INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet OMEGA

Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les mathématiques financières

Lorraine, Sophia Antipolis

THÈME 4B

Rapport d'Activité

2001

Table des matières

OMEGA *est un projet bi–localisé entre les unités de recherches de Nancy et de Sophia Antipolis.*

1 Composition de l'équipe

Responsable scientifique
Denis Talay [DR INRIA]
Responsable permanent à Nancy
Bernard Roynette [Professeur, Université Henri Poincaré]
Assistantes de projet
Dalila Mana [à Sophia Antipolis]
Hélène Zganic [TR INRIA à Nancy]
Personnel INRIA
Mireille Bossy [CR]
Madalina Deaconu [CR]
Antoine Lejay [CR, depuis octobre 2001]
Personnel Université
Axel Grorud [MC, Université de Provence (Marseille) et Ura-CNRS 225, en délégation à l'Inria à partir du 1eroctobre]
Pierre Vallois [Professeur, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Chercheurs doctorants
Christophe Ackermann [allocataire MESR, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Christophe Berthelot [boursier Cifre Bull et INRIA]
Sébastien Chaumont [boursier Dyade]
Ndeye Awa Diop [boursière CIES]
Marie–Pierre Etienne [allocataire MESR, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Samuel Herrmann [allocataire MESR, Université Henri Poincaré (Nancy) jusqu'au 30 septembre 2001]
Sylvain Maire [PRAG, Université de Toulon et du Var]
Miguel Martinez [boursier INRIA]
Etienne Tanré [bourse INRIA – Région Lorraine, puis ATER Université Henri Poincaré (Nancy) à partir du 1er septembre 2001]
Zheng Ziyu [boursier INRIA, jusqu'en août 2001]
Chercheur invité
Eric Peirano [à partir du 1eroctobre, à Sophia Antipolis]
Collaborateurs extérieurs
Nicolas Fournier [MC, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Jean-Sébastien Giet [MC, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Mihai Gradinaru [MC, Université Henri Poincaré (Nancy)]

2 Présentation et objectifs généraux

Le projet OMEGA est bilocalisé entre les unités de Sophia Antipolis et de Lorraine. Sa composante nancéienne est rattachée à l'Institut Élie Cartan.

Le principal thème de recherche d'OMEGA est l'analyse de méthodes numériques probabilistes, avec deux champs d'application privilégiés : la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires et la modélisation et la simulation en mathématiques financières. Les méthodes que nous étudions impliquent la simulation de processus stochastiques. L'analyse numérique de ces méthodes en est encore à ses débuts, alors qu'elles sont utilisées dans l'ingénierie de pointe de secteurs industriels divers (secteurs nucléaire, électrique, électrotechnique et bancaire par exemple) pour résoudre des problèmes complexes ou de grande dimension. OMEGA effectue des travaux mathématiques portant sur la représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles, la conception d'algorithmes numériques probabilistes et la vitesse de convergence de tels algorithmes. Par ailleurs, OMEGA étudie les performances sur architectures parallèles des algorithmes développés et analysés. En effet, si les méthodes de Monte-Carlo sont souvent très bien adaptées à la programmation parallèle, c'est moins évident pour les méthodes qui font intervenir la simulation de particules dépendantes ou la simulation de processus à temps de vie aléatoire.

La théorie des processus stochastiques, en particulier des problèmes d'approximation de processus, est l'outil mathématique essentiel et commun à tous les problèmes traités.

À propos de la résolution d'EDP non linéaires : En ce qui concerne la résolution probabiliste d'équations aux dérivées partielles non linéaires, OMEGA étudie les méthodes de Monte-Carlo, les méthodes particulaires stochastiques et les méthodes ergodiques. Actuellement, nous nous intéressons essentiellement à leurs applications aux équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier–Stokes, etc.), aux équations du transport neutronique et aux modèles aléatoires de la turbulence. Certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques liées aux conditions aux bords, aux dégénérescences des opérateurs différentiels sous–jacents, aux phénomènes de fausses convergences, etc. Nous effectuons des études d'erreur d'approximation non asymptotiques, afin de donner des bornes pour l'erreur correspondant à tout choix des paramètres numériques : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. En amont, l'étape–clef consiste à interpréter l'algorithme comme la discrétisation d'une représentation probabiliste de la solution de l'EDP : une part de l'activité d'OMEGA concerne donc l'élaboration de représentations probabilistes appropriées. En aval, les estimations théoriques de vitesse de convergence sont systématiquement confrontées aux simulations numériques.

À propos de la modélisation et de la simulation en mathématiques financières : En mathématiques financières et en actuariat, OMEGA s'intéresse plus particulièrement aux méthodes de Monte-Carlo et aux modèles de marché. En ce qui concerne les méthodes de Monte-Carlo, OMEGA considère les problèmes d'approximation spécifiques aux modèles financiers, par exemple la simulation de fonctionnelles des historiques de cours et le calcul de dérivées d'espérances de ces fonctionnelles. En ce qui concerne les modèles de marché, les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement la sensibilité des stratégies de couverture des produits dérivés par rapport aux erreurs de modélisation et le calcul de stratégies de gestion du risque. OMEGA s'intéresse aussi à la définition de mesures de risque utilisables en pratique et cohérentes avec un modèle mathématique du marché. On étudie également des problèmes d'adossement et de risques de défaut de trésorerie. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données réelles.

3 Fondements scientifiques

3.1 Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Bernard Roynette, Denis Talay, Pierre Vallois.

De nombreux problèmes d'évolution linéaires ou non linéaires :

$$\frac{du}{dt} = A(t,u)u + f(t,u) \tag{1}$$

peuvent être interprétés à l'aide de processus de Markov bien choisis : on interprète u à l'aide du générateur infinitésimal du semi-groupe de transition d'un processus de Markov (X_t) ou bien à l'aide de l'adjoint de ce générateur. Les motivations de cette démarche peuvent être d'ordre théorique et/ou numérique. En effet, en particulier lorsque $X = (X_t)$ est solution d'une équation différentielle stochastique, le calcul stochastique permet parfois d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité ou de régularité de la solution de (1) plus efficacement que les techniques d'analyse habituelles : le théorème de Girsanov, le calcul de Malliavin, la propagation du chaos sont des outils puissants qui n'ont pas d'analogues en analyse « déterministe » des équations aux dérivées partielles. D'autre part, dès que l'on peut écrire la solution de (1) sous la forme d'une espérance du type $u(t) = \mathbb{E}F(X.)$ avec F fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de X entre 0 et t, on peut chercher à développer une méthode de Monte-Carlo pour approcher $u(t)$ même si on ne sait pas simuler des trajectoires exactes de X : il suffit de construire un processus proche (en loi) de X, en simuler un grand nombre de trajectoires entre 0 et t, évaluer la fonctionnelle F le long de chaque trajectoire simulée et enfin moyenner toutes les valeurs obtenues.

Donnons un exemple élémentaire. Considérons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \Delta u(t,x), \ \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d \tag{2}$$

avec pour condition initiale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ une fonction mesurable bornée. Le paramètre ν est strictement positif, et est appelé « paramètre de viscosité » en mécanique des fluides ou « volatilité » en finance.

On vérifie facilement que la fonction

$$\forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \ u(t,x) := \mathbb{E}u_0(x + \sqrt{2\nu} W_t),$$

où (W_t) est un mouvement brownien[1] standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, satisfait (2) ainsi que

[1] Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indicées par le temps : $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{R}^+\}$; à ω fixé l'application $t \to X_t(\omega)$ est appelée « trajectoire ». Un exemple de processus est le mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, processus à trajectoires presque sûrement continues défini de la manière suivante : $W_0 = 0$ presque sûrement ; pour tout $0 < s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $(t-s)Id_{\mathbb{R}^d}$, indépendante de la famille $\{W_\theta, 0 \leq \theta \leq s\}$.

$\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ en tout point de continuité de u_0. Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher $u(t,x)$ par :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(x+\sqrt{2\nu t}g_i(\omega))$$

où les $\{g_i(\omega)\}$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centrées et de matrice de covariance $Id_{\mathbb{R}^d}$. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre : on sait effectuer des tirages gaussiens indépendants à l'aide d'appels à un générateur de nombres pseudo–aléatoires uniformément répartis ; en outre il est naturellement parallélisable : le i-ème processeur a la tâche d'engendrer $g_i(\omega)$. La vitesse de convergence est décrite par des théorèmes–limite tels que le théorème de limite centrale, la loi du logarithme itéré, l'inégalité de Berry–Esseen : la convergence est d'ordre $1/\sqrt{N}$, elle est donc lente. Toutefois, le coût de l'algorithme croît seulement linéairement avec la dimension d de l'espace puisqu'on simule Nd trajectoires d'un mouvement brownien unidimensionnel standard, et ce coût est indépendant du paramètre ν.

Typiquement, les méthodes de Monte-Carlo pour des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques peuvent permettre de traiter des problèmes extrêmes, en très grande dimension ou avec de très faibles viscosités, lorsqu'il serait difficile, ou démesurément coûteux, d'utiliser des algorithmes classiques.

Soit à présent le problème parabolique sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_j^i(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x),\\ \forall (t,x)\in]0,T]\times\mathbb{R}^d,\end{aligned} \tag{3}$$

où b est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et a une fonction à valeurs dans l'espace des matrices symétriques et définies positives. Sous certaines conditions, on sait que l'unique solution régulière vérifie

$$u(t,x) = \mathbb{E}u_0(X_T^{t,x}),$$

où $(X_\theta^{t,x})$ est le processus de Markov solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_\theta^{t,x} = x + \int_t^\theta b(s,X_s^{t,x})ds + \sum_{j=1}^{r}\int_t^\theta \sigma_j(s,X_s^{t,x})dW^j, \tag{4}$$

où les matrices $\sigma(t,x)$ sont des racines carrées des matrices $a(t,x)$. La discrétisation en temps de (4) conduit naturellement au processus de Markov à temps discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{X}_0^{t,x} & = & x, \\ \bar{X}^{t,x}_{(p+1)\frac{T-t}{n}} & = & \bar{X}^{t,x}_{p\frac{T-t}{n}} + b(p\frac{T-t}{n},\bar{X}^{t,x}_{p\frac{T-t}{n}})\frac{T-t}{n} \\ & & \displaystyle + \sum_{j=1}^{r}\sigma_j(p\frac{T-t}{n},\bar{X}^{t,x}_{p\frac{T-t}{n}})(W^j_{(p+1)\frac{T-t}{n}} - W^j_{p\frac{T-t}{n}}). \end{array}\right. \tag{5}$$

Il est facile de simuler des trajectoires indépendantes $(\bar{X}_{\cdot}^{t,x}(\omega_i))$ de ce processus puisque les variables aléatoires $W^j_{(p+1)(T-t)/n} - W^j_{p(T-t)/n}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance $(T-t)/n$. On peut donc numériquement approcher $u(t,x)$ par :

$$u(t,x) \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(\bar{X}_T^{t,x}(\omega_i)).$$

La vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre N de simulations et du nombre n de pas de temps.

Le procédé s'étend dans des directions variées : problèmes elliptiques, problèmes de transport (applications en neutronique), problèmes avec conditions frontière de Dirichlet ou de Neumann, problèmes intégro–différentiels, etc.

Au lieu de vouloir résoudre (3), on peut s'intéresser au problème adjoint :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(t,x)p(t,x)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a^i_j(t,x)p(t,x)), \qquad \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \tag{6}$$

avec la condition : $p(t,x)dx$ converge faiblement vers une mesure de probabilité donnée lorsque t tend vers 0. Supposons (ce n'est pas une restriction) que cette mesure soit la masse de Dirac en x. Soit $(X_{\cdot}^{0,x}(\omega_i))$ des trajectoires indépendantes de la solution de (4) avec $t=0$. Sous de bonnes hypothèses, la mesure empirique :

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_t^{0,x}}(\omega_i)$$

converge faiblement vers $p(t,x)dx$. Cette remarque sous–tend une famille de méthodes particulaires stochastiques pour les équations aux dérivées partielles non linéaires de type *équation de McKean–Vlasov* :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_t}{\partial t} = \dfrac{\sigma^2}{2}\Delta U_t - \operatorname{div}\left(U_t \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)U_t(dy)\right), \ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times]0,T], \\ U_{t=0} \ = \ U_0. \end{cases} \tag{7}$$

La fonction $b(\cdot,\cdot)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui intervient dans la partie non linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*. L'équation ci–dessus est considérée au sens des distributions. La théorie probabiliste de la *propagation du chaos* montre que la solution U_t s'interprète à l'aide de la loi limite d'un système de particules interagissant entre elles. La dynamique des particules est décrite par le système différentiel stochastique de dimension $N \times d$:

$$\begin{cases} X_t^i = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b\left(X_s^i, X_s^j\right) ds + \sigma w_t^i, \ , \ i = 1,\ldots,N, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } U_0, \text{ indépendante de } X_0^j, \ i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

La *propagation du chaos* implique la convergence au sens des mesures, quand N tend vers l'infini, de la mesure empirique $1/N\sum_{i=1}^{N}\delta_{X_t^i}$ vers U_t. En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction U_t. À partir de cette interprétation probabiliste, on développe un algorithme d'approximation de U_t fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$; la mesure initiale U_0 est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui fournit les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ci–dessus.

La complexité de l'analyse de la vitesse de convergence dépend essentiellement de la singularité éventuelle du noyau d'interaction $b(\cdot,\cdot)$. Pour la plupart des équations provenant de problèmes physiques (et en particulier pour les équations de Burgers ou de Navier–Stokes en dimension 2), le noyau d'interaction est singulier. La vitesse de convergence dépend du nombre N de particules et du pas de temps utilisé pour la discrétisation de (8).

Pour un aperçu de résultats sur les méthodes de Monte-Carlo et certaines méthodes particulaires stochastiques, on pourra consulter[?].

4 Domaines d'applications

4.1 Méthodes numériques probabilistes en ingénierie

Mots clés : transport neutronique, mécanique des fluides, turbulence, polymère, mécanique aléatoire.

Les méthodes numériques probabilistes sont utilisées dans des domaines variés. Nous avons abordé les sujets suivants : les calculs de criticité pour des modèles de transport neutronique par méthodes de Monte-Carlo, la simulation de modèles stochastiques d'écoulements turbulents, les simulations moléculaires de chaînes de polymères, les méthodes de vortex aléatoire pour la résolution des équations de la Mécanique des Fluides. Pour beaucoup de ces questions, un cadre général de travail est la résolution numérique probabiliste d'équations aux dérivées partielles de type *équation de McKean–Vlasov* introduites au paragraphe 3.1.

4.2 Mathématiques financières

Mots clés : finance, évaluation d'options, gestion de bilan, risque financier.

Le projet s'intéresse à divers aspects des mathématiques financières, liés principalement à l'évaluation et à la couverture des options d'une part, à la gestion de portefeuilles ou de bilans d'autre part.

Un premier champ de recherches concerne l'étude de stratégies de gestion de portefeuilles d'options correspondant à des actifs sous-jacents dont les volatilités sont des processus stochastiques à valeurs dans des intervalles bornés. Le marché est incomplet, il n'existe donc pas de stratégie de couverture parfaite. Il semble particulièrement intéressant de pouvoir calculer la plus faible valeur initiale des stratégies conduisant à des portefeuilles dont la valeur à l'échéance majore le payoff d'une option donnée, et ceci pour tout état futur du marché ou bien pour tout état appartenant à un ensemble pertinent en pratique.

[?] *** ERROR: citation '**graham-kurtz-al-96**' undefined ***

Un autre champ de recherches concerne le calcul numérique de prix d'options complexes par des méthodes de Monte-Carlo, la simulation de bilans correspondant à des stratégies de gestion ou de couverture mal spécifiées et la gestion de portefeuilles sous contraintes. Ces questions motivent, par exemple, des études spécifiques sur l'approximation en loi de fonctionnelles diverses (et irrégulières) de solutions d'équations différentielles stochastiques.

5 Résultats nouveaux

5.1 Méthodes numériques probabilistes

Glossaire :
EDS Équation différentielle stochastique
EDP Équation aux dérivées partielles

5.1.1 Méthode probabiliste pour la résolution d'équations elliptiques et application aux problèmes EEG-MEG

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

Collaboration avec le projet ROBOTVIS *et avec Emmannuel Gobet (CMAP, École Polytechnique).*

Avec Emmanuel Gobet, nous poursuivons notre collaboration avec ROBOTVIS sur le problème de la reconstruction de l'activité électrique du cerveau à partir d'électro-encéphalographie (EEG) et magnéto-encéphalographie (MEG).

Les projets ROBOTVIS, ONDES et ESTIMES ont développé un algorithme d'identification des coefficients de conductivité et de permittivité du cerveau. À chaque étape de cet algorithme récursif, on est amené à comparer des mesures effectuées en quelques points de la surface du crâne et les valeurs en ces points de la solution d'un problème elliptique paramétré par les résultats obtenus à l'étape précédente. Les projets mentionnés ci-dessus ont développé des codes de calcul par éléments finis pour résoudre le problème elliptique en question. Or, un tel problème elliptique admet une représentation probabiliste à l'aide des transitions et de la mesure de probabilité invariante d'un processus de diffusion réfléchi à la frontière. Nous avons donc proposé de calculer la solution approchée à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo et de discrétisation du processus réfléchi sous-jacent. Les problèmes de vitesse de convergence et de simulation de la réflexion des trajectoires du processus sont tout à fait nouveaux. Nous obtenons une vitesse de convergence en $\mathcal{O}(\Delta t)$ y compris dans le cas de réflexions obliques. Nous travaillons maintenant sur le développement de l'erreur du schéma de discrétisation.

Par ailleurs, D. Talay collabore avec Florent Malrieu (Université P. Sabatier, Toulouse) sur le thème de l'approximation de lois invariantes de diffusions dans tout l'espace : le but est d'obtenir des inégalités de concentration (inégalité de Poincaré, inégalité de Sobolev logarithmique) pour le schéma d'Euler. Des premiers résultats ont été obtenus sous des hypothèses restrictives que l'on cherche à présent à élargir.

5.1.2 Simulation de processus associés à des opérateurs sous forme divergence

Participants : Mireille Bossy, Miguel Martinez, Denis Talay.

Mots clés : MEG, équations elliptiques, opérateurs sous forme divergence, équations différentielles stochastiques avec temps local.

On s'intéresse à la convergence de schémas numériques probabilistes pour le problème de la MEG (magnéto-encéphalographie) inverse. À chaque itération de l'algorithme général[FCD+99], il faut résoudre une équation elliptique sous forme divergence, c'est-à-dire de la forme

$$A = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

et dont les coefficients sont fortement irréguliers autour de domaines à géométrie complexe. Un résultat dû à Rozskosz et Słomiński[RS00] montre que le processus associé à ce problème est un processus de Dirichlet admettant une décomposition de Lyons-Zheng. Mais ce résultat ne semble pas exploitable de façon directe pour la recherche d'un algorithme de simulation efficace. Il s'avère qu'en dimension 1 le processus est également solution d'une équation différentielle stochastique avec temps local[Lej00]. Nous souhaitons exploiter ce résultat en vue de proposer un algorithme dont on puisse extraire une estimation de l'erreur numérique.

5.1.3 Méthode numérique probabiliste pour les équations de conservation scalaires et les équations de McKean–Vlasov

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

En collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa (Université de Barcelone), nous travaillons sur le développement de l'erreur du schéma d'Euler dans le cadre des méthodes particulaires stochastiques pour les équations de McKean–Vlasov, dans le but de valider l'utilisation d'accélérateurs de convergence, tels que l'extrapolation de Romberg.

5.1.4 Simulation de processus en milieu fissuré

Participant : Antoine Lejay.

En collaboration avec Fabien Campillo (projet SYSDYS), et suite à des discussions avec Benoît Nœtinger (Institut Français du Pétrole), nous continuous le travail sur la simulation d'un processus évoluant dans un milieu fissuré modélisé par une équation aux dérivées partielles,

[FCD+99] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, D. Lingrand, « The inverse EEG and MEG problems : the adjoint state approach I : The continuous case », *rapport de recherche*, INRIA, mai 1999.

[RS00] A. Rozkosz, L. Słomiński, « Stochastic representation of reflecting diffusions corresponding to divergence form operators », *Studia Math. 139*, 2, 2000, p. 141–174.

[Lej00] A. Lejay, *Méhodes probabilistes pour l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence : cas linéaires et semi-linéaires*, thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, France, janvier 2000.

dont le coefficient de diffusion ne prend que 2 valeurs. Le problème est de savoir quand et où le processus de diffusion va passer de la roche poreuse, où la diffusion est lente, aux fissures, où la diffusion est rapide. Cela permet de calculer numériquement le coefficient d'échange dans le modèle à double porosité.

Deux approches totalement différentes sont utilisées selon que la particule est dans la roche poreuse ou dans les fissures. Le cas de la simulation dans la roche poreuse a déjà été traitée dans un travail précédent[CL00]. L'originalité de l'approche choisie, dans les deux cas, est qu'aucune discrétisation n'est requise, ce qui est le point faible d'approches antérieures, déterministes ou utilisant des marches aléatoires. Ce travail nécessite de comprendre comment les discontinuités des coefficients d'un opérateur différentiel se traduisent sur le processus qu'il engendre. Ce problème est donc lié, bien que le cas traité ici soit très particulier, au problème décrit au paragraphe 5.1.2.

5.1.5 Méthodes de Monte-Carlo en intégration numérique et en transport neutronique

Participants : Sylvain Maire, Denis Talay.

Dans le cadre de sa thèse encadrée par D. Talay, S. Maire a achevé l'étude des méthodes de Monte-Carlo tout à fait originales qu'il a introduites pour réduire la variance de l'erreur de simulation dans des calculs numériques d'intégrales déterministes. Le principe repose sur l'approximation par technique de Monte-Carlo et de manière récursive des coefficients du développement sur une base orthonormée de la fonction à intégrer. Par ailleurs, S. Maire a achevé ses travaux numériques et théoriques portant sur l'analyse d'erreur d'un algorithme probabiliste pour des calculs de criticité en transport neutronique, obtenant des précisions comparables à celles de m'ethodes déterministes. Les développements numériques ont été effectués en liaison avec X. Warin (E.D.F. Clamart).

5.1.6 Approximation de l'espérance de fonctionnelles de la trajectoire d'une diffusion par le schéma d'Euler

Participants : Jean-Sébastien Giet, Étienne Tanré.

Mots clés : discrétisation d'EDS, schéma d'Euler.

On considère l'EDS, homogène en temps, dont les coefficients σ et b sont très réguliers :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s))\,dB(s) + \int_0^t b(X(s))\,ds \qquad (t \geq 0). \tag{9}$$

On désigne par $(X(s))_{0\leq s\leq 1}$ sa solution, et par $\left(\bar{X}^\delta(.)\right)_{0\leq s\leq 1}$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler de pas $\delta > 0$. Le but de cette étude est de préciser les vitesses de convergence de $\mathbb{E}\left[\Phi_k(\bar{X}^\delta(\frac{1}{k}),\ldots,\bar{X}^\delta(\frac{k}{k}))\right]$ vers $\mathbb{E}[\Phi(X(.))]$ en fonction des paramètres δ et k,

[CL00] F. Campillo, A. Lejay, « A Monte Carlo Method without Grid to Compute the Exchange Coefficient in the Double Porosity Model Part I: From the Matrix to the Fissures », *rapport de recherche n°4048*, INRIA, 2000.

où $\Phi : \mathcal{C}([0,1]\,;\,\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle donnée et où $\Phi_k : \left(\mathbb{R}^d\right)^k \longrightarrow \mathbb{R}$ représente une approximation de Φ. Les cas où $\Phi(x(.)) = \left(\int_0^1 f(x(s))\,ds\right)^\ell$ et $\Phi(x(.)) = \exp\left(\int_0^1 f(x(s))\,ds\right)$ sont étudiés ; ℓ est un entier positif et f une fonction mesurable et bornée. Dans le cas $\ell = 1$, *i.e.* l'approximation de $\mathbb{E}[\int_0^t f(X(s))ds]$, la vitesse optimale de convergence est obtenue : notre approximation converge à une vitesse au plus linéaire du pas de discrétisation.

5.1.7 Vitesse de convergence d'approximation de processus de type Cox-Ingersoll-Ross

Participants : Mireille Bossy, Awa Diop, Denis Talay.

Nous nous intéressons à l'approximation de $\mathbb{E}f(X_T)$, T fixé où f est une fonction régulière et $(X_t)_{0\le t\le T}$ est solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (a - bX_t)dt + X_t^\alpha dW_t, \\ X_0 = x > 0 \end{cases}$$

avec $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$. Pour ce type de diffusions, les schémas de discrétisation usuels et les résultats classiques d'analyse d'erreur ne s'appliquent plus puisque la fonction $f(x) = x^\alpha$ n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$ et n'est pas dérivable en zéro. Nous proposons le schéma suivant,

$$\begin{cases} \overline{X}_{t_{k+1}} = |\overline{X}_{t_k} + (a - b\overline{X}_{t_k})\Delta t + \overline{X}_{t_k}^\alpha \Delta W_{t_k}|, \\ \overline{X}_0 = x_0. \end{cases}$$

Nous avons obtenu une vitesse de convergence optimale c'est-à-dire d'ordre Δt, où Δt est le pas de discrétisation en temps de $[0, T]$.

La principale motivation de cette étude est l'approximation de modèles de taux intérêt du type Cox-Ingersoll-Ross, ou plus généralement de modèles de type Hull-White.

5.2 Interprétations probabilistes pour des modèles issus de la physique

Glossaire :
EDS Équation différentielle stochastique
EDP Équation aux dérivées partielles

5.2.1 Résonance stochastique et application en neuro–sciences

Participants : Karem Berkaoui, Axel Grorud, Denis Talay.

Cette année nous avons débuté une collaboration avec K. Pakdaman (INSERM) sur un thème tout à fait nouveau pour le projet. Nous essayons de modéliser le phénomène de résonance stochastique en vue de l'appliquer, en particulier, à l'amélioration d'implants cochléaires pour appareiller les mal-entendants. On s'est aperçu, en effet, que les mal-entendants perçoivent mieux les sons quand on perturbe aléatoirement le signal transmis. L'un des objectifs de la collaboration est d'identifier le bruit qui doit être ajouté, et d'en évaluer les intensités qui permettent de développer des implants cochléaires plus efficaces.

Nous avons entamé l'analyse mathématique et des simulations numériques de modèles proposés par des neuro-biologistes décrivant l'influence du bruit sur le comportement neuronal. Nous étudions de quelle manière l'amplification de signaux par le bruit peut augmenter l'acuité sensorielle. Ces travaux numériques et théoriques sont confrontés à des résultats d'expériences psychophysiques.

5.2.2 Phénomènes de coagulation

Participants : Madalina Deaconu, Nicolas Fournier, Etienne Tanré.

Mots clés : équation de coagulation, processus de Markov à sauts.

Première interprétation de la solution en terme de processus. Le modèle introduit par Smoluchowski en 1916, pour décrire la coagulation, s'applique à divers phénomènes comme, par exemple, la polymérisation, la formation des étoiles et planètes, le comportement du mélange d'huiles dans les moteurs à combustion, etc. Ce problème s'avère compliqué car il s'exprime sous la forme d'un système infini d'équations différentielles non linéaires. L'approche probabiliste de l'équation de coagulation de Smoluchowski constitue un sujet de recherche récent qui a pour objectif d'obtenir de nouveaux résultats ou de confirmer des conjectures énoncées par les analystes et les physiciens, à l'aide des méthodes d'analyse stochastique.

Le modèle. L'équation de coagulation décrit la dynamique d'un système de particules dans lequel des coagulations se produisent entre deux particules. Les particules ne sont caractérisées que par leur masse. D'un point de vue physique, il est naturel de supposer que la coagulation à l'instant t entre une particule de taille j et une particule de taille k a lieu de manière proportionnelle à la quantité de particules de tailles j et k présentes à cet instant ; la constante de proportionnalité ne dépend que des masses.

Notons $n(k,t)$ la densité de présence des particules de masse k à l'instant t, dans une unité de volume. L'équation de coagulation donne l'évolution temporelle des $n(k,t)$. Elle s'écrit, pour le cas des tailles discrètes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}n(k,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} K(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j,k)n(j,t) \\ n(k,0) = n_0(k), \;\; k \geq 1, \end{cases} \tag{SD}$$

où K est le noyau de coagulation, supposé symétrique et positif. Ce système décrit une équation d'évolution non linéaire en dimension infinie, avec $(n_0(k))_{k\geq 1}$ comme donnée initiale. La présence des sommes infinies fait que (SD) n'est pas un problème classique du type système non linéaire d'équations différentielles ordinaires avec donnée initiale. Dans la première ligne du système (SD), le premier terme à droite décrit la création des particules de masse k par la coagulation des particules de masses j et $k-j$; c'est le terme de gain. Le coefficient $\frac{1}{2}$ vient de la symétrie de K. Le second terme correspond aux particules de masse k disparaissant après coagulation avec d'autres particules ; il représente le terme de perte.

Noyaux constants, additifs et multiplicatifs : lien avec les processus de branchement et comportement en temps long. Dans un premier travail, M. Deaconu et E. Tanré ont fourni une interprétation probabiliste de l'équation de coagulation de Smoluchowski et des résultats originaux sur le comportement en temps longs pour le cas des noyaux constant, additif et multiplicatif. Cette première étude s'est concrétisée par deux articles parus dans des revues internationales ([DT00] et [18]).

Processus de Markov à sauts associé à l'équation de coagulation de Smoluchowski. Dans un nouveau travail nous construisons un processus stochastique dont la loi est solution de l'équation de coagulation. Cette approche est originale et permet de comprendre, d'une manière intuitive, la dynamique du modèle introduit par Smoluchowski. C'est la première interprétation en tant que processus obtenue pour ce modèle. Cette étude applique des techniques utilisées pour l'équation de Boltzmann. Ces deux équations ont plusieurs caractéristiques communes, notamment de décrire des phénomènes discontinus : d'une part dans le modèle de Smoluchowski une particule change de taille après coagulation avec une autre particule, d'autre part dans le modèle de Boltzmann une particule change de vitesse après collision avec une autre particule. Nous obtenons aussi une approximation numérique facile et intuitivement claire de la solution par le système de particules associé au processus : plus précisément le système décrit la dynamique d'une particule moyenne qui, à des instants aléatoires, coagule avec d'autres particules et change donc de taille. Ce travail a fait l'objet de trois articles [17, 29] d'un article paru en acte de conférence (*Stochastic Numerics Conference 2001*) ; un autre est en préparation, qui développe surtout l'aspect numérique de notre résultat.

Processus stochastique et équation de coagulation avec diffusion. Dans le modèle précédent, chaque particule est caractérisée uniquement par sa taille. Très récemment, M. Deaconu et N. Fournier se sont intéressés à l'équation de coagulation non homogène. Nous considérons le modèle plus réaliste (et bien entendu plus difficile à traiter) qui prend en compte la position de la particule. Chaque particule se déplace suivant une diffusion brownienne, perturbée par une fonction qui dépend de sa taille. On interprète la solution comme étant la loi d'un couple de processus stochastiques, une composante décrit l'emplacement de la particule et la deuxième sa taille. Nous obtenons des résultats très intéressants sur cette nouvelle approche de la coagulation diffusive. Cette étude comporte aussi un vaste aspect d'approximation numérique de la solution par le système de particules associé au processus. Ce travail s'est concrétisé par un article paru comme prépublication et soumis pour publication [30].

Notre recherche se poursuit dans plusieurs directions : d'une part nous considérons l'interprétation par processus stochastique dans le phénomène plus complexe, où l'on a coagulation et fragmentation ou fragmentation pure. Nous envisageons aussi de caractériser le comportement en temps longs du système de particules et d'étudier les comparaisons possibles avec d'autres algorithmes stochastiques ou déterministes. D'autre part nous étudions un modèle comportant plusieurs types de particules de comportement différent lors de la coagulation (de type ciment et colle). Cette deuxième partie est motivée par un problème pratique qui nous a été posé par des chercheurs de l'ENSIC (École Nationale Supérieure des Industries Chimiques de Nancy).

[DT00] M. Deaconu, E. Tanré, « Smoluchowski's coagulation equation: probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3*, 2000, p. 549–579.

5.2.3 Interprétation probabiliste de l'équation de Prandtl

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu.

Mots clés : mécanique des fluides, couche limite.

Nous travaillons sur une approche probabiliste de l'équation de Prandtl. Lorsque l'on considère un écoulement incompressible et faiblement visqueux dans un demi-plan, il est naturel de décrire l'écoulement par les équations d'Euler, au lieu de l'équation de Navier-Stokes, sauf a proximité du bord du demi-plan ou les effets de la viscosité ne sont pas négligeables. Ce voisinage du bord, appelé couche limite, est d'épaisseur proportionnelle à la racine de la viscosité. Cette couche est donc d'autant plus petite que la viscosité est proche de zéro. Ceci permet de négliger certains termes de l'équation de Navier-Stokes et de décrire l'écoulement à l'aide de l'équation de Prandtl à l'intérieur de la couche limite. Comme Navier-Stokes, l'équation de Prandtl contient le phénomène de création de vorticité sur le bord.

Dans notre approche, nous cherchons une formulation stochastique de la dynamique du tourbillon du fluide qui mette en évidence le phénomène de création de tourbillon, et qui s'interpréterait comme la limite d'un système de particules stochastique. De telles approches ont été déjà développées avec succès dans l'étude de l'équation de Navier-Stokes, par d'autres membres du projet Omega. En travaillant sur l'équation de Prandtl, notre objectif est de formuler une interprétation probabiliste de cette équation correspondant à la limite de l'algorithme de simulation de A. Chorin [Cho73,Cho78].

5.2.4 Interprétation probabiliste de système de lois de conservation

Participant : Mireille Bossy.

Ce travail est une collaboration avec Benjamin Jourdain du CERMICS (Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique, de l'École nationale des ponts et chaussées). En nous appuyant sur nos travaux sur les lois de conservation scalaires visqueuses, nous avons entamé une étude sur l'interprétation probabiliste de système d'équations du même type.

5.2.5 Simulation de fluides viscoélastiques

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

Mots clés : fluide visco-élastique, polymères.

M. Bossy et D. Talay étudient, en collaboration avec plusieurs chercheurs du CERMICS (C. Le Bris, B. Jourdain, T. Lelièvre) et M. Picasso (École Polytechnique Fédérale de Lausanne), un modèle moléculaire stochastique pour les fluides visco-élastiques. Des chaînes de polymères baignant dans un fluide sont modélisées par des haltères (deux billes liées par un

[Cho73] A. Chorin, « Numerical study of slightly viscous flow », *J. Fluid Mech. 57*, 4, 1973, p. 785–796.

[Cho78] A. Chorin, « Vortex sheet approximation of boundary layers », *J. Comp. Phys. 27*, 1978, p. 428–442.

ressort). Dans le cas d'un écoulement dans un canal plan, la dynamique d'une haltère est décrite par un système d'EDS en dimension 2 couplé à une EDP de type Navier-Stokes décrivant la vitesse du fluide. Après avoir étudié un modèle simple autorisant l'haltère à s'allonger indéfiniment, nous considérons maintenant le cas où l'élongation maximale de la chaîne de polymères est finie, égale à b. Cela nous conduit à étudier un système couplé du type

$$\begin{cases} dP_t(y) = -\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{P_t(y)}{1-\dfrac{P_t^2(y)+Q_t^2(y)}{b}}dt + \dfrac{\partial V}{\partial y}(y,t)Q_t(y)dt + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}dw_t^1, \\ dQ_t(y) = -\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{Q_t(y)}{1-\dfrac{P_t^2(y)+Q_t^2(y)}{b}}dt + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}dw_t^2, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = K\dfrac{\partial}{\partial y}\mathbb{E}\left(\dfrac{P_y(y)Q_t(y)}{b-(P_t^2(y)-Q_t^2(y))}\right). \end{cases} \tag{10}$$

La démonstration de l'existence d'une solution à ce système couplé EDP-EDS est en cours.

5.2.6 Modélisation d'un phénomène de fissuration

Participant : Pierre Vallois.

En collaboration avec André Mézin (Laboratoire de génie des surfaces à l'école des Mines de Nancy) nous avons modélisé un phénomène de fissuration unidirectionnelle avec l'hypothèse de non-relaxation de contrainte. Le modèle prend en compte à la fois la localisation des fissures et la contrainte exercée.

Avec Pierre Calka (étudiant en thèse à l'Université de Lyon I, sous la direction d'A. Goldman), nous travaillons sur un modèle plus réaliste prenant en compte la relaxation de contrainte : lorsque une fissure a lieu en x, il existe une zone « relaxée » autour de x dans laquelle de nouvelles fissures ne peuvent pas se former. Nous nous sommes intéressés au nombre de fissures formées sur une longueur L, et plus particulièment à la loi de cette variable aléatoire. Lorsque l'on suppose, de plus, qu'il n'y a pas de chevauchement entre les zones de relaxation associées aux fissures, on peut montrer qu'il existe un modèle limite sous-jacent. Ce qui signifie qu'il existe un processus de renouvellement sur tout $[0,+\infty[$, qui modélise les fissures et qui redonne le modèle de relaxation « sans chevauchement » quand on le restreint à tout segment de longueur L.

Par ailleurs, Pierre Calka vient de montrer récemment un résultat analogue pour le cas général (i.e. sans faire l'hypothèse de non-chevauchement). Il est capable de définir une distance inter-fissure « générique » (au sens de Palm) qui intéresse les physiciens.

5.3 Mathématiques financières

5.3.1 Modèles financiers avec asymétrie d'information

Participant : Axel Grorud.

Axel Grorud a obtenu son habilitation à diriger des recherches « Asymétries en calcul stochastique et en finance mathématique » à l'Université de Provence en juin 2001 [9], et a une délégation d'un an *à partir du 1er octobre 2001 à l'INRIA au projet* OMEGA.

Mots clés : asymétrie d'information, marché financier, agent informé, grossissement de filtration, stratégie optimale, équilibre économique.

Résumé : *Nous étudions des marchés financiers avec asymétrie d'information, c'est-à-dire un modèle mathématique d'évolution d'actifs boursiers dans lequel on suppose la présence d'un investisseur informé ou d'agents faisant des paris différents sur l'évolution de ces actifs.*

Marchés Incomplets. Dans [21] nous faisons le lien entre différentes hypothèses qui permettent d'obtenir le grossissement de filtration, c'est-à-dire la comparaison entre les $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Y}$-martingales, lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration des prix observés et $(\mathcal{Y}_t = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)), t \in [0,T])$ la filtration grossie par l'information de l'agent informé. Nous étudions la complétude du marché, l'existence des probabilités neutres au risque, et le prix des actifs à atteindre du point de vue d'un agent informé ou d'un agent non informé.

Modèle de pari. Dans le modèle de pari nous étudions la stratégie financière d'un agent faisant un pari à propos d'une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu de l'instant final. Cela rejoint des problèmes de grossissement de filtration. En mettant en présence deux agents faisant des paris différents, on peut obtenir un équilibre économique. Avec Nathalie Pistre (CDCixis-Asset Managament) nous étudions de manière précise les coefficients d'un marché avec friction, à l'équilibre, qui a été complété par une option. On sait que, dans un modèle à temps continu, une option peut compléter un marché, mais l'étude précise n'a pas été menée dans le cas d'un marché avec friction. La méthode utilise des résolutions explicites d'équations différentielles stochastiques ; ce qui permet de voir évoluer la dynamique des coefficients endogènes à l'équilibre. Sur le plan économique les résultats montrent un équilibre dont l'interprétation reste à faire.

Robustesse et statistiques dans les modèles financiers mal spécifiés. Ce travail correspond à la thèse de Marian Ciucă encadré par A. Grorud. Marian Ciucă est ATER à l'Université de Provence depuis septembre 2001 et doit soutenir sa thèse en 2002. La thèse porte sur « La robustesse et les statistiques dans les modèles financiers mal spécifiés ». Il s'agit d'étudier les propriétés de stabilité des stratégies financières de couverture et des stratégies optimales lorsque les coefficients du marché sont mal spécifiés. Marian Ciucă étudiera aussi les propriétés des estimateurs non paramétriques de ces coefficients.

5.3.2 Techniques de réduction de variance pour les méthodes de Monte-Carlo

Participants : Olivier Bardou, Denis Talay.

Mots clés : réduction de variance, calcul de Malliavin, méthodes de Monte-Carlo.

O. Bardou a débuté une thèse sur le problème de la réduction de variance dans le cadre des méthodes de Monte-Carlo. Les principales applications envisagées concernent le domaine de la finance mathématique. Nous fondant sur les récents travaux présentés dans [FLL+99,FLLL01,

[FLL+99] E. FOURNIÉ, J.-M. LASRY, J. LEBUCHOUX, P.-L. LIONS, N. TOUZI, « Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance », *Finance and Stochastics*, 1999, p. 391–412.

[FLLL01] E. FOURNIÉ, J.-M. LASRY, J. LEBUCHOUX, P.-L. LIONS, « Applications of Malliavin calculus

BH00], nous nous proposons d'utiliser les potentialités du calcul des variations stochastique pour obtenir une réduction de variance dans le cas de certains problèmes numériques liés à la couverture d'options.

5.3.3 Processus avec sauts, application au problème de la ruine

Participant : Pierre Vallois.

Pour modéliser le niveau d'eau d'un barrage (respectivement les actifs d'une compagnie d'assurance), on lui associe un processus stochastique X, et on s'intéresse au premier instant $T_x(X)$ où X atteint un niveau donné $x > 0$. Dans le premier cas, les sauts de X sont négatifs, et on a montré que, pour une large classe de processus, la loi de $T_x(X)$ s'exprime à l'aide de la famille de lois $\{\mathbb{P}[X_t \in \cdot]\}_{t>0}$ (relation dite de Zolotarev). L'objet du travail, réalisé en collaboration avec Agnès Volpi, PRAG à l'ESSTIN (École Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy), est l'étude de $F(x) := \mathbb{P}[T_x(X) < \infty]$ lorsque les sauts sont de signe quelconque. Nous avons montré que lorsque X est un processus de Poisson composé, F vérifie une équation intégrale. Nous nous sommes intéressés au comportement asymptotique de $F(x)$ lorsque $x \to \infty$. Désignons par ψ l'exposant caractéristique du processus de Lévy X. Si ψ admet un zéro $\gamma_0 > 0$ alors $F(x)$ est équivalent à $Ce^{-\gamma_0 x}, x \to \infty$. Ceci permet de retrouver un résultat de J. Bertoin, obtenu par une autre méthode. Avec des hypothèses supplémentaires sur la queue de distribution de la mesure de Lévy asssociée à X, il est possible de donner un développement asymptoyique de $F(x), x \to \infty$. Ce travail est en cours de rédaction.

5.3.4 *Value at Risk*

Participant : Pierre Vallois.

Avec Charles Tapiéro, de l'ESSEC (École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales), nous avons donné une nouvelle notion de *Value at Risk* (var) lorsque le processus des prix est une marche aléatoire $(S_n; n \geq 0)$, issue de 0, et à sauts unités (± 1). On rappelle que la variable p_T^{var} est le réel

$$\mathbb{P}[S_T > p_T^{\text{var}}] \leq p \ \text{ et } \mathbb{P}[S_T > p_T^{\text{var}} - 1] > p,$$

où T est un entier fixé, et $p \in]0,1[$. On renforce cette notion en introduisant la variable $p^{\mathrm{T,var}}$, qui est le réel T_0 défini par les deux relations

$$\mathbb{P}[\sigma(p_T^{\text{var}}) \leq T_0] \leq p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[\sigma(p_T^{\text{var}}) \leq T_0 + 1] > p,$$

où $\sigma(x) = \inf\{n \geq 0; S_n \geq x\}, x \geq 0$. Ceci signifie que, avec une probabilité supérieure à $1 - p$, le processus $(S_n; 0 \leq n \leq T_0)$ reste au-dessous du niveau p_T^{var} ; de plus T_0 est le plus grand entier à posséder cette propriété.

Il est possible de calculer explicitement $p^{\mathrm{T,var}}$.

to Monte-Carlo methods in finance. II », *Finance and Stochastics 5*, 2001, p. 201–236.

[BH00] E. Ben-Hamou, *Application of Malliavin Calculus and Wiener Chaos to Option Pricing Theory*, thèse de doctorat, The London School of Economics and Political Science, 2000.

5.4 Génomique

5.4.1 Étude du score local

Participants : Marie-Pierre Etienne, Pierre Vallois.

Mots clés : Score local, Mouvement brownien, comportement asymptotique.

Les motivations de ce travail proviennent de la biologie et plus particulièrement de la génomique. Les banques de données de séquence se sont énormément étoffées ces derniers mois et l'analyse directe de séquences d'ADN permet aux biologistes de limiter le nombre d'expériences. Dans ce cadre le score local est un outil important et comme les séquences considérées sont longues, il est intéressant de déterminer son comportement asymptotique.

Comportement asymptotique du score local. Le score local se définit mathématiquement de la manière suivante : soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Considérons $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $X_0 = 0$ la marche aléatoire associée ; on peut alors définir le processus $H_n = \max_{0\leq i<j\leq n}(X_j - X_i)$ comme le score local associé à (ξ_n). Le but du travail, effectué en collaboaration avec Jean-Jacques Daudin, de l'INA P-G (Institut National agronomique Paris-Grignon), est d'étudier le comportement asymptotique de H_n lorsque (ξ_n) est, soit une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, soit une chaîne de Markov.

Lorsque les ξ_i sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de moyenne négative, Dembo et Karlin ont montré[DK92] que le comportement du score local est en $\ln(n)$. Plus récemment Daudin et Mercier[DM99] ont obtenu la distribution exacte du score local $\mathbb{P}(H_n < x)$ pour tout n, x, sans restriction sur $\mathbb{E}(\xi_1)$. Mais leur résultat s'exprime à l'aide d'une matrice de taille $x \times x$ élevée à la puissance n. En pratique cette formule n'est donc utilisable que pour n et x pas trop grands. Nous avons montré que, si $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables indépendantes, identiquements distribuées et centrées de variance $\sigma^2 > 0$ ou une chaîne de Markov sous sa probabilité invariante, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{H_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\sigma\, B_1^* \geq x\right), \tag{11}$$

où $B_1^* = \max_{0\leq u\leq 1} |B_u|$, et $(B_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0. Dans le cas où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est de moyenne petite, on peut définir un paramètre δ tel que

$$\mathbb{P}\left(\frac{H_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(Y_\delta \geq x\right), \tag{12}$$

où $Y_\delta = \max_{0\leq u\leq 1}\{B(u) + \delta u - \min_{0\leq s\leq u}(B(s) + \delta s)\}$. Cela nous a conduit à étudier le comportement de la queue de distribution de Y_δ et nous avons prouvé :

$$\mathbb{P}\left(\xi_\delta \geq a\right) \underset{a\to\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\delta^2/2}\, \frac{1}{a}\, e^{\delta a - a^2/2}. \tag{13}$$

[DK92] A. Dembo, S. Karlin, « Poisson approximations for r-scan processes », *Ann. Appl. Probab. 2*, 2, 1992, p. 329–357.

[DM99] J.-J. Daudin, S. Mercier, « Distribution exacte du score local d'une suite de variables indépendentes et identiquement distribuées », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329*, 9, 1999, p. 815–820.

Ce travail a fait l'objet d'un article soumis à *Stochastic Processes and Their Applications* [28].

Comparaison de trois approximations pour le score local dans le cas d'une espérance petite. Suite à l'étude théorique précédente, Jean-Jacques Daudin et M.-P. Etienne ont traité l'aspect numérique du problème, afin de pouvoir donner des réponses à la question des biologistes et des informaticiens : quelle approximation utiliser lorsque la moyenne $\mathbb{E}(\xi)$ du modèle considéré est voisine de 0 ? Dans le cas d'une espérance faiblement négative, trois approximations semblaient envisageables. La première est celle donnée par Karlin, les deux autres sont celles que nous avions établies dans un travail précédent : soit la moyenne est si petite que l'approximation dans le cas centré suffit, soit on utilise l'approximation de la queue de distribution dans le cas non centré (rappelons qu'en pratique seule la queue de distribution intéresse les biologistes). Nous avons donc effectué une série de tests numériques et nous avons réussi à extraire les domaines de validité de chacune des approximations. Cette étude a été rédigée et fait l'objet d'un article soumis à *Journal of Computational Biology.*

Vitesse de convergence du score local. Ce travail, en cours, concerne la vitesse de convergence vers le maximum du mouvement brownien. Suite à des tests numériques particulièrement concluants dans le cas centré, M.-P. Etienne et P. Vallois étudient la vitesse théorique de convergence. La majoration suivante a déjà été obtenue :

$$|\mathbb{P}\left(\frac{H_n}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) - \mathbb{P}\left(B_1^* \geq x\right)| \leq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}},$$

où C' est une constante explicitement calculable. Ce travail est en cours de rédaction.

Algorithme de calcul pour la loi d'une fonctionnelle du mouvement brownien. La variable aléatoire

$$Y_\delta = \max_{0\leq u\leq 1}\left\{B(u) + \delta u - \min_{0\leq s\leq u}(B(s) + \delta s)\right\}$$

apparaît naturellement dans les études précédentes sur le score local. La loi de cette variable a déjà été caractérisée dans la partie théorique. Pour être utilisable pratiquement, cette équation doit être résolue. M.-P. Etienne travaille avec Jean Roche (équipe EDP de l'Institut Élie Cartan) sur un algorithme numérique pour obtenir la fonction de répartition de Y_δ.

5.4.2 Reconnaissance des motifs

Participants : Madalina Deaconu, Marie–Pierre Etienne.

Mots clés : motifs.

Dans cette étude, nous cherchons un modèle probabiliste pour illustrer un algorithme proposé par un groupe de biologistes. Cet algorithme, devenu classique dans le domaine, a pour but la reconnaissance d'un motif de longueur donnée dans un ensemble de séquences d'ADN. Nous associons à cet algorithme une chaîne de Markov et caractérisons le résultat de l'algorithme à travers la mesure stationnaire de la chaîne. Une étape importante est représentée par la partie numérique. Elle permet d'obtenir, avec la définition de la chaîne et des considérations sur la mesure invariante, des informations sur le motif. Des tests numériques sont en cours.

5.4.3 Les palindromes dans les séquences d'ADN.

Participants : Madalina Deaconu, Marie–Pierre Etienne, Nicolas Fournier.

Mots clés : palindromes.

Dans une séquence d'ADN, on trouve ce que les biologistes appellent des palindromes. Un palindrome de taille k est formé de deux suites finies de taille k, qui se trouvent dans la même séquence séparées par un nombre quelconque de nucléotides ; les deux morceaux sont complémentaires inverses l'un de l'autre, cela signifie que, si l'on retourne l'une des parties du palindrome, il y a une correspondance entre les bases des deux séquences selon la relation suivante : A correspond à U et C à G. Ces séquences palindromiques pouvent se produire par hasard, la question biologique est la suivante : « L'observation d'un palindrome de taille k est-elle significative ? » Nous avons donc cherché, en collaboration avec Régine Marchand (Université Nancy I), la probabilité d'apparition d'un palindrome de taille k dans une séquence de longueur N dans le cas où le modèle est constitué de variables indépendantes et identiquement distribuées, nous avons obtenu une majoration de cette probabilité. Nous voulons poursuivre cette étude en généralisant le modèle au cas des chaînes de Markov.

5.5 Étude de processus stochastiques

Glossaire :

EDS Équation différentielle stochastique

EDP Équation aux dérivées partielles

5.5.1 Équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie avec temps terminal aléatoire

Participants : Denis Talay, Ziyu Zheng.

D. Talay et Z. Zheng ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution d'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie (EDSRR) avec temps terminal aléatoire, et étudié la relation entre une telle solution et le point selle d'un jeu de Dynkin. Ensuite, dans un cadre markovien, Z. Zheng a étudié les liens entre les solutions (éventuellement contrôlées) d'EDSRR en horizon infini et les solutions de viscosité d'inéquations variationnelles elliptiques. Enfin, Z. Zheng a étudié les liens entre des problèmes de temps de sortie et les solutions de viscosité éventuellement discontinues à des problèmes semi-linéaires de Dirichlet du second ordre. Il a aussi étudié les liens entre des problèmes de temps de sortie optimal et les solutions de viscosité d'équations d'Hamilton–Jacobi–Bellman. Ces équations admettent des solutions maximales et minimales qui sont les fonctions valeurs associées à des problèmes de temps de sortie optimal. Un article est actuellement soumis [34]. Z. Zheng soutiendra sa thèse en janvier 2002.

5.5.2 Comportement en temps longs d'un processus non linéaire

Participant : Madalina Deaconu.

Mots clés : processus non linéaire.

En 2002, Anatoli Manita (professeur à l'Université de Moscou) visitera l'IECN pour un mois en tant que professeur invité, avec comme objectif la poursuite de cette collaboration.

Une des ambitions à long terme du projet OMEGA est d'étudier le comportement de systèmes de particules en interaction, en temps grand, ce qui permettrait de résoudre de manière probabiliste, certaines équations aux dérivées partielles non linéaires stationnaires. M. Deaconu collabore avec A. Manita dans cette étude. Plus précisément nous cherchons à caractériser les situations de convergence ou de non convergence vers la mesure stationnaire d'un processus non linéaire. Nous avons déjà étudié un cas test pour ce type de problématique.

Nous considérons l'équation différentielle stochastique non linéaire suivante :

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (\beta * u)(s, X_s)ds + B_t \\ X_t \sim u(t,x) \\ X_0 \sim u_0(x)dx \text{ la distribution initiale,} \end{cases}$$

où B_t désigne un mouvement Brownien standard. La non linéarité vient du fait que la loi du processus X_t est présente dans l'équation. Nous considérons $\beta(x) = 4x^3 + 2\gamma x$, avec γ une constante négative très grande. Le but est de caractériser la convergence, lorsque t devient grand, du processus vers sa mesure invariante. Cette recherche est avancée et l'étude du cas plus général est en cours.

5.5.3 Sur une équation différentielle stochastique à mémoire longue.

Participants : Samuel Herrmann, Bernard Roynette.

Samuel Herrmann a soutenu sa thèse intitulée Étude de processus de diffusion *le 1^er^ juin 2001 [10].*

Nous avons cherché à généraliser certains résultats concernant les marches aléatoires renforcées aux solutions d'EDS à mémoire longue du type :

$$X_t = B_t - \int_0^t \int_0^s \Phi(X_s - X_u)duds.$$

Nous montrons, en particulier, que si Φ est une fonction croissante impaire et continue qui vérifie de plus des hypothèses d'équivalence au voisinage de l'origine, alors les trajectoires de cette solution convergent presque sûrement. La preuve s'inspire de celle donnée par Cranston et Le Jan pour la solution de l'EDS où Φ est la fonction signe, et repose surtout sur des arguments de comparaison.

5.5.4 Amplitude des chaînes de Markov ultra-sphériques

Participant : Pierre Vallois.

Avec H. Cochard (Université de Bordeaux II), nous avons étudié les propriétés trajectorielles d'une famille de chaînes de Markov appelées ultra-sphériques. Chaque processus est à valeurs dans $\{0, 1, 2, ...\}$ et la dynamique est au plus proche voisin. Convenablement renormalisée, chaque chaine converge vers un processus de Bessel. Ceci permet d'approximer un processus de Bessel de dimension positive par une certaine ultra-sphérique.

Nous avons particulièrement étudié les temps de passage en un niveau donné. Ceci nous a permis, dans certains cas, de calculer les deux premiers moments de ces variables. Nous avons pu aussi en déduire des résultats sur l'amplitude et en particulier sur le premier instant où l'amplitude atteint une valeur fixée.

5.5.5 Amplitude du mouvement brownien avec dérive

Participants : Étienne Tanré, Pierre Vallois.

Nous nous sommes intéressés à l'amplitude du mouvement brownien avec dérive. Supposons que la dérive soit positive. Le processus tend vers l'infini lorsque le temps tend vers l'infini. Il existe en particulier un minimum absolu. Il est alors possible de décomposer la trajectoire browienne en remontant le temps (à partir de l'instant où le processus atteint son minimum) à travers les amplitudes successives. Il apparaît une suite dénombrable d'instants aléatoires (qui ne sont pas des temps d'arrêt) et de processus. Il est possible de décrire la loi de ces différents objets. Désignons par $\theta(a)$ le premier instant où l'amplitude du mouvement brownien avec dérive atteint le niveau a. On sait démontrer deux théorèmes de convergence au premier et second ordre de $\theta(a)$ lorsque $a \to +\infty$ (du type loi des grands nombres et théorème central limite). Nous étudions un résultat limite du type « grandes déviations ».

5.5.6 Diffusions renforcées

Participants : Samuel Herrmann, Bernard Roynette.

Nous étudions une diffusion solution de

$$\begin{cases} dZ_t = dB_t - \Big(\int_0^t \phi(Z_t - Z_s) ds \Big) dt, \\ Z_0 = 0, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien linéaire et ϕ une fonction impaire et bornée. Nous prouvons que :

- Si « ϕ est assez grande au voisinage de 0 », Z_t converge presque sûrement quand $t \to \infty$.
- Si ϕ s'annule au voisinage de 0 alors, presque sûrement, $(Z_t, t \geq 0)$ est borné et ne converge pas quand $t \to \infty$.

Ce travail a fait l'objet d'un article [32].

5.5.7 Quelques temps d'arrêt du mouvement brownien

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois.

Avec B. De Meyer, de l'ESSTIN (École Supérieure des Sciences et Technologies de l'Ingénieur de Nancy), nous présentons (voir [16, 15]) de nombreux exemples de variables aléatoires 2-dimensionelles $\{B_T, T\}$ obtenues en considérant la position d'un mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ pris en un temps d'arrêt T tel que T et B_T soient indépendants. Pour de tels couples, la loi de T détermine celle de B_T , et inversement ; nous étudions les contraintes induites sur ces lois par l'hypothèse d'indépendance.

Avec M. Yor (Université Paris VI), nous avons réalisé un travail analogue mais cette fois en étudiant la loi du couple (B_T, L_T) où T est un temps d'arrêt brownien, et $(L_t; t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 du mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ (voir [25]).

5.5.8 Formule d'Itô pour le mouvement brownien fractionnaire

Participants : Mihai Gradinaru, Pierre Vallois.

Mots clés : Mouvement brownien fractionnaire, variations d'ordre 4, formule d'Itô, temps local.

Nous avons étudié, en collaboration avec Fransesco Russo (Université Paris XIII), l'existence d'une 4-covariation $[g(B^H), B^H, B^H, B^H]$ pour une fonction réelle g localement bornée, où B^H est un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \geq \frac{1}{4}$. Deux applications ont ensuite été étudiées. Une première application est la relation entre la 4-covariation ci-dessus et une expression contenant la dérivée du temps local du mouvement brownien fractionnaire, dans le cas $H = \frac{1}{4}$. Il s'agit d'une généralisation de la formule de Bouleau-Yor dans le cas du mouvement brownien standard. La deuxième application est une formule d'Itô de type Stratonovich pour $f(B^H)$. La principale difficulté vient du fait que B^H possède seulement une 4-variation finie. Un article est actuellement soumis [31].

6 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

6.1 Collaboration avec EDF-Chatou : Étude de schémas numériques pour les équations différentielles stochastiques intervenant dans les écoulements diphasiques turbulent et dispersés

Participants : Eric Peirano, Denis Talay.

Mots clés : écoulements diphasiques, schémas numériques faibles..

Notre collaboration en cours avec l'EDF a surtout porté cette année sur le développement de modèles stochastiques et d'algorithmes efficaces de simulation numérique pour les phénomènes diphasiques turbulents, les partenaires apportant leurs compétences en physique, simulation numérique, théorie des processus stochastiques, approximation des processus stochastiques. Un accent particulier a été porté à l'evaluation, en termes de précision, temps–calcul et stabilité numérique, de méthodes de simulation des écoulements.

En collaboration avec Jean-Pierre Minier (EDF) et l'Université de Chalmers (Suède), nous nous sommes ainsi intéressés à l'intégration numérique des équations différentielles stochastiques (EDS) intervenant dans la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche Lagrangienne.

Les écoulements diphasiques turbulents et dispersés se caractérisent par l'existence d'une phase continue (un fluide en régime turbulent) au sein de laquelle se trouve une autre phase sous forme dispersée (des particules sous forme liquide, solide ou gazeuse selon la nature de la phase continue). Ces écoulements sont omniprésents aussi bien dans les applications industrielles que dans les phénomènes naturels.

L'approche Lagrangienne consiste à simuler l'écoulement fluide avec des méthodes de résolution classiques pour des équations aux dérivées partielles, et à décrire le comportement dynamique des particules discrètes par des EDS de type Mac-Kean, *i.e.*,

$$dZ_i(t) = A_i(t, \mathbf{Z}, \mathbb{E}[\mathbf{Z}], \mathbb{E}[\mathbf{ZZ}], \dots)\, dt + B_{ij}(t, \mathbf{Z}, \mathbb{E}[\mathbf{Z}], \mathbb{E}[\mathbf{ZZ}], \dots)\, dW_j,$$

où $\mathbf{Z}$ est le vecteur d'état qui contient les variables qui caractérisent les particules discrètes. Nous nous intéressons ici à une approche faible, c'est à dire à l'approximation de quantité de type $\mathbb{E}[f(Z_i(T))]$, ce qui dans la pratique correspond aux préoccupations de l'ingénieur qui aura à donner des estimations sur les différents moments des variables aléatoires.

Des schémas numériques faibles ont été développés. Ces schémas sont :

(i) stables, explicites, d'ordre 2 en temps,

(ii) consistants avec les solutions analytiques du système d'EDS quand les coefficients sont constants,

(iii) et consistants dans les cas limites, en restant d'ordre 2 (la discrétisation numérique est celle du système limite et est d'ordre 2) sauf pour le cas diffusif, où on retrouve l'ordre 1.

Plusieurs schémas numériques ont été présentés : un schéma d'Euler (ordre 1 en temps mais qui vérifie tous les autres critères) et plusieurs schémas d'ordre 2 (certains ne vérifiant pas tous les critères, en particulier celui de l'ordre dans les cas limites). Les schémas d'ordre 2 ont été écrits en utilisant deux techniques différentes : la prédiction-correction et l'extrapolation de Romberg. Seul le schéma basé sur la technique d'extrapolation vérifie tous les critères. Le schéma écrit à partir de la méthode de prédiction-correction dégénère à l'ordre 1 dans le cas diffusif. Ce cas limite étant physiquement peu usuel, nous avons opté pour le schéma basé sur la technique de prédiction-correction car sa mise en oeuvre informatique est moins lourde que celle du schéma basé sur une technique d'extrapolation de Romberg.

Des tests numériques, sur des systèmes linéaires, ont permis de confirmer l'ordre des schémas. Ensuite, des simulations d'écoulements types ont mis en évidence, dans certains cas, l'apport considérable d'un schéma d'ordre 2. On peut, en effet, réduire le temps de calcul d'un facteur 10 par rapport au schéma d'Euler (ordre 1) et ceci malgré la complexité et le nombre de termes générés par la contrainte d'ordre 2. Ceci vient du fait qu'à précision égale, on peut avec un schéma d'ordre 2 prendre un pas de temps beaucoup plus grand.

6.2 Collaboration avec Bull sur le calcul intensif en finance et la gestion de bilan de contrats d'assurance

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Sébastien Chaumont, Madalina Deaconu, Denis Talay.

Mots clés : équations différentielles stochastiques rétrogrades, solution de viscosité, condition au bord artificielle, contrôle stochastique, Hamilton-Jacobi-Bellman.

Cette collaboration poursuit le travail effectué dans le cadre de l'action Amazone du G.I.E. Dyade qui s'est arrêté fin mars. Pour une présentation d'Amazone, voir `http://www.dyade.fr/fr/actions/amazone/amazone.html`.

Le travail sur l'estimation d'erreur due à la localisation du domaine pour des inéquations variationnelles correspond à la thèse de Christophe Berthelot.

Le travail sur la gestion optimale de bilan correspond à la thèse de Sébastien Chaumont.

L'action Amazone du G.I.E Dyade, démarrée en mars 1999, porte sur les problèmes de performance de codes de calcul numérique intensif en finance. Dans ce domaine, l'utilisation de calculateurs puissants est nécessaire pour traiter, soit des problèmes simples de très grande dimension ou nécessitant des temps de réponse rapides (évaluation d'option, prévisions et sensibilité de bilan), soit des problèmes complexes comme la résolution de problèmes de contrôle stochastique (gestion de bilan). Pour les calculs numériques, Amazone utilise les machines de la gamme SX de NEC à architecture vectorielle/parallèle.

Le code LICS.v2. À partir de simulations Monte-Carlo, la version actuelle de LICS.v2 calcule des statistiques sur les différentes composantes du bilan associé à un contrat d'assurance–vie. L'utilisation du SX permet d'augmenter considérablement la dimension du portefeuille d'investissement à simuler (de l'ordre de 1000 lignes de titres) jusqu'à obtenir un problème en vraie grandeur. Le programme LICS.v2, développé dans le cadre d'Amazone, inclut également des routines d'optimisation de la composition du portefeuille d'investissement de la compagnie.

Estimation d'erreurs dans les problèmes localisés. Les équations différentielles stochastiques rétrogrades semblent pouvoir donner via l'interprétation des solutions de viscosité un outil permettant l'analyse de l'erreur due à la localisation pour des inéquations variationnelles comme celles engendrées par le calcul des *puts* américains[EKKP+97,Cre00]. Pour cela nous nous intéressons aux travaux de [MC01] donnant l'existence et l'unicité de la solution à une équation stochastique rétrograde dans le cas d'une condition au bord homogène. C. Berthelot a commencé à étendre ce résultat au cas non homogène afin de pouvoir étudier l'erreur commise par l'introduction de conditions aux bords artificielles pour des inéquations variationnelles posées dans des domaines non bornés.

Gestion optimale de bilan de compagnie d'assurance. On s'intéresse au problème de la gestion du bilan bancaire d'une compagnie proposant un contrat financier de type assurance-

[EKKP+97] N. El Karoui, C. Kapoudjjian, E. Pardoux, S. Peng, M.-C. Quenez, « Reflected solutions of backward SDE's and related obstacle problems for PDE's », *Ann. Probab. 25*, 2, 1997, p. 702–737.

[Cre00] S. Crepey, *Contibution à des mèthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux*, thèse de doctorat, École Polytechnique, 2000.

[MC01] J. Ma, J. Cvitanić, « Reflected forward-backward SDEs and obstacle problems with boundary conditions », *J. Appl. Math. Stochastic Anal. 14*, 2, 2001, p. 113–138.

vie. S. Chaumont a généralisé le modèle introduit par M. Bossy, N. Pistre et D. Talay[BPT97] en considérant des modèles non nécessairement gaussiens des taux court et des modèles non log-normaux d'actifs, et en assouplissant le critère de sortie anticipée du contrat pour l'assuré. Le problème du calcul effectif de la « fonction valeur » du contrat a été posé en termes de contrôle stochastique, ce qui a permis d'étudier certaines propriétés de la fonction valeur (continuité, croissance à l'infini), de construire un algorithme d'approximation exploitant les idées de Kushner[Kus99] pour discrétiser l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman dont la fonction valeur est solution de viscosité, et d'établir, pour chaque modèle considéré, la convergence de cet algorithme. Pour ce faire, on a utilisé les résultats de [Kry80], [BR98], [BS91]). Une majoration explicite de l'erreur ne semble « possible » que dans le cas très simple où le client ne sort pas avant l'échéance du contrat. Toutefois, nous avons mis au point un « cas-test » permettant de calculer l'erreur précisément.

7 Actions régionales, nationales et internationales

7.1 Visites et invitations de chercheurs

S. Herrmann a séjourné à l'institut Lyapounov de Moscou du 3 au 21 septembre 2001 dans le cadre de l'action conjointe entre OMEGA et cet institut.

8 Diffusion de résultats

8.1 Animation de la communauté scientifique

M. Deaconu et D. Talay sont reviewers permanents à *Mathematical Reviews*.

M. Deaconu est membre de la Commission pour les postes d'accueil de l'INRIA Lorraine, de la Commission de Spécialistes du Département de Mathématiques de l'Université Henri Poincaré et du Conseil du Laboratoire de l'Institut Élie Cartan.

M. Gradinaru est responsable du groupe de travail en probabilités de l'Institut Élie Cartan à Nancy.

M. Gradinaru est responsable du site WEB de l'équipe probabilités de l'Institut Élie Cartan à Nancy.

M. Gradinaru est membre élu aux conseils de laboratoires et à la commission de spécialiste de l'Institut Élie Cartan à Nancy.

[BPT97] M. Bossy, N. Pistre, D. Talay, « Étude numérique de sensibilité d'un bilan de société d'assurance dans le cadre de contrats avec options de sortie », *Banques et marchés 28*, 1997, `http://www-sop.inria.fr/omega/finance/demonst.html`.

[Kus99] H. J. Kushner, « Consistency issues for numerical methods for variance control, with applications to optimization in finance », *IEEE Trans. Automat. Control 44*, 12, 1999, p. 2283–2296.

[Kry80] N. Krylov, *Controlled Diffusion Processes*, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[BR98] G. Barles, E. Rouy, « A strong comparison result for the Bellman equation arising in stochastic exit time control problems and its applications », *Comm. Partial Differential Equations 23*, 11-12, 1998, p. 1995–2033.

[BS91] G. Barles, P. Souganidis, « Convergence of Approximation Schemes for Fully Nonlinear Second Order Equations », *Asymptotic Anal. 4*, 3, 1991, p. 271–283.

É. Peirano a participé à un jury de thèse à l'IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse).

B. Roynette est responsable du séminaire de probabilités de l'Institut Élie Cartan à Nancy.

B. Roynette a participé à plusieurs jurys de thèse.

D. Talay est éditeur associé des revues suivantes : *Finance and Stochastics*, *Monte Carlo Methods and Applications*, *Mathematics of Computation–AMS* (il en est aussi membre du comité éditorial), *Stochastics and Dynamics*, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, *ESAIM Probability and Statistics*.

D. Talay est membre des comités scientifique et de gestion du « France Hong Kong Center for Financial and Insurance Engineering » (INRIA, Hong Kong City University, École Polytechnique).

D. Talay est membre du comité scientifique du Cemracs.

D. Talay est président du groupe MAS (Modélisation Aléatoire et Statistique) de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées & Industrielles).

D. Talay a participé à sept jurys de thèse, dont deux à l'étranger, et un jury d'habilitation.

P. Vallois a participé au jury de thèse de F. Soucaliuc le 28 septembre 2001 à Orsay.

P. Vallois est membre de la Commission de Spécialistes du Département de Mathématiques de l'Université Henri Poincaré.

P. Vallois et B. Roynette ont organisé la 7ème rencontre Évry-Nancy-Strasbourg à Nancy les 3—4 mai 2001 à Nancy.

P. Vallois a organisé une journée de génomique à Nancy le 29 mars 2001 avec : D. Cellier, J.-J. Daudin, S. Robin et M.-P. Etienne.

8.2 Enseignement universitaire

M. Bossy donne les cours suivants : Introduction au calcul stochastique et mathématiques financières dans le DESS IMAFA (« Informatique et Mathématiques Appliquées à la Finance et à l'Assurance ») de l'UNSA intitulé *Introduction aux risques financiers des marchés de l'énergie*, dans le mastère « Ingénierie et Gestion de l'Energie » de l'École des Mines de Paris à Sophia-Antipolis, Calcul stochastique (commun avec D. Talay) dans la filière «Analyse et applications» du DEA de mathématiques de l'UNSA, Algorithmes probabilistes et applications à la résolution d'EDP dans le DEA d'Analyse Numérique du MATIF (Lyon).

M. Deaconu (28h) a donné un cours de DEA sur le Mouvement Brownien à l'Université Henri Poincaré.

É. Peirano a été chargé de cours à l'Université de Chalmers en Suède.

D. Talay est professeur chargé de cours à l'École Polytechnique, et enseigne au DEA de probabilités de l'Université Paris VI.

P. Vallois a donné un cours de mathématiques financières en DESS, option Aide à la Décision, et en section Mathématique pour la Finance, une nouvelle section de DESS ouverte avec l'École des Mines de Nancy en septembre 2001.

8.3 Thèses et habilitation à diriger des recherches

Axel Grorud a obtenu son habilitation à diriger des recherches « Asymétries en calcul stochastique et en finance mathématique » à l'Université de Provence en juin 2001.

Samuel Herrmann a soutenu sa thèse « Étude de processus de diffusion » à l'Université Nancy I en juin 2001.

Sylvain Maire a soutenu sa thèse « Une méthode itérative de réduction de variance. Une méthode probabiliste de calcul de criticité » en décembre 2001 à l'Université de Toulon et du Var.

Étienne Tanré a soutenu sa thèse « Étude probabiliste des équations de Smoluchowski ; Schéma d'Euler pour des fonctionnelles ; Amplitude du mouvement brownien avec dérive » à l'Université Nancy I en septembre 2001.

8.4 Encadrement de thèse

Olivier Bardou a commencé une thèse sous la direction de D. Talay en septembre 2001.

Ivan Nourdin a commencé une thèse sous la direction de P. Vallois en septembre 2001.

8.5 Participation à des colloques, séminaires, invitations

C. Ackermann a exposé aux 8es rencontres Évry-Nancy-Strasbourg à Évry en novembre 2001.

M. Bossy a exposé au Workshop *Stochastic Numerics* ETH Zurich, Février 2001 et au séminaire *Modeles Stochastiques* du CMAP.

M. Deaconu a été invitée à la Conférence Internationale *Stochastic Numerics Conference 2001* (19-21 février 2001, ETH Zurich - Suisse) et au *Workshop : Stochastic models for coagulation processes* (19 - 25 août 2001, MFO - Allemagne), et a participé aux Journées *Méthodes de Classification*, Groupe Analyse Statistique du Transcriptome (21-22 juin 2001 INA P-G, Paris), aux Journées de Probabilités et Statistique, Évry-Nancy-Strasbourg (3-4 mai 2001, Nancy), à la Journée Génomique (29 mars 2001, Nancy).

M.-P. Etienne a été invitée à la Journée Génomique (29 mars 2001, Nancy) pour exposer le travail sur la convergence d'un algorithme de recherche de motifs. M.-P. Etienne a également participé aux Journées *Méthodes de Classification*, Groupe Analyse Statistique du Transcriptome (21–22 juin 2001 INA P-G, Paris), aux Journées de Probabilités et Statistique Évry-Nancy-Strasbourg (3–4 mai 2001, Nancy), aux *Journées Ouvertes de Biologie, Informatique et Mathématiques* à Toulouse (30 mai–1er juin 2001).

J-S. Giet a exposé à l'Université de Warwick le 17 février 2001 et au séminaire de probabilités de l'IECN le 11 octobre 2001.

M. Gradinaru a parlé aux journées Évry-Nancy-Strasbourg à Strasbourg en novembre 2000, à Nancy en mai 2001 et à Évry en novembre 2001 ; aux journées de probabilités à Strasbourg en septembre 2001 ; à l'*International Conference on Stochastic Analysis and Applications* à Hammamet (Tunisie) en octobre 2001.

M. Gradinaru a été invité au séminaire de probabilités de l'Université de Bonn fin 2001.

A. Grorud a été invité à l'Université Paul Sabatier (Toulouse) en juin 2001 au séminaire de statistiques.

S. Herrmann a exposé au séminaire de probabilités de l'IECN (Nancy) en mai 2001, à l'Université Technique de Berlin en avril 2001, aux recontres Évry-Nancy-Strasbourg en mai 2001 et à l'institut Lyapounov (Moscou, Russie) en septembre 2001.

A. Lejay a exposé au séminaire de probabilités de l'IECN le 18 et 25 octobre 2001.

D. Talay a exposé au Workshop *Stochastics Numerics* (ETH Zürich), à l'Université P. Sabatier (Toulouse) et à l'Université de Cergy, à la City University of Hong Kong, au colloque *Application du calcul de Malliavin en finance* (INRIA Rocquencourt).

É. Tanré a exposé au séminaire OMEGA à l'INRIA Sophia-Antipolis en janvier 2001, au séminaire de probabilités de l'Université de Wisconsin en avril 2001, aux 7esrencontres Évry-Nancy-Strasbourg en mai 2001, au séminaire de probabilités de l'Université de Cambridge en mai 2001, au groupe de travail *méthodes stochastiques et finances* à Marne-la-Vallée en juin 2001, au Colloque IHP jeunes chercheurs sur les *limites hydrodynamiques* en décembre 2001.

P. Vallois a parlé au *Workshop on fractional Brownian motion* (stochastic calculus and applications. 15–16 février 2001, Barcelone), au Séminaire d'EDP de l'Université de Savoie (Chambéry) le 28 février 2001, au *Seminar on stochastic processes* (Gainesville, Floride) le 8–10 mars 2001, au *Mathematical and engeneering aspects of optimal design of materials and structures* à Poznan (Pologne) en août 2001 et aux Journées de Probabilités de Strasbourg du 3 au 7 septembre 2001.

P. Vallois a participé aux Séminaire au Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux de l'Université Paris XIII.

Invitations

Le séminaire *Théorie et applications numériques des processus stochastiques* organisé à Sophia-Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : Florent Malrieu (Université de Toulouse) Sergei Pergamenshchikov (Université d'État de Tomsk, Russie), Thomas Simon (Humboldt-Universität zu Berlin), Michael Mascagni (Florida State University), Valentin Konakov (Université Paris X), Alexander Yu. Veretennikov (University of Leeds), Samir Ben Hariz (Université du Maine), Clementine Prieur (ENS Cahan), Soledad Torres (Universidad de Valparaiso), Manuel Galea (Universidad de Valparaiso).

Le séminaire de Mathématiques financières organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs Qiang Zhang (City University of Hong Kong, China) et Stéphane Crepey (INRIA).

Le séminaire de Probabilités de l'Institut Élie Cartan organisé à Nancy par B. Roynette a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants : P. Bougerol (Université de Paris VI), L. Chaumont (Université de Paris VI), L. Chevalier (Université de Grenoble), S. Méléard (Université de Paris X), G. Schaeffer (Université de Nancy), G. Nuel (Université d'Évry), J.-F. Marckert (Université de Versailles), A. Lambert (Université de Paris VI), Y. Baryshnikov (Université de Versailles), M. Zani (Université de Lille), J.-J. Daudin (INA P-G Paris), S. Robin (INRA Versailles), D. Cellier (Université de Rouen), F. Baudoin (Université de Paris VI), D. Kurtz (Université de Strasbourg), G. Martynov (Université de Strasbourg), C. Blanchet (Université d'Évry), L. Galtchouk (Université de Strasbourg), C. Cot (Université d'Évry), C. Stricker (Université de Besançon), A. Goldman (Université de Lyon), T. Simon (Université d'Évry), G. Peccati (Université de Paris VI), M. Yor (Université de Paris VI), C. Cardon-

Webber (Université de Paris VI), F. Soucaliuc (Université d'Orsay), E. Lakhel (Université de Marrakech), J. Norris (Université de Cambridge), S. Schbath (INRA),

9 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

[1] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I) : convergence rate of the distribution function », *Probability Theory and Related Fields 104*, 1, 1996.

[2] V. Bally, D. Talay, « The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II) : convergence rate of the density », *Monte Carlo Methods and Applications 2*, 1996, p. 93–128.

[3] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, P. Vallois, « Nonlinear self stabilizing processes I Existence, invariant probability, propagation of chaos », *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 173–201.

[4] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Branching process associated with 2d–Navier Stokes equation », *Prépublications n°30*, Institut Élie Cartan, 1998, À paraître dans la *Revista Matematica Iberoamericana.*

[5] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, « Nonlinear self stabilizing processes II Convergence to invariant probability », *Stoch. Proc. Appl. 75*, 1998, p. 203–224.

[6] P. Bernard, D. Talay, L. Tubaro, « Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients », *Math. Comp. 63*, 208, 1994, p. 555–587.

[7] M. Bossy, D. Talay, « Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles : application to the Burgers equation », *Ann. Appl. Probab. 6*, 1996, p. 818–861.

[8] C. Graham, T. Kurtz, S. Méléard, P. Protter, M. Pulvirenti, D. Talay, *Probabilistic Models for Nonlinear PDE's and Numerical Applications*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1627, Springer-Verlag, 1996, CIME Summer School, D. Talay and L. Tubaro (Eds.).

Thèses et habilitations à diriger des recherches

[9] A. Grorud, *Asymétries en calcul stochastique et en finance mathématique*, habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, 2001.

[10] S. Herrmann, *Étude de processus de diffusion*, thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, 2001.

[11] S. Maire, *Une méthode itérative de réduction de variance. Une méthode probabiliste de calcul de criticité*, thèse de doctorat, Université de Toulon et du Var, 2001.

[12] É. Tanré, *Étude probabiliste des équations de Smoluchowski ; Schéma d'Euler pour des fonctionnelles ; Amplitude du mouvement brownien avec dérive*, thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, 2001.

Articles et chapitres de livre

[13] M. Bossy, R. Gibson, F. S. Lhabitnat, N. Pistre, D. Talay, Z. Zheng, « Volatility model risk measurement and against worst case volatilities », *Journal de la Société Française de Statistique 141*, 1-2, 2000, p. 73–86.

[14] M. Bossy, B. Jourdain, « A stochastic particle method for the solution of a 1D viscous scalar conservation law », *Monte Carlo Methods Appl. 7*, 1–4, 2001.

[15] B. De Meyer, B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « On independent times and positions for Brownian motion », *Rev. Mat. Iberoamericana*, 2001, à paraître.

[16] B. De Meyer, B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « Sur l'indépendance d'un temps d'arrêt et de la position B_T d'un mouvement brownien $(B_u; u \geq 0)$ », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 2001, à paraître.

[17] M. Deaconu, N. Fournier, E. Tanré, « A pure jump Markov process associated with Smoluchowski's coagulation equation », *Ann. Probab.*, 2001, à paraître (Prépublication de l'Institut Élie Cartan de Nancy n° 6).

[18] M. Deaconu, E. Tanré, « A generalization of the connection between the additive and multiplicative solutions for the Smoluchowski's coagulation equation », *Monte Carlo Methods Appl. 7*, 1–2, 2001, p. 141–147.

[19] N. Fournier, « Jumping SDEs : absolute continuity using monotony », *Stochastic Process. Appl.*, 2001, À paraître.

[20] M. Gradinaru, S. Herrmann, B. Roynette, « A singular large deviations phenomenon », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 37*, 5, 2001, p. 555–580.

[21] A. Grorud, M. Pontier, « Asymmetrical information and incomplete market », *International Journal of Theoretical and Applied Finance 4*, 2, 2001, p. 1–18.

[22] J.-P. Minier, E. Peirano, « The PDF approach to polydispersed turbulent two-phase flows », *Physics Reports 352*, 1–3, 2001, p. 1–214.

[23] E. Peirano, J.-P. Minier, « A probabilistic formalism and hierarchy of models for polydispersed turbulent two-phase flows », *Phys. Rev. E*, 2001, À paraître.

[24] H. Régnier, D. Talay, « Vitesse de convergence d'une méthode particulaire stochastique avec branchements », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332*, 10, 2001, p. 933–938.

[25] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, « A Solution to Skorokhod's embedding for linear Brownian motion and its local time », *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2001, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[26] D. Talay, Z. Zheng, « A Hamilton Jacobi Bellman Isaacs equation for a financial risk model », *in : Optimal control and PDE — Innovations and applications*, J.-L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (éditeurs), IOS Press, 2001.

Rapports de recherche et publications internes

[27] M. Bossy, B. Jourdain, « Rate of convergence of a particle method for the solution of a 1D viscous scalar conservation law in a bounded interval », *rapport de recherche n°197*, CERMICS, décembre 2000.

[28] J.-J. Daudin, M.-P. Etienne, P. Vallois, « Asymptotic behaviour of the local score of independent and identically distributed random sequence », *prépublication n°28*, Institut Élie Cartan de Nancy, 2001.

[29] M. Deaconu, N. Fournier, E. Tanré, « Study of a stochastic particle system associated with the Smoluchowski coagulation equation », *prépublication n°15*, Institut Élie Cartan de Nancy, 2001.

[30] M. Deaconu, N. Fournier, « Probabilistic approach of some discrete and continuous coagulation equations with diffusion », *prépublication n°53*, Institut Élie Cartan de Nancy, 2001.

[31] M. Gradinaru, F. Russo, P. Vallois, « Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geq 1/4$ », *prépublication n°38*, Institut Élie Cartan de Nancy, 2001.

[32] S. Herrmann, B. Roynette, « Boundedness and convergence of some self-attracting diffusions », *prépublication n°10*, Institut Élie Cartan de Nancy, 2001, à paraître dans *Mathematische Annalen*.

Divers

[33] É. Peirano, D. Talay, J.-P. Minier, « Schémas numériques faibles pour les équations différentielles stochastiques intervenant dans les écoulements diphasiques polydispersés et turbulents », Rapport intermédiaire de collaboration INRIA-EDF, 2001.

[34] D. Talay, Z. Zheng, « Reflected backward stochastic differential equations with random terminal time », soumis pour publication, 2001.

[35] D. Talay, « Stochastic Hamiltonian dissipative systems : long time behaviour and approximation of invariant measures », soumis pour publication, 2001.