

Projet MIAOU

*Mathématiques et Informatique de l'Automatique et de
l'Optimisation pour l'Utilisateur*

Sophia Antipolis

THÈME 4A



*R*apport
*d'**A*ctivité

2001

Table des matières

1	Composition de l'équipe	3
2	Présentation et objectifs généraux	3
3	Fondements scientifiques	4
3.1	Identification et déconvolution	4
3.1.1	Approximation méromorphe à partir de conditions au bord incomplètes	7
3.1.2	Approximation rationnelle scalaire	10
3.1.3	Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et problèmes inverses pour le Laplacien 2D	12
3.1.4	Approximation rationnelle matricielle	15
3.1.5	Identification paramétrique linéaire	16
3.2	Structure et commande des systèmes non-linéaires	18
3.2.1	Stabilisation continue	18
3.2.2	Transformations et équivalences des systèmes et modèles non-linéaires .	20
3.2.3	Structure de l'espace des trajectoires	22
3.3	Jeux dynamiques	23
4	Domaines d'applications	23
4.1	Problèmes inverses géométriques et identification de paramètres pour le Laplacien 2D	23
4.2	Identification et synthèse de systèmes résonnants	25
4.2.1	Synthèse de filtre à ondes de surface pour la téléphonie mobile	25
4.2.2	Identification de filtres hyperfréquences	27
4.3	Contrôle de satellites, faibles poussées	31
4.4	Optique non-linéaire	31
4.5	Transformations et équivalence des systèmes non-linéaires	32
4.6	Jeux Dynamiques	32
5	Logiciels	32
5.1	Le logiciel hyperion	32
5.2	Le logiciel RARL2	33
5.3	Le logiciel RGC (Réalisation interne à géométrie contrainte)	34
6	Résultats nouveaux	34
6.1	Participation à la création du rapport d'activité	34
6.2	Problèmes extrémaux avec contrainte sur la partie imaginaire	35
6.3	Problèmes extrémaux avec contraintes de gabarit ponctuelles	35
6.4	Estimations asymptotiques pour l'interpolation et l'approximation dans H^2 . .	35
6.5	Approximation rationnelle et méromorphe	36
6.6	Paramètres de Schur et réalisations équilibrées.	38
6.7	Nouveaux développements du logiciel hyperion	38
6.8	Synthèse de multiplexeurs	39

6.9	Identification de coefficients de couplage dans des filtres hyperfréquence	40
6.10	Comportement asymptotique de pôles	41
6.11	Fonctions de Lyapunov contrôlées	43
6.12	Linéarisation topologique	43
6.13	Équivalence topologique	44
6.14	Approximation des équilibres de Nash pour les Jeux dynamiques	44
6.15	Application de la théorie des jeux dans les réseaux	44
7	Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)	45
7.1	Contrat CNES-IRCOM-INRIA	45
7.2	Contrat Alcatel Space Industries (Toulouse)	45
7.3	Contrat France Telecom R&D-INRIA	45
7.4	Contrat Alcatel Space Industries (Cannes)	46
7.5	Convention AQUAE	46
8	Actions régionales, nationales et internationales	46
8.1	Comités Scientifiques	46
8.2	Actions financées par la commission européenne	46
8.3	Relations bilatérales internationales	46
8.4	Visites de chercheurs étrangers	47
9	Diffusion de résultats	47
9.1	Enseignement universitaire	47
9.2	Animation de la communauté scientifique	48
9.3	Participation à des colloques, séminaires, invitations	48
10	Bibliographie	49

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique

Laurent Baratchart [DR INRIA]

Assistante de projet

France Limouzis [TR INRIA, à temps partiel dans le projet]

Personnel INRIA

José Grimm [CR INRIA]

Juliette Leblond [CR INRIA]

Martine Olivi [CR INRIA]

Jean-Baptiste Pomet [CR INRIA]

Odile Pourtallier [CR INRIA, à mi-temps dans le projet]

Fabien Seyfert [CR INRIA]

Franck Wielonsky [IR, détaché à l'USTL à partir d'octobre]

Chercheurs doctorants

David Avanesoff [Bourse INRIA, à partir d'octobre]

Stéphane Crepey [janvier seulement]

Andreï Ivanov [Bourse INRIA, à partir d'octobre]

Reinhold Küstner [Bourse TMR]

Ludovic Faubourg [Bourse MESR]

Imen Fellah [co-tutelle ENIT Tunis, à partir de novembre]

Frédéric Mandréa [janvier seulement]

Conseillers scientifiques

Pierre Bernhard [université de Nice-Sophia Antipolis]

Andrea Gombani [LADSEB-CNR, Padoue, Italie]

Jonathan Partington [Université de Leeds, GB]

Edward Saff [université Vanderbilt, **Nashville** (USA)]

Chercheur invité

Tryphon Georgiou [Univ. of Minnesota, un mois en mai-juin]

Stagiaires

David Avanesoff [DEA, Univ. de Lille et École Centrale de Lille, avril à septembre]

Marc Breton [DEA, Univ. de Lille et École Centrale de Lille, avril à septembre]

Fehmi Ben Hassen [Étudiant en thèse, ENIT Tunis, 4 mois à partir d'avril]

Ali El Moussawi [École de Mines de Paris, trois mois entre janvier et mai]

Moez Kallel [Étudiant en thèse, ENIT Tunis, juin, juillet, décembre]

Sasha Quanz [université d'Heidelberg (Allemagne), Septembre]

2 Présentation et objectifs généraux

Le projet développe des méthodes effectives en modélisation, identification et contrôle de systèmes, ainsi que pour la résolution de jeux dynamiques.

Axes de recherche

- Approximation méromorphe et rationnelle dans le domaine complexe, application à l'identification des fonctions et des matrices de transfert et aux problèmes inverses en diffusion. Développement du logiciel hyperion dédié à l'identification et la synthèse fréquentielles de filtres.
- Étude et commande des systèmes non-linéaires : stabilisation continue, transformations de systèmes non-linéaires (linéarisation, classification).
- Jeux dynamiques multi-agents et schémas numériques pour la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Relations internationales et industrielles

- Collaboration avec Alcatel-Space, Alcatel-R&I le CNES, l'IRCOM, Thomson-MX, France-Télécom.
- Échanges avec le CWI (Amsterdam, Pays-Bas), le CNR (Padoue, Italie), les universités Vanderbilt à Nashville, du Minnesota à Minneapolis, d'Illinois à Urbana-Champaign, de South Florida à Tampa de Californie à San Diego, d'Alabama à Mobile (USA), de Padoue (Italie), de Beer Sheva (Israël), de Leeds (GB), de Maastricht et Amsterdam (Hollande), la TU-Wien (Autriche), la TFH-Berlin (Allemagne), de Kingston (Canada), de Szeged (Hongrie), la VUB (Belgique), la Colorado School of Mines (USA), l'ENIT (Tunisie), le CINVESTAV (Mexique),
- Le projet participe au groupe de travail ERCIM « Control and Systems Theory », aux réseaux européens TMR-ERNSI et TMR-NCN, à des coopérations bilatérales (Alliance avec la GB, CMCU avec la Tunisie), ainsi qu'à une convention NSF-INRIA.

3 Fondements scientifiques

3.1 Identification et déconvolution

Nous débuterons par quelques remarques générales. Abstraire, sous forme d'équations mathématiques, le comportement d'un phénomène que l'on veut étudier est l'étape dite de *modélisation*. La modélisation a typiquement deux objets : le premier est de décrire le phénomène dans sa complexité minimale compte tenu du but poursuivi, et le second est de se doter d'un outil pour en *prédire* les effets. Ceci est couramment pratiqué dans la plupart des sciences appliquées à des fins de conception, de contrôle ou de prédiction, quoique rarement perçu autrement que comme un problème d'optimisation subordonné à chaque cas particulier.

En règle générale, l'utilisateur impose à son modèle une forme paramétrée qui reflète tout à la fois ses habitudes de pensée, sa connaissance physique du phénomène, l'effort algorithmique qu'il est prêt à consentir et le caractère utilisable du modèle *in fine*. La recherche de ce compromis amène usuellement à poser le problème d'approcher les observations expérimentales par celles qu'on tirerait du modèle sous l'effet d'excitations censées représenter les causes du phénomène. La capacité à résoudre ce problème d'approximation, souvent non-trivial et parfois mal posé, conditionne pour une large part la pratique d'une méthode donnée.

C'est lorsqu'on veut évaluer la puissance prédictive d'un modèle que l'on est amené à *postuler* l'existence d'une *vraie* correspondance fonctionnelle entre les données et les observations, et que l'on entre dans le domaine de l'*identification*. La puissance prédictive du modèle peut s'y exprimer de diverses manières qui toutes, cependant, cherchent à mesurer la différence entre le « vrai » modèle et les observations. La nécessité de prendre en compte les différences patentes entre le comportement observé et le comportement calculé induit alors naturellement la notion de *bruit* comme agent dégradant du processus d'identification. Ce bruit, qui s'incorpore au modèle, peut être traité sur un mode déterministe où la qualité d'un algorithme d'identification est son insensibilité à des petites erreurs. Cette notion est celle de problème bien posé en analyse numérique, ou de stabilité du mouvement en mécanique. Le bruit, cependant, est souvent considéré comme aléatoire, et l'on compte alors sur le moyennage pour estimer le « vrai » modèle. Cette notion permet au premier chef de donner des descriptions approchées, mais simples, de systèmes complexes dont les causes sont mal connues mais plausiblement antagonistes. Notons, dans les deux cas, que des *hypothèses* sur le bruit sont nécessaires pour justifier l'approche adoptée (il doit être petit dans le cas déterministe et satisfaire des hypothèses d'indépendance ou d'ergodicité dans le cas stochastique). Ces hypothèses sont rarement validées autrement qu'à l'usage.

Avec le déplacement du problème depuis le compte-rendu d'une série d'expériences jusqu'à l'estimation d'un hypothétique modèle exact, la problématique de l'identification s'enrichit aussi de la possibilité de choisir les données de façon commode pour explorer la structure du phénomène. Ceci interagit souvent de manière complexe avec le caractère *local* du modèle par rapport aux données (par exemple, un modèle linéaire n'est souvent valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement).

Venons-en à l'activité en identification du projet proprement dit. Alors que le sujet est dominé depuis vingt ans, au plan académique, par le paradigme de la statistique paramétrique, c'est cependant dans une approche déterministe de l'identification des systèmes dynamiques linéaires (c'est-à-dire des processus de convolution), fondée sur l'approximation dans le domaine complexe, que le projet situe sa contribution la plus originale au domaine. Naturellement, les liens profonds que tisse le théorème spectral entre les représentations temporelles et fréquentielles induisent des parallèles bien connus entre la théorie des fonctions et celle des probabilités, et le travail de MIAOU connaît par ce biais quelques retombées dans la théorie stochastique classique. Toutefois, c'est en traduisant le problème de l'identification en un problème de reconstruction d'une fonction analytique dans un domaine plan à partir de données à la frontière que l'on aborde ici la question. Dans le cas de processus de convolution de dimension un —*i.e.* d'équations différentielles ordinaires possiblement en dimension infinie— cette traduction s'obtient de manière naturelle par le biais de la transformée de Fourier. Pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques en dimension deux, c'est la forme de la solution fondamentale qui introduit l'holomorphie ; ceci est notamment le cas du Laplacien qui fait apparaître les solutions comme des potentiels logarithmiques. Notons que l'équation de Beltrami, naturellement associée aux applications quasi-conformes, constitue une extension naturelle de ce contexte pour laquelle peu de choses existent aujourd'hui.

On considérera les données sans postuler un modèle exact mais en recherchant une approximation convenable dans un domaine de fonctionnement. Un exemple prototypique sur lequel nous illustrerons notre approche est l'identification harmonique des systèmes dynamiques, cou-

ramment rencontrée en ingénierie, où les données sont les réponses du système à des excitations périodiques dans sa bande passante de fréquences. On cherche un modèle linéaire et stable qui décrive correctement le fonctionnement dans cette bande passante, bien que ce modèle puisse être infidèle aux hautes fréquences, qu'on ne peut d'ailleurs guère mesurer. On souhaite aussi, fréquemment, que ce modèle soit rationnel et de degré convenable, soit parce que ce degré est déterminé par la signification physique des paramètres, soit parce qu'il doit rester raisonnablement faible afin de pouvoir utiliser efficacement le modèle pour le contrôle, l'estimation, ou la simulation. D'autres contraintes structurelles, dictées par la physique du phénomène, viennent fréquemment se greffer sur le modèle. Notons qu'aucune statistique n'est utilisée ici sur les erreurs, qui peuvent provenir tant des défauts de mesure que du caractère erroné de l'hypothèse de linéarité.

Nous distinguerons une étape d'identification¹ qui fournit un modèle de dimension infinie — numériquement de dimension grande — et une étape d'approximation destinée à réduire l'ordre et contraindre le modèle à exhiber certaines propriétés spécifiques de la situation considérée. La première étape consiste typiquement, en termes mathématiques, à reconstruire une fonction analytique dans le demi-plan droit connaissant ses valeurs ponctuelles sur une portion de l'axe imaginaire, en d'autres termes à rendre effectif le principe du prolongement analytique sur le bord du domaine d'analyticité. C'est un problème classique et mal posé que nous plongerons dans une famille de problèmes extrémaux bien posés. La deuxième étape est généralement une approximation rationnelle ou méromorphe dans un espace de fonctions analytiques sur un ouvert simplement connexe, par exemple pour fixer les idées le demi-plan droit. Que l'on veuille tirer le meilleur parti de l'ordre maximal imparti, ou que l'on cherche à identifier les paramètres physiques du système considéré, il est généralement important lors de cette deuxième étape de calculer des approximants optimaux ou sous-optimaux en un certain sens. L'approximation rationnelle dans le domaine complexe est un sujet classique et ardu. En relation avec l'automatique, deux éléments de difficulté supplémentaires s'y greffent, à savoir la nécessité de contrôler les pôles des approximants (qui reflètent la stabilité du système) et celle de traiter du cas matriciel (pour le cas fréquent où le système a plusieurs entrées et sorties).

L'approximation au sens L^p de la fonction de transfert prend dans ce contexte une signification particulière pour $p = 2$ et $p = \infty$. Si $p = 2$, elle correspond à une identification paramétrique au minimum de variance lorsque l'entrée est un bruit blanc (dans le cas d'un bruit coloré il faut pondérer le critère par sa densité spectrale), ou encore à la minimisation de l'erreur en norme d'opérateur $L^2 \rightarrow L^\infty$ dans le domaine temporel. Si $p = \infty$, cette approximation correspond à la minimisation de l'erreur au plan de la transmission d'énergie $L^2 \rightarrow L^2$ (à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel par le caractère isométrique de la transformée de Fourier). Ces problèmes relèvent d'une généralisation à la fois rationnelle et matricielle de la théorie de Szegő qui, bien que n'ayant apparemment guère attiré l'attention jusqu'ici, semble le cadre le plus naturel dans lequel poser la plupart des problèmes d'optimisation liés à l'identification.

Nous détaillons plus précisément les deux étapes précédentes dans les sous-paragraphes qui suivent. Pour des raisons de commodité, nous abordons souvent les questions précédentes non sur l'axe imaginaire mais, ce qui est équivalent, sur le cercle unité où elles correspondent à des

¹Elle serait qualifiée de non-paramétrique dans certaines terminologies.

considérations analogues pour les systèmes à temps discret.

3.1.1 Approximation méromorphe à partir de conditions au bord incomplètes

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm, Juliette Leblond, Jonathan Partington.

Mots clés : approximation méromorphe, identification fréquentielle, problème extrémal.

Ce libellé se rapporte à l'élaboration d'un modèle de convolution de dimension infinie à partir de données fréquentielles dans une bande passante Ω et d'un gabarit de référence à l'extérieur de Ω . La classe de modèles considérée est constituée de modèles, soit stables, soit présentant des instabilités de dimension finie (opérateurs de convolution par des fonctions dont la transformée de Laplace est une fonction de transfert méromorphe ayant dans le demi-plan droit un nombre fini de pôles). Cette problématique surgit lorsque l'on envisage des problèmes de conception et d'identification de systèmes dynamiques linéaires, ou encore des problèmes inverses pour le Laplacien en dimension 2.

Les questions étudiées pouvant survenir sur le bord de domaines plans de nature variée, on convient de normaliser ce bord une fois pour toute et de procéder dans chaque cas particulier à une transformation conforme pour se ramener à la situation normalisée. Le contour normalisé choisi est ici le cercle unité. On note D le disque unité, H^p l'espace de Hardy d'exposant p , R_N l'ensemble des fonctions rationnelles possédant au plus N pôles dans D , et $C(X)$ les fonctions continues sur X . On cherche une fonction de $H^p + R_N$, prenant sur un arc K du cercle unité des valeurs proches des données expérimentales et satisfaisant sur $T \setminus K$ à des exigences de gabarit, de sorte que la question peut s'énoncer ainsi :

(*P*) Soient $p \geq 1$, $N \geq 0$, K un arc du cercle unité T , $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ et $M > 0$; on cherche une fonction $g \in H^p + R_N$ telle que $\|g - \psi\|_{L^p(T \setminus K)} \leq M$ et telle que $g - f$ soit de norme minimale dans $L^p(K)$ sous cette contrainte.

Pour imposer des contraintes ponctuelles en fréquence (par exemple si les modèles considérés sont des fonctions de transfert de systèmes conservatifs cf. section 4.2.2), on peut souhaiter exprimer la contrainte de gabarit sur $T \setminus K$ de manière plus nuancée, dépendant de la fréquence :

(*P'*) Soient $p \geq 1$, $N \geq 0$, K un arc du cercle unité T , $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ et $M \in L^p(T \setminus K)$; on cherche une fonction $g \in H^p + R_N$ telle que $|g - \psi| \leq M$ p.p. sur $T \setminus K$ et telle que $g - f$ soit de norme minimale dans $L^p(K)$ sous cette contrainte.

Le problème *P* est une extension au cas méromorphe, et en données partielles, de problèmes extrémaux classiques relatifs à l'approximation analytique (obtenus en posant $K = T$ et $N = 0$) que l'on désigne génériquement sous le nom de *problèmes extrémaux bornés*. Ceux-ci ont été introduits et étudiés intensivement ces dernières années dans le projet, en distinguant le cas $p = \infty$ [4] des cas $1 \leq p < \infty$, parmi lesquels le cas $p = 2$ présente un lien inattendu avec les formules de reconstruction de Carleman [5].

Très relié au problème (*P*), et significatif pour décider de la validité de l'approximation linéaire dans la bande passante considérée, est également le problème de complétion suivant :

(*P''*) Soient $p \geq 1$, $N \geq 0$, K un arc du cercle unité T , $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ et $M > 0$; on cherche une fonction $h \in L^p(T \setminus K)$ telle que $\|h - \psi\|_{L^p(T \setminus K)} \leq M$ cependant que la distance à $H^p + R_N$ de la fonction concaténée $f \vee h$ soit minimale dans $L^p(T)$ sous cette contrainte.

Une version de ce problème où la contrainte dépend de la fréquence est :

(P'') Soient $p \geq 1$, $N \geq 0$, K un arc du cercle unité T , $f \in L^p(K)$, $\psi \in L^p(T \setminus K)$ et $M \in L^p(T \setminus K)$; on cherche une fonction $h \in L^p(T \setminus K)$ telle que $|h - \psi| \leq M$ p.p. sur $T \setminus K$, cependant que la distance à $H^p + R_N$ de la fonction concaténée $f \vee h$ soit minimale dans $L^p(T)$ sous cette contrainte.

Soulignons que (P) a de nombreux autres homologues, également intéressants. L'un d'eux, notamment, concerne le cas où la contrainte porte sur la partie imaginaire de l'approximant, une situation qui intervient dans divers problèmes aux limites en liaison avec les fonctions conjuguées, voir section 6.2.

Mentionnons que le problème (P'') se ramène au problème (P) qui revient lui-même, implicitement, à un problème extrémal sans contrainte (*i.e.* un problème de type (P) où $K = T$), que l'on désignera conventionnellement par (P_0). Lorsque $p = \infty$ les problèmes (P') et (P'') peuvent se reformuler comme des cas particuliers de (P) et (P'') respectivement, mais si $p < \infty$ ils procèdent différemment et commencent seulement à être étudiés au sein du projet, *cf.* section 6.3. Il faut également souligner le fait, peut-être contre-intuitif, que ces problèmes n'admettent généralement pas de solution si on néglige la contrainte, c'est-à-dire si l'on pose formellement $M = +\infty$. Par exemple, si l'on considère le problème (P''), une fonction donnée par sa trace sur un sous-ensemble K de mesure positive du cercle unité peut toujours être complétée de manière à être arbitrairement proche, sur K , d'une fonction analytique dans le disque; cependant, celle-ci tend vers l'infini en module sur $T \setminus K$ lorsque l'erreur d'approximation décroît vers zéro, sauf dans le cas idéal où la fonction initiale était *exactement* la trace sur K d'une fonction analytique. Ce phénomène illustre le caractère mal posé du prolongement analytique sur le bord du domaine d'analyticité.

La résolution de (P_0) est classique si $p = \infty$ (c'est la théorie d'Adamjan-Arov-Krein, en abrégé AAK) ou si $p = 2$ et $N = 0$ (c'est trivialement une projection orthogonale). La théorie AAK et certaines de ses extensions jouent également un grand rôle pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (P'') quand $p = \infty$, sous l'hypothèse que la fonction concaténée $f \vee \psi$ appartient à $H^\infty + C(T)$ et pour calculer cette solution en résolvant itérativement un problème spectral relatif à une famille d'opérateurs de Hankel dont les symboles dépendent de paramètres implicites en les données, qui sont eux-mêmes ajustés itérativement. La convergence robuste de cet algorithme dans les classes de Hölder-Zygmund séparables a été établie [BLP00].

Dans le cas hilbertien $p = 2$, et pour $N = 0$, la solution du problème (P) s'obtient en résolvant une équation spectrale, cette fois pour un opérateur de Toeplitz, dépendant linéairement d'un paramètre λ qui joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange et rend implicite la dépendance en M de la solution. Le caractère mal posé du prolongement analytique décrit plus haut se manifeste en ceci que, lorsque les données ne sont pas exactement analytiques, l'erreur d'approximation sur K tend vers 0 si, et seulement si, la contrainte M sur $T \setminus K$ tend vers l'infini [5]. On peut quantifier ce phénomène dans des classes de fonctions f Sobolev-régulières ou méromorphes, et obtenir des estimées asymptotiques exactes des comportements respectifs de M et de l'erreur, en utilisant un procédé constructif de diagonalisation des opérateurs de

[BLP00] L. BARATCHART, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON, « Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions », *Constructive Approximation* 16, 2000, p. 333-357.

Toeplitz, dû à Rosenblum et Rovnyak qui rend effectif le théorème spectral [BGLPre]. Ceci est particulièrement intéressant pour discriminer entre les données proches d'être analytiques et celles qui ne le sont pas, ou au contraire pour essayer d'interpréter le plus analytiquement possible des valeurs ponctuelles données.

Dans le cas non hilbertien où $p \neq 2, \infty$, et toujours pour $N = 0$, la solution de (P) se ramène à celle de (P_0) de manière très analogue au cas $p = 2$ et, quoique la situation soit un peu plus délicate en ce qui concerne la dualité, elle reste convexe (de dimension infinie bien sûr), et donc se prête peu ou prou aux méthodes locales de l'optimisation.

Si $p < \infty$ et $N > 0$, il n'existe toujours pas de solution algorithmique au problème (P_0) dont la convergence ait été démontrée. Cependant, des avancées assez importantes permettent aujourd'hui de dessiner un panorama cohérent de la situation et de développer des schémas de résolution plutôt efficaces dont on a prouvé la convergence dans des cas particuliers prototypiques au plan de la théorie des fonctions. Nous en résumerons ici les aspects essentiels.

Dans le cas où $p = 2$ et $N > 0$, qui est d'importance particulière, mentionnons tout d'abord que la question (P_0) se ramène à celle de l'approximation rationnelle décrite plus en détail en 3.1.2, pour laquelle les liens avec la théorie classique de l'interpolation, des polynômes orthogonaux, et du potentiel logarithmique sont étroits et féconds. En second lieu, une théorie AAK générale dans L^p a été proposée qui est relativement complète pour $p \geq 2$ [Sey98]. Bien que ne possédant pas, pour $p \neq \infty$, la puissance calculatoire de la théorie classique, elle possède de meilleures propriétés de continuité et tisse un lien continu entre l'approximation rationnelle dans H^2 (cf. 3.1.2) et l'approximation méromorphe en norme uniforme, ce qui autorise l'usage, dans chacun des contextes, de techniques éprouvées dans l'autre. Ainsi, de façon similaire au cas $p = \infty$, il s'avère que la meilleure approximation méromorphe ayant au plus n pôles dans le disque d'une fonction $f \in L^p(T)$ s'obtient à partir des vecteurs singuliers de l'opérateur de Hankel de symbole f entre les espaces H^s et H^2 avec $1/s + 1/p = 1/2$, l'erreur étant là encore égale au $(n+1)$ -ième nombre singulier de l'opérateur. Cette généralisation a un caractère topologique marqué et repose sur la théorie des points critiques de Ljusternik-Schnirelman ainsi que sur la géométrie particulière des produits de Blaschke de degré donné. Parmi les aspects communs à cette famille de problèmes, le plus profond, issu de la différentiation, est sans doute le suivant : les équations aux points critiques expriment l'orthogonalité non hermitienne du dénominateur (*i.e.* du polynôme dont les zéros sont les pôles de l'approximant) vis-à-vis des polynômes de degré inférieur, et ce pour une mesure complexe qui dépend, bien entendu, de ce dénominateur puisque le problème est non-linéaire. Ceci permet par exemple d'étendre au cas $2 \leq p \leq \infty$ le théorème de l'indice [Bar98], d'analyser asymptotiquement les erreurs ou encore de caractériser le comportement asymptotique des pôles des approximants de certaines fonctions

-
- [BGLPre] L. BARATCHART, J. GRIMM, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON, « Approximation and interpolation in H^2 : Toeplitz operators, recovery problems and error bounds », *Integral Equations and Operator Theory*, à paraître.
- [Sey98] F. SEYFERT, *Problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy, Application à l'identification de filtres hyperfréquences à cavités couplées*, thèse de doctorat, Ecole de Mines de Paris, 1998.
- [Bar98] L. BARATCHART, « Rational and meromorphic approximation in L^p of the circle: System-theoretic motivations, critical points and error rates », *in: Computational Methods in Function Theory (CMFT'97)*, N. Papamichael, S. Ruscheweyh, E. Saff (éditeurs), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., p. 1-34, 1998.

d'intérêt particulier (*cf.* section 3.1.3).

Le cas $1 \leq p < 2$ reste quant à lui plus largement ouvert encore, notamment du point de vue constructif, car si l'erreur d'approximation peut encore s'interpréter en termes de valeurs singulières, l'opérateur de Hankel prend alors une forme abstraite qui ne permet plus d'identifier isométriquement les vecteurs singuliers comme des fonctions.

3.1.2 Approximation rationnelle scalaire

Participants : Laurent Baratchart, Reinhold Küstner, Juliette Leblond, Martine Olivi, Edward Saff, Herbert Stahl, Franck Wielonsky.

Mots clés : approximation rationnelle, point critique, polynômes orthogonaux.

L'approximation rationnelle est la deuxième des étapes mentionnées en 3.1, et nous l'aborderons tout d'abord dans le cas scalaire, c'est-à-dire pour des fonctions à valeurs complexes (par opposition à matricielles). Dans ce cas le problème s'énonce ainsi :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in H^p$ et n un entier ; on cherche une fonction rationnelle sans pôles dans le disque unité et de degré au plus n qui soit le plus proche possible de f dans H^p .

Les valeurs les plus importantes de p sont, comme nous l'avons indiqué en introduction, $p = \infty$ et $p = 2$, et dans ce dernier cas l'orthogonalité entre les espaces de Hardy du disque et du complémentaire du disque (ce dernier étant normalisé par une annulation à l'infini de sorte qu'il exclut les constantes) fait que l'approximation rationnelle est équivalente à l'approximation méromorphe, *i.e.* on retrouve le problème (P) de la section 3.1.1 avec $p = 2$ et $K = T$. S'il n'existe pas, à l'heure actuelle, d'algorithme démontrablement convergent pour quelque valeur de p que ce soit, le projet est concepteur d'un algorithme de descente dans le cas $p = 2$ dont la convergence vers un *minimum local* est garantie et qui est le premier à jouir de cette propriété. Il s'agit en substance d'un algorithme de suivi de gradient, qui procède récursivement par rapport à l'ordre n de l'approximant et utilise la géométrie particulière du problème pour se ramener à optimiser sur un domaine compact [1]. Cet algorithme permet d'engendrer plusieurs *minima* locaux lorsqu'il y en a, ce qui permet de faire des comparaisons. S'il n'y a pas de *maxima* locaux, cette dernière propriété étant toujours satisfaite pour des degrés d'approximation assez grands, on sait par ailleurs que tout *minimum local* peut être atteint à partir d'un point initial de degré inférieur. Il n'est pas démontré, cependant, que l'on obtienne toujours le *minimum absolu* en adoptant la stratégie du logiciel hyperion (*cf.* section 5.1) qui consiste à choisir la collection de points initiaux correspondant aux points critiques de degré inférieur, bien que nous ne connaissions pas non plus de contre-exemple, toujours en l'absence de *maximum*.

Il est juste de dire que la mise au point d'un algorithme numériquement efficace dont la convergence vers les meilleurs approximants soit établie est le problème le plus important en pratique. L'algorithme développé au sein du projet est semble-t-il assez performant, et paraît avoir toujours permis de trouver les meilleurs approximants, mais sa convergence globale n'est toujours pas établie ce qui constitue aujourd'hui un objectif de recherche à la fois majeur et latent. *A contrario*, on peut envisager un algorithme d'élimination lorsque la fonction à approximer est rationnelle, pour trouver tous les points critiques puisque le problème est algébrique dans ce cas. Cette méthode est évidemment convergente puisqu'exhaustive, mais il faut calculer les racines d'un système algébrique à n variables de degré N , où N est le degré

de la fonction que l'on approxime, et il peut y avoir N^n solutions parmi lesquelles il est nécessaire de distinguer celles qui sont les coefficients d'un polynôme ayant tous ses zéros dans le disque unité, les seules qui engendrent des points critiques. Ceci semble hors de portée à l'heure actuelle, sachant que les cas typiques d'identification de données réelles abordés dans le projet (cf. section 4.2.2) concernent des valeurs de n de l'ordre de la dizaine et des valeurs de N de l'ordre de plusieurs centaines.

Afin de prouver ou d'infirmer la convergence des algorithmes qu'il utilise, le projet poursuit une étude systématique du nombre et de la nature des points critiques, qui conjugue des outils de topologie différentielle et de théorie des fonctions. Nous nous sommes concentrés tout d'abord sur des situations particulières se prêtant au calcul. Le cas des transferts dits de relaxation (en d'autres termes des fonctions de Markov), a été essentiellement élucidé (cf. [8] et section 6.5), ainsi que celui de e^z (prototype de la fonction entière à coefficients de Taylor convexes) ou celui de fonctions méromorphes (à la Montessus de Ballore) [7]. Un principe général s'est ainsi dégagé qui relie la nature des points critiques en approximation rationnelle à la régularité de la décroissance des erreurs en interpolation, et une méthodologie pour analyser l'unicité dans le cas où la fonction à approximer est une intégrale de Cauchy sur un arc ouvert (ces fonctions couvrent *grosso modo* le cas de singularités de dimension 1 qui sont « assez régulières » et apparaissent notamment en section 3.1.3) a émergé. Cette méthodologie repose sur la localisation des singularités *via* l'analyse de familles de polynômes orthogonaux non hermitiens, puis sur l'obtention d'estimations fortes de l'erreur permettant d'analyser sa décroissance relative. Notons dans ce contexte un analogue de la conjecture de Gonchar, qui serait que l'unicité a lieu pour une infinité de degrés d'approximation au moins. Un critère d'unicité de ce type a aussi été obtenu^[BS02] pour les fonctions rationnelles en s'inspirant de techniques spectrales de la théorie AAK. Ce résultat est particulièrement intéressant parce qu'il n'est pas asymptotique et ne requiert pas d'estimées ponctuelles de l'erreur ; il requiert en revanche une décroissance drastique des erreurs dans sa formulation actuelle, qui demande à être approfondie.

L'introduction d'une pondération en fréquence constitue un autre développement intéressant, autant pour la nécessité qu'il y a de relativiser les données expérimentales selon que l'on dispose ou non de beaucoup d'information à la fréquence considérée (dans la théorie stochastique, par exemple, l'identification au minimum de variance exige de diviser l'erreur par la densité spectrale du bruit), que pour les améliorations algorithmiques que l'on peut en espérer. À ce sujet, il est intéressant de noter que la démarche la plus répandue pour l'identification fréquentielle, dans la pratique de l'ingénieur, consiste à poser une minimisation aux moindres carrés et à en pondérer les termes pour essayer d'obtenir un résultat convenable par des méthodes générales d'optimisation. On est ainsi conduit à minimiser un critère du type :

$$\left\| f - \frac{p_m}{q_n} \right\|_{L^2(d\mu)} \quad (1)$$

[BS02] L. BARATCHART, F. SEYFERT, « An L^p analog to AAK theory », à paraître dans Journal of Functional Analysis, 2002.

où, par définition, on a posé :

$$\|g\|_{L^2(d\mu)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta),$$

et où μ est une mesure positive finie sur T , p_m est un polynôme de degré inférieur ou égal à m et q_n un polynôme unitaire de degré inférieur ou égal à n . Un tel problème est en particulier bien posé lorsque μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de dérivée inversible dans L^∞ . Lorsque μ est le carré du module d'une fonction analytique inversible, l'introduction de polynômes μ -orthogonaux rend la situation assez similaire au cas non pondéré, du moins si $m \geq n - 1$. Plus particulièrement, si μ est l'inverse du carré du module d'un polynôme, un algorithme de calcul généralisant [1] a été obtenu dans [10] et implémenté dans le logiciel hyperion (voir section 5.1). L'analyse des équations aux points critiques dans le cas pondéré fournit de nouveaux contre-exemples à l'unimodalité du maximum de vraisemblance en identification stochastique [22].

Mentionnons aussi une autre espèce d'approximation rationnelle, qui intervient naturellement dans de nombreux problèmes de conception où l'on ne dispose que de contraintes de gabarit en module. Elle consiste à approcher le module d'une fonction f par le module d'une fraction rationnelle, c'est-à-dire à résoudre :

$$\min \left\| |f| - \left| \frac{p_n}{q_n} \right| \right\|_{L^p(T)}.$$

Ce problème a des liens étroits avec l'approximation rationnelle classique, qui commencent seulement à être dégagés. Notons au passage que si l'on se cantonne à $p = \infty$ et si l'on remplace les modules par leur carré dans le problème précédent, de sorte que l'on cherche la faisabilité de

$$\left\| |f|^2 - \left| \frac{p_n}{q_n} \right|^2 \right\|_{L^\infty(T)} < \varepsilon,$$

on obtient par la caractérisation de Féjér-Riesz (qui met en correspondance les polynômes trigonométriques positifs sur le cercle unité avec les carrés des modules de polynômes algébriques), et après avoir chassé le dénominateur, un problème convexe quoiqu'en dimension infinie. Ceci constitue une autre direction fondamentale pour aborder certaines questions d'approximation rationnelle en module qui interviennent naturellement dans divers problèmes de conception de filtres.

3.1.3 Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et problèmes inverses pour le Laplacien 2D

Participants : Laurent Baratchart, Frédéric Mandréa, Edward Saff, Herbert Stahl, Reinhold Küstner, Vilmos Totik [univ. Szeged et Acad. des Sciences, Hongrie], Franck Wielonsky.

Mots clés : détection de défauts d'analyticité, problèmes inverses à frontière libre, approximation méromorphe, approximation rationnelle, zéros de polynômes orthogonaux..

Il s'agit, en substance, d'étudier ici le comportement des pôles des approximants méro-

morphes, optimaux au sens d'une norme L^p sur un contour fermé, de fonctions définies par des intégrales de Cauchy de mesures dont le support gît à l'intérieur du contour. Si l'on prend comme contour le cercle unité, ce qui n'est pas vraiment restrictif en théorie grâce aux applications conformes mais soulève bien sûr des questions au plan constructif lorsque le domaine n'est pas de forme standard (par exemple polygonal ou elliptique), on retrouve le cadre des sections 3.1.1 et 3.1.2. Cette formulation est évidemment très générale puisqu'elle inclut, par exemple, l'approximation méromorphe de toutes les fonctions analytiques à l'extérieur du contour et sur un voisinage de celui-ci, et c'est *grosso modo* sur le cas de singularités de dimension 1 que la recherche s'est concentrée pour l'instant.

Le sujet relève de manière générale de l'approximation méromorphe, et le comportement des pôles est particulièrement important dans l'analyse de la décroissance des erreurs, de l'unicité, et de divers aspects constructifs, de sorte que ce sujet aurait pu trouver sa place dans la section 3.1.1. Cependant, il est intéressant, et c'est là une motivation première du projet, de l'aborder en relation avec l'approximation de la (trace sur le bord extérieur de la) solution d'un problème aux limites de type Dirichlet-Neumann, pour en tirer des renseignements sur les singularités de ladite solution. Cette méthode pour aborder un problème à frontière libre par ailleurs classique (mais largement ouvert) illustre bien l'optique du projet au regard des problèmes inverses, et suscite un axe de recherche actif au carrefour de ses compétences en théorie des fonctions, du potentiel, et des polynômes orthogonaux.

De manière générale, les équations aux points critiques de tels problèmes expriment que le polynôme dont les zéros sont les pôles d'un approximant stationnaire par rapport au critère est un polynôme orthogonal non hermitien par rapport à une certaine mesure complexe sur le lieu singulier. À la suite des avancées réalisées ces deux dernières années concernant la localisation des zéros desdits polynômes dans le cas non hermitien, l'approche du problème inverse considérée ici apparaît séduisante lorsque les singularités sont 1-dimensionnelles, notamment dans le cas d'un domaine fissuré (voir section 4.1). Dans le cas d'une fissure « suffisamment » analytique, en effet, qui équivaut *grosso modo* à l'approximation d'une fonction avec deux points de branchement, on a pu prouver^[LMSW,BKMT02] que les pôles des dits approximants s'accumulent au voisinage de l'arc géodésique hyperbolique passant par les extrémités de la fissure, ce qui fournit un algorithme économique pour sa localisation [3]. De plus, la densité asymptotique des pôles n'est autre que la mesure d'équilibre sur l'arc géodésique pour le potentiel de Green, qui charge en particulier les extrémités lesquelles se trouvent *de facto* bien localisées. Il est intéressant de noter que ces résultats s'appliquent également au cas de la détection de sources monopolaires et bipolaires, dans lequel les défauts d'analyticité proviennent de la présence de pôles et des singularités logarithmiques. Le cas de fissures plus générales (par exemple formées d'une union finie d'arcs analytiques) requiert l'analyse de la situation où il y a un nombre fini mais arbitraire de points de branchement. On conjecture qu'alors les pôles tendent vers le contour \mathcal{C} joignant les extrémités de ces arcs analytiques qui minimise la capacité du condensateur (T, \mathcal{C}) , où T est le bord extérieur du domaine D considéré (voir aussi section 6.10). Cette

[LMSW] L. BARATCHART, F. MANDREA, E. SAFF, F. WIELONSKY, « Asymptotic behaviour of poles of rational and meromorphic approximants: Application to 2D inverse problems for the Laplacian », en préparation.

[BKMT02] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, F. MANDRÉA, V. TOTIK, « Pole distribution from orthogonality », en préparation, 2002.

conjecture, qui est confirmée numériquement, figure au centre des préoccupations du projet dans ce domaine, et semble en passe d'être résolue affirmativement. Il serait bien entendu intéressant de savoir ce qui se passe lorsque la fissure est «absolument non-analytique», un cas limite qui peut s'interpréter comme celui d'une infinité de points de branchements et sur lequel on dispose de peu d'information pour l'instant. En ce qui concerne le problème d'une singularité générale, on peut à la lumière de ce qui précède formuler la conjecture suivante : si f est analytique à l'extérieur et sur un voisinage du bord extérieur d'un domaine D , et si K désigne le compact inclus dans D (unique à un ensemble de capacité nulle près, dont on suppose qu'il n'est pas lui-même de capacité nulle pour éviter un cas dégénéré) qui minimise la capacité du condensateur (T, K) sous la contrainte que f soit analytique à une branche en dehors de K , tout point limite au sens faible de la suite ν_n des mesures de probabilité ayant une masse égale en chaque pôle d'un approximant méromorphe optimal à n pôles (au plus) de f dans $L^p(T)$ a son support dans K et pour balayage sur le bord de K la mesure d'équilibre sur K du condensateur (T, K) . On est encore loin cependant de savoir démontrer un tel énoncé aujourd'hui, fût-il correct.

Ce type de résultat ouvre des perspectives nouvelles en contrôle non destructif (voir section 4.1), et relie des questions d'actualité en approximation (comportement des zéros de polynômes orthogonaux non-hermitiens) à certains problèmes inverses classiques mais mal posés pour lesquels il propose une approche duale : approximer les conditions aux limites et non pas l'équation. Notons que le problème de détection d'une fissure suggère des variantes non classiques de l'approximation rationnelle et méromorphe où les résidus des approximants doivent satisfaire certaines contraintes pour tenir compte des conditions aux limites, normales ou tangentielles, le long de la singularité. En effet, les résultats évoqués ci-dessus concernant l'approximation méromorphe (non contrainte) conduisent à identifier une déformation de la fissure (l'arc géodésique qui joint ses extrémités) plutôt que la fissure elle-même, ce qui est précieux pour initialiser une méthode de détermination plus fine et plus lourde mais n'est pas concluant en soi. Afin de limiter l'effet de déformation, dû au fait que l'on a pas pris en compte dans la structure des approximants les conditions-limites au passage de la fissure, on peut par exemple s'intéresser à l'approximation de la solution complexifiée F d'un problème de Neuman dans un domaine D fissuré par un fonction méromorphe du type $\sum_{j=1}^n a_j/(z - z_j) + g(z)$, où g est analytique dans D , sous la contrainte que $\sum_{k \neq j} a_k/(z_j - z_k) + g(z_j)$ est réel pour chaque j ; en effet, si les pôles z_j se répartissent le long d'un arc, la somme précédente est une estimée discrète de la transformée de Hilbert, de sorte que la partie imaginaire de l'expression entière est une évaluation faible au point z_j de celle de l'approximant, et dire qu'elle est nulle tend à vérifier la condition de Neuman au passage de l'arc. De telles variantes commencent seulement à être envisagées au sein du projet.

Pour finir, observons que le problème d'approcher au sens L^p sur la frontière d'un domaine, par une fonction rationnelle ou méromorphe, la transformée de Cauchy d'une mesure réelle localisée à l'intérieur de celui-ci peut s'interpréter comme la discrétisation d'un potentiel logarithmique selon un critère intéressant une norme de Sobolev. Cette formulation se généralise à des dimensions supérieures, même si la puissance calculatoire de l'analyse complexe n'y trouve pas de substitut aussi simple, et ceci constitue une perspective à long terme pour la recherche sur ce sujet.

3.1.4 Approximation rationnelle matricielle

Participants : Laurent Baratchart, Andrea Gombani, Martine Olivi, José Grimm.

Mots clés : approximation rationnelle, matrice intérieure, espace à noyau reproduisant, théorie de la réalisation.

L'approximation matricielle est nécessaire pour traiter de systèmes à plusieurs entrées et sorties et engendre des difficultés additionnelles substantielles, au plan théorique comme au plan algorithmique. Le problème est un analogue du cas scalaire où le degré de McMillan (le degré d'une réalisation minimale en termes d'Automatique) généralise le degré :

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{F} \in (H^p)^{m \times l}$ et n un entier ; on cherche une matrice rationnelle de taille $m \times l$ sans pôles dans le disque unité et de degré de McMillan au plus n qui soit la plus proche possible de \mathcal{F} dans $(H^p)^{m \times l}$.

Ici, pour fixer les idées, on définira la norme L^p d'une matrice comme la racine p -ième de la somme des puissances p -ièmes des normes de ses composantes. De fait, le principal sujet d'étude est pour l'instant le cas $p = 2$.

Dans le cas, donc, de la norme L^2 ($p = 2$), l'algorithme d'approximation scalaire mis au point dans le projet se généralise au cas matriciel [9]. Le problème majeur réside dans la représentation des matrices de transfert de degré de McMillan donné n , et les matrices intérieures (c'est-à-dire les fonctions à valeurs matricielles qui sont analytiques dans le disque unité et unitaires sur le cercle) de degré n interviennent ici de manière essentielle : elles jouent le rôle du dénominateur dans la représentation fractionnaire des matrices de transfert considérées. L'ensemble des matrices intérieures de degré donné possède une structure de variété qui autorise la mise en œuvre des outils différentiels utilisés dans le cas scalaire. En pratique, il faut exhiber un atlas de cartes (paramétrages valables seulement dans un voisinage donné d'un point) satisfaisant et gérer les changements de cartes lors d'un algorithme de descente. L'algorithme de Schur tangentiel dans le cas matriciel^[ABG94] nous a fourni de tels paramétrages et permis l'implémentation d'un algorithme d'approximation rationnelle. Celui-ci est intégré au logiciel hyperion (voir section 5.1), qui a été testé sur des données matricielles 2×2 provenant d'expérimentations faites au CNES, dans le cadre du contrat qui fait l'objet de la section 7.1 et donne des résultats d'une grande qualité [2]. Ce code est aujourd'hui utilisé par l'IRCOM, couplé au logiciel d'éléments finis EMXD, pour déterminer les couplages physiques effectivement réalisés au cours de la synthèse d'un filtre et fournit le feedback nécessaire à la correction.

Dans cette application, l'obtention des couplages physiques passe par le calcul de réalisations, ce qu'on appelle en automatique la représentation interne des systèmes. Parmi les paramétrages obtenus à l'aide de l'algorithme de Schur, certains présentent un intérêt particulier de ce point de vue^[PHO99]. Ils donnent lieu à un calcul simple et robuste de réalisations équilibrées et ont permis l'implémentation d'un algorithme d'approximation entièrement basé sur la représentation interne, cf. section 5.2.

[ABG94] D. ALPAY, L. BARATCHART, A. GOMBANI, « On the Differential Structure of Matrix-Valued Rational Inner Functions », *Operator Theory : Advances and Applications* 73, 1994, p. 30–66.

[PHO99] R. PEETERS, B. HANZON, M. OLIVI, « Balanced parametrizations of discrete-time all-pass systems and the tangential Schur algorithm », in: *Proc. of the European Control Conference (cd-rom)*, Karlsruhe (Allemagne), septembre 1999.

Indiquons que l'algorithme décrit ci-dessus est le premier, et à notre connaissance le seul disponible aujourd'hui, qui traite de l'approximation matricielle stable à degré de Mc-Millan contraint. Les problèmes relatifs à la multiplicité des minima locaux sont naturellement les mêmes que dans le cas scalaire, et l'analyse de critères garantissant l'unicité est nettement plus complexe topologiquement que dans le cas scalaire. Le cas de fonctions déjà rationnelles du degré cherché nécessite à lui seul des développements relativement lourds [6], et celui de fonctions de Markov matricielles commence seulement à être étudié *cf.* section 6.5.

3.1.5 Identification paramétrique linéaire

Participants : Laurent Baratchart, Manfred Deistler [TU Wien, Au], Reinhold Küstner, Martine Olivi.

Mots clés : approximation rationnelle, identification paramétrique, topologie des matrices rationnelles, étude des points critiques.

L'étude asymptotique de certains estimateurs au maximum de vraisemblance est un corollaire naturel des recherches en approximation rationnelle menées dans le projet. Le contexte est ultra-classique : étant donné un processus discret $y(t)$ à valeurs dans \mathbf{R}^p , et un autre processus $u(t)$ à valeurs dans \mathbf{R}^m que l'on tient pour la *cause mesurable* de $y(t)$, on cherche à décrire le phénomène par un modèle linéaire d'ordre fini :

$$\hat{y}(t) = Hu(t) + Le(t),$$

où e est un bruit blanc à p composantes, décorrélé de u , censé représenter les aléas qui concourent à créer $y(t)$, et où la matrice de transfert $[L \ H]$ reliant $(e \ u)^t$ à \hat{y} est rationnelle et stable de degré de McMillan n , la matrice L étant d'inverse stable également (parmi les bruits de même covariance et d'innovation donnée, on choisit celui dont le facteur spectral est de phase minimale). Le nombre n est, par définition, l'ordre du modèle. Si l'on suppose seulement que $[H \ L]$ appartient à l'espace de Hardy H^2 et que L est extérieure (ce qui signifie presque inversible en un sens approprié), une telle représentation est en fait générale pour des processus stationnaires *réguliers* (c'est-à-dire purement non-déterministes en un certain sens). L'identification dans ce contexte apparaît donc comme une approximation rationnelle pour laquelle la théorie statistique classique dresse un compromis entre deux facteurs antagonistes : d'une part l'erreur de biais qui diminue quand n augmente car la distance entre le « vrai » système et la classe de modèles considérée s'amenuise, d'autre part l'erreur de variance qui augmente avec n parce que la dispersion de l'estimation s'amplifie avec le nombre de paramètres. Il s'agit là de la version stochastique du compromis complexité-précision omniprésent en modélisation.

Si on introduit à présent comme nouvelle variable la matrice rationnelle R définie par :

$$R = \begin{pmatrix} L & H \\ 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1}$$

et si T désigne la première ligne bloc de R , en normalisant la variance du bruit à l'identité pour simplifier, l'estimation au maximum de vraisemblance est asymptotiquement équivalente,

lorsque le nombre d'échantillons croît, à la minimisation de :

$$\|T\|_{\Lambda}^2 = \mathbf{Tr} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(e^{i\theta}) d\Lambda(\theta) T^*(e^{i\theta}) \right\}, \quad (2)$$

où Λ est la mesure spectrale du processus $(y \ u)^t$ (positive à valeurs matricielles) et où \mathbf{Tr} signifie la trace. Si l'on restreint davantage la classe de modèles en demandant que les aléas soient blancs, c'est-à-dire $L = I_m$, on obtient un problème d'approximation rationnelle pondéré correspondant à la minimisation de la variance de l'erreur de sortie. Si, en outre, u est lui-même un bruit blanc, la situation devient celle de 3.1.4.

La formulation (2) montre que l'identification stochastique vise à une double généralisation, à la fois rationnelle et matricielle, de la théorie des polynômes orthogonaux de Szegő sur le cercle, et ceci fonde son lien avec la théorie classique des fonctions.

Le problème de la consistance naît de ce que la mesure Λ n'est pas accessible, de sorte que l'on doit estimer (2) à l'aide de moyennes temporelles de l'échantillon observé en supposant les processus ergodiques. La question se pose alors de savoir si l'argument du minimum de la fonctionnelle estimée tend vers celui de (2) lorsque la longueur de l'échantillon augmente, et à quelle vitesse. Le résultat le plus significatif ici est peut-être celui qui, tout en postulant l'*existence* d'un modèle fonctionnel, ne suppose pas la compacité de la classe de modèles^[HD88], et affirme la consistance sous des hypothèses d'ergodicité faible et d'excitation persistante. Un analogue de la loi des grands nombres indique, dans ce contexte, que la convergence a lieu en $1/\sqrt{N}$, où N est la longueur de l'échantillon.

Dans le résultat précédent, la consistance a lieu au sens de la convergence ponctuelle des estimés sur la variété des matrices de transfert de taille et d'ordre donnés. La première contribution du projet a été de montrer que le résultat subsiste même si l'on ne postule plus l'existence d'une dépendance causale entre les entrées et les sorties, la mesure Λ étant simplement définie comme limite faible des covariances. La seconde contribution est que cette convergence a lieu uniformément avec celle de toutes les dérivées sur tout compact de la variété des modèles, ce qui jette un pont entre le comportement algorithmique du problème d'approximation rationnelle (nombre et nature des points critiques, décroissance de l'erreur, comportement des pôles) et celui de la minimisation des moyennes empiriques. Ceci permet de traduire en termes de comportement asymptotique des estimateurs toute propriété uniforme par rapport à l'ordre des approximants, sans avoir à supposer que le « vrai » système appartient à la classe des modèles. Mentionnons par exemple que l'unicité du point critique en approximation H^2 , lorsque la fonction à approximer est presque rationnelle de degré n , entraîne [6] l'unicité d'un minimiseur local pour l'erreur de sortie lorsque l'entrée est un bruit blanc, ceci presque sûrement asymptotiquement sur tout compact, lorsque la densité de y par rapport à u est presque rationnelle de degré n . Dans le cas de systèmes de relaxation à une entrée-sortie, c'est à dire si la fonction de transfert est une fonction de Markov, on obtient, à la lumière des résultats exposés en section 3.1.2, la même conclusion en prenant si nécessaire un degré d'approximation assez élevé, ce qui constitue le premier cas démontré d'unimodalité où le « vrai système » n'appartient pas à la classe des modèles. Citons aussi l'application à la localisation des pôles des estimés rationnels

[HD88] E. HANNAN, M. DEISTLER, *The Statistical Theory of Linear Systems*, Wiley, 1988.

par minimisation de l'erreur de sortie d'un processus fractionnaire à longue mémoire ^[BK00], ainsi que le cas où de l'identification au maximum de vraisemblance d'une fonction de Markov dans le cas où le système identifié est uniquement sujet au bruit et n'est pas commandé de sorte que $u(t) = 0$ dans le modèle, *cf.* section 6.5.

3.2 Structure et commande des systèmes non-linéaires

Pour commander un système, on s'appuie en général sur un modèle obtenu à partir de connaissances a priori comme les lois physiques ou à partir d'observations expérimentales. Dans beaucoup d'applications, on se contente d'une approximation linéaire autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire. Il est tout de même très important d'étudier les systèmes (ou les modèles) non-linéaires et leur commande pour les raisons suivantes. Tout d'abord, certains systèmes ont, autour de points de fonctionnement intéressants, une approximation linéaire qui n'est pas commandable de sorte que la linéarisation est inopérante, même localement. En second lieu, et même si le linéarisé est commandable, on peut désirer élargir le domaine de fonctionnement au-delà du domaine de validité de l'approximation linéaire. Les travaux décrits à la section 3.2.1 relèvent de cette problématique. Enfin, certains problèmes de commande, comme la planification de trajectoire, ne sont pas de nature locale et ne peuvent être traités à l'aide d'un modèle approché linéaire. L'étude structurelle décrite en 3.2.2 a pour objet de dégager des invariants qui peuvent être utilisés soit pour ramener l'étude à des systèmes plus simples, soit pour servir de fondement à une théorie de l'identification non-linéaire qui fournirait des renseignements sur les classes de modèles à utiliser lorsque l'on ne dispose pas d'information fiable *a priori* et que l'identification linéaire « boîte noire » n'est pas suffisante. Le succès du modèle linéaire, que ce soit en commande ou en identification, tient en grande partie à la compréhension très fine qu'on en a ; de façon analogue, une meilleure maîtrise des invariants des modèles non-linéaires pour certaines transformations est un préalable à une véritable théorie de l'identification et de la commande non-linéaire. Pour tout ce qui relève des systèmes non-linéaires, on sous-entend toujours dans ce qui suit que la dimension de l'état est finie.

3.2.1 Stabilisation continue

Mots clés : commande, stabilisation de système non-linéaire, automatique non-linéaire, système mécanique non holonôme.

Participants : Ludovic Faubourg, Andreï Ivanov, Jean-Baptiste Pomet, Pascal Morin [projet ICARE], Claude Samson [projet ICARE].

La stabilisation par retour continu d'état — ou de sortie c'est-à-dire en information partielle — consiste à concevoir une commande qui soit une fonction régulière (au moins continue) de l'état, et telle qu'un point de fonctionnement (ou une trajectoire) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé. On peut voir cela comme une version affaiblie de la commande optimale : le calcul d'une commande qui optimise exactement un certain critère (par exemple

[BK00] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, « Pole behaviour in identification », *in: 39th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, Sydney (Australie), décembre 2000.

rallier un point en temps minimal) conduit en général à une dépendance très irrégulière en l'état ; la stabilisation est un objectif *qualitatif* (rallier un point asymptotiquement) moins contraignant que la minimisation d'un critère, et qui laisse évidemment beaucoup plus de latitude et permet d'imposer par exemple beaucoup de régularité. Notons que les problèmes de stabilisation sont souvent résolus, du moins au voisinage de points de fonctionnement réguliers, par des méthodes d'automatique linéaire aujourd'hui bien maîtrisées ; les méthodes étudiées ici concernent le comportement au voisinage de points où les méthodes linéaires sont inefficaces (approximation linéaire non commandable), ou visent à maîtriser le comportement sur une région plus étendue de l'espace d'état. Une question très importante est la robustesse de cette stabilité : en effet les lois de commande dépendent énormément de la structure du modèle, et la conservation de la stabilité asymptotique pour des structures ou des valeurs des paramètres voisines n'est pas acquise. Nous détaillons ci-après, deux directions de recherche actives à ce jour dans le projet.

Stabilisation périodique de systèmes non-linéaires. Il est connu qu'un certain nombre de systèmes non-linéaires, bien que commandables, ne peuvent pas être stabilisés par une commande qui soit une fonction continue de l'état seulement^[Bro83]. On peut bien sûr, pour ces systèmes, relâcher l'exigence de continuité en utilisant par exemple des retours d'état discontinus issus de la commande en temps minimal, mais une idée plus récente consiste à rechercher tout de même des retours d'état continus, ou même lisses, en relâchant plutôt l'exigence que le contrôle ne dépende que de l'état pour permettre également une dépendance par rapport *au temps*, par exemple périodique.

Les recherches de l'équipe, menées en collaboration avec le projet ICARE, ont joué un rôle important dans l'obtention de ces résultats [11] et visent aujourd'hui à développer des méthodes effectives pour la synthèse de lois de commandes non-linéaires périodiques stabilisant des classes représentatives de systèmes mécaniques non-holonômes, ainsi qu'à étudier et à améliorer leur robustesse et le comportement des transitoires qu'elles induisent. Parmi les acquis récents, on peut citer l'obtention d'une loi de commande continue stabilisant l'attitude d'un satellite en mode dégradé, et aussi^[MPS99] une méthode de construction de lois de commande périodiques stabilisantes pour un système sans dérive qui ne dépend que de la structure de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de commande (les techniques mathématiques utilisées sont proches de celles évoquées plus loin pour approcher des courbes géométriques par des trajectoires faisables, cf. section 3.2.3).

Les applications concernent les systèmes mécaniques non-holonômes : la stabilisation de robots mobiles d'une part et celle d'un corps solide non complètement commandé en rotation autour de son centre de gravité d'autre part (un satellite artificiel par exemple).

Fonctions de Lyapunov contrôlées. Les fonctions de Lyapunov sont un outil bien connu pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non contrôlés. Pour un système contrôlé,

[Bro83] R. W. BROCKETT, « Asymptotic Stability and Feedback Stabilization », in : *Differential Geometric Control Theory, Prog. Math.*, 27, Birkäuser, p. 181–191, Basel-Boston, 1983.

[MPS99] P. MORIN, J.-B. POMET, C. SAMSON, « Design of Homogeneous Time-Varying Stabilizing Control Laws for Driftless Controllable Systems via... », *SIAM J. on Control & Optim.* 38, 1999, p. 22–49, <http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toc/SICON/38/1>.

on appelle *Fonction de Lyapunov contrôlée* une fonction qui est de Lyapunov pour le système bouclé par une certaine commande. Ceci se traduit par une inégalité différentielle que l'on appellera « équation d'Artstein^[Art83] » —quoiqu'il s'agisse plutôt d'une inéquation— et qui ressemble à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann mais qui est bien sûr largement sous-déterminée. On peut déduire de la connaissance d'une fonction de Lyapunov contrôlée des retours d'état continus stabilisants de manière très commode.

On s'intéresse au sein du projet à l'obtention de fonctions de Lyapunov contrôlées. Le but est soit la stabilisation proprement dite soit l'étude de la robustesse de certaines lois de commandes stabilisantes obtenues par d'autres méthodes, soit enfin de rendre robustes ces lois de commande.

3.2.2 Transformations et équivalences des systèmes et modèles non-linéaires

Participants : David Avanesoff, Laurent Baratchart, Marc Breton, Monique Chyba [UC Santa Cruz (USA)], Jean-Baptiste Pomet.

Mots clés : automatique non-linéaire, feedback non-linéaire, classification, identification non-linéaire.

Une transformation par *retour d'état statique* d'un système dynamique contrôlé est un reparamétrage (non singulier) des commandes, dépendant de l'état, et éventuellement un changement de coordonnées sur l'état. Une transformation par *retour d'état dynamique* d'un système dynamique contrôlé consiste à effectuer une extension dynamique (augmentation de l'état et attribution d'une dynamique aux nouveaux états) suivie d'une transformation par retour d'état statique sur le système augmenté.

- Du point de vue des problèmes de commande, l'intérêt de telles transformations, dans le cas où le système obtenu possède une structure plus exploitable que l'original, est qu'une commande permettant de satisfaire un certain objectif sur le système transformé peut être utilisée pour commander le système original en incluant l'extension dynamique dans le contrôleur. Évidemment, un cas favorable est celui où le système transformé est linéaire.
- Du point de vue de l'identification et de la modélisation non-linéaire, l'intérêt est, comme signalé plus haut, soit de dégager des invariants qualitatifs permettant de guider le choix d'un modèle non-linéaire d'après des observations, soit de contribuer à une classification des modèles non-linéaires qui manque aujourd'hui cruellement pour élaborer de véritables méthodes d'identification non-linéaire.

Développons deux problèmes abordés dans le projet.

Linéarisation dynamique. Le problème de la linéarisation dynamique est celui de trouver des conditions explicites sur un système pour qu'existe une transformation par retour d'état dynamique le rendant linéaire. Ce problème a été très étudié ces dix dernières années.

[Art83] Z. ARTSTEIN, « Stabilization with relaxed control », *Nonlinear Analysis TMA* 7, 1983, p. 1163–1173.

Ces dernières années^[FLMR95], la propriété suivante a été mise en valeur pour les systèmes commandés : pour certains systèmes, dont les systèmes linéaires, il existe un certain nombre de fonctions de l'état et de dérivées de la commande qui ne sont liées par aucune équation différentielle, et qui « paramètrent toutes les trajectoires ». Les auteurs ayant montré l'importance de cette notion la nomment *platitude différentielle*, et les fonctions en question sont appelées *sorties plates*, ou *fonctions linéarisantes*. En gros, un système est *différentiellement plat* si et seulement si il peut être transformé par feedback dynamique en un système linéaire. D'une part, cette propriété de l'ensemble des trajectoires a en elle-même un intérêt au moins aussi important pour la commande que l'équivalence à un système linéaire, et, d'autre part, elle fournit une manière de s'attaquer au problème de la linéarisation dynamique : rechercher des fonctions linéarisantes.

Une question importante demeure cependant ouverte : comment décider de façon algorithmique si un système donné possède ou non de telles fonctions, c'est-à-dire est linéarisable dynamiquement ou non ? Ce problème est à la fois difficile et important pour l'automatique non-linéaire. La publication [12] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de fonctions linéarisantes dépendant de l'état et de la commande dans le cas des systèmes à quatre états et deux commandes dont la dynamique est affine en ces commandes et lorsqu'on ne s'autorise pas à utiliser des dérivées de la commande (ce sont les premières dimensions pour lesquelles le problème est véritablement non-trivial).

En termes algébrique-différentiels, le module des différentielles d'un système commandable est libre et de dimension finie sur l'anneau des polynômes différentiels en d/dt à coefficients dans l'espace des fonctions du système, dont on peut construire une base très explicitement^[ABMP95]. La question est de déterminer s'il admet une base de formes fermées, et donc localement exactes. Énoncée ainsi, il s'agit d'une extension du classique théorème d'intégrabilité de Frobenius au cas où les coefficients sont des opérateurs différentiels. En sus de la stabilité par différentiation extérieure qui régit le cas classique, d'autres conditions sont nécessaires ici pour assurer la finitude du degré des solutions. Le but à moyen terme est de parvenir à un algorithme formel et implémentable, décidant si un système donné est plat en un point régulier. On peut envisager aussi des sous-problèmes ayant leur intérêt propre, comme de décider de la platitude avec un pré-compensateur donné ou encore de caractériser une platitude « formelle » qui correspondrait à une interprétation de l'équation différentielle en un sens affaibli, et également localiser toutes ces questions au voisinage d'un point d'équilibre.

Équivalence topologique Dans ce qui précède, on n'a pas évoqué la régularité des transformations considérées. Il est commode de les prendre suffisamment différentiables. Toutefois, ceci conduit à ce qu'un système ne soit pas, même localement (c'est-à-dire pour des valeurs de l'état et de la commande proche d'une valeur fixe), équivalent à la plupart de ses voisins. Évidemment, cela ne permet pas d'envisager la recherche d'invariants « qualitatifs ».

[FLMR95] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN, P. ROUCHON, « Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples », *Int. J. of Control* 61, 1995, p. 1327–1361.

[ABMP95] E. ARANDA-BRICAIRE, C. H. MOOG, J.-B. POMET, « An Infinitesimal Brunovsky Form for Nonlinear Systems with Applications to Dynamic Linearization », *Banach Center Publications* 32, 1995, p. 19–33.

Dans le cas des systèmes dynamiques sans contrôle, il est bien connu (théorème de Hartman-Grobman), que, si l'on ne demande que la continuité des transformations, alors, en dehors de situations certes intéressantes mais que l'on peut considérer comme dégénérées (défaut d'hyperbolicité), tout système est *localement* équivalent à un système linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Il est donc tentant, dans le cadre d'une classification qualitative des systèmes commandés, d'étudier une équivalence modulo des transformations non différentiables, et d'espérer ainsi dégager des invariants beaucoup plus robustes, et peut-être des formes normales stables. Un équivalent du théorème d'Hartman-Grobman pour les systèmes contrôlés dirait par exemple qu'en dehors d'une classe de modèles « rares » (par exemple ceux dont l'approximation linéaire est non commandable), et localement autour de valeurs fixées de l'état et de la commande, aucun phénomène qualitatif ne distingue un système non-linéaire d'un linéaire, tous les phénomènes non-linéaires étant donc soit de nature globale soit des singularités. On verra à la section 6.12 qu'il n'en est rien.

3.2.3 Structure de l'espace des trajectoires

Participants : Jean-Baptiste Pomet, Andrey Sarychev [Université d'Aveiro, Portugal].

Mots clés : planification de trajectoires, processus de diffusion.

Étant donné un système dynamique commandé, une courbe dans l'espace d'état est une *trajectoire* si il existe une commande qui la produit. La *planification de trajectoire* consiste à trouver une trajectoire satisfaisant certaines conditions, par exemple joindre deux points donnés en restant dans une certaine zone. C'est une problématique omniprésente en robotique, par exemple. Il est naturel dans ce contexte de considérer aussi la *planification approchée*, qui consiste à trouver une courbe qui ne soit pas forcément une trajectoire mais qui puisse être approchée par des trajectoires. Cette démarche requiert, cependant, une caractérisation de cet ensemble de courbes. Il est également une autre motivation pour une telle étude : on peut associer à un système contrôlé affine en les commandes un *processus de diffusion*, en remplaçant *grosso modo* les commandes par des bruits blancs indépendants. Ce processus de diffusion définit à chaque instant une mesure de probabilité sur l'espace des courbes paramétrées dans l'espace d'état, et il est connu^[SV72] que le support de cette mesure est exactement l'ensemble des courbes qui peuvent être approchées (au sens C^0) par des trajectoires du système contrôlé associé. La caractérisation de cette adhérence a donc des répercussions en analyse stochastique. Pourtant, ce problème a été peu étudié en dehors du cas où l'adhérence en question contient toutes les courbes. Les travaux menés dans le projet ont déjà donné lieu à des résultats significatifs, comme une caractérisation^[Pom99] des courbes qui peuvent être approchées au sens C^0 par des trajectoires d'un système en dehors de certaines singularités. Ils se poursuivent en collaboration avec l'université d'Aveiro (Portugal). Une raison supplémentaire de s'intéresser

[SV72] D. W. STROOCK, S. R. S. VARADHAN, « On the Support of Diffusion Processes with Applications to the Strong Maximum Principle », in : *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., III (Probability Theory)*, California University Press, p. 333–359, 1972.

[Pom99] J.-B. POMET, « On the curves that may be approached by trajectories of a smooth control affine system », *Syst. & Control Lett.* 36, 1999, p. 143–149.

à ce problème est qu'il met en jeu des techniques utilisées par ailleurs pour synthétiser des lois de commandes continues stabilisantes cf. section 3.2.1.

3.3 Jeux dynamiques

La théorie des jeux dynamiques est aujourd'hui un outil bien établi pour modéliser les processus de décision, et qui emprunte beaucoup à la commande optimale, c'est-à-dire au calcul des variations moderne sous contrainte différentielle. Cependant, résoudre de tels problèmes en général reviendrait à établir une typologie des singularités qui semble d'ores et déjà hors de portée dans le cas statique, de sorte que l'examen d'exemples significatifs en petite dimension reste l'activité principale dans la théorie classique. L'activité du projet se concentre ici sur des méthodes de désingularisation de la fonction valeur susceptible de permettre l'approximation des solutions.

4 Domaines d'applications

La répartition des activités du projet s'effectuant autour de trois axes qui sont l'identification et la synthèse dans le domaine fréquentiel, d'une part, le contrôle de systèmes différentiels, d'autre part, et enfin les jeux dynamiques, on peut distinguer trois familles dans les applications visées : une qui concerne *grosso modo* les problèmes inverses dans les systèmes diffusifs et résonnants, une qui concerne la stabilisation de certains systèmes mécaniques, et une qui concerne l'étude de stratégies de routage dans les réseaux de télécommunications. Pour ce qui est du premier axe, les techniques d'approximation méromorphe décrites en section 3.1.1 sont susceptibles d'applications à la déconvolution d'équations linéaires où l'analyticité peut provenir, soit de l'application de la transformation de Fourier, soit du caractère harmonique de l'équation elle-même. Pour ce qui est du deuxième axe, les applications qui se développent concernent surtout le contrôle de systèmes qui, pour des raisons diverses, sont «peu» commandables, tels les satellites en petite poussée ou encore les régénérateurs de signaux optiques. Le troisième axe, qui se trouve à un stade plus prospectif, concerne la modélisation du comportement d'utilisateurs d'un réseau sous forme d'équilibres de Nash pour un critère approprié. Nous donnons, ci-après, un aperçu de telles applications.

4.1 Problèmes inverses géométriques et identification de paramètres pour le Laplacien 2D

Participants : Laurent Baratchart, Amel Ben Abda [ENIT, Tunis], Fehmi Ben Hassen, Slim Chaabane, Imen Fellah, Mohamed Jaoua [ENIT, Tunis], Juliette Leblond, Moez Kallel, Reinhold Küstner, Franck Wielonsky, Edward Saff.

Mots clés : problème inverse, Laplacien, contrôle non destructif, tomographie..

La localisation de fissures, de sources ponctuelles ou d'occlusions dans un matériau bidimensionnel, à l'aide de mesures thermiques, électriques, ou magnétiques sur sa frontière, est un problème inverse classique qui se pose pour étudier la fatigue des structures par exemple,

ou encore en magnéto-encéphalographie, ou encore en détection d'objets enfouis (mines...) Cependant, aucun algorithme véritablement efficace ne s'est imposé aujourd'hui pour détecter l'emplacement de tels défauts, en particulier si l'on ne dispose pas d'informations initiales sur leur emplacement car l'intégration numérique du problème inverse est très instable. La présence de « pailles » dans un objet plan, par exemple, ou encore de sources dans un cortex se traduisent par un défaut d'analyticité de la solution du problème de Dirichlet-Neumann associé, et peut en principe être diagnostiquée (voir section 3.1.3) en utilisant des techniques d'approximation rationnelle ou méromorphe sur le bord de l'objet. Le cas fréquent où les mesures ne sont disponibles que sur une partie de la frontière constitue en outre un exemple typique d'application pour les techniques d'extension analytique ou méromorphe (voir section 3.1.1).

L'approche proposée ici consiste à bâtir depuis les données mesurées sur une partie K de la frontière Γ d'un domaine D du plan la trace d'une fonction analytique F dans D privé de l'éventuelle singularité $\gamma \subset D$. L'usage des techniques d'approximation développées au sein du projet a pour objectif :

- d'étendre F à tout Γ si les données sont incomplètes ($K \neq \Gamma$), dans l'hypothèse réaliste où la frontière n'est pas entièrement accessible à la mesure, afin d'identifier par exemple un coefficient de Robin inconnu, [32] ;
- de diagnostiquer la présence de γ de façon économique au plan du calcul ;
- de se doter d'informations sur la localisation de γ [BKMT02].

Ainsi, les problèmes inverses de type géométrique consistant à retrouver une partie inconnue de la frontière depuis des mesures partielles semblent accessibles par ce biais [3], éventuellement combiné à d'autres algorithmes [31]. Les expériences numériques ayant donné d'excellents résultats sur des cas d'école, il importe à présent de considérer des données expérimentales, que le projet cherche présentement à rassembler. En particulier, des contacts avec le projet Robotvis de l'Inria-Sophia devraient nous permettre de disposer de données 3-D de magnéto-encéphalographie dont il faut extraire une information 2-D, et des données du même type ont aussi été proposés à nos partenaires de l'ENIT. On cherche cependant à se procurer des données électriques, sans doute plus fiables, issues de l'ingénierie. À ce stade également, il semble naturel, pour améliorer la localisation, de considérer un problème d'approximation non-classique où les résidus seraient contraints de manière à incorporer dans la structure de l'approximant les caractéristiques héritées du fait que l'on cherche à estimer un potentiel logarithmique avec une condition aux limites *cf.* section 3.1.3). Des tests ont eu lieu avec des résidus réels pour une fissure droite, et indiquent en effet une configuration critique sur la fissure, mais le paramétrage par pôles et résidus a des singularités globales qui nécessitent l'adoption d'une représentation fondée sur les coefficients des polynômes, qui reste à développer.

Dans un futur plus distant, on envisage aussi la généralisation de ce type de méthode au cas de problèmes avec coefficients de conductivité variable, ainsi que l'utilisation des propriétés de convergence des algorithmes d'approximation en vue d'établir des résultats de stabilité pour certains de ces problèmes inverses.

L'étude de la dimension infinie (fonctions à valeurs opérateurs) peut aussi être envisagée,

[BKMT02] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, F. MANDRÉA, V. TOTIK, « Pole distribution from orthogonality », en préparation, 2002.

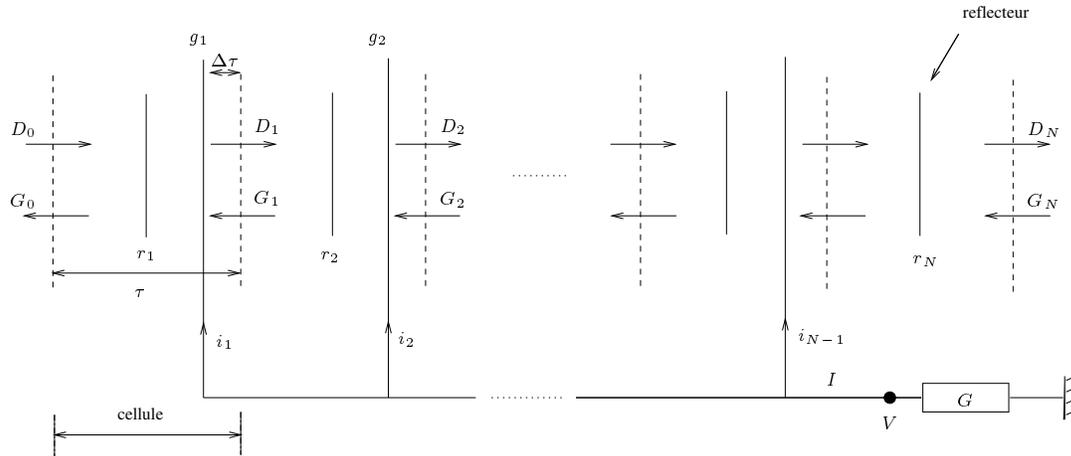


FIG. 1 – Modèle de transducteur.

mais à plus long terme, pour des applications à la tomographie ou à la détection de mines, par exemple.

4.2 Identification et synthèse de systèmes résonnants

Mots clés : télécommunications, multiplexage, filtre, hyperfréquences, ondes de surface.

Un des meilleurs terrains d'application pour l'activité du projet en théorie des fonctions est l'identification et la synthèse de systèmes physiques pour lesquels l'hypothèse de linéarité est bien vérifiée dans le domaine de fonctionnement et dont les spécifications sont données dans le domaine fréquentiel. Les systèmes résonnants, acoustiques et électromagnétiques, en sont un prototype d'actualité en télécommunications. Nous détaillons ci-après deux exemples.

4.2.1 Synthèse de filtre à ondes de surface pour la téléphonie mobile

Participants : Laurent Baratchart, Andrea Gombani, José Grimm, Martine Olivi.

Les filtres à ondes de surface sont largement utilisés dans les moyens de communications modernes et en particulier les téléphones mobiles. Ceci est principalement dû à leur petite taille et à leur coût de fabrication peu élevé. Les filtres unidirectionnels, constitués de transducteurs de type SPUDT contenant des réflecteurs internes (cf. fig. 1), induisent des pertes plus faibles et sont de plus en plus utilisés dans cette technologie. La synthèse de tels filtres s'avère beaucoup plus complexe que celle des filtres conventionnels.

Nous nous intéressons ici à un filtre constitué de deux transducteurs de type SPUDT (fig. 2). Chaque transducteur est composé de cellules de même longueur τ contenant chacune un réflecteur et, à l'exception de la dernière, une source (fig. 1). Ces sources sont toutes reliées à un circuit électrique extérieur et sont à l'origine des interactions électro-acoustiques. Dans SPUDT2, représenté par la figure 2, les réflecteurs sont positionnés par rapport aux sources de sorte que, au voisinage d'une certaine fréquence dite centrale, aucune onde ne sorte à gauche

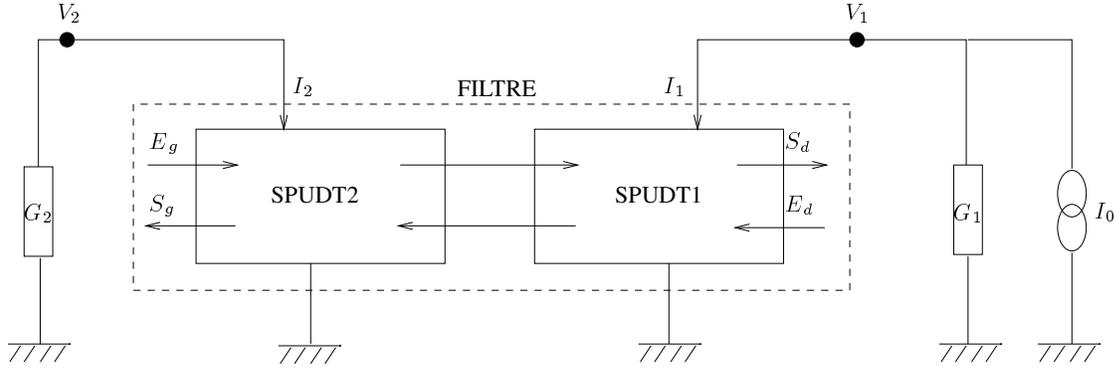


FIG. 2 – Configuration du filtre.

du transducteur ($S_g \approx 0$), c'est l'unidirectionnalité. Dans le transducteur de droite (SPUDT1), les réflecteurs sont placés à droite des sources de façon à obtenir l'unidirectionnalité vers la gauche.

Des spécifications sont données dans le domaine fréquentiel sur l'amplitude et la phase (ou le temps de propagation de groupe moyen) de la fonction de transfert électrique. Cette fonction traduit le transfert de puissance et s'écrit :

$$E(r, g) = 2 \frac{V_2}{I_0} = \frac{2 \sqrt{G_1 G_2} Y_{12}}{Y_{12} Y_{21} - (Y_{11} + G_1)(Y_{22} + G_2)},$$

où Y est la matrice d'admittance du couplage :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Le problème de la synthèse du filtre consiste donc à déterminer les *coefficients de réflexion* r et les *efficacités g des sources* des deux transducteurs qui satisfont au mieux les spécifications.

Les transducteurs sont décrits par des matrices de fonctions analytiques dites matrices mixtes qui relient les ondes entrantes et le courant électrique aux ondes sortantes et à la tension sur le transducteur. Les propriétés physiques de réciprocity et conservation de l'énergie confèrent à ces matrices une riche structure mathématique qui autorise une approche par approximation dans le domaine complexe (voir section 7.1) selon les grandes lignes suivantes :

- décrire l'ensemble \mathcal{E} des fonctions de transfert électrique que l'on peut obtenir en couplant deux transducteurs,
- poser le problème de synthèse comme *un problème d'approximation rationnelle* dans un espace vectoriel normé de fonctions analytiques :

$$\min_{E \in \mathcal{E}} \|D - E\|,$$

où D est la fonction de transfert électrique désirée.

- utiliser le logiciel hyperion (voir section 5.1) convenablement modifié pour résoudre ce type de problèmes d'approximation.

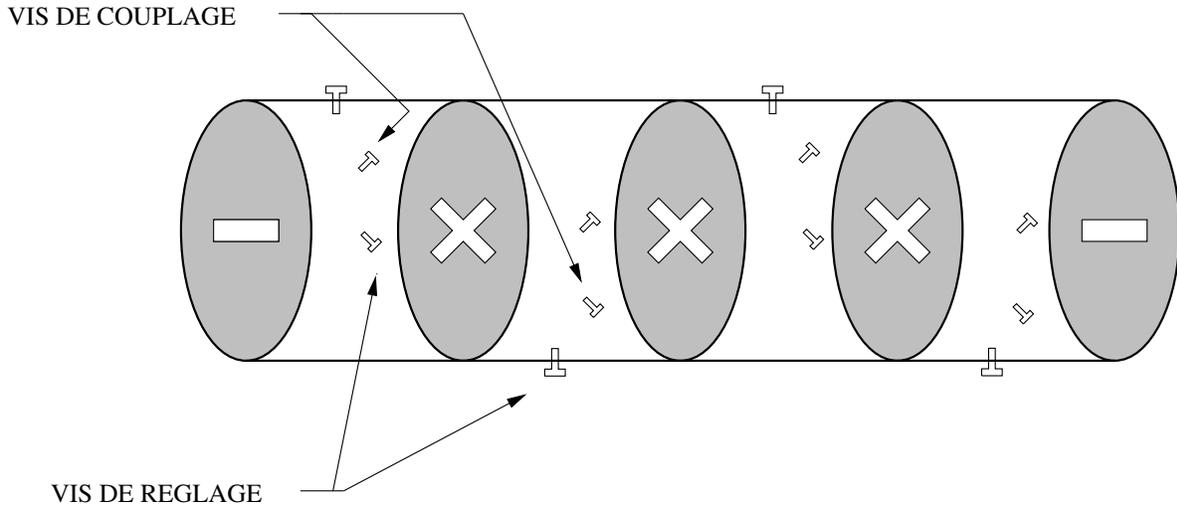


FIG. 3 – Filtre à cavités bimodes.

Le point numéro un focalise actuellement nos recherches dans ce domaine. Il fait intervenir de manière assez subtile la géométrie des zéros d'une matrice rationnelle en relation avec l'existence d'une extension symétrique intérieure sans augmentation de degré. Mentionons que l'intérêt du projet MIAOU pour ces applications a été motivé par une étude commandée par la société Thomson Microsonics, effectuée en 1999.

4.2.2 Identification de filtres hyperfréquences

Participants : Laurent Baratchart, Stéphane Bila, José Grimm, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

Dans le domaine des télécommunications spatiales (transmission par satellite et multiplexage), les contraintes spécifiques aux matériels embarqués conduisent à réaliser des filtres à cavités résonnantes bimodes dans le domaine des hyperfréquences. Ces filtres sont constitués d'une succession de corps creux cylindriques reliés (couplés magnétiquement) entre eux par des iris. L'onde électromagnétique qui traverse ces cavités satisfait aux équations de Maxwell, ce qui force par exemple le champ électrique tangent à la cavité à être nul. Une étude un peu approfondie montre qu'alors seul un ensemble discret de vecteurs d'ondes est ainsi sélectionné. Dans la plage de fréquences d'utilisation du filtre, le champ électrique dans chacune des cavités peut être vu comme se décomposant selon deux modes orthogonaux dans le plan perpendiculaires à l'axe des cavités (les autres modes sont assez éloignés en fréquence pour ne pas intervenir). Chacune des cavités est munie de trois vis (fig. 3) : les vis horizontales et verticales permettent, en perturbant la géométrie de la cavité, d'ajuster les fréquences de chacun des deux modes. La dernière vis permet, elle, d'ajuster le couplage des deux modes entre eux. Enfin, les iris réalisent un couplage entre modes de cavités adjacentes. Lors de la synthèse du filtre, la géométrie des iris est déterminée et respectée autant que possible à l'usinage. Par contre, après assemblage du filtre, les techniciens ajustent l'enfoncement des différentes vis

pour obtenir la réponse désirée. Pour fixer les idées, un problème spécifique posé par le CNES (centre de Toulouse) et dont l'étude s'effectue sous contrat avec celui-ci, concerne le réglage d'un filtre passe-bande à huit cavités aux alentours de 11Ghz.

Autour des fréquences de résonance, une bonne approximation des équations de Maxwell est donnée par la solution d'une équation différentielle du second ordre. On aboutit ainsi à un modèle électrique modélisant notre filtre comme une suite de circuits résonnants couplés entre eux électriquement, et chacune des cavités sera modélisée par deux circuits (un par mode), dont la fréquence de résonance représentera la fréquence du mode et dont la résistance modélisera les pertes par courant de surface.

Le filtre peut être vu comme un quadripôle à deux accès lorsque l'on charge une des extrémités par une résistance et qu'on alimente l'autre. On s'intéresse alors au transfert de puissance ainsi qu'à la puissance réfléchie qui définissent sa matrice de répartition S , qui peut être considérée comme la matrice de transfert d'un système dynamique, linéaire, causal, et stable à deux entrées et deux sorties. Ses termes diagonaux $S_{1,1}$, $S_{2,2}$ correspondent à la réflexion, alors que $S_{1,2}$, $S_{2,1}$ correspondent à la transmission de puissance. Ce sont ces fonctions que l'on sait mesurer expérimentalement sur une bande de fréquences de l'axe imaginaire. Pour un modèle parfait, le filtre est rationnel d'ordre 16, et faire le lien entre les $S_{i,j}$ mesurés et les composants de l'équivalent électrique du filtre apparaît comme l'étape-clé du réglage car elle permet de savoir dans quel sens on doit modifier l'enfoncement des vis pour améliorer la réponse. Par ailleurs, ceci est également très utile lors de la synthèse pour analyser les simulations effectuées par intégration numérique des équations de Maxwell et valider le choix du dimensionnement, des composants, en particulier par l'absence de modes parasites. C'est un outil d'identification procurant un tel lien que l'on réalise ici.

En réalité, on ne raisonne pas sur l'analogie électrique lui-même mais sur son équivalent passe-bas, obtenu par linéarisation autour de la fréquence centrale, et qui est de degré deux fois moindre, c'est-à-dire 8, mais dont les paramètres sont complexes.

Nous pouvons résumer la stratégie d'identification comme suit :

- mesure physique de la matrice de répartition du filtre autour de la fréquence de fonctionnement de ce dernier. Ces données nous sont fournies par le CNES sous forme, typiquement, de 800 points mesurés à l'aide d'un vobuloscope sur deux fois la largeur de bande passante, laquelle est de 80Mhz ;
- résolution de problèmes extrémaux bornés en norme H^2 pour les transmissions qui sont nulles à l'infini et en norme de Sobolev pour les réflexions qui sont voisines de 1 à l'infini cf. 3.1.1. Ceci fournit une matrice de répartition de dimension infinie (numériquement de dimension grande) ;
- approximation rationnelle à degré de McMillan fixé (8 en l'occurrence) de cette matrice de répartition en utilisant le logiciel hyperion cf. 3.1.4 et 5.1 ;
- réalisation du transfert ainsi obtenu sous forme d'état, en imposant à la réalisation de vérifier certaines symétries issues de la physique ;
- remontée aux paramètres passe-bas du filtre en cherchant un changement de base qui minimise les couplages non physiques entre cavités. Ceci s'effectue en conjuguant des méthodes de résolution algébriques par intervalles avec des algorithmes de continuation sur le groupe des matrices orthogonales complexes, les changements de base étant de ce type vu les symétries du problème.

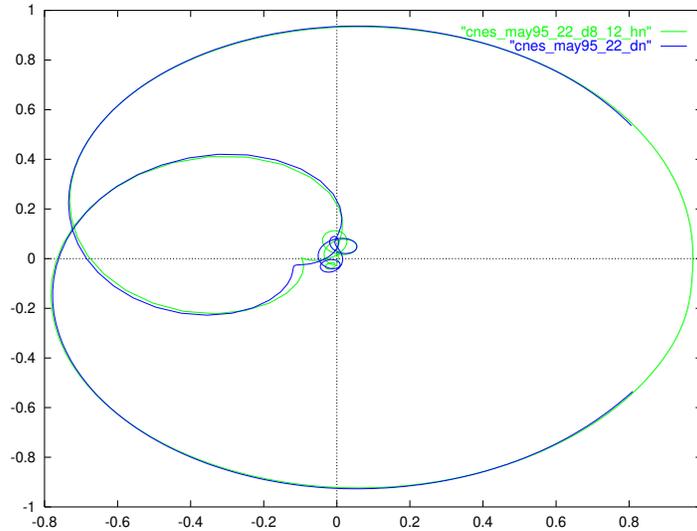


FIG. 4 – Nyquist - Approximation rationnelle (degré de McMillan 8) et données - S22

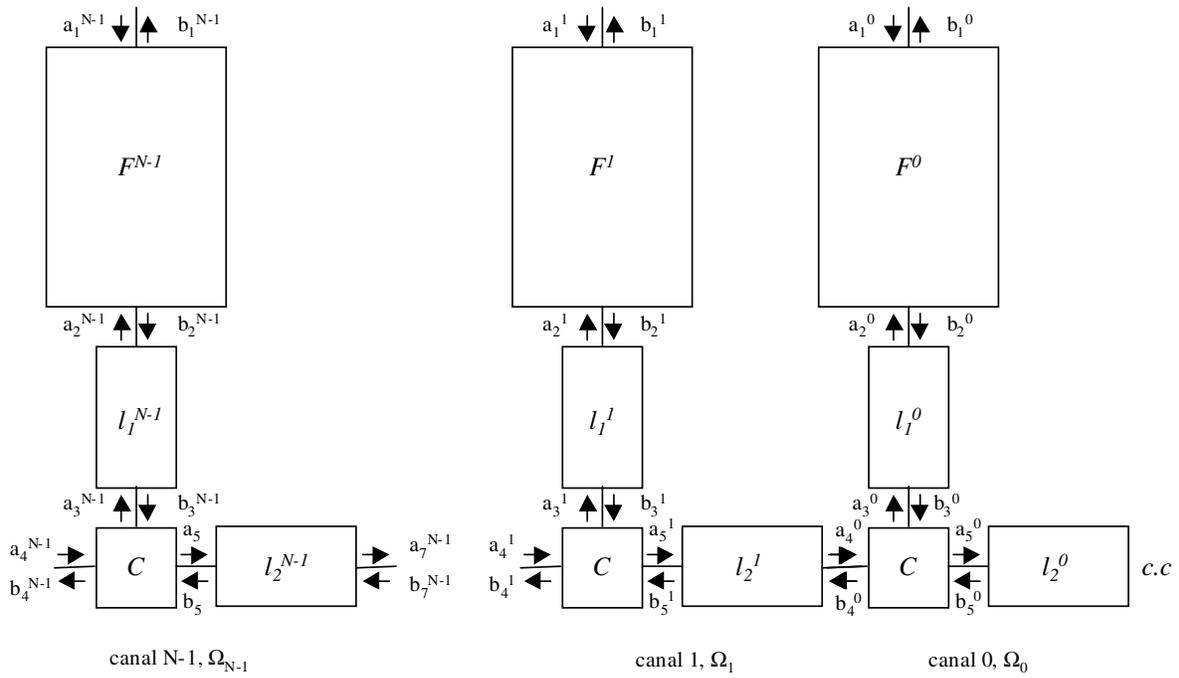
L'approximation obtenue *in fine* est remarquable, ce qui peut être interprété comme la validation de la linéarité du système : l'erreur L^2 aux données ponctuelles est d'environ un pour mille. Ceci est illustré ici par un diagramme de Nyquist en réflexion (fig. 4). Les couplages non physiques sont quant à eux inférieurs à 10^{-2} .

Les considérations précédentes sont valables pour de larges classes de filtres. Ces développements ont permis également la synthèse de filtres dissymétriques, utiles notamment pour les répéteurs, selon une géométrie originale.

Le projet étend aujourd'hui ses investigations, toujours dans le cadre d'une étude commandée par le CNES, au problème de la synthèse d'un multiplexeur de sortie (OMUX) qui intègre plusieurs filtres du type précédent en les couplant sur un guide d'ondes. Il s'agit alors d'établir un modèle de comportement global qui prenne en compte :

- chaque canal, et à l'intérieur de celui-ci le couplage entre le filtre et le « té » qui le connecte au guide commun,
- le couplage entre canaux successifs.

Ce modèle, qui procède en chaînant les matrices de transfert associées aux matrices de répartition, vient d'être validé, son intérêt venant de ce que les interventions des différents paramètres de réglage disponibles (longueurs de canaux et filtres) y sont assez bien découplées. En particulier, le réglage de chaque filtre devrait pouvoir s'effectuer comme dans le cas d'un filtre isolé, décrit ci-dessus. Ceci permet d'envisager une procédure de réglage en plusieurs étapes, d'abord relaxée (canal à canal) puis globale.

FIG. 5 – N filtres sur un multiplexeur.

4.3 Contrôle de satellites, faibles poussées

Participants : Ludovic Faubourg, Andreï Ivanov, Jean-Baptiste Pomet.

Mots clés : mécanique spatiale, satellites, contrôle orbital, télécommunications.

L'utilisation intensive de satellites dans les réseaux de télécommunication motive de nombreuses recherches à l'INRIA, que ce soit dans les domaines de la transmission ou de l'imagerie. Les problèmes de mécanique spatiale et de contrôle de ces satellites sont un peu l'intendance de ces technologies nouvelles. Cette intendance est pesante. Très pesante même puisque, par exemple, le carburant représente plus de la moitié de la masse d'un satellite, soit autant de moins disponible pour la charge réellement utile à la mission (télécommunication, surveillance, imagerie etc..) puisque la masse totale est limitée par la capacité des lanceurs.

Il est donc naturel que l'on ait cherché à développer des moyens de propulsion à rendement très élevé. Les progrès de la physique ont permis de rendre opérationnels des modes de propulsion « électriques » (moteurs ionique, à plasma, etc..) qui ont un rendement bien meilleur, mais en contrepartie une puissance instantanée considérablement plus faible, que les moteurs chimiques couramment utilisés. Ceci pose des problèmes de contrôle difficiles, dont l'étude dans le projet s'organise autour d'une collaboration industrielle avec Alcatel-Space à Cannes, voir section 7.4.

Soulignons que la mécanique spatiale est un domaine de recherche très riche qui pose de nombreux autres problèmes de contrôle délicats, tous rendus particulièrement cruciaux par les conditions extrêmes, et la très longue durée de vie exigée d'un satellite.

4.4 Optique non-linéaire

Participants : Jean-Baptiste Pomet, Fabien Seyfert.

Mots clés : Optique, régénération 3R, fibres optiques, réseaux, télécommunications.

Le projet s'intéresse depuis peu, à la suite de contacts avec la société Alcatel R&I, au contrôle de régénérateurs « tout optique » de signaux optiques. Ces régénérateurs reçoivent des signaux dégradés par leur propagation sur une longue distance dans une fibre optique, et doivent restituer un signal amplifié et surtout plus « carré ». Le principe de fonctionnement est la formation d'interférences constructives ou destructives selon que le signal entrant est 0 ou 1. Ces interférences sont le fruit d'un déphasage induit par des composants optiques non linéaires, ces non-linéarité ayant un effet de seuil.

Un contrôle fin est nécessaire pour produire ces interférences, d'une part à cause des variations de puissance du signal entrant, d'autre part à cause de la dynamique des composants eux-mêmes.

4.5 Transformations et équivalence des systèmes non-linéaires

Participants : Laurent Baratchart, Jean-Baptiste Pomet.

Mots clés : planification de trajectoires, robotique mobile, identification.

Les travaux présentés en 3.2.2 se situent assez en amont de la chaîne des applications. Cependant, au-delà du fait que décider si un système donné est linéaire modulo un compensateur adéquat est clairement utile conceptuellement, soulignons que l'utilisation des « sorties plates » pour la planification de trajectoires revêt un grand intérêt, voir par exemple la Conférence Européenne d'Automatique^[MMR97]. De plus, comme indiqué en 3.2, une meilleure compréhension des invariants des systèmes non-linéaires conduirait à des progrès considérables en identification.

4.6 Jeux Dynamiques

Participant : Odile Pourtallier.

Mots clés : réseaux de communication, modélisation, contrôle.

La théorie des jeux permet d'étudier des problèmes où les prises de décisions sont décentralisées, et où les décisions d'un usager interfèrent sur les performances des autres usagers. Deux cas sont à envisager : celui où le nombre d'agents prenant des décisions est « petit », et celui où le nombre d'agents prenant des décisions est « grand » de sorte que l'ensemble des agents peut être approximé par un continuum. Deux types d'équilibres naturels en découlent. Le premier cas suggère de considérer l'équilibre de Nash, tandis que le deuxième cas suggère de considérer l'équilibre de Wardrop. Ces deux situations se rencontrent en particulier dans les réseaux de télécommunications, et l'importance de leur étude provient de l'existence du paradoxe dit « paradoxe de Braess » : l'amélioration d'un réseau (augmentation du nombre de liens de la bande passante de certains liens etc...) peut conduire à la détérioration des performances de tous les usagers. Dans le cadre d'un contrat avec France Telecom R&D, en collaboration avec le projet MISTRAL de l'INRIA-Sophia, on cherche à contraindre la topologie d'un réseau afin d'éviter l'apparition de ce comportement paradoxal et d'améliorer la performance moyenne de tous les utilisateurs, voire d'améliorer la performance de tous les utilisateurs.

5 Logiciels

5.1 Le logiciel hyperion

Participants : José Grimm [correspondant], Fabien Seyfert, Franck Wielonsky.

Le logiciel hyperion est un logiciel d'identification de fonctions de transfert multivariées, linéaires, stables et rationnelles, à partir de mesures fréquentielles partielles. Pour plus de

[MMR97] P. MARTIN, R. M. MURRAY, P. ROUCHON, « Flat Systems », *in: European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses*, G. Bastin, M. Gevers (éditeurs), p. 211-264, 1997.

détails, voir le rapport d'activité de l'année 1997, et les références [Gri00], [2]. Ce logiciel est actuellement utilisé par le CNES et l'IRCOM (voir section 7.1). Notons que le CNES a acheté le droit d'utiliser le logiciel hyperion, que l'IRCOM l'utilise amplement pour la synthèse de divers filtres (à cavités, diélectriques [BBB⁺99], ...).

Pour identifier une fonction F , on procède dans une première phase à sa « complétion analytique ». Dans cette phase, on essaie également d'identifier les retards éventuels et la valeur à l'infini. Ensuite, on utilise la décomposition de Douglas-Shapiro-Shields $F = Q^{-1}C$, et l'on minimise une fonction $\psi(Q)$, où Q est une matrice intérieure de degré de McMillan donné. La fonction $\psi(Q)$, ainsi que ses dérivées première et seconde, sont calculées par application des techniques de différentiation automatique développées dans l'ex-projet SAFIR. Dans le cas scalaire, nous avons développé une version où la distance entre F et $Q^{-1}C$ n'est pas la distance L^2 usuelle, mais une distance pondérée. Pour un description en ligne : <http://www-sop.inria.fr/miaou/hyperion/>.

5.2 Le logiciel RARL2

Participants : Martine Olivi [correspondant], Jean-Paul Marmorat [Ecole des Mines de Paris].

RARL2 (Réalisation interne et Approximation Rationnelle L^2) est un logiciel d'approximation rationnelle (voir section 3.1.4) de systèmes rationnels stables de degré de McMillan donné, au sens de la norme L^2 , écrit en langage interprété Matlab, et utilisant la toolkit « optimization ». Il est profondément apparenté à la fonction ARL2 d'hyperion (voir section 5.1), dont il diffère cependant par son mode de représentation des systèmes : à la représentation polynomiale des transferts d'hyperion, RARL2 substitue la représentation par réalisation interne et, pour paramétrer la classe des systèmes stables de degré donné, il utilise une version en termes de matrices-systèmes de l'algorithme de Schur tangentiel [PHO99]. Une autre différence importante réside dans la normalisation utilisée pour le facteur intérieur, qui modifie la topologie du bord des matrices intérieures de degré donné considérées (le quotient n'est pas le même que celui effectué dans la fonction ARL2 d'hyperion), et pose le problème de trouver, dans cette nouvelle topologie où s'introduit une singularité, une direction faisant baisser le critère lorsque l'on initialise l'algorithme en degré n à partir d'un minimum local de degré $n - 1$; cette question est actuellement à l'étude, et sa résolution permettrait de disposer d'une stratégie pour gravir les degrés et engendrer des minima locaux qui soit parallèle à celle implémentée dans hyperion.

-
- [Gri00] J. GRIMM, « Rational approximation of transfer functions in the hyperion software », *Rapport de recherche n°4002*, INRIA, septembre 2000, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4002.html>.
- [BBB⁺99] L. BARATCHART, S. BILA, D. BAILLARGEAT, M. AUBOURG, S. VERDEYME, P. GULLON, J. GRIMM, S. GENDRAUD, C. ZANCHI, J. SOMBRIN, « Méthode d'optimisation électromagnétique pour la conception automatique de filtres hyperfréquences », in : *11èmes journées Nationales Micro-ondes*, Arcachon, 1999.
- [PHO99] R. PEETERS, B. HANZON, M. OLIVI, « Balanced parametrizations of discrete-time all-pass systems and the tangential Schur algorithm », in : *Proc. of the European Control Conference (cd-rom)*, Karlsruhe (Allemagne), septembre 1999.

Pour une description en ligne : <http://www-sop.inria.fr/miaou/Martine.Olivi/RARL2/rar12.html>.

5.3 Le logiciel RGC (Réalisation interne à géométrie contrainte)

Participants : Fabien Seyfert, Jean-Paul Marmorat.

La stratégie d'identification de filtres modélisables par un schéma électrique développée au sein du projet (*cf.* section 4.2.2) se conclut par une étape visant au calcul des paramètres électriques du filtre considéré. Ceci signifie trouver une réalisation (A, B, C, D) particulière du modèle fourni par l'étape d'approximation rationnelle. Les contraintes que doit satisfaire ce quadruplet sont induites par la géométrie du schéma électrique équivalent et se traduisent typiquement par la nullité de certains coefficients des matrices (A, B, C, D) . Parmi les différentes géométries de couplages rencontrées celle dite en « flèche » [20] présente un intérêt particulier puisqu'elle est unique pour un transfert donné et qu'un algorithme simple permet d'en faire le calcul. C'est cette réalisation que, dans une première étape, calcule le logiciel RGC. Si toutefois la réalisation souhaitée n'est pas en flèche, on peut montrer que celle-ci se déduit de la réalisation en « flèche » par un changement de base orthogonal (complexe en général). Dans ce cas, RGC lance une procédure d'optimisation locale visant à rapprocher la forme flèche de la forme cible par applications successives de changements de base orthogonaux. Ceci problème d'optimisation sur le groupe des matrices orthogonales est non convexe et admet de nombreux minima, locaux mais aussi globaux. En effet, il n'y a pas toujours unicité de la réalisation réalisant le filtre dans la géométrie recherchée. En outre, il est souvent intéressant de connaître toutes les solutions au problème dans la mesure où le concepteur ne peut être certain, dans nombre de cas, de celle qu'il a réalisée, et que parfois même les hypothèses sur l'influence réciproque des modes résonnants ne sont pas suffisamment satisfaites. A l'heure actuelle, hormis le cas particulier de filtres où la géométrie en flèche est la géométrie cherchée (ceci arrive couramment jusqu'au degré 6), le logiciel RGC n'offre aucune garantie quant à l'obtention d'une, et encore moins de toutes, les réalisations satisfaisants aux contraintes prescrites. Des travaux sont en cours pour systématiser cette recherche, *cf.* section 6.9.

6 Résultats nouveaux

6.1 Participation à la création du rapport d'activité

Participant : José Grimm.

Une des nouveautés du rapport d'activité de l'année 2001 concerne la fiche projet (en français et en anglais), donnée sous la forme de deux documents \LaTeX supplémentaires. Nous avons écrit le fichier de classe correspondant, et modifié le script `raweb.pl` : si aucun module n'existe dans la section 2 (présentation générale de l'équipe), la fiche projet en français sera insérée à la place.

En ce qui concerne le rapport de l'année 2002, nous prévoyons une saisie directe en XML et la traduction des documents \LaTeX en XML. Un groupe de travail, formé de M.P. Durollet,

J. Grimm, L. Pierron, et I. Vatton, est chargé de la définition et de la mise en place de ces nouveaux outils.

6.2 Problèmes extrémaux avec contrainte sur la partie imaginaire

Participants : Juliette Leblond, Birgit Jacob [Université de Leeds (Royaume Uni)], Jean-Paul Marmorat [CMA, École des Mines], Jonathan Partington.

Nous avons abordé le problème extrémal suivant, apparenté au problème (P) de la section 3.1.1 dans le contexte hilbertien et analytique $p = 2$ et $N = 0$, mais où la contrainte sur le comportement de l'approximant porte cette fois sur sa partie imaginaire :

Soient $f \in L^2(K)$, $\psi \in L^2(T \setminus K)$ et $M > 0$; on cherche une fonction $g \in H^2$ telle que $\|\text{Im}g - \psi\|_{L^2(T \setminus K)} \leq M$ et telle que $g - f$ soit de norme minimale dans $L^2(K)$.

L'existence et l'unicité de la solution sont établies dans [JLP^{re}] ainsi que les bases d'une procédure de résolution constructive de ce problème. Notons qu'à l'opérateur de Toeplitz qui permet de caractériser la solution de (P) dans le cas $p = 2$ et $N = 0$ s'ajoute ici un opérateur de Hankel. Ce type de contrainte semble particulièrement bien adapté pour les applications aux problèmes inverses du Laplacien, voir section 4.1, dans lesquelles on ne peut pas toujours disposer de la connaissance effective de la partie réelle de la solution sur toute la frontière (mesures de la température ou du potentiel électrique localisées, par exemple).

6.3 Problèmes extrémaux avec contraintes de gabarit ponctuelles

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm, Juliette Leblond, Fabien Seyfert.

L'étude du problème (P') énoncé en section 3.1.1 a été entamée dans le cas $p = 2$, $\psi = 0$, et lorsque la fonction M est dans L^∞ de $T \setminus K$ et bornée inférieurement presque partout par une constante strictement positive. Outre l'existence et l'unicité de la solution, on a prouvé que la contrainte était saturée *point à point* c'est à dire que $|g| = M$ p.p. sur $T \setminus K$, ce qui est peut-être contre-intuitif. On en a tiré des équations au point fixe caractérisant la solution, qui font apparaître d'erechef le résolvant d'un opérateur de Toeplitz, mais avec un multiplicateur qui, cette fois, est une fonction. L'étude de la convergence d'une itération de ces équations est en cours, avec pour but de parvenir à une implémentation au sein du logiciel hyperion. Notons que, si l'on approche le multiplicateur par une fonction en escalier, on retrouve un enchaînement d'équations spectrales semblables à celles actuellement utilisées pour résoudre le problème (P) .

6.4 Estimations asymptotiques pour l'interpolation et l'approximation dans H^2

Participants : Laurent Baratchart, Juliette Leblond, Jonathan Partington.

Dans le cas hilbertien $p = 2$, la solution du problème (P) de la section 3.1.1 pour une

[JLP^{re}] B. JACOB, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON, « Best approximation in Hardy classes with constrained imaginary part », *Linear Algebra and its Applications*, à paraître.

contrainte M constante s'obtient par le biais d'un opérateur de Toeplitz et d'un paramètre lagrangien λ qui rend implicite la dépendance en M . Lorsque λ s'approche de -1 , l'erreur d'approximation sur K tend vers 0 et la contrainte M sur $T \setminus K$ vers l'infini, en général [5]. En approfondissant quelque peu les techniques de diagonalisation des opérateurs de Toeplitz introduites par Rosenblum et Rovnyak, nous avons obtenu cette année des estimées asymptotiques exactes du comportement de M en fonction de l'erreur, ceci dans des classes de Sobolev sur K et également pour des données qui sont traces de polynômes trigonométriques, et plus généralement des traces de fonctions méromorphes^[BGLPre]. Ces résultats indiquent que l'erreur décroît considérablement plus vite, lorsque M croît, si les données ont une extension holomorphe sur un voisinage du cercle unité, ce qui plaide en faveur d'une interpolation des données ponctuelles initiales par des splines, qui ne sont pas holomorphes, afin de mieux détecter les défauts d'analyticité. Si, au contraire, on veut approcher au mieux par une fonction analytique des données dont on sait pertinemment qu'elles ne le sont pas, le même résultat indique que l'on a intérêt à utiliser des formes polynômiales ou rationnelles pour effectuer l'interpolation.

6.5 Approximation rationnelle et méromorphe

Participants : Laurent Baratchart, Martine Olivi, Edward Saff, Fabien Seyfert, Herbert Stahl, Franck Wielonsky.

Lorsque la fonction à approximer est une fonction de Markov, c'est-à-dire la transformée de Cauchy d'une mesure positive dont le support est porté par l'axe réel, il a été démontré voici quelque temps déjà que si le support de la mesure μ qui la définit est inclus dans $] - 1, 1[$ et si cette mesure satisfait la condition de Szegő, il y a un unique point critique (donc un unique meilleur approximant local) en approximation rationnelle de type $(n-1, n)$, dans H^2 du disque unité, pour un ordre d'approximation assez grand [19]; il est également établi que l'on ne peut se passer de la condition de Szegő en général^[BSW99]. Des estimées asymptotiques précises de l'erreur ont été obtenues dans ce cadre [18], ainsi qu'une description du comportement limite des pôles des approximants, à savoir que la mesure de probabilité ayant une masse égale en chaque pôle converge vers la mesure d'équilibre du condensateur formé du cercle unité T et du support de μ . Ces résultats ont été généralisés au cas de l'approximation méromorphe en norme L^p pour $1 < p \leq \infty$ [17], cependant que le cas $p = 1$, qui correspondait au cas de produits de Blaschke de norme $L^2(\mu)$ minimale vient d'être élucidé et est en cours de rédaction^[BPS]. Des liens étroits ont également été mis à jour entre l'approximation méromorphe et les nombres singuliers des opérateurs de plongement de la boule unité de H^p dans $L^p(\mu)$, poursuivant en cela des travaux antérieurs de Fischer et Micchelli [27].

La convergence vers la mesure d'équilibre se généralise au cas où μ est une mesure complexe, cf. section 6.10. Soulignons que le cas d'une fonction qui n'est pas nécessairement de

-
- [BGLPre] L. BARATCHART, J. GRIMM, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON, « Approximation and interpolation in H^2 : Toeplitz operators, recovery problems and error bounds », *Integral Equations and Operator Theory*, à paraître.
- [BSW99] L. BARATCHART, H. STAHL, F. WIELONSKY, « Non-uniqueness of rational best approximants », *J. Comp. and Appl. Math.* 105, 1999, p. 141–154.
- [BPS] L. BARATCHART, V. PROKHOROV, E. SAFF, « Asymptotics for minimal Blaschke products and best L_1 meromorphic approximation of Markov functions », en préparation.

Markov, mais qui est définie comme l'intégrale de Cauchy d'une mesure non nécessairement positive sur un contour non nécessairement réel, est assez général parce qu'il recouvre *grosso modo* celui des singularités de dimension 1. En approximation rationnelle comme en approximation méromorphe, les points critiques sont alors définis par des relations d'orthogonalité non hermitiennes (qui deviennent des vraies relations d'orthogonalité dans le cas de fonctions de Markov), lesquelles peuvent encore être utilisées pour étudier le comportement asymptotique des pôles des approximants. Ceci est la base méthodologique de l'approche développée au sein du projet pour les problèmes inverses du Laplacien, voir section 4.1, section 3.1.3, et section 6.10. Cependant, pour traiter les cas où la géométrie des singularités est complexe, il serait intéressant de mettre au point une méthodologie qui ne dépende pas de manière aussi explicite du comportement de polynômes orthogonaux. Il semble qu'une telle méthodologie puisse être inspirée pour partie de la théorie AAK. En effet, on a établi que le produit par son symétrisé du n -ième vecteur singulier v_n d'un opérateur de Hankel dont le symbole est une l'intégrale de Cauchy d'une mesure ν à support dans le disque unité ouvert n'est autre que la dérivée (complexe) du potentiel de Green de la mesure $v_n^2 d\nu$. Ceci ramène la caractérisation de la mesure limite de comptage des pôles, comme mesure d'équilibre du condensateur formé du cercle unité et du support de ν , à la question de savoir si le vecteur singulier v_n , convenablement normalisé, prend à la limite des valeurs imaginaires pures sur le réfléchi du support de ν . Cette question, qui suggère l'interprétation de l'orthogonalité comme l'annulation d'une transformée de Hilbert, est en cours d'approfondissement.

On a également commencé l'étude d'une généralisation au cas matriciel des résultats ci dessus, en examinant ce que pourrait être la distribution des pôles et l'asymptotique des erreurs en approximation rationnelle H^2 d'un analogue matriciel d'une fonction de Markov, c'est à dire une matrice rationnelle qui est l'intégrale de Cauchy sur un segment réel d'une mesure matricielle à valeurs hermitiennes positives. En particulier, on a cherché si un meilleur approximant serait lui aussi Markov, c'est à dire si ses pôles seraient réels, localisés sur l'enveloppe convexe du support de la mesure de la fonction à approximer, et si les résidus, qui sont de rang 1, sont hermitiens semi-positifs. On a établi que ceci serait correct à condition de prouver la symétrie de l'approximant. Cependant, nous avons obtenu un contre exemple (qui n'est pas Markov cependant) à l'assertion intuitivement satisfaisante selon laquelle le meilleur approximant rationnel à degré de Mc-Millan donné d'une fonction de transfert matricielle symétrique serait lui-même symétrique, de sorte qu'il faudrait obtenir ici une assertion de cet ordre qui soit spécifique au cas Markov pour conclure. La recherche dans cette direction se poursuit.

Par ailleurs, on a entamé l'étude d'un autre type d'approximation rationnelle où, étant donnée une fonction f de l'espace de Hardy du complémentaire du disque unité, on cherche une fonction rationnelle r_n dont le numérateur et le dénominateur sont de degré n et de coefficient dominant 1, qui minimise

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{r_n(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})} \right|^2.$$

On peut toujours supposer que r_n est stable d'inverse stable puisque seul son module intervient dans le critère et ce problème, qui correspond à la version asymptotique, lorsque la longueur de l'échantillon observé croît indéfiniment, de l'identification au maximum de vraisemblance du filtre f par un filtre rationnel de degré n , se trouve ainsi formulé comme un analogue rationnel

naturel des polynômes orthogonaux de Szegő *cf.* section 3.1.5. Outre l'existence, on a montré, à nouveau dans le cas prototypique de fonctions de Markov, que le comportement asymptotique des pôles est encore donné par la mesure d'équilibre de Green, et on a obtenu, toujours par des techniques fondées sur l'analyse asymptotique des polynômes orthogonaux à poids variable, que l'erreur décroît comme le carré de l'erreur associée au problème polynômial (*i.e.* lorsque r_n est remplacée par un polynôme unitaire), ce qui fait jouer à une telle identification le rôle, en un sens, d'un algorithme de Newton. Ces travaux ont donné lieu à communication à CMFT2001.

Enfin, le comportement des pôles d'interpolants diagonaux maximaux de la fonction exponentielle dans le cas complexe, ainsi qu'un asymptotique fin des erreurs associées, ont été exposés dans [23, 24]. Ces résultats sont importants dans la mesure où les meilleurs approximations rationnels de degré donné dans H^2 sont de tels interpolants, et où la connaissance du comportement des pôles et des erreurs est la clef de théorèmes d'unicité pour une fonction, l'exponentielle, qui est le prototype de la fonction entière dont les coefficients de Taylor à l'origine décroissent régulièrement et de manière convexe.

6.6 Paramètres de Schur et réalisations équilibrées.

Participants : Bernard Hanzon [Univ. Libre (VU) d'Amsterdam], Martine Olivi, Ralf Peeters [Univ. de Maastricht], Jean-Paul Marmorat.

La question du paramétrage des matrices intérieures (matrices de fonctions analytiques dans le disque unité, unitaires sur le cercle) de degré de McMillan donné est un point essentiel pour l'approximation rationnelle telle qu'elle est abordée dans le projet (*cf.* section 3.1.4). Dans les paramétrages dits de Schur, la matrice intérieure se calcule par un processus itératif où chaque pas consiste en une transformation linéaire fractionnelle d'une matrice intérieure en une nouvelle matrice intérieure dont le degré s'est accru de 1. On a pu prouver qu'une réalisation équilibrée de la matrice intérieure pouvait être calculée par un processus similaire où des transformations linéaires fractionnaires *ad hoc* agissent sur des « matrices de réalisations » [30]. L'implémentation du logiciel d'approximation rationnelle RARL2, basé sur un paramétrage pour lequel ce calcul est particulièrement simple et robuste, s'est poursuivi, voir section 5.2. Un exposé sur les paramétrages de Schur et leur utilisation en approximation rationnelle a été donné au CMFT2001.

6.7 Nouveaux développements du logiciel hyperion

Participants : José Grimm, Franck Wielonsky.

Le logiciel hyperion consiste en une bibliothèque d'algorithmes dédiés à l'identification de fonctions de transfert, un interprète de commandes de type Lisp et, au-dessus, un interprète de commandes de type Maple.

Dans le cas où la fonction de transfert à identifier est donnée par un grand nombre de coefficients de Fourier, il y a des problèmes d'instabilité numérique. Nous avons construit un exemple où l'utilisation de la double précision n'est pas suffisant, et qui montre qu'il faut au moins de la quadruple précision. Nous avons implémenté cette année une arithmétique en octuple précision, en plus de la quadruple précision. L'implémentation en question est bien sûr

plus efficace, pour ce problème spécifique, que ne le serait l'adaptation de modules du type GMP et MFPR.

Pour valider le logiciel hyperion, nous avons écrit un ensemble de fichiers de tests, qui comprend actuellement de l'ordre de 10 000 lignes, et qui inclut en particulier les tests arithmétiques de Kahan. Ces derniers tests montrent d'une part que notre arithmétique ne respecte pas la notion de *gradual underflow* (nous ne l'avons pas implémentée pour des raisons d'efficacité), mais est conforme par ailleurs à la norme IEEE 754 ; d'autre part, le test indique que l'expression $x^{(x+1)/(x-1)}$, lorsque x est voisin de 1 (à savoir $x = 1 + 0.17^{-76}$) n'est pas calculée avec assez de précision (il n'y a que 7 chiffres exacts en octuple précision).

L'algorithme général d'optimisation a été amélioré. En particulier, hyperion nous renseigne maintenant sur le temps CPU et le nombre d'appel de procédures (calcul de la fonction, de la dérivée de la fonction, de la dérivée seconde, et nombre de changements de cartes), pour chaque appel de l'optimiseur.

L'optimiseur utilise soit une méthode d'intégration, soit une méthode BFGS. Cette dernière méthode a été mise au point cette année. Pour accélérer l'optimisation, une partie de l'algorithme fonctionne en double précision, seule la partie critique est calculée (à la demande de l'utilisateur) en quadruple (ou octuple) précision. Dans les bons cas, on gagne ainsi un facteur 20 en temps.

Nous avons rajouté dans le logiciel un certain nombre d'objets, le plus important étant l'objet fonction de transfert. Cet objet permet trivialement d'obtenir la fonction de transfert à partir d'une réalisation (H, F, G, J) . L'opération inverse est plus compliquée et n'est pas encore implémentée.

6.8 Synthèse de multiplexeurs

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

La matrice de répartition S d'un multiplexeur formé de n filtres est constituée de $(n + 1) \times (n + 1)$ fonctions traduisant les transferts fréquentiels de puissance entre canaux ainsi que de chacun des canaux vers l'entrée du manifold commun (voir figure 5, page 30). Lors de la conception d'un multiplexeur des spécifications dites d'isolation sont données par le client afin de garantir la spécificité fréquentielle de chacun des canaux (chaque canal sélectionne une bande de fréquence). Ces spécifications prescrivent un comportement idéal du module des $S_{i,j}$ sur l'ensemble des fréquences. On désire par exemple que le transfert de puissance du manifold vers un canal soit passant (module=1) dans la bande de fréquences affectée à ce dernier et filtrant (module=0) à l'extérieur. La matrice de répartition d'un OMUX s'obtient par chaînage des matrices de répartition des filtres et guides d'onde ainsi que de celles des jonctions en "t" le constituant ; ceci en fait un objet assez complexe (en particulier ce n'est pas un matrice rationnelle) et c'est pour cela que nous avons choisi de nous intéresser dans un premier temps au problème de la synthèse d'un filtre seul.

Dans ce cadre on s'intéresse aux fonctionnelles suivantes,

$$\psi_p(S) = \left(\int_{-1}^1 |S_{1,1}|^p d\mu + \int_{-\infty}^{1-\epsilon} |S_{1,2}|^p d\mu \int_{1+\epsilon}^{\infty} |S_{1,2}|^p d\mu \right)^{1/p}$$

avec

$$d\mu(w) = \frac{dw}{1+w^2}, \quad p \in [1, \infty], \epsilon > 0.$$

Les filtres considérés sont conservatifs, ce qui indique que pour un filtre échelon idéal *Sid* (*i.e.* passant pour $w \in [-1, 1]$), on a $\psi_p(\text{Sid}) = 0$. Nous nous intéressons à des filtre dont les matrices de répartition appartiennent à un sous ensemble de $R_n^{2,2}$ (matrice 2×2 de degré de MacMillan n , le nombre de modes résonnants du filtre) que nous appellerons H , ce qui donne un sens au problème de minimisation suivant :

$$P_p : \min_{S \in H} \psi_p(S).$$

Sans entrer dans les détails indiquons que les conditions qui caractérisent H sont données par la « physique » des filtres considérés : la symétrie du trajet entre l'accès 1 et 2 impose par exemple $S_{1,2} = S_{2,1}$.

On montre que P_∞ est équivalent au troisième problème de Zolotarev dont on peut exprimer la solution au moyen de fonctions elliptiques. Pour $1 \leq p < \infty$ nous avons montré l'existence d'une solution S'_p à P_p . La propriété suivante est intéressante : les zéros de transmission de S'_p appartiennent à $] -\infty, 1 - \epsilon] \cup [1 + \epsilon, +\infty[$ alors que les zéros de réflexion appartiennent à $[-1, 1]$. Un algorithme de gradient [33] a été programmé pour résoudre P_p en utilisant une paramétrisation de H déjà utilisée dans [Car90]. La procédure prend comme point de départ un élément de H vérifiant la propriété précitée et donne des résultats très satisfaisants.

Forts de cette expérience nous avons généralisé ce critère au cas du multiplexeur et écrit un code d'optimisation associé (sous matlab). Outre la qualité des résultats obtenus c'est aussi la rapidité de leur obtention qui a très favorablement impressionné nos partenaires que sont le CNES et Alcatel : sur un OMUX 5 canaux notre code tourne en 20 minutes alors que les logiciels commerciaux génériques (Agilent) demandent une dizaine d'heures de calcul pour des résultats de moindre qualité.

Un effort de compréhension du problème reste cependant encore à faire pour en obtenir des stratégies applicables à des problèmes de plus grande taille (jusqu'à 20 canaux). La connaissance de conditions nécessaires d'optimalité globale (cf. positionnement des zéros pour un filtre seul) permettrait une initialisation pertinente. Ceci fait l'objet d'une étude contractée avec le CNES, centre de Toulouse. Nous travaillons aussi en partenariat avec Alcatel qui nous fournit des exemples « difficiles » (en leur sens) afin de valider nos algorithmes.

6.9 Identification de coefficients de couplage dans des filtres hyperfréquence

Participants : Laurent Baratchart, José Grimm, Jean-Paul Marmorat [CMA-EMP], Fabien Seyfert.

Alcatel a décidé d'acheter nos outils dans ce domaine (licences pour hyperion, RARL2, RGC). L'utilisation intensive qu'ils veulent en faire dans leur laboratoire a fait surgir un nouveau problème : la présence, dans les données, d'une composante due au retard induit par les

[Car90] M. CARDELLI, *Contributions à l'approximation rationnelle L^2 des fonctions de transfert*, thèse de doctorat, Univ. de Nice - Sophia Antipolis, décembre 1990.

instruments de mesure. Cette composante, si elle n'est pas extraite avant l'étape d'approximation rationnelle, rend impossible le bon déroulement de cette dernière. Deux solutions sont aujourd'hui à l'étude : l'une est *ad hoc* pour surmonter le problème dans le cas des filtres considérés, l'autre est plus générale. Pour la première il s'agit d'une méthode de complétion analytique qui tire explicitement parti du fait que les éléments de la matrice de répartition d'un filtre sont bien modélisés aux hautes fréquences par un polynôme de faible degré en la variable $\frac{1}{s}$. Ceci n'est plus le cas pour des données perturbées par le retard, ce qui permet par essais successifs d'estimer ce retard pour le compenser. Nous avons encore peu d'expérience avec cette manière de faire mais les premiers essais sont très encourageants.

La seconde approche consiste à considérer un nouveau problème extrémal borné faisant intervenir deux normes : la norme L^2 pour mesurer l'écart aux données et la norme infinie pour le contrôle du comportement de l'approximant en dehors de la bande de mesure, cf. section 6.3.

Enfin, les efforts du projet se portent sur la résolution des équations de mise sous forme physique d'une réalisation du filtre à partir de la forme dite "en flèche", voir section 5.3. Ces travaux visent essentiellement à exploiter l'algébricité du problème qui garantit l'existence d'un critère de résolubilité constructif, et à choisir un paramétrage permettant une intervention efficace des méthodes de résolution, soit par intervalles, soit par continuation. Ce point fait l'objet d'une collaboration avec le projet COPRIN de l'INRIA-Sophia, et aussi avec l'action GALAAD. Le but est de décrire toutes les réalisations possibles, dans une géométrie de couplages donnée, de filtres d'ordre important (jusqu'à 10), afin de calculer les paramètres électriques du circuit équivalent qui sont les paramètres de conception des constructeurs.

6.10 Comportement asymptotique de pôles

Participants : Laurent Baratchart, Reinhold Küstner, Edward Saff, Herbert Stahl, Vilmos Totik [univ. Szeged et Acad. des Sciences, Hongrie].

Le point de départ est ici que les dénominateurs des meilleurs approximants rationnels ou méromorphes sur une courbe fermée, disons le cercle unité T pour fixer les idées, sont déterminés par une relation d'orthogonalité qui, lorsque la fonction à approximer se présente comme la somme d'une fonction analytique dans le disque unité D et d'une intégrale de Cauchy sur une courbe γ (lieu des singularités) contenue dans D , permet d'interpréter les dénominateurs comme des polynômes orthogonaux non hermitiens pour une certaine mesure complexe. Lorsque γ est contenue dans l'axe réel, il est établi depuis deux ans que les pôles des meilleurs approximants rationnels dans $L^2(T)$ convergent vers le segment minimal de l'axe réel contenant le support de la mesure, dès lors que celle-ci est quelque peu régulière.

Les conditions sous lesquelles il est établi que ceci a lieu ont été considérablement relâchées cette année^[BKMT02] : on demande que l'argument de la mesure soit à variation bornée, mais on peut autoriser un support quelconque dans $(-1, 1)$, et on a réduit à un niveau très faible les conditions sur la variation totale de la mesure : elle ne doit pas être trop fine, au sens où les points où la densité par rapport à la mesure de Lebesgue élevée à toute puissance

[BKMT02] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, F. MANDRÉA, V. TOTIK, « Pole distribution from orthogonality », en préparation, 2002.

inférieure à 1 est nulle forment un ensemble de capacité nulle, c'est le critère Λ^* de Stahl et Totik pour la régularité des polynômes orthogonaux. Ces points peuvent même toucher asymptotiquement le cercle T pourvu que la densité de la mesure près du cercle soit assez faible. Par transformation conforme, ceci contient le cas où γ est un arc géodésique et, partant, celui de fonctions algébriques avec deux points de branchement ; on a ainsi analysé de manière assez précise le comportement des pôles en identification de filtres fractionnaires lorsqu'on pratique l'estimation au minimum de variance^[BK00], ce qui est significatif compte tenu de l'absence de résultats disponibles jusqu'ici lorsque le « vrai système » n'appartient pas à la classe de modèles, cf. section 3.1.5.

De plus, la distribution asymptotique des pôles, si γ ne touche pas T , est alors la distribution d'équilibre du condensateur (T, \mathcal{C}) où \mathcal{C} est l'arc géodésique joignant les points de branchement. Les résultats s'étendent à l'approximation L^p pour $2 \leq p \leq \infty$ ^[BS02], ce qui est important puisque le cas $p = \infty$ se calcule aisément par la théorie AAK classique.

On a également poursuivi l'étude des conditions sous lesquelles une intégrale de Cauchy sur un arc γ , figurant par exemple une fissure dans un domaine plan (cf. section 3.1.3), pouvait se déformer en une intégrale sur un arc géodésique joignant les extrémités. À chaque fois que cela est possible, il découle des résultats précédents que les pôles des meilleurs approximations rationnels ou méromorphes de la « solution complexe » du Laplacien sur le domaine fissuré convergeront, non vers la fissure, mais vers l'arc géodésique joignant ses extrémités, avec une densité plus marquée vers ces extrémités (puisque tel est le cas de la mesure d'équilibre). Ceci fournit d'ores et déjà des renseignements appréciables sur sa localisation. Des conditions géométriques sur la fissure, exprimant essentiellement que sa courbure n'est pas trop grande, et l'assurance d'une certaine lissité des données à la frontière, obtenues en utilisant le fait que l'image des applications conformes normalisées ne peut être trop maigre (théorème de Koebe), ont été développées dans la thèse de F. Mandréa [16], et sont amplifiées dans un article en préparation ^[LMSW]. À cette occasion, il a été établi que le cas de fissures nettement plus générales, par exemple polynomiales par morceaux, se ramène sous des conditions de régularité convenables pour les données à analyser, au cas d'une fonction avec un nombre fini, mais peut-être supérieur à deux, de points de branchement.

On conjecture que, pour un nombre fini de points de branchement, la distribution asymptotique des pôles est la distribution d'équilibre sur le continuum \mathcal{M} contenant ces points qui minimise la capacité du condensateur (T, \mathcal{M}) , voir section 3.1.3. Si cette conjecture s'avère correcte, ce qui semble être le cas numériquement, il restera à interpréter le cas limite où le nombre de points de branchement tend vers l'infini en restant sur la courbe γ .

-
- [BK00] L. BARATCHART, R. KÜSTNER, « Pole behaviour in identification », in : *39th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, Sydney (Australie), décembre 2000.
- [BS02] L. BARATCHART, F. SEYFERT, « An L^p analog to AAK theory », à paraître dans *Journal of Functional Analysis*, 2002.
- [LMSW] L. BARATCHART, F. MANDREA, E. SAFF, F. WIELONSKY, « Asymptotic behaviour of poles of rational and meromorphic approximants: Application to 2D inverse problems for the Laplacian », en préparation.

6.11 Fonctions de Lyapunov contrôlées

Participants : Jean-Baptiste Pomet, Ludovic Faubourg.

Les travaux doctoraux de Ludovic Faubourg s'inscrivent dans le programme de recherche plus général sur les fonctions de Lyapunov contrôlées décrit en section 3.2.1. Sa thèse [15], soutenue en décembre, explore l'approche suivante : partir d'objets qui sont « presque » des fonctions de Lyapunov contrôlées, et qui sont explicitement constructibles, ou tout au moins descriptibles, pour les déformer, de manière constructive, en fonctions de Lyapunov contrôlées, ou au contraire, le cas échéant, montrer qu'une telle construction n'est pas possible.

Une première partie concerne certains systèmes naturellement conservatifs pour une fonction « énergie ». On a montré que, par déformation explicite de cette fonction, on peut construire une fonction de Lyapunov contrôlée, et donc une loi de commande associée à une fonction de Lyapunov *stricte*. Les résultats essentiels sont parus dans [FP00]. Il est à noter que ces constructions ont beaucoup d'intérêt, et des implications sans doute importantes qui seront exploitées, croyons-nous, dans l'étude de nature applicative commandée par Alcatel Space Industries (voir section 7.4), où un choix est laissé entre une utilisation de techniques de commande optimale ou de stabilisation.

La seconde partie exploite une autre idée : partir de fonctions qui ne sont pas suffisamment lisses mais ont des propriétés proches de celles de fonctions de Lyapunov contrôlées —un exemple type est la fonction valeur de certains problèmes de contrôle optimal— et examiner la possibilité de les lisser pour obtenir de véritables fonctions de Lyapunov contrôlées. Les résultats obtenus n'ont pas la nature constructive de ceux évoqués plus haut et sont plus préliminaires.

Ludovic Faubourg débutera en 2002 un post-doc CNES de deux ans à l'université de Bourgogne.

6.12 Linéarisation topologique

Participants : Laurent Baratchart, Monique Chyba [UC Santa Cruz (USA)], Jean-Baptiste Pomet.

Ce travail a été initié en 1999 lors du séjour post-doctoral de Monique Chyba. Le résultat principal, développé dans une publication en préparation, mais déjà présenté lors de conférences [26], dit la chose suivante : si un système est équivalent à un système linéaire commandable via une transformation bi-continue (un homéomorphisme local dans l'espace état-commande), alors il est *aussi* équivalent à ce même système linéaire commandable via une transformation aussi différentiable que le système lui-même (un difféomorphisme local dans l'espace état-commande). Au passage, un certain nombre de résultats généraux sur les transformations conjuguant deux systèmes quelconques ont été établis. Reste cependant ouvert le problème de savoir si le résultat (équivalence topologique implique équivalence différentiable)

[FP00] L. FAUBOURG, J.-B. POMET, « Control Lyapunov functions for homogeneous "Jurdjevic-Quinn" systems », *Control, Optimization, and the Calculus of Variations (COCV)* 5, 2000, p. 293–311, <http://www.edpsciences.com/cocv/>.

reste vrai lorsque l'on n'impose pas que l'un des systèmes est linéaire mais qu'on le suppose seulement analytique, par exemple.

Ce résultat négatif, *ie* l'impossibilité topologique de linéariser localement en général, pose la question suivante, importante pour la modélisation de systèmes commandés, et dont l'énoncé est un peu piquant : existe-t-il des différences qualitatives locales de comportement entre un système non-linéaire et son approximation linéaire si celle-ci est commandable ? Un résultat positif aurait impliqué que de telles différences n'existent pas.

6.13 Équivalence topologique

Participants : Marc Breton, Jean-Baptiste Pomet, Emmanuel Trélat [Université Paris XI].

Le résultat évoqué à la section 6.12 invite à se demander si deux systèmes —on ne suppose plus que l'un d'eux est un système linéaire commandable— équivalents via une transformation bi-continue (un homéomorphisme local dans l'espace état-commande) sont aussi, en général, équivalents via une transformation aussi différentiable que les deux systèmes.

Nous n'avons pu produire de contre-exemples, et le stage de Marc Breton a été l'occasion de mettre en évidence le fait que de nombreux invariants différentiels sont en fait aussi des invariants topologiques. Une partie de ce travail provient d'idées suggérées par Emmanuel Trélat. Une publication commune verra le jour en 2002.

6.14 Approximation des équilibres de Nash pour les Jeux dynamiques

Participants : Eitan Altman [projet MISTRAL], Alain Haurie [Université de Genève (Suisse)], Odile Pourtallier.

On a continué l'étude des approximations des équilibres ou ϵ -équilibre de Nash à un rythme réduit. On a poursuivi en particulier l'étude des approximation des équilibres dans le cadre des jeux linéaires quadratiques, en cherchant à utiliser des résultats obtenus dans le cadre des approximations dans les jeux statiques.

6.15 Application de la théorie des jeux dans les réseaux

Participants : Eitan Altman [projet MISTRAL], Rachid Elazouzi, Odile Pourtallier, Hisao Kameda [Université de Tsukuba (Japon)], Tania Jimenez [Université de Merida (Venezuela)].

L'ouverture récente de certains réseaux (télécommunication par exemple) à la concurrence entraîne des modifications dans l'utilisation et la conception de ceux-ci. En effet, dans le cas d'un réseau utilisé et conçu par un unique agent dans le but d'optimiser certaines performances, (délai moyen ou probabilité de perte par exemple), les problèmes d'utilisation optimale (par le choix du routage) et de la conception optimale (par le choix des liens du réseaux et de leurs capacités) sont des problèmes d'optimisation.

Dans un contexte économique concurrentiel, les réseaux sont utilisés par un nombre fini d'agents qui cherchent à les utiliser au mieux de leurs intérêts individuels. Il est clair que dans ce

contexte, les performances escomptés par un utilisateur dépendent non seulement de ses choix propres, mais aussi des choix de tous les autres utilisateurs du réseau. Nous sommes typiquement dans un contexte de jeu à somme non nulle. L'équilibre de Nash constitue alors un comportement raisonnable des utilisateurs.

On a poursuivi l'étude des phénomènes, dits paradoxes de Braess, où une augmentation des capacités du réseau (par l'ajout de liens nouveaux par exemple) entraîne dans un contexte concurrentiel, une détérioration des performances des utilisateurs.

Une difficulté importante dans l'utilisation de la théorie des jeux dans le contexte des réseaux (et de façon plus générale, pour les applications sortant du cadre des jeux à somme nulle), réside dans la difficulté de calculer les équilibres. En particulier cela limite grandement la complexité des réseaux dont on peut calculer pratiquement les performances. Pour pouvoir étendre ces méthodes de calcul, on s'est intéressé à des réseaux symétriques : chaque utilisateur à la même vision du réseau. On a montré que, sous certaines hypothèses, les équilibres sont symétriques. En particulier cela permet de réduire le nombre d'inconnues à déterminer de façon très importante, et nous amène à rechercher les zéros d'une fonction. On peut pour cela utiliser des techniques numériques classiques. Ces résultats permettent d'étudier des réseaux qui peuvent être de grande taille, et donc plus proches de la réalité.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Contrat CNES-IRCOM-INRIA

Contrat n° 101E0542 / 00 41604011

Dans le cadre d'un contrat qui lie le CNES, l'IRCOM et l'INRIA, dont l'objectif est de réaliser un ensemble logiciel pour l'identification et la conception de dispositifs hyperfréquences, le travail de l'INRIA a porté sur les points suivants :

- modélisation et analyse algorithmique du réglage d'un IMUX, cf. section 4.2.2.
- étude de la structure et du calcul des paramètres de couplage associés aux paramètres physique de filtres hyperfréquence à géométrie donnée (cf. section 6.9) ;
- accélération du logiciel hyperion.
- modélisation et analyse algorithmique du réglage d'un OMUX, cf. section 4.2.2.

Ce contrat s'accompagne de la mise à disposition de la version prochaine du logiciel hyperion aux deux partenaires.

7.2 Contrat Alcatel Space Industries (Toulouse)

Vente d'une license intéressant les logiciels hyperion, RARL2 et RGC.

7.3 Contrat France Telecom R&D-INRIA

Il s'agit d'un contrat de recherche de trois ans, qui a débuté début 2001. C'est un contrat impliquant les deux projets INRIA, MISTRAL et MIAOU. Il s'agit d'utiliser des modèles de théorie des jeux pour analyser les performances de réseaux de télécommunication, dans un contexte concurrentiel.

7.4 Contrat Alcatel Space Industries (Cannes)

Il s'agit d'un contrat de recherche de trois ans, qui débute à la fin 2001, sur les problèmes évoqués à la section 4.3.

7.5 Convention AQUAE

Il s'agit d'une Action Inter-organisme Cemagref-INRA, dans laquelle l'INRIA participe en tant qu'équipe partenaire. Titre : « Durabilité et gestion quantitative de la ressource en eau : commande de systèmes à retard ». La participation (modeste) du projet MIAOU est une collaboration avec le CEMAGREF à Montpellier, sur la modélisation de biefs de rivière, en vue de l'automatisation de la gestion de systèmes barrage-rivière pour l'irrigation.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Comités Scientifiques

O. Pourtallier est membre du bureau de l'ISDG (International Society for Dynamic Games).

L. Baratchart est membre du bureau éditorial de la revue *Computational Methods in Function Theory*.

8.2 Actions financées par la commission européenne

Le projet fait partie du réseau TMR (n°ERB FMRX T98 0206) *European Research Network on System Identification* (ERNSI), voir <http://www.cwi.nl/~schuppen/ernsi/ernsihp.html>.

Le projet fait partie du réseau TMR (n°ERB FMRXCT-970137) *Nonlinear Control Network*, voir <http://www.supelec.fr/lss/NCN/>. « Membre permanent » pour le projet : J.-B. Pomet.

Le projet fait partie du « multi partner training site » *Control Training Site*, voir <http://www.supelec.fr/lss/NCN/>.

Le projet fait partie du groupe de travail en théorie des systèmes du consortium ERCIM, voir <http://www.ladseb.pd.cnr.it/control/ercim/control.html>.

8.3 Relations bilatérales internationales

Une action intégrée de coopération avec les universités d'Amsterdam et de Maastricht est en cours. Elle porte sur les paramétrisations de Schur, les réalisations balancées, et leurs applications à la théorie des systèmes (voir section 6.6).

Une convention NSF-INRIA portant sur la collaboration avec E.B. Saff, V. Totik et E. Rachmanov du *Center for Constructive Approximation* à Tampa (USA) est en cours ; elle porte sur la théorie de l'approximation dans le domaine complexe et son utilisation en traitement du signal et en contrôle non destructif.

8.4 Visites de chercheurs étrangers

- Daniel Alpay, université Ben Gourion, Beer-Sheva (Israël), deux jours en octobre.
- Amel Ben Abda, ENIT, Tunis (Tunisie), une semaine en janvier.
- Bernhard Beckermann, université de Lille, trois jours en janvier
- Bernard Bonnard, université de Bourgogne, une semaine en mars.
- Slim Chaabane, université de Sfax (Tunisie), 2 semaines décembre
- Bernard Hanzon, université libre d'Amsterdam (Pays Bas), et Ralf Peeters, université de Maastricht (Pays Bas), deux fois une semaine en avril-mai et en juin.
- Jonathan Partington, université de Leeds (Royaume Uni), une semaine en janvier et en août.
- Rik Pintelon, Johan Shoukens et Yves Rolain, Vrije universiteit Brussels (Belgique), deux jours en janvier.
- Christophe Prieur, université de Paris XI, trois jours en novembre.
- Emmanuel Trélat, université de Bourgogne, trois jours en mai.
- Jan Willems, université de Groningue (Pays Bas), une journée en juillet.

9 Diffusion de résultats

9.1 Enseignement universitaire

Cours Odile Pourtallier a enseigné un cours de théorie des jeux et un cours d'optimisation aux étudiants du Mastère OSE (Optimisation des systèmes énergétiques) de l'École des mines de Paris, un cours d'optimisation aux étudiants du DESS IMAFA de l'université de Nice Sophia Antipolis.

Encadrements de stages

- David Avanesoff, « Sur la platitude des systèmes à quatre états et deux entrées », stage de fin d'études, et de DEA, de l'École Centrale de Lille, avril à août, responsable J.-B. Pomet.
- Marc Breton, « Conjugaison Topologique des systèmes contrôlés », stage de fin d'études, et de DEA, de l'École Centrale de Lille, avril à août, responsable J.-B. Pomet.
- Fehmi Ben Hassen, « Localisation de sources ponctuelles par approximation rationnelle et méromorphe », stage de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), responsables L. Baratchart, J. Leblond.
- Ali El Moussawi, « Optimisation de filtres : Approche en norme infinie et en norme L^p , étude théorique et simulation sous MATLAB, stage de l'École des Mines de Paris, responsables F. Seyfert, J.-P Marmorat, L. Baratchart
- Moez Kallel, « Sur la détermination d'une fissure par des techniques d'approximation analytique et méromorphes depuis des données partielles », stage de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), décembre, responsable J. Leblond.

Encadrements de thèses en cours :

- David Avanesoff, « Linéarisation dynamique des systèmes non linéaires », débutée en octobre, responsable J.-B. Pomet.

- Stéphane Crépey, « Contribution à des méthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux différentiels », soutenue en janvier 2001, responsable O. Pourtallier
- Ludovic Faubourg, « Construction de fonctions de Lyapunov contrôlées et stabilisation non-linéaire », soutenue le 13 décembre.
- Imen Fellah, « Complétion de données dans les classes de Hardy et applications aux problèmes inverses », responsable J. Leblond, en co-tutelle avec M. Jaoua (ENIT, Tunis).
- Andreï Ivanov, « Commande de satellites en faible poussée », débutée en octobre, responsable J.-B. Pomet.
- Reinhold Küstner, « Comportement asymptotique des pôles d'approximants méromorphes et polynômes orthogonaux non-hermitiens ».
- Frédéric Mandréa, « Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphes : applications aux problèmes inverses du Laplacien 2D », soutenue en janvier.

9.2 Animation de la communauté scientifique

F. Wielonski est détaché comme enseignant à l'Université de Lille (USTL) pour un an.

Un séminaire « Commande et Identification » dont l'assistance regroupe des chercheurs sur ce thème à l'INRIA, au CMA (École des Mines de Paris) et à l'I3S (CNRS) est organisé par le projet. Contact : J.-B. Pomet.

9.3 Participation à des colloques, séminaires, invitations

J. Leblond a été invitée à donner un exposé au séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Univ. Paris VI (janvier), au séminaire du CMAP de l'École Polytechnique (avril)

L. Baratchart et J. Leblond ont exposé aux rencontres Nice-Toulon-Marseille sur les Problèmes Inverses, à Sophia-Antipolis (mai).

L. Baratchart, R. Küstner, M. Olivi et F. Wielonsky ont présenté des exposés au CMFT 2001 à Aveiro (Portugal), du 25 au 29 juin. Les titres en étaient respectivement «On rationals of minimum L^2 deviation », «Poles distribution from non Hermitian orthogonality», «On the Schur parametrizations of inner matrix-valued functions and their use in rational approximation », «Rational approximation to the exponential function with conjugate interpolation points»

L. Baratchart, M. Olivi et J.-B. Pomet ont participé au workshop ERNSI (réseau TMR, voir section 8.2) à Cambridge (Royaume Uni), 17-19 Septembre.

L. Baratchart et F. Wielonski ont participé à la 6^e «Conf. on approximation and optimization in the Caribbean» à Guatemala City (Guatemala), du 25 au 30 mars. Les titres des exposés étaient respectivement «Rational Approximation of transfer functions» et «Markov functions and matrices in system theory»

F. Wielonski a présenté un exposé à la «Conf. on numerical algorithms» qui s'est tenue à Marrakesh (Maroc) du 1^{er} au 5 octobre. Le titre de l'exposé était «Inverse Problem for the laplacian, asymptotic behavior of poles of rational and meromorphic approximants».

F. Wielonski a été invité pour une visite d'une semaine au TFH Berlin, en février.

L. Baratchart a été invité deux semaines à l'USF (Tampa, Floride) et une semaine à l'ENIT (Tunis).

Voir Comore pour les autres participations d'Odile Pourtallier.

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] L. BARATCHART, M. CARDELLI, M. OLIVI, « Identification and rational L^2 approximation : a gradient algorithm », *Automatica* 27, 1991, p. 413–418.
- [2] L. BARATCHART, J. GRIMM, J. LEBLOND, M. OLIVI, F. SEYFERT, F. WIELONSKY, « Identification d'un filtre hyperfréquence par approximation dans le domaine complexe », *Rapport technique n°RT-219*, Inria, 1998, <http://www.inria.fr/rrrt/rt-0219.html>.
- [3] L. BARATCHART, J. LEBLOND, F. MANDRÉA, E. SAFF, « How can meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacian ? », *Inverse Problems* 15, 1999, p. 79–90.
- [4] L. BARATCHART, J. LEBLOND, J. PARTINGTON, « Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle », *Constructive Approximation* 12, 1996, p. 423–435.
- [5] L. BARATCHART, J. LEBLOND, « Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p < \infty$ », *Constructive Approximation* 14, 1998, p. 41–56.
- [6] L. BARATCHART, M. OLIVI, « Critical points and error rank in best H^2 matrix rational approximation of fixed McMillan degree », *Constructive Approximation* 14, 1998, p. 273–300.
- [7] L. BARATCHART, E. B. SAFF, F. WIELONSKY, « A criterion for uniqueness of a critical point in H^2 rational approximation », *Journal d'Analyse* 70, 1996, p. 225–266.
- [8] L. BARATCHART, F. WIELONSKY, « Rational approximation in the real Hardy space H_2 and Stieltjes integrals : a uniqueness theorem », *Constructive Approximation* 9, 1993, p. 1–21.
- [9] P. FULCHERI, M. OLIVI, « Matrix rational H^2 -approximation : a gradient algorithm based on Schur analysis », *SIAM J. on Control & Optim.* 36, 1998, p. 2103–2127.
- [10] J. LEBLOND, M. OLIVI, « Weighted H^2 approximation of transfer functions », *Math. of Control, Signals & Systems (MCSS)* 11, 1998, p. 28–39.
- [11] J.-B. POMET, « Explicit Design of Time-Varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems without Drift », *Syst. & Control Lett.* 18, 1992, p. 147–158.
- [12] J.-B. POMET, « On Dynamic Feedback Linearization of Four-dimensional Affine Control Systems with Two Inputs », *Control, Optimization, and the Calculus of Variations (COCV)* 2, juin 1997, p. 151–230, <http://www.edpsciences.com/cocv/>.

Livres et monographies

- [13] E. ALTMAN, O. POURTALLIER (éditeurs), *Advances in dynamic games and applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001, Papers from the 8th International Symposium on Dynamic Games and Applications held in Maastricht, July 5–8, 1998.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

- [14] S. CRÉPEY, *Contribution à des méthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux dynamiques*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, janvier 2001.

- [15] L. FAUBOURG, *Construction de fonctions de Lyapunov contrôlées et stabilisation non-linéaire*, thèse de doctorat, Univ. de Nice - Sophia Antipolis, décembre 2001.
- [16] F. MANDRÉA, *Comportement asymptotique des pôles d'approximants rationnels et méromorphes : applications aux problèmes inverses du Laplacien 2D*, thèse de doctorat, Univ. de Nice - Sophia Antipolis, janvier 2001.

Articles et chapitres de livre

- [17] L. BARATCHART, V. PROKHOROV, E. SAFF, « Best meromorphic approximation of Markov functions on the unit circle », *Foundations of Constructive Math* 1, 4, 2001, p. 385–416.
- [18] L. BARATCHART, H. STAHL, F. WIELONSKY, « Asymptotic error estimates for L^2 best rational approximants to Markov functions », *J. Approx. Theory* 108, 1, 2001, p. 53–96.
- [19] L. BARATCHART, H. STAHL, F. WIELONSKY, « Asymptotic uniqueness of best rational approximants of given degree to Markov functions in L^2 of the circle », *Constr. Approx.* 17, 1, 2001, p. 103–138.
- [20] S. BILA, D. BAILLARGEAT, M. AUBOURG, S. VERDEYME, P. GUILLON, F. SEYFERT, J. GRIMM, L. BARATCHART, C. ZANCHI, J. SOMBRIN, « Direct Electromagnetic Optimization of Microwave Filters », *IEEE Microwave Magazine for the Microwave & Wireless Engineer* 1, 2, mars 2001.
- [21] J. GRIMM, « Complexity Analysis of Automatic Differentiation in the Hyperion Software », in : *Automatic Differentiation : From Simulation to Optimization*, G. Corliss, C. Faure, A. Griewank, L. Hascoët, et U. Naumann (éditeurs), *Computer and Information Science*, Springer, New York, 2002, ch. 36, p. 291–296.
- [22] J. LEBLOND, E. SAFF, F. WIELONSKY, « Weighted H_2 rational approximation and consistency properties », *Numerische Mathematik*, 2002, version électronique : mai 2001, <http://dx.doi.org/10.1007/s002110100281>.
- [23] F. WIELONSKY, « Rational approximation to the exponential function with complex conjugate interpolation points », *J. Approx. Theory* 111, 2, 2001, p. 344–368.
- [24] F. WIELONSKY, « A Rolle's theorem for real exponential polynomials in the complex domain », *J. Math. Pures Appl. (9)* 80, 4, 2001, p. 389–408.

Communications à des congrès, colloques, etc.

- [25] E. ALTMAN, R. ELAZOUZI, O. POURFALLIER, « Avoiding Paradoxes in Routing Games », in : *Seventeenth International Teletraffic Congress*, Salvador (Brasil), décembre 2001.
- [26] L. BARATCHART, M. CHYBA, J.-B. POMET, « Topological versus Smooth Linearization of Control Systems », in : *Contemporary Trends in Non-linear Geometric Control Theory and its Applications.*, A. Anzaldo-Meneses et al. (éditeurs), World Scientific Publishing Co., 2002. Voir aussi *rapport de recherche n° 4224*, INRIA, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4224.html>.
- [27] L. BARATCHART, V. PROKHOROV, E. SAFF, « On Hankel operators associated with Markov functions », in : *Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics, Proceedings of IWOTA 2000, Bordeaux (France)*, A. A. Borichev, N. K. Nikolski (éditeurs), *Operator Theory : Advances and Applications*, 129, Birkhäuser Verlag, p. 57–69, 2001.
- [28] I. CHALENDAR, J. LEBLOND, J. R. PARTINGTON, « Approximation problems in some holomorphic spaces, with applications », in : *Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics, Proceedings of IWOTA 2000, Bordeaux (France)*, A. A. Borichev, N. K. Nikolski

- (éditeurs), *Operator Theory : Advances and Applications*, 129, Birkhäuser Verlag, p. 143–169, 2001.
- [29] H. KAMEDA, O. POURTALLIER, « Cooperative Optimization in Symmetric Network system », in : *IFAC Symposium , Modeling and Control of Economic*, Klagenfurt (Austria), septembre 2001.
- [30] R. PEETERS, B. HANZON, M. OLIVI, « Linear Fractional Transformations and Balanced Realization of Discrete-Time Stable All-Pass Systems », in : *1st IFAC Symposium on System Structure and Control*, Prague (Rép. Tchèque), août 2001.

Rapports de recherche et publications internes

- [31] A. BEN ABDA, M. KALLEL, J. LEBLOND, J.-P. MARMORAT, « Identification de fissures droites depuis des mesures frontière incomplètes », *Rapport de recherche n°4153*, INRIA, mars 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4153.html>.
- [32] S. CHAABANE, M. JAOUA, J. LEBLOND, « Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes », *Rapport de recherche n°4295*, INRIA, octobre 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4295.html>.
- [33] A. EL MOUSSAWI, « Optimisation de filtres », *Rapport de stage*, Ecole des Mines, juin 2001.