INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

# *Projet NUMOPT*

## *Optimisation Numérique*

### *Rhône-Alpes*

THÈME 4A

Rapport d'Activité

2001

# Table des matières

# 1 Composition de l'équipe

**Responsable scientifique**
Claude Lemaréchal [directeur de recherche]
**Assistante de projet**
Françoise de Coninck [commune avec IS2, Sherpa]
**Personnel Inria**
François Oustry [chargé de recherche (mis en disposition depuis le 1 VIII)]
Pierre-Brice Wieber [chargé de recherche (depuis le 1 X)]
**Chercheur post-doctorant**
Aris Daniilidis [(depuis le 1 X)]
**Chercheur doctorant**
Philippe Meurdesoif [boursier DGA (jusqu'au 31 X)]
**Stagiaires**
Vincent Guigues [Ensimag 3ème année, DEA Math Appli, mars-août]
Jérôme Malick [Ensimag 3ème année, DEA Math Appli, mars-juin]
Coralie Triadou [Ensimag 3ème année, DEA Rech. Op. & Comb., mars-avril]

# 2 Présentation et objectifs généraux

Numopt s'intéresse aux algorithmes d'optimisation numérique dans leurs divers aspects :
- *Recherche* de type fondamental, pouvant être motivée par des applications de pointe, ou concerner des sujets considérés comme importants par la communauté scientifique internationale ;
- *Développement* d'algorithmes d'optimisation, en vue non pas de problèmes particuliers mais de grandes classes de problèmes ;
- *Applications*, c'est-à-dire assistance à des partenaires industriels ou venant d'autres secteurs de la recherche, sur des problèmes spécifiques auxquels ils sont confrontés.

D'une façon générale, le contenu scientifique de nos travaux s'articule surtout autour des points privilégiés suivants : optimisation non différentiable, optimisation semi-définie positive, liens entre optimisation combinatoire et continue.

# 3 Fondements scientifiques

**Mots clés** : optimisation, algorithme numérique, convexité, relaxation lagrangienne, relaxation SDP, optimisation semi-définie positive, contraintes quadratiques.

Ce projet concerne la minimisation numérique d'une fonction $f$ de $n$ variables sur un domaine $D \subset R^n$, soit

$$\min f(x)\,, \quad \text{avec } x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in D\,. \tag{1}$$

Divers cas de figure relèvent plus particulièrement de nos compétences. Leur énumération ci-dessous suit l'ordre décroissant de niveau théorique.

1. Cas où les dérivées premières de $f$ sont discontinues. Pour ces problèmes, des algorithmes existent (méthodes de *faisceaux*, méthode du centre analytique), et sont implémentés et appliqués à des problèmes d'origines de plus en plus diverses. Nos recherches portent sur les possibilités d'accélération de ces algorithmes, ce qui implique de généraliser convenablement la notion de *second ordre* en un point où les dérivées premières n'existent pas.
2. *Problèmes combinatoires*, où $D$ est un ensemble fini, typiquement un sous-ensemble de $\{0,1\}^n$. Nous n'avons pas de compétence particulière dans ce vaste domaine ; mais il se trouve que *l'analyse convexe* y joue un rôle utile, encore méconnu de la communauté scientifique (*relaxation lagrangienne, relaxation semi-définie positive*). Nous nous plaçons ici à la charnière entre les trois domaines : continu-combinatoire-convexité.
3. Problèmes de valeurs propres, ou encore optimisation *semi-définie positive* (SDP). Ici, $R^n$ est en fait $R^{m(m+1)/2}$, l'espace des matrices symétriques. Typiquement, $f$ est alors la valeur propre maximale (ou, de façon analogue, $f$ est linéaire mais $D$ est l'ensemble des matrices semi-définies positives). Nos travaux ont ici un double aspect ; applicatif d'une part (commande robuste, optimisation combinatoire – point 2. ci-dessus,...) concernant la *relaxation* SDP, et d'autre part méthodologique, résolvant les problèmes SDP par optimisation non différentiable (point 1.), qui vient ainsi complémenter les méthodes de *points intérieurs*.
4. Problèmes plus "classiques" où $D$ est soit l'espace $R^n$ tout entier, soit défini par des *contraintes* $c_i(x) \leq 0$, $f$ et les $c_i$ étant régulières ; éventuellement, $n$ est grand ($10^5$ et plus). Ici, nous jouons le plus souvent un rôle de conseillers, en diverses étapes : modélisation, choix d'une méthodologie, orientation vers les logiciels adaptés (*Modulopt*, projet Estime ou action Mocoa, ou encore bibliothèques externes).

# 4 Domaines d'applications

L'optimisation se présente potentiellement dans tous les secteurs économiques. Dès qu'un outil de simulation est au point, il peut être utilisé pour optimiser le système qu'il simule. Un autre domaine est l'*identification* de paramètres (projets Idopt ou Estime), où l'on doit minimiser l'écart entre des mesures et des prédictions théoriques.

De ce fait, il est impossible de donner une liste exhaustive de domaines d'application. Citons pêle-mêle des applications auxquelles l'Inria a été mêlé dans le passé, éventuellement via le projet Promath[1] : gestion de la production, géophysique, finance, modélisation moléculaire, robotique, productique, réseaux, astrophysique, cristallographie,...

# 5 Logiciels

D'une façon générale, nos logiciels sont distribués de deux façons différentes : d'une part des codes de bibliothèque (type Modulopt), mis à disposition libre ou payante suivant l'utilisation qui en est faite ; d'autre part des logiciels spécifiques, développés pour une application donnée.

[1] Rappelons que Numopt résulte d'un essaimage de l'ancien projet Promath.

Les codes d'optimisation ci-dessous, très utilisés, ont été développés dans le cadre de l'ex projet Promath.

**Code M1QN3** Il s'agit d'un code d'optimisation sans contraintes pour problèmes à très grand nombre de variables ($n \geq 10^3$, a été utilisé pour $n = 10^6$). Techniquement, il utilise un algorithme de BFGS à mémoire limitée avec recherche linéaire de Wolfe (voir [1, § 5.3] pour la terminologie).

**Participants** : Jean-Charles Gilbert [projet Estime – correspondant], Claude Lemaréchal [correspondant].

**Code M2QN1** Code d'optimisation pour (petits) problèmes avec contraintes de bornes uniquement : $D$ est un pavé de $R^n$. Il utilise la méthode de BFGS avec recherche de Wolfe et gestion de contraintes actives.

**Participant** : Claude Lemaréchal [correspondant].

**Code N1CV2** Minimisation sans contraintes d'une fonction convexe (non différentiable), par une méthode de faisceaux de type proximal ([1, Chap.7], [2, Chap.XV]).

**Participants** : Claude Lemaréchal [correspondant], Claudia Sagastizábal [correspondante].

**Modulopt** Outre des codes d'optimisation tels que ceux ci-dessus, la bibliothèque Modulopt comporte des instances de problèmes d'application, réels ou académiques. Elle constitue ainsi un champ d'expérience fonctionnant dans les deux sens : expérimenter un nouvel algorithme sur une batterie de problèmes-tests, ou bien choisir parmi plusieurs codes celui qui s'adapte le mieux à un problème donné.

**Participant** : Claude Lemaréchal [correspondant].

# 6 Résultats nouveaux

L'événement majeur de cette année est le départ de F. Oustry, fondateur de Raise-Partners, une "start-up" dédiée à l'analyse du risque. Par ailleurs, C. Lemaréchal agit activement comme conseiller auprès d'Artelys, la "start-up" dédiée à l'optimisation en général, avec spécialisation en optimisation convexe et relaxation lagrangienne. C'est dans ce double cadre que s'effectue pour l'essentiel le transfert des connaissances du Projet Numopt, lequel se terminera mi-2003.

La présentation de nos activités ci-dessous est faite en procédant du plus théorique au plus appliqué.

### 6.1 Synthèse de portefeuilles robustes

**Participants** : Vincent Guigues, Anatoli Iouditski [projet IS2], François Oustry.

Un portefeuille est robuste si sa constitution est stable par rapport aux perturbations dans les données. Dans le modèle de Markowitz[Mar95], le portefeuille est l'optimum d'une fonction quadratique fortement convexe sur le simplexe unité, sous une contrainte supplémentaire (le rendement) ; disons

$$\min x^\top Qx\,, \quad x \geq 0, e^\top x = 1\,, \quad \rho^\top x \geq \ell\,.$$

Les perturbations peuvent apparaître dans la matrice de covariance $Q$ (toujours définie positive) ou dans la contrainte supplémentaire : $\rho$ et/ou $\ell$. Dans son stage de DEA, V. Guigues a commencé l'étude des propriétés hölderiennes et lipschitziennes de cette solution, suivant[BS00]. De fait, malgré la simplicité de ce problème, sa solution unique n'est pas toujours régulière : une condition de type Slater est requise.

### 6.2 Coloration de graphes

**Participant** : Philippe Meurdesoif.

Ce travail se termine avec la thèse de Ph. Meurdesoif, dont la soutenance est imminente. Outre une justification naturelle de la borne de Karger-Motwani-Sudan[KMS98], une relaxation a été définie suivant les principes de [LO99] (voir rapports d'activité des années précédentes). L'application de ces techniques à divers problèmes d'allocation de fréquences a été précisée.

### 6.3 Projection sur le cône SDP

**Participants** : Claude Lemaréchal, Jerôme Malick, François Oustry.

Dans de nombreuses applications (finance, stabilisation de systèmes dynamiques,...), il est nécessaire de projeter une matrice symétrique donnée sur le cône des matrices semi-définies positives ; des contraintes supplémentaires figurent également dans le problème. C'est ce qui a fait l'objet du stage de DEA de J. Malick. Une démonstration simple par analyse convexe a été donnée du résultat connu[HS95] : pour projeter $M$ sur le cône SDP, il suffit d'"effacer" les valeurs propres négatives dans la décomposition spectrale de $M$. Par ailleurs la dualité est particulièrement bien adaptée aux contraintes suppplémentaires (généralement linéaires). Elle

---

[Mar95] H. Markowitz, « The general mean-variance portfolio selection problem », *in : Mathematical Models in Finance*, S. Howison (éditeur), Chapman & Hall, 1995.

[BS00] J. Bonnans, A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer Verlag, 2000.

[KMS98] D. Karger, R. Motwani, M. Sudan, « Approximate graph coloring by semidefinite programming », *Journal of the ACM 45*, 2, 1998, p. 246–265.

[LO99] C. Lemaréchal, F. Oustry, « Semi-definite relaxations and Lagrangian duality with application to combinatorial optimization », *Rapport de Recherche n° 3710*, INRIA, 1999, soumis à *Siam J. Opt.*

[HS95] U. Helmke, M. Shayman, « Critical points of matrix least squares distance functions », *Linear Algebra and its Applications 215*, 1995, p. 1–19.

donne une fonction duale différentiable, qui peut être minimisée par une méthode de quasi-Newton [1, Chap.3]. La fonction n'ayant pas de Hessien, les bases ont été jetées pour étudier sa "semi-smoothness"[Mif77], menant à des algorithmes superlinéaires à la[PQ93].

Le travail de J. Malick s'est concrétisé par un stage de deux mois chez Boeing à Seattle, pour des problèmes de préconditionnement se prêtant à de telles projections.

### 6.4 Méthode de faisceaux

**Participants** : Claude Lemaréchal, Coralie Triadou.

Depuis le temps qu'elles existent, les méthodes de faisceau sont suffisamment mûres et bien éprouvées pour justifier un développement industriel. Le stage de DEA de C. Triadou, effectué chez Artelys, a consisté en l'écriture d'un code de faisceaux modulaire en C++. Parallèlement, et toujours chez Artelys, se développait un code d'optimisation quadratique adapté[Kiw94,Fra96]. L'ensemble en est maintenant aux premières applications, en particulier sur un problème d'investissement dans les réseaux posé par France-Telecom R&D (ex-Cnet).

### 6.5 Actions d'applications

**Participant** : Claude Lemaréchal.

**Réseaux de télécommunication** Dans le cadre du contrat RNRT Rococo (Recherche Opérationnelle et COntraintes pour la COnception de réseau), C. Lemaréchal a surtout agi comme "conseiller d'appoint" (le sujet de ce contrat étant à la marge des compétences de Numopt). Cela s'est concrétisé par diverses interventions précisant le rôle de la relaxation lagrangienne ou génération de colonnes (les deux techniques étant identiques) dans les problèmes de conception de réseaux.

## 7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

**Participant** : Claude Lemaréchal.

Nous participons au contrat RNRT Rococo (Recherche Opérationnelle et COntraintes pour la COnception de réseau) dont les acteurs principaux sont FT R&D, Ilog et le LRI ; ce contrat doit se terminer début 2002.

Un contrat a également été signé en juillet 2001 avec EDF (Département Mos), qui comporte trois volets :

[Mif77] R. Mifflin, « Semi-smooth and semi-convex functions in constrained optimization », *Siam Journal on Control 15*, 6, 1977, p. 959–972.

[PQ93] J. Pang, L. Qi, « Nonsmooth equations: motivation and algorithms », *Siam Journal on Optimization 3*, 3, 1993, p. 443–465.

[Kiw94] K. Kiwiel, « A Cholesky dual method for proximal piecewise linear programming », *Numerische Mathematik 68*, 1994.

[Fra96] A. Frangioni, « Solving semidefinite quadratic problems within nonsmooth optimization algorithms », *Computational Operational Research 23*, 11, 1996, p. 1099–1118.

- démarrages à chaud dans la méthode de faisceau ;
- valuation des plannings obtenus lors d'une optimisation duale ;
- étude et amélioration des heuristiques primales utilisant le lagrangien augmenté[Coh80].

# 8 Actions régionales, nationales et internationales

**Actions nationales** C. Lemaréchal est trésorier du Groupe Mode de la Smai (D. Azé lui succède depuis juin 2001).

**Invitation de chercheurs étrangers**
- J.Ph. Vial (Univ. Genève, deux mois),
- Madhu Nayyakkankupam (Univ. Iowa, 1 semaine)
- Abdelouahed Hamdi (Univ. Ryhad, 1 semaine)

# 9 Diffusion de résultats

## 9.1 Diffusion de logiciels

Le code d'optimisation N1CV2 a été mis à disposition pour usage académique à :
- Univ. de Clermont Ferrand (Ph. Mahey, tests sur problèmes de production d'énergie) ;
- Univ. d'État de Floride, Tallahassee (I.M. Navon, assimilation de données dans des modèles quasi-variationnels) ;
- Univ. de Florence (M. Corsi, travail universitaire sur la méthode de faisceaux) ;
- Univ. du Maryland, Silver Spring (D.J. Seo, prévision hydrologique).

## 9.2 Animation de la communauté scientifique

C. Lemaréchal est éditeur associé au Siam Journal of Optimization. Cette activité cessera début 2002, C. Sagastizábal lui succédera.

## 9.3 Enseignement universitaire

- Thèse de X. Jonsson, Université de Paris 1 (C. Lemaréchal, rapporteur).

## 9.4 Autres enseignements

- Ensimag 2e année "Optimisation" (C. Lemaréchal, P.B. Wieber, 9h de cours, 18h de TP).
- Cours Artelys "Combinatoire 2", Paris, novembre 01 (3 heures d'intervention).

---

[Coh80] G. Cohen, « Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems », *J. of Opt. Th. & Appl. 32*, 1980, p. 277–305.

### 9.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations

– 5th Workshop on Combinatorial Optimization, Aussois, mars 01 (1 exposé).
– Workshop en l'honneur de M. Padberg, Berlin, octobre 01 (1 exposé invité).
– Stage chez Boeing, Seattle, juillet-août 01.
– Séminaire à l'université d'Avignon.

## 10 Bibliographie

### Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] J. Bonnans, J. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizábal, *Optimisation Numérique : aspects théoriques et pratiques*, Springer Verlag, Paris, 1997.

[2] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer-Verlag, 1993.

### Livres et monographies

[3] J. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Verlag, 2001.

### Articles et chapitres de livre

[4] L. Bacaud, C. Lemaréchal, A. Renaud, C. Sagastizábal, « Bundle methods in stochastic optimal power management : a disaggregated approach using preconditioners », *Computational Optimization and Applications 20*, 3, 2001, p. 227–244.

[5] C. Lemaréchal, F. Oustry, « Growth conditions and $\mathcal{U}$-Lagrangians », *Set-Valued Analysis 9*, 1/2, 2001, p. 123–129.

[6] C. Lemaréchal, F. Oustry, « SDP relaxations in combinatorial optimization from a Lagrangian point of view », *in : Advances in Convex Analysis and Global Optimization*, N. Hadjisavvas et P. Pardalos (éditeurs), Kluwer, 2001, p. 119–134.

[7] C. Lemaréchal, A. Renaud, « A geometric study of duality gaps, with applications », *Mathematical Programming 90*, 3, 2001, p. 399–427.

[8] C. Lemaréchal, « Lagrangian relaxations », *in : Nonsmooth optimization*, M. Jünger et D. Naddef (éditeurs), Springer Verlag, Heidelberg, 2002, à paraître.

### Rapports de recherche et publications internes

[9] J. Malick, « An efficient dual algorithm to solve conic least-square problems », *Rapport de Recherche n°RR-4212*, INRIA, 2001, `http://www.inria.fr/rrrt/rr-4212.html`.

### Divers

[10] V. Guigues, « Synthèse de portefeuilles robustes ; dualité convexe et programmation semi-définie », 2001, rapport de DEA.

[11] C. Triadou, « Méthodes de faisceaux pour l'optimisation de grands systèmes », 2001, rapport de DEA.