980, certaines dans un cadre contractuel avec le CNET, au moment de l'essor des réseaux à commutation de paquets. Nous citons, par ordre chronologique :
- l'analyse des procédures de liaison dans les systèmes téléinformatiques, principalement le standard HDLC alors très en vogue avec la notion de canal virtuel ;
- l'évaluation de protocoles d'accès et de transmission de données (Aloha, canal satellite Télécom-1, Ethernet, etc.) ;
- les problèmes de multiplexage liés à l'apparition des RNIS (*réseaux numériques à intégration de services*) ;
- allocation de ressources dans les réseaux large bande.

4.2 Systèmes et architectures parallèles

Plusieurs actions de recherche appuyées par la DRET ont donné lieu, pendant la période 1982–1995, à des études sur diverses architectures de supercalculateurs. Parmi les principaux résultats, on mentionnera :
- la représentation, à l'aide d'un modèle stochastique, des références à la mémoire générées par un programme, avec application à l'analyse des *caches* (taux de défaut, localité spatiale, ensemble de travail ou *working set*) ;
- une approche traitant les architectures complexes comme des systèmes de files d'attente avec plusieurs types de priorités ;
- l'analyse de réseaux d'interconnexion : étant donnés M processeurs et N bancs mémoire, avec $M = cN$, on a mis en évidence (à l'aide de changements d'échelle spatio-temporels) certains phénomènes qualitatifs, quant à la répartition des demandes aux différents bancs.

4.3 Transports

Cette problématique, très actuelle et riche en questions difficiles, a pénétré le projet de façon effective sous l'impulsion du programme PRAXITÈLE, qui visait à la conception de nouveaux modes de déplacement en zone urbaine, basés sur l'utilisation de petits véhicules en libre service (cf. section 7.1). Nous envisageons d'investir dans l'action IMARA sur la route automatisée, en cours de définition actuellement.

5 Logiciels

5.1 QNAP2

Résumé : *Le logiciel* QNAP2 *(Queueing Network Analysis Package 2) permet la résolution et l'estimation de réseaux de serveurs et de files d'attente très généraux. Ils sont décrits au moyen d'un langage spécialisé comportant les fonctionnalités algorithmiques usuelles, des manipulations d'objets et divers mécanismes (temporisations, sémaphores, routages statiques ou calculés dynamiquement, etc.). Selon les hypothèses retenues à l'analyse, le programme procède par calculs mathématiques (exacts ou approchés) ou par simulation.*

L'idée de développer un logiciel original pour l'analyse de réseaux s'est concrétisée en 1976, avec un premier prototype dénommé QNAP, fruit d'une coopération entre l'INRIA et le centre scientifique CII (ultérieurement devenu BULL) de Grenoble. Il permettait déjà, grâce à un langage approprié, de décrire et de traiter certains systèmes de files d'attente, avec des mécanismes de service compliqués. Vers 1982, le logiciel a évolué vers un état plus industriel se transformant en QNAP2, diffusé d'abord par BULL, puis par la société SIMULOG depuis 1985.

Les ajouts de fonctionnalités ont été réalisés grâce au soutien logistique constant de l'INRIA et particulièrement de Marc Badel, membre du projet jusqu'en 1997 : nouvelles méthodes de résolution mathématique, fonctions et procédures attachées à des types d'objets utilisateur, ainsi que la notion de fonctions et procédures virtuelles. Cette approche, inspirée des langages SIMULA67 et C++, fait évoluer QNAP2 vers un langage orienté objet. QNAP2 a été intégré dans l'environnement MODLINE, réalisé par la société SIMULOG et issu du projet européen IMSE, dont l'INRIA était partenaire, de 1988 à 1991. MODLINE est actuellement commercialisé par SIMULOG.

6 Résultats nouveaux

Les points énumérés ci-dessous doivent être plongés dans le contexte des sections 3 et 4, bien que les chronologies ne soient pas identiques, certains recouvrements étant par ailleurs inévitables.

6.1 Modèles de réseaux de télécommunications

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle, Jean-Marc

Lasgouttes.

6.1.1 Partage de bande passante dans les grands réseaux

Ce sujet est issu de l'action contractuelle évoquée dans la section 7.2. Typiquement, on considère un réseau parcouru par un ensemble de routes de longueur fixée, dans lequel la bande passante disponible sur chaque canal est partagée entre les connexions actives suivant la politique dite du « min » : chaque lien partage sa capacité équitablement entre les différents appels qu'il gère, de façon totalement décentralisée ; en outre, un appel est servi au taux offert par le lien le plus chargé qu'il utilise. Les travaux, amorcés depuis 1999, sont terminés et ont donné lieu à trois publications principales.

- L'article [20] montre comment les résultats précédents (obtenus par une approche de type champ moyen sur une topologie en étoile symétrique) permettent en fait de saisir l'effet global d'une politique de partage de bande passante sur la dynamique du système. En particulier, on interprète le modèle en termes de réseau avec plusieurs goulots d'étranglement.
- Dans [21], le réseau en étoile non symmétrique, fonctionnant sous la politique « min » est analysé sous l'angle des grandes déviations (cf. section 6.8.4).
- Un rapport de synthèse [23], dans lequel est aussi ébauchée une approche originale permettant de travailler sur des grands réseaux non symétriques (cf. section 6.4). Ainsi, dans le cas spécial où l'entrée du réseau est un seul gros « backbone », on trouve des conditions d'insensibilité aux valeurs de certains paramètres, lesquelles perdurent pour une grande variété de politiques d'allocation, dont la fameuse « équité max-min ».

6.1.2 Systèmes à *polling*

Les systèmes dits à *polling,* où V serveurs partagent leurs services entre N stations, selon une politique fixée, font toujours l'objet d'une abondante littérature à cause de leur vaste champ d'applications. Si des percées spectaculaires ont été accomplies concernant les conditions d'existence de régimes stables, il est encore rarement possible de calculer les grandeurs phares intéressantes, telles par exemple les temps d'attente ou les nombres moyens, et les méthodes asymptotiques deviennent relativement incontournables. Dans ce contexte a été réalisée l'étude [12] présentée dans la section 6.8.

6.2 Réseaux de transport

Participant : Cyril Furtlehner.

Dans le cadre de l'action IMARA, on conçoit un modèle pour décrire la diffusion de voitures automatiques sur un réseau planaire. Au delà des modèles de type PRAXITÈLE, qui ajustent l'offre (nombre de véhicules libres en circulation) en fonction de la demande, on souhaite également prendre en compte l'encombrement ou la saturation des voies. On s'attend alors à rencontrer des transitions de phase du premier ordre, avec cœxistence d'engorgements locaux et de parties fluides.

6.3 Méthodes analytiques

6.3.1 Comptage de cartes sur des surfaces

Participants : Guy Fayolle, Vadim Malyshev.

En collaboration avec M. Krikun (Université de Moscou), on veut déterminer le comportement asymptotique du nombre de cartes pour des surface de genre arbitraire. Dans [14], des résultats partiels ont été obtenus pour des surfaces compactes orientables, avec p sommets et $b+p$ arcs. Une généralisation est en cours, conduisant à une équation fonctionnelle de deux variables complexes, non linéaire et aux dérivées partielles. Elle se résout explicitement par réduction intermédiaire à une équation de Riccati. Interviennent alors des fonctions de Whittaker et de Kummer, qui semblent être des objets génériques pour les structures analysées [26].

6.4 Systèmes en limite thermodynamique

Participants : Guy Fayolle, Jean-Marc Lasgouttes.

Nous avons poursuivi l'analyse de réseaux généraux de grande taille, pour lesquels la mesure invariante n'a pas de forme explicite. Il s'agit de déterminer les conditions de propagation du chaos, en dynamique ou en régime stationnaire, les techniques étant d'ailleurs fort différentes dans les deux cas.

6.4.1 Réseaux de files M/G/1

Le premier candidat étudié est le réseau de Jackson ouvert, dans lequel les distributions des temps de service sont arbitraires. En fait, la possible existence du chaos s'avère a priori intimement liée à l'approximation poissonnienne des flux totaux arrivant à chaque file d'attente. Mais rien n'est ici évident, car il est connu que dans la plupart des réseaux à forme produit les flux internes ne sont pas de Poisson, même si chaque file se comporte comme une simple $M/M/1$ avec distribution géométrique.

6.4.2 Réseaux markoviens généraux

Une approche basée sur l'analyse spectrale de générateurs infinitésimaux des processus semble prometteuse. Elle a été testée avec succès dans [23], à l'occasion des travaux sur le partage de bande passante évoqués dans la section 6.1.1. On étend les méthodes *champ moyen* à certaines fonctionnelles de chaînes de Markov à espace d'états non dénombrable et ne possédant pas de symétrie. Des liens normaux apparaissent avec le théorème central limite pour des variables faiblement dépendantes.

6.5 Réseaux avec pertes

Participant : Christine Fricker.

Le champ d'applications visé est surtout celui des réseaux de télécommunications classiques.

Le méthodes utilisées sont basées essentiellement sur des renormalisations spatio-temporelles. Ces travaux sont effectués en collaboration avec D. Tibi (université Paris 7) et Ph. Robert (Projet Algo).

6.5.1 Renormalisation du modèle d'Erlang multi-classes

Dans le cas d'un seul lien, il s'agit de la file M/M/N/N à plusieurs classes de clients, distinguées par les intensités des arrivées et des services. Les études sur la convergence aux deux premiers ordres (après changement d'échelle convenable) ont été terminées, mettant en évidence trois régimes de fonctionnement. Le premier (dit sous-critique) est simple. Pour les deux autres (critique et sur-critique), on caractérise le processus limite : en posant un problème de réflexion de Skorokhod, on obtient la loi des grands nombres ; ensuite, un théorème central limite dégénéré est prouvé quand on part d'un point frontière situé dans le domaine d'attraction du point limite. Après renormalisation, on identifie aussi la mesure stationnaire de la diffusion limite au point fixe de la trajectoire fluide, avec la limite de la mesure stationnaire du processus initial [27].

6.5.2 Limites fluides de certains réseaux à perte

Avec deux liens, l'identification du processus limite est encore un problème ouvert. Une conjecture de Hunt et Kurtz (1994), vraie quand les appels demandent le même nombre de circuits sur chaque lien de leur route, est que le processus est toujours déterministe. Dans [24], on met conjecture en défaut pour des politiques de contrôle avec réservation. La preuve repose sur des estimées précises de la mesure invariante de marches aléatoires évoluant sur les entiers. Le résultat est utilisé pour prouver la conjecture dans le cas de réseaux non-contrôlés à deux liens et deux routes. Le cas général semble hors d'atteinte.

6.6 Grammaires aléatoires, grammaires de graphes, grammaires quantiques

Participant : Vadim Malyshev.

Les grammaires aléatoires existent depuis longtemps en informatique, mais les études concernant leur limite thermodynamique et leur comportement stationnaire sont très embryonnaires. Dans [13], on analyse de façon détaillée les grammaires « context-free » dans la région sur-critique, i.e. lorsque le longueur du mot croît exponentiellement. Des statistiques et limites diverses sont calculées, relatives notamment à la taille des sous-mots, lorsque $t \to \infty$.

Quant à l'introduction des grammaires quantiques, le but est double :

- contribuer au développement de l'informatique quantique ;
- introduire rigoureusement des modèles simples dans la physique moderne (spécialement pour la gravité quantique).

Elles ont des analogues en termes de systèmes à spins quantiques. Dans [17, 19], on les étudie sous divers aspects : caractère auto-adjoint de l'Hamiltonien, algèbres C^* et leurs automorphismes, états KMS. Le spectre de l'Hamiltonien est exhibé dans plusieurs exemples. Des liens avec le modèle classique de Lorentz à deux dimensions sont établis : on montre l'existence de semi-groupes unitaires complètement positifs, dont on obtient les spectres, puis on caractérise le comportement stationnaire.

6.7 Complexes aléatoires

Participant : Vadim Malyshev.

Cette notion a été brièvement présentée dans la section 3.5.

6.7.1 Champs de Gibbs

Dans [17], on donne les prémisses d'une nouvelle théorie : champs de Gibbs sur les graphes de Gibbs. Le champ de Gibbs est une notion centrale pour la physique statistique mathématique et le domaine des champs quantiques euclidiens. On introduit une généralisation naturelle, en rendant aléatoire l'espace sur lequel est défini le champ, cet aléa pouvant dépendre de la configuration. L'objet résultant est encore une famille de Gibbs, car elle paramétrise des champs de Gibbs sur différents graphes.

Dans [18], on considère des distributions de Gibbs sur des cartes colorées avec champ de matière. Par des techniques de développements en grappes (*clusters*), il est prouvé que dans les zones de haute température l'exposant critique peut changer.

6.7.2 Cartes

La combinatoire de cartes est abordée dans [14], où on montre des résultats originaux sur le comportement asymptotique du nombre de certaines cartes planaires (cf. section 6.3.1), ainsi que sur le diagramme de phases complet pour quelques modèles classiques.

6.7.3 Modèles de Lorentz

Les modèles de Lorentz en physique peuvent être vus comme une approche nouvelle à la gravité quantique, basée sur la notion d'ensemble causal : il s'agit d'un ensemble partiellement ordonné, ayant une structure causale analogue à celle de l'espace de Minkowski. On distingue deux approches de nature différente pour construire les ensembles causals aléatoires et quantiques, l'une de type Gibbs (i.e. euclidienne en théorie des champs quantiques), l'autre Hamiltonienne et plus liée aux systèmes à spins quantiques. Dans [15], on obtient des résultat complets quant à l'approche de Gibbs : structure des phases, comportement critique, limite continue.

6.8 Grandes déviations

6.8.1 Résultats généraux

Participants : Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle.

Comme il a été évoqué dans la section 3.6, une approche nouvelle, basée sur une décomposition en cycles, a permis d'étendre le théorème de Sanov aux chaînes de Markov à espace d'états dénombrable, sous la seule hypothèse d'irréductibilité [10] : la mesure empirique d'ordre

2 satisfait un PGD. On obtient un certain nombre de corollaires, parmi lesquels le lemme intégral de Varadhan ou encore, sous certaines conditions, un principe de contraction qui entraîne immédiatement le théorème de Sanov faible pour les mesures empiriques d'ordre 1. La preuve repose sur une agrégation des états et sur des propriétés fines de la fonctionnelle d'action H, l'entropie.

Une approche alternative a été développée dans [2], qui semble plus générale et se fonde sur la notion de processus *déviant*, où intervient un principe analogue à celui de la loi dite de moindre action : pour atteindre un état exceptionnel, un système emprunte la trajectoire d'information minimale. Un changement de mesure permet de focaliser sur cette trajectoire et H quantifie l'information. Au delà d'une technique de calcul, on a une méthode pour mieux appréhender la dynamique des systèmes. La même démarche a permis de montrer un PGD pour les chaînes en temps continu, à l'aide de la notion de *générateur empirique*, qui est une extension de la mesure empirique classique [11].

6.8.2 Frontières de Martin

Participant : Arnaud de La Fortelle.

Les équations données dans la section 3.6 montrent clairement les liens entre PGD et fonctions harmoniques, ces dernières formant, selon la terminologie classique, *la frontière de Martin*. Pour exprimer des PGD forts (i.e. sur des fermés et non sur des compacts), il faut prendre en compte la valeur de l'entropie relative sur le compactifié de Martin. Par un changement de mesure convenable sur ce domaine, on obtient des bornes de grandes déviations exprimables à l'aide de H. Des phénomènes intéressants surviennent par suite de discontinuités rencontrées en certains points de la frontière [11].

6.8.3 Développements fins de l'entropie

Participant : Arnaud de La Fortelle.

En dépit de sa non-continuité, l'entropie admet une sorte de développement de Taylor donnant des résultats asymptotiques plus précis que le PGD. En outre, dans [2], le Hessien de l'entropie, au point où celle-ci est minimale, est exprimé en fonction de la matrice de variance-covariance, selon une formule du type

$$\Sigma_{ij} = \langle \nabla^2 H(G)^{-1} f_i, f_j \rangle. \tag{2}$$

On arrive ainsi à quantifier les covariances à l'intérieur de certains réseaux, ce qui est nouveau. La justification des opérations de dérivation dans l'équation (2) requiert une analyse fine des espaces mis en jeu. On démontre, en s'appuyant sur certains résultats de [10] utilisés pour les grandes déviations, que la variance s'exprime bien à l'aide de (2) pour des chaînes de Markov sur un espace dénombrable. Il semblerait que cette formule soit beaucoup plus générale.

6.8.4 Réseaux à polling

Participants : Franck Delcoigne, Arnaud de La Fortelle.

En poursuivant l'étude faite en 2000, on a exploité les résultats de grandes déviations pour obtenir le comportement de la queue de la distribution stationnaire. Ces développements sont exposés dans [21] et prolongent, par d'autres techniques, les idées de la section 6.8.2. La théorie de Freidlin et Wentzell suggère que la queue de la distribution stationnaire du nœud parexemple 1 est liée à la fonctionnelle d'action des grandes déviations I_T par la formule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\{q_1 > n\} = -\inf_{T\geq 0} \inf_{\varphi} \{I_T(\varphi) : \varphi(0) = 0, \varphi_1(T) = 1\}. \tag{3}$$

Sous la conjecture que les trajectoires de saturation sont des droites, le problème d'optimisation (3) est ramené à un programme en dimension finie.

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P\{q_1 > n\} = \inf_{G:D_1>0} \frac{H(G\|R)}{D_1},$$

où intervient l'entropie du réseau $H(.\|R)$, et qui se résoud numériquement aisément. La démarche proposée s'étend à d'autres classes de réseaux (Jackson, l'étoile de la section)

6.8.5 Réseaux en étoile

Participants : Franck Delcoigne, Arnaud de La Fortelle.

En appliquant les techniques de changement de mesure et la notion de processus déviant mentionné dans la section 6.8.1, on a pu caractériser dans [21] les modes de saturation pour un réseau étoilé de taille finie, non symétrique. Ces résultats théoriques donnent, au prix d'une heuristique encore à l'étude, un algorithme de calcul pour la queue de la distribution stationnaire. La comparaison résultats avec, d'une part le critère d'ergodicité, d'autre part avec des simulations, on constate que le critère de grandes déviations est bien meilleur que celui de l'ergodicité.

6.9 Arbres aléatoires

Participant : Guy Fayolle.

Dans [22], en collaboration avev M. Krikun, on donne le taux de croissance et les conditions d'ergodicité pour une classe d'arbres aléatoires avec adjonction d'arcs suivant un processus de Poisson et suppression des feuilles avec un taux μ. Les résultats principaux mettent en vedette le nombre e. Dans le cas de naissance pure, i.e. $\mu = 0$, la hauteur d'arbre à l'instant t croît linéairement avec une pente asymptotiquement égale à e, en moyenne et presque sûrement quand $t \to \infty$. Lorsque les suppressions de feuilles sont également autorisées, on obtient une classification complète du processus selon les valeurs du facteur d'intensité $\rho = \lambda/\mu$: ergodicité si $\rho \leq e^{-1}$ et transience si $\rho > e^{-1}$. Un phénomène de transition de phase apparaît : dans l'espace des paramètres, la région correspondant habituellement à la récurrence nulle n'existe pas. Cette situation est rare pour des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable. Des bornes sont également proposées dans le cas de transience.

6.10 Divers

Participant : Roudolf Iasnogorodski.

En collaboration avec H. Lhéritier (Université d'Orléans), un livre [9] (niveau cours de DEA) est en cours de publication. Il propose une théorie exacte et asymptotique de l'estimation paramétrique, présentée d'un point de vue global.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Praxitèle, Imara

Le programme Praxitèle, qui avait donné lieu en 1993 à un consortium industriel regroupant l'INRIA, l'INRETS, la CGEA, DASSAULT AUTOMATIQUE, EDF et RENAULT, s'est achevé en Juin 1997. Il a été suivi d'une expérimentation en vraie grandeur dans la région de Saint-Quentin en Yvelines, terminée en 1999 de façon très convaincante.

Il s'agissait d'étudier et de promouvoir un nouveau mode de transport public, basé sur l'utilisation de petits véhicules urbains, de préférence électriques, dont le parc serait géré par un système informatique s'appuyant sur un réseau de télécommunications. La relation contractuelle établie avec MEVAL, issue d'une proposition intitulée *Problèmes de modélisation mathématique pour la conception de réseaux de véhicules électriques à usage collectif*, a permis de subventionner une thèse. Cette thématique a aussi concerné des équipes du centre scientifique franco-russe A. M. Lyapounov.

Outre les modèles, les travaux de ces trois dernières années ont comporté un volet sur la conception de simulations rapides. L'un des problèmes cruciaux pour un dimensionnement correct du système provient de la non-stationnarité des demandes, ce qui impose une politique des retours à vide (hauts-le-pied). Des réponses partielles à ces questions ont été données (cf. section 6.2 et les rapports d'activité 1999–2000).

Actuellement, le projet MEVAL participe à l'action IMARA sur la route automatisée, qui s'inscrit dans le prolongement de PRAXITÈLE et fait partie du consortium français « La Route Automatisée » en coopération avec l'INRETS, le LCPC, l'ENSMP, l'ENPC et l'ENST. Des réflexions récentes ont mis l'accent, du point de vue modélisation, sur des liens possibles avec la mécanique statistique.

7.2 France Télécom R&D

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle, Jean-Marc Lasgouttes.

La consultation thématique France Télécom R&D N^0 5, lancée en 1997, a donné lieu à l'action contractuelle N° 981B016, qui a pris effet en Février 1998 et s'est achevée en Avril 2001.

Cette convention s'inscrivait dans le cadre d'études menées à FTRD/DAC/GTR, dans le groupe *Modélisation du trafic et analyse des performances des réseaux large bande*. Il s'agissait principalement d'étudier les problèmes d'ingénierie du trafic, liés à l'introduction du service dit

ABR, afin de dégager des règles de dimensionnement et de contrôle de flux pour les réseaux offrant un tel service. Les travaux ont été réalisés au sein du projet, à l'aide de méthodes de modélisation mathématique. Le but était d'acquérir une compréhension structurelle des phénomènes, afin d'établir une sorte de typologie des réseaux ATM et large bande, en les considérant comme essentiellement équivalents à un ensemble de systèmes dynamiques, fonctionnant sous différentes échelles de temps. L'exécution du contrat comportait deux phases principales.

- D'abord, à partir de critères donnés pour le partage de charge (par exemple équité *max-min*), analyser les performances d'une configuration *typique* de réseau. Compte tenu de la complexité des systèmes, on pouvait appliquer des méthodes asymptotiques de type champ moyen et limite thermodynamique.
- Ensuite, dans le cadre de l'allocation de ressources imposée par le service ABR, étudier les différentes façons de satisfaire un critère donné.

Le contenu scientifique du dernier lot [25] et du rapport de synthèse [23] livrés cette année a été décrit dans les diverses rubriques de la section 6.1.1.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

8.1.1 Relations académiques

Le projet entretient des collaborations plus ou moins étroites avec les centres de recherche suivants :

- Université PARIS I (M. Cottrell) ;
- Université d'Orléans (R. Iasnogorodski) ;
- Université PARIS 6, Laboratoire de Probabilités, (J. Jacod) ;
- Université PARIS 10, Département de Mathématiques, (S. Méléard) ;
- Université de Cergy-Pontoise (P. Doukhan) ;
- Université de Marne-la Vallée (J. Diebolt) ;
- France Télécom R&D, DAC/GTR (T. Bonald, J. Roberts) ;
- École polytechnique (F. Dunlop, C. Graham) ;
- École normale supérieure de Paris (B. Derrida, J.-F. Le Gall, G. Ruget) ;
- SUPELEC et ENSTA (P. Brémaud).

8.1.2 Séminaires

Un séminaire hebdomadaire a lieu à Rocquencourt, en synergie avec les projets FRACTALES, META2 et HIPERCOM. L'organisation, côté MEVAL, est confiée à J.-M. Lasgouttes.

8.1.3 Divers

G. Fayolle est membre du conseil scientifique de l'Inria.

8.2 Actions internationales

8.2.1 Centre Franco-Russe

G. Fayolle et V. Malyshev participent aux activités du centre *A. M. Lyapounov*, situé au sein de l'Université de Moscou et officiellement inauguré le 19 Décembre 1993. Ils ont été co-responsables du projet intitulé *Probabilités et analyse de grands réseaux* et ont également organisé plusieurs séminaires. La partie russe comprenait des équipes du LLRS (*Laboratoire d'analyse des grands systèmes*, Université de Moscou) et le *Laboratoire R. Dobrushin* de l'IPPI (*Institut des problèmes de transmission de l'information*, dépendant de L'Académie des Sciences).

8.2.2 Comités de programmes et d'édition de revues

V. Malyshev fait partie du comité éditorial des revues russes *Problems of Information Transmission* et *Fundamental and Applied Mathematics*; il est également fondateur et éditeur en chef du journal *Markov Processes and Related Fields*, G. Fayolle étant membre du comité de rédaction.

G. Fayolle est membre du groupe de travail IFIP WG 7.3, qui comprend environ 90 membres élus et représente diverses communautés scientifiques intéressées par la modélisation des systèmes.

8.2.3 Relations internationales

G. Fayolle et V. Malyshev collaborent avec les universités et centres de recherches de Leuven (Belgique), Bielefeld et Braunschweig (Allemagne), Lund (Suède), Moscou (Département de probabilités de l'université + IPPI de l'Académie des Sciences), CWI (Pays-Bas), Cambridge et Newcastle (Angleterre).

De longue date, le projet maintient divers contacts avec les États-Unis (Berkeley, Columbia, Georgia Inst. of Tech., San Diego, Monterey, AT&T) et avec la Russie (Moscou, Novosibirsk).

8.2.4 Visites de chercheurs et professeurs étrangers

M. Krikun (Université de Moscou) a passé une semaines dans l'équipe. Nous avons également reçu D. Gaver (Post Graduate Naval School, Monterey), S. Shlossman (Centre de physique théorique de Luminy), Y. Kogan (AT&T), E.G. Coffman (Université Columbia, New-York)

9 Diffusion de résultats

Les résultats obtenus dans l'équipe ont été diffusés dans quelques uns des principaux colloques concernant le domaine et ont fait l'objet de conférences et d'invitations dans divers centres de recherche. On ne cite que les éléments principaux.

9.1 Visites de laboratoires

G. Fayolle a reçu des invitations des universités de Moscou, de Columbia (USA), de Newcastle, de Cambridge, ainsi que de AT&T (Murray Hill, USA).

A. de La Fortelle a effectué une courte visite au LIAMA à Pékin (février) et a passé trois semaines au centre Lyapounov au mois d'août.

J.-M. Lasgouttes est invité pour neuf mois à l'institut *Eurandom* (Eindhoven, Hollande), depuis décembre 2001.

V. Malyshev a séjourné plusieurs fois en Russie (universités de Saint-Pétersbourg et de Moscou).

9.2 Conférences

A. de La Fortelle et Ch. Fricker ont présenté, respectivement, des extensions de [2] et l'article [24] à *11 th INFORMS Applied Probability Society Conference*, New-York, 25-27 juillet 2001.

G. Fayolle était invité [22] au colloque *The Mathematics of Stochastic Networks*, organisé à l'Institut Eurandom, Eindhoven, du 29 octobre au 2 novembre 2001.

J.-M. Lasgouttes a présenté [20] à la conférence *IEEE INFOCOM*, qui s'est tenue à Anchorage, 24-26 avril 2001.

V. Malyshev a donné plusieurs séminaires à Moscou (*Moscow Math. Society* et à l'IPPI), ainsi qu'à l'université de Bielefeld. Il était également conférencier invité à la conférence *Spectral Theory and Mathematical Physics*, Moccou, août 2001, à l'occasion du 70^e anniversaire du professeur R. Minlos.

A. de La Fortelle et G. Fayolle ont donné des séminaires à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure.

9.3 Participation à l'organisation de colloques

V. Malyshev a été directeur du programme *NATO Advanced Study Institute : Asymptotic Combinatorics wih Applications to Mathematical Physics*, Saint-Pétersbourg, Russie, juillet 2001.

9.4 Activités universitaires

G. Fayolle a été membre du jury des épreuves orales du concours d'agrégation externe de mathématiques, du 26 juin au 20 juillet 2001.

9.5 Jurys de thèse

Guy Fayolle a été membre de jury dans les thèses suivantes :

– *Applications statistiques de suites faiblement dépendantes et de systèmes dynamiques*, C. Prieur, Université de Cergy-Pontoise, 13 décembre 2001.

– *Grandes déviations pour certaines mesures empiriques*, J. Najim, Université Paris 10 Nanterre, 20 décembre 2001.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] S. Aspandiiarov, R. Iasnogorodski, « General Results on Stationary Measures of Recurrent Countable Markov Chains and their Applications », *Bernoulli*, 1999.

[2] A. de La Fortelle, *Contribution à la théorie des grandes déviations et applications*, thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées, novembre 2000.

[3] G. Fayolle, R. Iasnogorodski, V. A. Malyshev, *Random walks in the Quarter Plane*, Applications of Mathematics, 40, Springer-Verlag, 1999.

[4] G. Fayolle, R. Iasnogorodski, « Two Coupled Processors : The Reduction to a Riemann-Hilbert Problem », *Z. Wahrscheinichkeitstheorie verw. Gebiete 47*, 1979, p. 325–351.

[5] G. Fayolle, J. M. Lasgouttes, « Asymptotics and Scalings for Large Product-Form Networks via the Central Limit Theorem », *Markov Processes and Related Fields 2*, 2, 1996.

[6] G. Fayolle, V. A. Malyshev, M. V. Menshikov, *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*, Cambridge University Press, 1995.

[7] V. A. Malyshev, *Marches aléatoires, équations de Wiener-Hopf dans le quart de plan, automorphismes de Galois*, Éditions de l'Université de Moscou, 1970, en russe.

[8] V. A. Malyshev, « Networks and dynamical systems », *Adv. Appl. Prob. 25*, 1993, p. 140–175.

Livres et monographies

[9] R. Iasnogorodski, H. Lhéritier, *Théorie de l'Estimation Paramétrique*, EDP Sciences, 2002, à paraître.

Articles et chapitres de livre

[10] A. de La Fortelle, G. Fayolle, « Large Deviation Principle for a Markov Chains in Discrete Time », *Problems of Information Transmission*, 2002, à paraître, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-3791.html`.

[11] A. de La Fortelle, « Large Deviation Principle for Markov Chains in Continuous Time », *Problems of Information Transmission 36*, 2, 2001, p. 120–140.

[12] F. Delcoigne, A. de La Fortelle, « Large Deviations Rate Function for Polling Systems », *Queueing Syst. Theory Appl.*, 2002, à paraître.

[13] F. Karpelevich, V. Malyshev, A. Petrov, S. Pirogov, A. Rybko, « Random Context Free Evolution », *in : Analytic and Probabilistic Methods in Complex Networks*, Amer. Math. Soc., 2001, à paraître.

[14] M. Krikun, V. Malyshev, « Asymptotic Number of Maps on Compact Orientable Surfaces », *Discrete Mathematics and Applications 13*, 2, 2001, p. 89–98.

[15] V. Malyshev, A. Zamyatin, A. Yambartsev, « Two-Dimensional Lorentzian Models », *Moscow Mathematical Journal 1*, 3, 2001.

[16] V. A. Malyshev, « Combinatorics and probability of maps », *in : Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics*, Kluwer, 2002, à paraître.

[17] V. Malyshev, « Gibbs and Quantum Discrete Spaces », *Russian Mathematical Reviews 56*, 5, 2001.

[18] V. Malyshev, « Dynamical Triangulation Models with Matter : High Temperature Region », *Commun. in Math. Physics*, 2002, à paraître.

[19] V. Malyshev, « Quantum Evolution of Words », *Theoretical and Computer Science*, 2002, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[20] G. Fayolle, A. de La Fortelle, J.-M. Lasgouttes, L. Massoulié, J. Roberts, « Best-effort networks : modeling and performance analysis via large networks asymptotics », *in : Proceedings of IEEE INFOCOM 2001*, p. 709–716, 2001.

Rapports de recherche et publications internes

[21] F. Delcoigne, A. de La Fortelle, « Large Deviations Problems for Star Networks : the Min Policy. Part I : Finite Time », *rapport de recherche n°4143*, INRIA, 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4143`.

[22] G. Fayolle, M. Krikun, « Growth Rate and Ergodicity Conditions for a Class of Random Trees », *rapport de recherche n°4331*, NRIA, décembre 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4331`.

[23] G. Fayolle, J.-M. Lasgouttes, « Partage de bande passante dans un réseau : approches probabilistes », *Rapport de Recherche n°4202*, INRIA, 2001, 70 pages, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4202`.

[24] C. Fricker, P. Robert, D. Tibi, « On the Fluid Limits of some Loss Networks », *rapport de recherche n°4171*, INRIA, avril 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4171`.

Divers

[25] G. Fayolle, J. M. Lasgouttes, « Performance de mécanismes de partage de charge en réseau », Rapport, Mars 2001, Contrat France Télécom R&D 981B016, Lot 6.

[26] G. Fayolle, « Special Functions and Asymptotic Number of Maps on Compact Surfaces », juin 2001.

[27] C. Fricker, P. Robert, D. Tibi, « A central limit theorem for the multi-class Erlang's model », Preprint, 2001, soumis à *Annals of App. Prob.*