

Projet ONDES

*Modélisation et Simulation de Phénomènes de Propagation
d'Ondes*

Rocquencourt

THÈME 4B

R *apport*
d'Activité

2001

Table des matières

1	Composition de l'équipe	3
2	Présentation et objectifs généraux	4
3	Fondements scientifiques	5
3.1	Simulation précise et rapide pour la propagation d'ondes	6
3.2	Problèmes en géométrie complexe	7
3.3	Résolution de Problèmes en milieux non bornés	8
3.4	Modèles asymptotiques ou approchés	8
3.5	Hautes fréquences	9
3.6	Milieux complexes	9
3.7	Le guidage des ondes	10
3.8	Résonances	10
3.9	Ondes non linéaires	11
3.10	Calcul parallèle	11
4	Domaines d'applications	12
4.1	Ondes acoustiques	12
4.2	Ondes élastiques	12
4.3	Ondes électromagnétiques	13
4.4	Ondes de gravité	13
4.5	Ondes et corpuscules	14
5	Logiciels	14
5.1	Le Code de calcul MELINA	14
6	Résultats nouveaux	15
6.1	Méthodes d'ordre élevé pour les équations des ondes	15
6.2	Développement du code MELINA	16
6.3	Modèles asymptotiques pour la simulation de la propagation d'ondes dans des milieux comportant des fentes	17
6.4	Construction d'éléments finis conformes courbes pour les champs de vecteurs.	18
6.5	Éléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell en maillage triangulaire et tétraédrique	19
6.6	Éléments finis mixtes quadrilatéraux et hexaédraux avec condensation de masse pour les équations de Maxwell	19
6.7	Equations de Maxwell et singularités	20
6.8	Simulation du CHFR	21
6.9	Modélisation numérique en acoustique musicale : étude de la guitare	22
6.10	Diffraction d'une onde acoustique par un obstacle mobile	24
6.11	Acoustique en présence d'écoulement	24
6.12	Éléments finis mixtes d'ordre élevé en maillage hexaédrique pour les ondes acoustiques et élastiques	26

6.13	Modélisation numérique de la propagation d'ondes en milieu élastique fissuré avec condition de contact unilatéral	28
6.14	Modélisation de la propagation d'ondes en milieu viscoélastique.	29
6.15	Raffinement de maillage local spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique	30
6.16	Modélisation numérique en couplage Fluide-Structure transitoire.	31
6.17	Interaction onde élastique - dislocation	32
6.18	Méthodes de couches absorbantes parfaitement adaptées.	33
6.19	Résonances d'une plaque élastique dans un conduit	36
6.20	Résonances en hydrodynamique navale	37
6.21	Guides d'ondes électromagnétiques en Optique	38
6.22	Technique multimodale pour les guides d'ondes non uniformes	38
6.23	Factorisation de l'équation de Helmholtz dans un guide d'ondes	39
6.24	Problèmes inverses : la Linear Sampling Method	39
6.25	Optique géométrique et solutions multivaluées d'équations d'Hamilton-Jacobi	40
6.26	Méthodes de raccordement modal généralisé	41
6.27	Distance de Wasserstein	42
6.28	Programmation dynamique et factorisation d'opérateurs elliptiques	43
6.29	Préconditionnement par factorisation incomplète	43
7	Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)	44
7.1	Contrat INRIA-IFP	44
7.2	Contrat INRIA-IFP	44
7.3	Contrat INRIA-Université de Tampere	44
7.4	Contrat INRIA-EDF	44
7.5	Contrat INRIA-EDF	45
7.6	Contrat INRIA-CEA	45
7.7	Contrat INRIA - Schlumberger	45
7.8	Contrat INRIA-ONERA	45
8	Actions régionales, nationales et internationales	45
8.1	Actions nationales	45
8.2	Relations bilatérales internationales	46
8.3	Accueils de chercheurs étrangers	46
9	Diffusion de résultats	46
9.1	Animation de la communauté scientifique	46
9.2	Enseignement universitaire	47
9.3	Participation à des séminaires, colloques, invitations	49
9.4	Réalisation de vidéos scientifiques	52
10	Bibliographie	52

1 Composition de l'équipe

Responsables scientifiques

Patrick Joly [DR]
Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia [DR-CNRS]

Responsable permanent

Eliane Bécache [CR]

Assistantes de projet (avec le projet Estime)

Muriel de Bianchi [AJT]
Annie Marchal [Secrétaire ENSTA]

Personnel INRIA

Jean-David Benamou [DR (Action OTTO depuis mai 2001)]
Gary Cohen [CR]
Housseem Haddar [CR depuis le 01/09]
Jacques Henry [DR]
Jean Roberts [DR]

Personnel CNRS

Marc Lenoir [DR]
Christophe Hazard [CR]
Jean-Francois Mercier [CR]

Personnel ENSTA

Patrick Ciarlet [enseignant-chercheur ENSTA]
Eric Lunéville [enseignant-chercheur ENSTA]

Collaborateurs extérieurs

Daniel Martin [Maître de Conférences Université de Rennes]
Christine Poirier [Maître de Conférences Université de Versailles]

Chercheurs invités

Dolores Pedreira [Université Saint Jacques de Compostelle]
Angel Ramos [Université Complutense Madrid]

Chercheurs Post-Doctorants

Phillipe Hoch [post doct. Inria (Action OTTO depuis mai 2001)]
Stéphane Job [post doct. à l'ENSTA, depuis le 01/12/01]
Karim Ramdani [post doct. à l'ENSTA, jusqu'au 01/08/01]

Chercheurs Doctorants

Isabelle Champagne [Personnel DGA, Ecole Polytechnique]
Lynda Dahi [boursière gouvernement algérien]
Grégoire Derveaux [boursier X]
Julien Diaz [boursier MENRT, Paris 6]
Dorra Drissi [ENIT, Tunisie]
Abdelaâziz Ezziani [boursier MENRT, Paris 9]
Sandrine Fauqueux [boursière CIFRE IFP]
Emmanuelle Garcia [boursière CEA]
Guillaume Legendre [boursier ONERA]
François Loret [boursier MENRT, Ecole Centrale de Paris]

Sébastien Pernet [boursier ONERA]
 Jeronimó Rodríguez [bourse espagnole, Université Paris 9]
 Gilles Scarella [boursier Inria, Université Paris 9]
 Maria do Céu Soares [Université nouvelle de Lisbonne (co-tutelle)]
 Axel Tillequin [boursier MENRT, Université Versailles-St Quentin]
 Sébastien Tordeux [boursier DGA, Université Paris 9]
 Ian Sollicec [boursier Inria, Université Paris 6 (Action OTTO depuis mai 2001)]
 Kevin Guittet [boursier AMN, ENS-Ulm (Action OTTO depuis mai 2001)]

Stagiaires

Emilie Bangratz [DEA Paris 6]
 Anne-Laure Baril [Maîtrise UVSQ]
 Isabelle Champagne [DEA Paris 6]
 Julien Diaz [DEA UVSQ]
 Aïssatou Diop [DEA Paris 9]
 Abdelaâziz Ezziani [DEA Lyon 1]
 Jeronimó Rodríguez [DEA Paris 6]
 Sébastien Tordeux [DEA UVSQ]

2 Présentation et objectifs généraux

La propagation d'ondes de toutes natures est l'un des phénomènes physiques les plus simples et les plus usuels auquel nous soyons confrontés. Depuis la vie courante (sons, vibrations, vagues, télécommunications, radar) jusqu'à l'échelle de l'univers (ondes électromagnétiques, de gravité) et à celle de l'atome (émission spontanée ou stimulée, interférences entre particules), ce sont l'émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen privilégié de connaissance du monde qui nous entoure.

L'étude et la simulation numérique des phénomènes de propagation constituent donc une activité très répandue dans les divers domaines de la physique et de l'art de l'ingénieur.

La variété et la complexité des problèmes posés, leur intérêt scientifique et industriel, la prise de conscience d'une structure mathématique commune à des problèmes issus de domaines différents justifient qu'un projet de recherche en Calcul Scientifique soit entièrement dédié à ce thème. Ce projet est un projet commun INRIA-CNRS-ENSTA.

De façon générale, l'activité du projet est orientée vers la conception, l'analyse, l'approximation numérique et le contrôle de modèles mathématiques pour la description des phénomènes de propagation d'ondes intervenant en mécanique et en physique et dans les sciences de l'ingénieur.

Au-delà de l'objectif général de progression de la connaissance scientifique, trois buts peuvent être assignés au projet :

- Le développement d'une expertise des problèmes relatifs aux quatre types d'ondes étudiées : acoustique, ondes de gravité, élastodynamique et électromagnétique, ainsi que des diverses méthodes de résolution numérique.
- Le traitement des problèmes complexes, c'est-à-dire dont la modélisation soit suffisamment proche des situations concrètes.

- Le développement des méthodes numériques originales.

L'étude de tels problèmes conduit naturellement à des applications importantes sur le plan industriel. Pour s'attaquer à ces problèmes, notre démarche scientifique repose sur une approche selon les trois angles suivants :

- La modélisation des problèmes physiques, leur mise en équations et la conception de modèles approchés à l'aide de méthodes asymptotiques.
- L'étude théorique des modèles mathématiques relativement à l'existence, l'unicité et aux propriétés qualitatives essentielles des modèles.
- La conception, l'analyse et la mise en oeuvre de méthodes numériques, l'étude de la précision et de la stabilité des méthodes, la mise au point d'algorithmes, leur parallélisation et leur vectorisation.

3 Fondements scientifiques

Notre activité repose avant tout sur l'existence de modèles mathématiques issus de la physique. Il s'agit d'équations ou de systèmes d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique (pour reprendre la terminologie mathématique). Les modèles de base, qui s'appuient sur une physique simplifiée, sont linéaires. Le prototype en est l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

qui s'applique directement aux ondes acoustiques mais constitue un modèle scalaire simplifié pour les autres types d'onde. C'est pourquoi le développement de nouvelles méthodes numériques passe souvent par son application à l'équation des ondes. Une physique plus réaliste vient en général enrichir ces modèles de base et en accroître la complexité : conditions aux limites, termes non linéaires, termes intégral-différentiels, couplages de modèles, ...

Il est commun de distinguer deux types de problèmes associés à ces modèles : les problèmes en temps (ou problèmes transitoires) et les problèmes en fréquence (ou problèmes harmoniques). Dans le premier cas, le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution. Dans le second cas, la dépendance en temps est imposée *a priori*, par l'intermédiaire de la source par exemple. Elle est supposée périodique en temps, et même harmonique : on cherche une solution proportionnelle à $e^{i\omega t}$, où $\omega > 0$ désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence). Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnue recherchée est une fonction des seules variables spatiales. Ainsi, l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz :

$$-c^2 \Delta u - \omega^2 u = 0.$$

Il convient de souligner que ces deux types de problèmes, bien qu'issus d'une même modélisation physique, ont des propriétés mathématiques radicalement différentes et nécessitent le développement de méthodes numériques adaptées. En outre, la justification mathématique précise du passage de l'un à l'autre s'avère souvent délicate. Enfin, signalons que les problèmes harmoniques n'ont, du moins en toute rigueur, plus d'objet dès que le modèle mathématique devient non linéaire.

Toutefois, il est un point commun entre ces problèmes : l'existence d'une dimension caractéristique qu'on appelle la longueur d'onde. Très intuitivement, cette dimension est la longueur sur laquelle la solution recherchée varie substantiellement (typiquement la période d'une solution périodique). Dans le cas d'une propagation en milieu hétérogène, il conviendra de parler de plusieurs longueurs d'onde, celle-ci pouvant varier d'une région de l'espace à l'autre. Sa connaissance a bien entendu une influence fondamentale sur les propriétés de la solution et donc sur le choix d'une méthode numérique. Un problème sera considéré comme de grande taille si le rapport entre la taille de ce problème (à savoir la taille du domaine de calcul dans le cas d'un problème harmonique ou la distance parcourue par l'onde pendant le temps d'intégration dans le cas d'un problème transitoire) et la longueur d'onde est grand.

Actuellement, on maîtrise bien les méthodes numériques pour résoudre les problèmes académiques ou industriels de base. Beaucoup de compagnies possèdent des codes de calcul s'appuyant sur des méthodes de nature diverse et de précision peu élevée (typiquement du second ordre par rapport aux paramètres de discrétisation). Ces méthodes sont fiables et leurs limites en général bien cernées. En revanche les problèmes plus complexes et plus proches des applications restent largement ouverts et constituent un champ d'investigation très fertile pour les mathématiques appliquées. Les recherches en Mathématiques Appliquées s'orientent maintenant dans les directions suivantes :

- La conception de nouvelles méthodes plus précises et plus performantes
- Le traitement des modélisations de plus en plus complexes : modèles non locaux, modèles non linéaires, systèmes couplés,...
- L'étude de phénomènes spécifiques : ondes guidées, résonances, singularités de solutions
- Le développement de modèles approchés.

C'est dans ce cadre que s'inscrivent les problématiques abordées par le projet Ondes.

3.1 Simulation précise et rapide pour la propagation d'ondes

Les problèmes auxquels on est souvent confronté sont de grande taille au sens où le rapport entre la taille du domaine de calcul (ou la distance parcourue par l'onde pendant la durée de la simulation en régime transitoire) et la longueur d'onde peut être grande. Dans ce cas, les méthodes évoquées plus haut tombent en défaut et des phénomènes parasites, tels que la dispersion numérique pour n'en citer qu'un, viennent gravement entacher la fiabilité des résultats. Par ailleurs, la grande taille des problèmes conduit à des calculs sur ordinateur à la fois longs et gourmands en place mémoire. Il est alors naturel de chercher à améliorer les méthodes numériques en termes de précision et d'efficacité, les deux allant d'ailleurs parfois de paire.

C'est dans cette perspective que se situent les travaux que nous menons sur les méthodes d'ordre élevé en régime transitoire, tant en ce qui concerne les différences finies que les éléments finis. L'utilisation de cette deuxième classe de méthodes pose le problème pratique de la condensation de masse, opération préliminaire indispensable pour aboutir à des schémas numériques explicites, propriété essentielle pour préserver l'efficacité de la méthode résultante. Le fondement mathématique de cette opération de condensation repose sur l'utilisation de formules de quadrature numérique. Celle-ci doit bien sûr se faire sans nuire à la précision et à la stabilité des calculs, ce qui pose des problèmes théoriques intéressants (dont la nature varie

avec le modèle de propagation étudié) et conduit à des méthodes originales.

Des questions analogues se posent en régime fréquentiel, le problème étant alors de diminuer la taille ou d'améliorer le conditionnement des problèmes à traiter. C'est dans cet esprit que se situent nos travaux sur les méthodes de décomposition de domaine, évoqués plus en détail dans le paragraphe Calcul parallèle.

Enfin, on peut être dans une situation où on ne s'intéresse qu'à une partie de la solution d'un problème, auquel cas on doit s'attacher à concevoir des méthodes adaptées à ce cas de figure, plus efficaces qu'une méthode générale. C'est le cas des équations paraxiales qui ont été conçues pour calculer de façon approchée la propagation d'une onde dans une direction privilégiée. De tels modèles sont abondamment utilisés en géophysique (la direction privilégiée est la verticale) ou en acoustique sous-marine (la direction privilégiée est horizontale). L'analyse et l'approximation numérique de ces modèles correspondent à une problématique proche de celle du traitement des conditions aux limites absorbantes (voir paragraphe 3.2).

3.2 Problèmes en géométrie complexe

Les géométries des domaines de calcul rencontrés dans les applications réalistes sont souvent complexes et ne peuvent se contenter de l'usage de maillages réguliers de type différences finies. Les méthodes d'éléments finis sont en principe conçues pour pallier ce genre d'inconvénient mais ne constituent pas nécessairement la panacée pour toutes les applications, notamment à cause de leur relative complexité en ce qui concerne l'implémentation et la gestion informatique. C'est pourquoi nous nous sommes lancés dans la recherche et l'étude de méthodes alternatives.

- **Les méthodes de domaines fictifs** : Ces méthodes ont été popularisées en France par R. Glowinski initialement pour la résolution de problèmes statiques de type elliptique. Leur adaptation aux modèles d'évolution de nature hyperbolique se révèle particulièrement fructueuse. La philosophie de ces méthodes consiste, dans un premier temps, à plonger la géométrie complexe à traiter dans une géométrie simple (typiquement un carré ou un cube), puis à oublier la présence de la frontière réelle. Dans un second temps, on introduit une inconnue de calcul auxiliaire définie uniquement sur cette frontière afin de tenir compte si possible de la condition aux limites qui y est imposée. Ceci permet alors de travailler avec deux maillages de calcul quasiment indépendant, un maillage régulier pour le volume et un maillage conforme pour la frontière. Ceci permet en particulier de s'affranchir de la majeure partie des difficultés pratiques liées aux méthodes d'éléments finis. D'un point de vue théorique, l'analyse de ces méthodes pose des questions délicates liées à la théorie des problèmes de point selle. Signalons que ces méthodes semblent particulièrement bien adaptées pour le traitement de fissures, pour les problèmes de diffraction par des obstacles mobiles ou encore pour les problèmes d'optimisation ou d'identification de formes.
- **Les méthodes de raffinement de maillages** : Ces méthodes présentent surtout un intérêt dans le contexte de l'utilisation de méthodes de différences finies. La question majeure qui se pose est la suivante : comment raccorder deux maillages de tailles différentes de façon stable et précise ? Dans le cas des problèmes elliptiques statiques (ou pour les problèmes dans le domaine fréquentiel), les méthodes dites d'éléments joints, notamment développées en France par Y. Maday, apportent une solution élégante à cette

question. Cette solution n'est pas suffisante pour les problèmes de propagation d'ondes où l'utilisation d'un pas de temps local est souhaitable : on diminue le pas de discrétisation en temps là où on raffine le maillage en espace. Dans ce cas, le problème reste largement ouvert et les solutions heuristiques développées par les ingénieurs manquent de fondements scientifiques. Leur étude requiert des techniques d'analyse relativement peu standard et pose des questions de stabilité qui sont nouvelles.

3.3 Résolution de Problèmes en milieux non bornés

De nombreux problèmes de propagation d'onde se posent en milieu non borné ou du moins très grand par rapport à la zone d'intérêt : nous pensons par exemple au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un avion ou à la propagation d'une onde élastique dans le sous-sol. Pour des raisons pratiques évidentes, on est amené à réduire les calculs effectifs à un domaine borné en espace. Se pose alors le problème du traitement de la frontière artificielle ainsi introduite afin de simuler le fait que le milieu de propagation réel est infini. C'est ce qui amène à introduire les notions de conditions aux limites transparentes (i.e., qui n'ont pas d'influence sur la solution), de conditions aux limites absorbantes (conditions aux limites qui sont censées « laisser sortir » les ondes du domaine de calcul en minimisant les réflexions parasites) ou de couches absorbantes (des petites bandes qui sont rajoutées autour du domaine de calcul dans lesquelles on travaille avec un modèle mathématique qui permet de laisser rentrer les ondes dans la couche puis les absorbe).

Il s'agit d'un thème à la fois important et délicat qui passionne les mathématiciens appliqués depuis près de vingt ans, et auquel les chercheurs du projet contribuent de façon substantielle. Ce sujet est étroitement lié sur le plan théorique aux notions d'opérateurs pseudo différentiels et de leur approximation ainsi qu'à la théorie des problèmes hyperboliques mixtes.

3.4 Modèles asymptotiques ou approchés

Dans de nombreux problèmes, on doit faire face à un ou à plusieurs petits paramètres, souvent de nature géométrique : nous pensons par exemple à l'épaisseur du revêtement absorbant d'un obstacle réfléchissant que l'on cherche à rendre furtif, à celle d'une couche de colle entre deux solides, au rayon d'une structure filaire intervenant comme élément d'une antenne ou à la période de variation d'un milieu hétérogène. Cette dimension caractéristique liée au problème considéré peut être petite devant la longueur d'onde, auquel cas sa prise en compte par des techniques de discrétisation classique est déraisonnable et coûteuse, mais néanmoins avoir une grande influence sur la solution du problème, ce qui rend nécessaire d'en tenir compte. Une idée relativement naturelle consiste alors à développer des modèles approchés fondés sur un développement asymptotique de la solution par rapport au petit paramètre : on aboutira alors selon les cas à une condition aux limites dite équivalente ou effective pour le revêtement absorbant, à une condition de transmission équivalente pour la couche mince, à une équation intégrale filaire dans le cas de l'antenne ou à un modèle homogénéisé dans le dernier cas. Dans chaque cas, la résolution numérique du nouveau problème se révèle plus simple (gain d'une ou plusieurs dimensions d'espace, coefficients localement constants, ...). La justification mathématique de ces modèles approchés passe par l'attirail classique en analyse numérique : caractère bien posé

des problèmes approchés, stabilité par rapport au petit paramètre, estimations d'erreur. Dans le cas des couches minces, on est confronté à des difficultés proches de celles rencontrées avec les conditions aux limites absorbantes.

Signalons que des techniques analogues peuvent être développées dans des cas où le petit paramètre n'est pas nécessairement de nature géométrique. Nous pensons aux problèmes basse fréquence, ou aux problèmes non linéaires avec données petites.

3.5 Hautes fréquences

Cette problématique aurait pu figurer dans la rubrique méthodes asymptotiques : en effet, il s'agit de s'intéresser à des problèmes de propagation dans lesquels la longueur d'onde générée se révèle très petite vis-à-vis des dimensions du domaine de calcul, ce qui fournit donc un petit paramètre naturel pour un développement asymptotique. Toutefois, la nature des phénomènes engendrés par ce petit paramètre est tellement spécifique qu'elle nécessite un traitement totalement à part : il s'agit d'imaginer une méthode permettant le calcul d'une solution très oscillante en espace. L'idée, maintenant ancienne, consiste à séparer le calcul de la phase et celui de l'amplitude à partir de l'ansatz dit de l'optique géométrique qui consiste à postuler que la solution s'écrit comme le produit d'une exponentielle complexe à phase réelle par une amplitude qu'on développe suivant les puissances inverses de la fréquence. On aboutit alors à une équation pour la phase, appelée équation Eikonale, et à une équation pour le premier terme du développement de l'amplitude, l'équation de transport. C'est la résolution de ces équations qui a donné la méthode connue sous le nom de lancer de rayons, méthode répandue dont les limites dépassent toutefois le simple cadre des hautes fréquences : coefficients variables non réguliers, problème des caustiques, zones d'ombre, ...

Depuis quelques années, un nouveau courant est né dans le monde de l'analyse numérique, qui consiste à s'intéresser directement à l'équation Eikonale en tant qu'équation aux dérivées partielles. Il s'agit d'une équation non linéaire de type Hamilton-Jacobi pour laquelle il est naturel de chercher à exploiter la récente théorie des solutions de viscosité de P.L. Lions. C'est dans ce cadre que nous axons nos recherches dans ce domaine.

Une deuxième idée a récemment vu le jour. Elle consiste à exploiter la théorie dite des limites semi-classiques fondée sur l'usage de la transformée de Wigner. Appliquée à l'équation des ondes, cette technique permet d'une part de retrouver le modèle asymptotique des rayons et d'autre part de dériver une équation de type Liouville pour une densité liée à la solution de l'équation de Helmholtz. Ceci permet d'espérer la mise au point d'une méthode particulière consistante à la limite en fréquence avec le lancer de rayons et exacte à fréquence finie.

3.6 Milieux complexes

Pour traiter des milieux réels, on est inévitablement amené à traiter ce que nous appellerons des milieux complexes. Par ce terme, nous entendons des milieux qui se révéleront être hétérogènes (coefficients variables, éventuellement discontinus - présence de fissures) ou obéir à une loi de comportement (mécanique ou électromagnétique) complexe : loi non locale en temps ou en espace, loi non linéaire. De telles propriétés induisent des phénomènes spécifiques de nature variée (singularités, absorption intrinsèque, dispersion intrinsèque...) qui correspondent

à des difficultés nouvelles sur un plan mathématique ou numérique. Dans ce cas de figure, il est difficile de dégager une méthode générale. On a affaire à des problèmes dont la théorie est inexistante ou mal connue, pour lesquels les méthodes numériques sont balbutiantes. Il faut alors trouver la solution *ad hoc* pour chaque cas de figure.

3.7 Le guidage des ondes

Les ondes guidées sont des solutions très particulières des modèles de propagation d'ondes : ce sont des ondes qui se propagent dans une direction privilégiée et dont l'énergie reste confinée dans une région bornée dans les directions orthogonales à cette direction privilégiée (directions transverses). Ceci n'est en général rigoureusement possible que si le milieu de propagation a une structure cylindrique (on parle alors de guide d'ondes). Toutefois, les ondes guidées décrivent bien les phénomènes que l'on observe dans des structures « presque cylindriques », situation qui se rencontre fréquemment dans les applications. Une des caractéristiques de ces ondes est d'être généralement dispersives (la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde) et ce même lorsque le modèle de propagation ne l'est pas intrinsèquement. On a l'habitude de distinguer les guides d'ondes fermés qui correspondent au cas où le confinement de l'énergie transverse est simplement dû au fait que le milieu de propagation est borné dans les directions transverses, des guides d'ondes ouverts qui correspondent au cas où, le milieu de propagation étant non borné dans les directions transverses, le confinement de l'énergie est dû à un mécanisme physique qui dépend des propriétés du modèle de propagation. Ce sont bien entendu les guides ouverts qui posent les questions les plus intéressantes (mais aussi les plus difficiles) d'un point de vue scientifique, tant au plan physique que mathématique et numérique.

L'analyse de ces phénomènes revêt une importance fondamentale soit parce qu'il y a dans la nature des ondes guidées auxquelles l'homme se trouve directement confronté (ondes de surface lors des tremblement de terre, ondes de gravité captées par la côte, ...) soit parce que l'homme va chercher à maîtriser et exploiter de telles ondes, notamment dans le domaine des télécommunications (fibres optiques, ...). Mathématiquement, l'étude des guides d'ondes nécessite une parfaite maîtrise de la théorie spectrale des opérateurs auto adjoints et numériquement elle fait appel à beaucoup d'ingrédients utilisés par ailleurs (conditions aux limites artificielles, équations intégrales, éléments finis, ...) mais aussi à des outils plus spécifiques (algorithmes de calcul de valeurs propres, résolution d'équations non linéaires, ...), autant d'aspects sur lesquels le projet a acquis une expertise internationalement reconnue.

Enfin, au delà de l'étude intrinsèque des guides d'ondes, il est fondamental, notamment pour les applications technologiques, d'être capable d'étudier leur interaction avec d'autres milieux de propagation (guides d'ondes débouchant sur des milieux ouverts, couplage de guides...), voire d'optimiser ces guides.

3.8 Résonances

Les fréquences de résonance constituent une notion qui est facilement accessible à l'intuition, mais délicate à définir proprement sur le plan mathématique surtout lorsqu'elles sont associées à des problèmes de propagation en milieu non borné (ce qui constitue le cas intéressant scientifiquement). Ces fréquences sont intimement liées au développement de la théorie du

« scattering » (travaux de Lax et Phillips) : ce sont des nombres complexes qui apparaissent comme les pôles du prolongement méromorphe d'une famille d'opérateurs dépendant de la fréquence réelle ω (ces opérateurs sont encore appelés matrices de Scattering).

Physiquement, on appelle souvent fréquences de résonance, les fréquences pour lesquelles la réponse d'un milieu ou d'un objet soumis à une excitation périodique en temps présente brutalement un maximum : on dit alors que le milieu (ou l'objet) rentre en résonance, phénomène auquel chacun est un jour ou l'autre confronté dans la vie courante. Le lien avec les pôles de résonance introduits plus haut est le suivant : ces fréquences physiques correspondent aux parties réelles des pôles, l'amplitude de la réponse étant, elle, directement reliée à la partie imaginaire des pôles (plus grande est celle-ci, plus faible est la réponse). On comprend alors l'importance pour les applications de la connaissance de ces pôles (détection radar, stabilité d'un navire soumis à la houle, instruments de musique, ...). En outre, les fréquences de résonance complexes permettent de décrire (à l'aide d'exponentielles complexes) le comportement aux temps longs de problèmes de propagation en milieu ouvert : elles sont donc potentiellement exploitables pour un calcul en transitoire.

Méthodologiquement, l'approche numérique des problèmes de résonances n'est pas sans point commun avec celle des problèmes d'ondes guidées mais présente des aspects très spécifiques, qui demandent de bien connaître la théorie des fonctions de la variable complexe, et des difficultés nouvelles (opérateurs non auto-adjoints, recherche de zéros dans le plan complexe, ...)

3.9 Ondes non linéaires

Si depuis toujours, les phénomènes non linéaires ont intéressé mathématiciens, physiciens et chimistes, ce n'est qu'assez récemment que des outils puissants d'analyse ont vu le jour et ont permis d'en mieux comprendre les effets. Dans le domaine des ondes, les non linéarités se rencontrent fréquemment. Citons par exemple, les solitons qui se propagent dans les canaux peu profonds sans se déformer sur des distances considérables ou encore les oscillations étranges de la concentration chimique dans les mélanges de bergobenzine de palladium. Les problèmes non linéaires jouent également un rôle important en Physique fondamentale et devraient être à la base des théories du futur. La construction de modèles numériques fiables et bien maîtrisés peut s'avérer très intéressante et contribuer à enrichir notre compréhension de leur comportement si souvent difficiles à appréhender par manque de solutions analytiques. Le modèle numérique devient alors un instrument de laboratoire virtuel qui permet d'expérimenter et d'explorer les potentialités des systèmes d'équations et de voir leur adéquation à la réalité. Ils peuvent également servir à l'inspiration des théoriciens en les guidant quant aux types de résultats susceptibles d'être démontrés.

3.10 Calcul parallèle

Comme dans beaucoup d'autres disciplines du Calcul Scientifique, il est naturel de chercher à exploiter pour la résolution des problèmes d'ondes les possibilités offertes par les outils du calcul parallèle. Dans certains cas, la parallélisation se fait de façon naturelle (parallélisation sur les fréquences, sur les sources, ...). Dans d'autres cas, nous pensons surtout aux schémas explicites pour les simulations transitoires, cette parallélisation ne pose pas de problème

conceptuel mais nécessite une utilisation optimale et astucieuse de l'outil informatique. Dans d'autres cas enfin, nous pensons ici notamment aux problèmes de grande taille posés dans le domaine fréquentiel, il faut développer de nouvelles techniques de Calcul Scientifique. Parmi ces techniques, les méthodes de décomposition de domaine, déjà largement utilisées dans d'autres domaines de la physique, occupent une place privilégiée. Toutefois, les méthodes classiques, qui s'appliquent essentiellement aux problèmes dits coercifs, ne s'appliquent pas directement aux modèles de propagation en fréquence type Helmholtz. C'est la raison pour laquelle le développement de méthodes de décomposition de domaine pour de tels modèles constitue un champ de recherches à part entière.

4 Domaines d'applications

Nous avons choisi de regrouper les différents domaines d'application de nos travaux suivant les principaux types d'onde concernés.

4.1 Ondes acoustiques

Ces ondes se propagent en milieu fluide et sont le support de la propagation du son. On cherche à calculer une distribution de pression.

Acoustique musicale Une application particulièrement séduisante des modèles numériques de propagation d'ondes est la simulation sur ordinateur d'instruments de musique. Le but poursuivi est alors double : aider à une meilleure compréhension du fonctionnement de ces instruments mais aussi aider à la facture d'instruments nouveaux. Dans la pratique, une modélisation réaliste de ces instruments conduit à étudier en fait des problèmes d'interaction fluide-structure, c'est-à-dire l'interaction entre une onde acoustique et une structure vibrante telle une membrane, une plaque ou une coque.

Acoustique sous-marine L'acoustique sous-marine a pour objet l'étude et l'utilisation de modèles mathématiques décrivant la propagation des ondes acoustiques dans la mer. La propagation des ondes dépend des caractéristiques physiques locales du milieu pouvant évoluer au cours du temps. Les résultats des recherches dans ce domaine ont des applications directes en océanographie, biologie marine, géophysique.

4.2 Ondes élastiques

Ces ondes se propagent dans les solides. L'inconnue est la distribution du champ des déplacements dans le solide.

Géophysique La géophysique s'intéresse à la propagation des ondes dans le sous-sol (éventuellement en milieu marin). Ces ondes interviennent bien sûr dans des phénomènes naturels comme les séismes mais elles sont aussi utilisées à des fins industrielles essentiellement par l'industrie du pétrole qui a développé les méthodes de prospection pétrolière par la sismique. Ces méthodes constituent un vaste champ d'application pour les méthodes numériques. Se

posent également des problèmes de modélisation fine destinée à prendre en compte l'influence d'éléments tels que la présence de puits, d'outils d'acquisition des données, modélisation des sources, ...

Bien entendu, les outils de modélisation sont surtout dans ce contexte un outil nécessaire pour mener à bien l'identification du sous-sol (problème inverse), raison pour laquelle la géophysique est notre principal thème de collaboration avec le projet Estime.

Contrôle non destructif Une autre application très répandue des ondes élastiques est le contrôle non destructif : le but est par exemple de détecter la présence d'un défaut dans une pièce métallique (typiquement une fissure) sans avoir à casser celle-ci. On utilise alors des ondes ultra-sonores dont on mesure l'écho à la surface de la pièce. Un champ d'applications privilégié de telles méthodes est le contrôle des centrales nucléaires.

4.3 Ondes électromagnétiques

Ces ondes n'ont pas besoin de support matériel pour se propager. Les inconnues du problème sont essentiellement le champ électrique et le champ magnétique.

Furtivité radar Les ondes électromagnétiques sont très utilisées pour la détection d'objets volants, le plus souvent pour des applications militaires. Les problèmes de calcul numérique qui se posent sont de deux natures :

- Comment calculer la réponse d'un objet à une onde incidente ?
- Comment rendre cet objet furtif ?

Le thème furtivité fait notamment appel à la modélisation de nouveaux matériaux absorbants (anisotropes, chiraux, non linéaires, ...)

Antennes Les antennes sont une des technologies de base pour la communication à longue distance par ondes électromagnétiques. Elles sont utilisées pour émettre, diriger, réfléchir les ondes. Le calcul des antennes pose notamment des difficultés liées à leur géométrie très complexe (antennes plaquées, éléments filaires, ...)

Optique Les ondes électromagnétiques sont également largement utilisées en télécommunications pour transmettre de l'information par support optique (fibres optiques, optique intégrée). La technologie pour la conception de guides d'ondes optiques est très pointue et fait très largement appel à des matériaux nouveaux tels que les supraconducteurs. Le besoin en méthodes numériques dans ce domaine est croissant.

4.4 Ondes de gravité

Il s'agit des ondes liées à la propagation de la houle. Les modèles utilisés sont dérivés de la mécanique des fluides. Les applications concernent prioritairement l'industrie maritime notamment pour tout ce qui concerne les problèmes de stabilité des navires, de tenue à la mer, de résistance de vagues, ...

4.5 Ondes et corpuscules

On s'intéresse ici à des questions de base sur la nature ondulatoire et corpusculaire de la matière en Physique fondamentale. Il s'agit de concevoir des modèles d'ondes non linéaires et d'étudier le comportement asymptotique aux temps longs de leurs solutions. L'idée est d'interpréter les états limites ou stationnaires comme des particules. Dans ce cadre, la nature corpusculaire de la matière apparaît comme un horizon asymptotiquement atteint loin de toute interaction. L'état asymptotique est alors défini par les quantités classiques en mécanique quantique (énergie, moment cinétique et spin). La nature ondulatoire est quant-à-elle fondamentale pour décrire la phénoménologie des chocs et des interactions entre particules.

5 Logiciels

5.1 Le Code de calcul MELINA

Participants : Patrick Joly, Marc Lenoir, Daniel Martin.

Mots clés : diffraction, élément fini, équation intégrale.

Le code MELINA

L'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique fait, depuis toujours, partie des objectifs du projet. L'expérience des premières années a permis d'appréhender la difficulté à mettre en œuvre les algorithmes issus de nos travaux : gaspillage de temps pour des chercheurs plus à l'aise avec les études théoriques, duplication des travaux et des programmes, perte d'information lors du départ du chercheur, qualité logicielle douteuse qui rend problématique le transfert de programmes vers l'industrie. Les méthodes développées au sein du projet présentant de plus des spécificités tout à fait originales, il est apparu nécessaire de créer un outil logiciel efficace qui puisse servir de cadre à la plupart de nos futurs développements informatiques.

C'est ainsi qu'est né le code MELINA, destiné à la mise en œuvre de la méthode des éléments finis et à la résolution des problèmes de diffraction. Il ne s'agit pas de rivaliser avec l'ergonomie des meilleurs codes industriels, mais d'obtenir une souplesse d'utilisation qui ne présume ni du problème à résoudre ni de l'algorithme utilisé.

Le code MELINA et les applications qui en découlent permettent maintenant de résoudre un nombre important de problèmes de propagation d'ondes, en particulier dans les domaines de l'hydrodynamique navale, de l'acoustique et l'électromagnétisme. Des perspectives nouvelles s'ouvrent dans le cadre du projet commun, des méthodes numériques complémentaires ou alternatives ayant été développées par les deux partenaires ; promouvoir la synergie, rassembler le savoir-faire des deux équipes constitue une remarquable opportunité de mettre au point et de diffuser des codes de calcul efficaces témoignant de la qualité et de l'originalité de nos travaux dans le domaine numérique.

Présentation

- Le code MELINA est une bibliothèque de procédures pour la résolution de problèmes aux limites par la méthode des éléments finis. Il comporte des modules adaptés à la résolution de problèmes extérieurs, dont la modélisation reste l'un des objectifs majeurs du laboratoire. Il s'agit essentiellement d'un code de recherche qui fournit un ensemble d'outils aisément manipulables pour écrire rapidement des applications destinées au traitement numérique de problèmes aux limites ou à la mise au point d'algorithmes.
- La résolution d'un nouveau problème aux limites ou la mise en œuvre d'un nouvel algorithme de résolution peut, en général, être implémentée en rédigeant un programme principal à partir de la formulation variationnelle et de quelques procédures spécifiques. Les aspects informatiques les plus délicats, qui sont liés à l'occupation de la mémoire centrale, à l'assemblage des divers termes et à leur mode de rangement, sont pris en compte de façon automatique par le programme et ne sont donc plus à la charge du concepteur de l'application.
- Tous les '*objets*' (il s'agit par exemple des domaines sur lesquels sont calculées les intégrales apparaissant dans la formulation variationnelle, ou des termes matriciels ou vectoriels représentant ces intégrales, ou encore des constantes, etc ...) manipulés par les procédures constituant le programme principal, sont définis par des *noms*. Ces noms sont le lien entre les structures de données du code et l'utilisateur qui n'a donc pas à se soucier de leur représentation interne (en particulier, la gestion des types et des adresses est assurée de manière transparente par la librairie d'allocation dynamique).
- Les données du code, qui permettent la description simple des *objets* manipulés par le code, sont introduites sous forme de '*phrases*'. Ces phrases sont construites en utilisant un vocabulaire de mots-clés restreint et les mnémoniques (noms propres) définis par le développeur de l'application pour désigner les *objets* qui apparaissent dans la formulation du problème.
- Les opérations à effectuer sur ces *objets* sont des macro-opérations réalisées à l'aide de procédures dites de *haut niveau*, telles le calcul des termes matriciels, leur assemblage, la prise en compte de conditions essentielles, la résolution d'un système linéaire, etc. . .
- Le code contient des procédures pour la résolution de problèmes aux limites extérieurs (c'est-à-dire posés sur un domaine non borné), par exemple les phénomènes de propagation d'ondes (de gravité en hydrodynamique navale, acoustiques ou électromagnétiques, etc. . .) Les méthodes de résolution accessibles dans le code pour de tels problèmes sont la méthode de *couplage entre éléments finis et représentation intégrale* et la méthode des *éléments finis localisés*.

6 Résultats nouveaux

6.1 Méthodes d'ordre élevé pour les équations des ondes

Participant : Gary Cohen.

Mots clés : différences finies, éléments finis avec condensation de masse, système de

l'élastodynamique, équation de l'acoustique, équations de Maxwell.

Résumé : *Rédaction et parution d'un ouvrage sur l'approximation des équations des ondes en régime transitoire par des méthodes numériques d'ordre élevé*

Dans le cadre de son étude de méthodes numériques d'ordre élevé pour les équations des ondes, G. Cohen, a rédigé un ouvrage faisant le point sur ses recherches et celles de ses collaborateurs sur ce sujet, abordé depuis plus de dix ans déjà. Cet ouvrage de 348 pages, intitulé « Higher-Order Numerical Methods for Wave Equations in the Time Domain », qui est paru le 6 novembre 2001 dans la série « Lecture Notes in Computational Science and Engineering » de Springer-Verlag, se décompose en trois parties. La première partie définit les différentes équations continues et donne les notions élémentaires nécessaires à leur approximation. La deuxième partie fait un panorama des approximations par différences finies de ces équations et étudie la précision et la stabilité des schémas obtenus par analyse par ondes planes ou par techniques énergétiques. La troisième partie présente différentes approximations par éléments finis avec condensation de masse et mène un certain nombre d'analyses par ondes planes de ces méthodes en maillages réguliers. Le dernier chapitre fait un historique des méthodes de traitement de domaines non-bornés et donne la construction d'une classe de PML pour les équations des ondes. Il se termine par un certain nombre d'expériences menées dans des cas « réalistes ».

6.2 Développement du code MELINA

Participants : Daniel Martin, Marc Lenoir, Eric Lunéville.

Les développements récents du code MELINA (<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dmartin/melina/www/homepage.html>) ont porté essentiellement sur l'introduction des éléments finis de degré élevé (Q_3 à Q_{10}), et des formules de quadrature assorties, en particulier pour le traitement des équations de Maxwell (régularisation à poids) dans des domaines 2D à coins [48].

Les éléments de même type mais dont les nœuds sont les poids de quadrature de Gauss-Lobatto améliore sensiblement les résultats [48] et ont nécessité la refonte complète des calculs des fonctions de base et l'introduction de procédures de découpage d'éléments de degré quelconque en éléments P_1 .

De manière plus technique, les calculs élémentaires ont été réorganisés de façon à changer simplement les transformations de l'élément de référence vers l'élément courant pour l'implémentation des éléments d'arêtes (conformes dans $H(\text{div})$ ou $H(\text{rot})$).

Enfin la maintenance et le debugging du code ont permis de corriger :

- l'implémentation des conditions essentielles vectorielles pour Maxwell et plus généralement pour des systèmes linéaires multi-inconnues.
- les procédures dépendant de la machine, qui ont été unifiées par l'utilisation des fichiers `limits.h` et `float.h` du langage C des systèmes Unix.
- les bugs d'origine diverses dont le nombre semble tendre vers 0.

L'objectif actuellement poursuivi consiste à généraliser au 3D les interpolations de degré élevé (dans le cadre des hexaèdres, dans un premier temps).

6.3 Modèles asymptotiques pour la simulation de la propagation d'ondes dans des milieux comportant des fentes

Participants : Patrick Joly, Marc Lenoir, Sébastien Tordeux.

Mots clés : analyse asymptotique, équation de Helmholtz, domaine avec fente, modèles équivalents.

Dans de nombreuses applications tant en électromagnétisme (diffraction par une paroi fissurée, modélisation d'une antenne plaquée ...) qu'en acoustique (acoustique automobile), on est amené à résoudre des problèmes de propagation d'ondes dans des domaines comportant des fentes d'épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde.

L'utilisation de méthodes numériques usuelles (différences finies, éléments finis) se révèle très délicate voire impossible notamment pour les problèmes en régime transitoire. En effet la géométrie impose un pas de discrétisation en espace très fin et donc lorsqu'on utilise des schémas explicites en temps, un pas de temps très petit.

Une solution possible consiste à chercher à utiliser une méthode de raffinement local de maillage (avec pas de temps local en régime transitoire) afin de circonscrire l'utilisation de maillage raffiné au voisinage de la fente (voir Raffinement de maillage local spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique).

Une voie alternative consiste à développer des modèles asymptotiques lorsque la largeur de la fente tend vers 0 (qui en pratique, devient très inférieure à la longueur d'onde). C'est cette deuxième voie que nous avons suivie dans le cadre du stage de DEA de Sébastien Tordeux (actuellement en thèse sous la direction conjointe de Patrick Joly et Marc Lenoir).

Problème modèle : Dans le cadre de la propagation acoustique en domaine fréquentiel nous

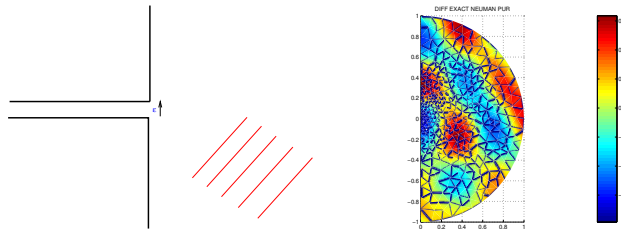


FIG. 1 – Géométrie du problème (gauche) -Champ diffracté (droite)

nous intéressons au champ diffracté (Fig. 1) par une fente de longueur infinie et de hauteur ε . La paroi est munie de la condition de Neumann. On peut alors considérer, en première approximation, la fente comme un guide d'onde monomode dès que ε est assez petit.

Convergence de la solution vers un problème sans fente : nous avons vérifié que la solution du problème exact u^ε convergeait bien à une vitesse pseudo-linéaire (résultat optimal) vers la solution limite naturelle u_0 guidée par l'intuition physique, à savoir la solution pour

une paroi sans fente.

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{L^2} \leq C\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}$$

Un bon modèle permettra donc d'obtenir de meilleures estimations d'erreurs tout en permettant de mailler à l'ordre de la longueur d'onde.

Modélisation de la fente :

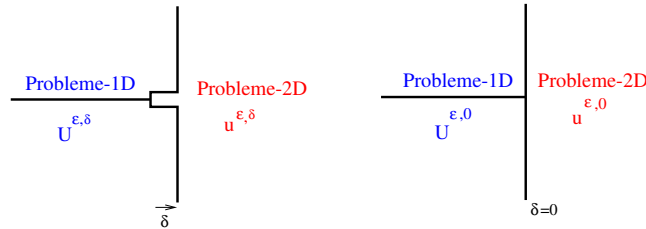


FIG. 2 – Le couplage

Dans le cadre du couplage d'un problème 2D avec un problème 1D, nous avons introduit une famille de problèmes approchés paramétrisés par δ , où δ caractérise ici la position de l'interface entre le problème 2D et le problème 1D (Fig. 2).

La solution approchée est définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^{\varepsilon, \delta} + \omega^2 u^{\varepsilon, \delta} = f & \text{et} & \frac{\partial^2 U^{\varepsilon, \delta}}{\partial x^2} + \omega^2 U^{\varepsilon, \delta} = 0 \\ \frac{\partial u^{\varepsilon, \delta}}{\partial x}(-\delta, y) = i\omega U^{\varepsilon, \delta}(-\delta) & \text{et} & U^{\varepsilon, \delta}(-\delta) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u^{\varepsilon, \delta}(-\delta, y) dy \end{cases}$$

Étude mathématique : Une étude mathématique basée sur une méthode de perturbation nous fournit l'estimation d'erreur suivante :

$$\forall \eta > 0 \quad \|u^\varepsilon - u^{\varepsilon, \delta}\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{2-\eta} \exp\left(-\left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}} \delta\right)$$

Le cas $\delta > 0$ nous donne des vitesses de convergence exponentielles, mais il reste à mailler une zone située à côté de l'interface de la taille de ε .

Pour le cas $\delta = 0$, nous pouvons utiliser un maillage dont le pas est de l'ordre de la longueur d'onde. Nous obtenons approximativement une erreur en ε^2 contre une erreur en ε pour le problème sans fente.

6.4 Construction d'éléments finis conformes courbes pour les champs de vecteurs.

Participant : Marc Lenoir.

De façon classique, la description d'un élément fini conforme dans H^1 est réalisée à l'aide d'un élément de référence, qui par l'intermédiaire d'une famille adéquate de transformations,

donne naissance aux divers éléments du plan physique. Le raccord en valeur des fonctions de base locales entre éléments adjacents dans le plan physique est assuré par une condition d'unicité en trace sur chaque bord de l'élément de référence. On dispose ainsi d'une méthode simple pour la construction d'éléments courbes satisfaisant la condition de conformité.

Curieusement, les descriptions usuelles d'éléments finis conformes dans $H(\text{rot})$ ou $H(\text{div})$ mettent en jeu directement les triangles ou tétraèdres du plan physique. Une telle description ne permet pas de façon immédiate la mise en œuvre d'éléments courbes. Nous avons donc mis au point un ensemble de conditions suffisantes portant sur l'élément de référence et une méthode systématique de construction d'une famille de transformations de cet élément de référence en éléments courbes qui assure la conformité dans $H(\text{rot})$ ou $H(\text{div})$ selon le cas, en dimension 2 ou 3. Cette description est particulièrement bien adaptée à la mise œuvre dans le cadre du code MELINA où la description des éléments dans le plan de référence est utilisée de façon essentielle.

6.5 Éléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell en maillage triangulaire et tétraédrique

Participants : Christine Poirier, Patrick Joly.

Mots clés : élément fini d'arête, équation de Maxwell, condensation de masse, milieu anisotrope.

Résumé : *Construction et implémentation de nouvelles familles d'éléments finis d'arête d'ordre élevé avec condensation de masse pour les équations de Maxwell.*

Rappelons que ce thème est l'objet d'une collaboration avec l'Université de Technologie de Tampere et plus précisément le Département de Génie Electrique dirigé par L. Kettunen. La particularité des éléments d'arête que nous développons est d'être compatible avec la condensation de masse et ainsi de permettre l'obtention d'un schéma explicite après discrétisation en temps. Un code de calcul 3D a été développé sur la base de la formulation des équations de Maxwell sous la forme d'un système du second ordre et d'éléments finis d'arête du second ordre en maillage tétraédrique (nous renvoyons au rapport d'activité 2000 pour la description de ces éléments). Les premiers test de validation (comparaison avec une solution analytique) montrent que la méthode est précise. En revanche, elle semble souffrir d'une condition CFL plus contraignante qu'attendu (cela est à vérifier sur le papier).

6.6 Éléments finis mixtes quadrilatéraux et hexaédraux avec condensation de masse pour les équations de Maxwell

Participants : Gary Cohen, Xavier Ferrières, Peter Monk, Sébastien Pernet.

Mots clés : Équations de Maxwell, éléments finis mixtes, condensation de masse.

Résumé : *Résolution des équations de Maxwell avec pertes électriques par une méthode d'éléments finis mixtes $H(\text{rot}) - L^2$ avec condensation de masse.*

La méthode d'éléments finis mixtes $H(\text{rot}) - L^2$, développée par Gary Cohen et Peter Monk pour les équations de Maxwell, a fait l'objet d'une étude développée dans le cadre d'un contrat avec la DEMR de l'ONERA de Toulouse. Cette étude, qui a permis une comparaison de la méthode avec un schéma de Yee pour des exemples de diffraction par un obstacle semi-réfléchissant avec pertes électriques, a abouti à des résultats très encourageants qui ont conduit à l'initialisation de la thèse de Sébastien Pernet, en Octobre 2001, sur l'extension de cette méthode à la dimension 3. Dans les premiers mois de sa thèse, S. Pernet a développé un programme en dimension 2 utilisant des maillages structurés non réguliers afin d'étudier l'extension éventuelle de cette approche à la dimension 3. Toutes ces études sont menées sous la direction de G. Cohen, Xavier Ferrières de la DEMR et Peter Monk.

6.7 Equations de Maxwell et singularités

Participants : Patrick Ciarlet, Emmanuelle Garcia, Christophe Hazard.

Régime harmonique.

Pour résoudre les équations de Maxwell harmoniques dans des domaines singuliers, l'idée développée par A.S. Bonnet-Ben Dhia, C. Hazard et S. Lohrengel et objet d'une collaboration avec M. Costabel et M. Dauge (IRMAR), consiste à décomposer le champ électromagnétique en deux parties : une partie régulière, dont l'approximation numérique peut être obtenue par discrétisation nodale des équations de Maxwell régularisées, et une partie singulière, traitée de façon plus explicite. L'étude des singularités du champ électromagnétique conduit à une description précise du comportement du champ ; elle a permis de développer une Méthode de Champs Singuliers, dont la mise en œuvre numérique dans le cadre du code MELINA, revient à résoudre un problème couplé entre les parties régulière et singulière du champ électromagnétique.

L'analyse numérique de la méthode, ainsi qu'une série d'expériences numériques, ont conduit à modifier la méthode de calcul de la partie singulière, en s'affranchissant de la fonction de troncature (polynôme d'interpolation) habituellement utilisée. La comparaison des deux approches, avec ou sans fonction de troncature, a fait l'objet d'un article qui vient d'être accepté.

Régime transitoire.

Ce travail fait l'objet d'une collaboration avec Franck Assous du CEA et Simon Labrunie de l'Université de Nancy ; le thème principal en est la résolution du système couplé des équations de Maxwell-Vlasov transitoires, qui modélise les interactions champ électromagnétique – particules chargées, dans un domaine borné non convexe bidimensionnel ou tridimensionnel. L'effort porte sur le calcul du champ électromagnétique, qui doit respecter certaines contraintes liées au couplage avec Vlasov.

Entre autres, le champ calculé doit être continu pour éviter les instabilités numériques, ce qui interdit l'usage des Eléments Finis d'arête. Par ailleurs, les phénomènes régis par les équations de Vlasov nécessitent habituellement de petits pas en temps. Il est alors possible d'utiliser un schéma explicite en temps (malgré la condition de Courant-Friedrichs-Lévy limi-

tant la valeur maximale du pas en temps). Ceci étant, pour obtenir une CFL homogène, il faut disposer d'un maillage régulier, ce qui amène à utiliser une technique d'approximation particulière pour la partie singulière du champ.

De façon plus mathématique, nous résolvons les équations de Maxwell avec une condition aux limites de type conducteur parfait, ou d'onde entrante, dans un domaine borné à bord lipschitzien. Nous démontrons que, sous des hypothèses classiques sur les données, le problème admet une solution et une seule qui se décompose selon

$$E(t) = E_R(t) + E_S(t), \quad B(t) = B_R(t) + B_S(t),$$

avec E_R la partie régulière, et E_S la partie singulière. Les décompositions $E \mapsto (E_R, E_S)$ et $B \mapsto (B_R, B_S)$ sont continues.

Dans le cas axisymétrique, nous avons déterminé la dimension du sous-espace vectoriel des champs singuliers, qui, bien que finie, peut être différente pour B et pour E ... Nous construisons, lorsque le domaine est bidimensionnel (cartésien ou axisymétrique), une méthode de calcul d'une base de champs singuliers, à l'aide d'une méthode de relèvement de la partie principale. On écrit

$$E_S(t) = \sum_{k=1}^K c_k(t) v_S^k, \quad B_S(t) = \sum_{k=1}^{K'} c'_k(t) w_S^k.$$

La méthode résultante est appelée Méthode du Complément Singulier. Nous avons mis en œuvre la MCS sur un certain nombre d'exemples physiques réalistes, dans un domaine en forme de L (cartésien ou axisymétrique), ou présentant plusieurs coins rentrants, avec ou sans particules.

Nous avons également obtenu des résultats concernant la caractérisation de la partie singulière dans un domaine polyédrique, pour le champ magnétique B .

6.8 Simulation du CHFR

Participants : Anne-Laure Baril, Jacques Henry, Patrick Joly.

La mesure de résistivité dans les puits de pétrole en exploitation est rendue difficile à cause de la présence d'un tube en acier « le casing ». La collaboration avec la société Schlumberger a été poursuivie sur ce thème par le stage de maîtrise de mathématiques d'Anne-Laure Baril. Un stage effectué l'année précédente avait permis de proposer une méthode prenant en compte les très forts contrastes de résistivité entre le casing et la formation. L'analyse asymptotique d'un modèle convenablement adimensionnalisé traduit une faible épaisseur et une faible résistivité du casing. Au cours de ce stage, le calcul des termes du premier et du second ordre a démontré la validité de cette approche : un seul calcul permet d'obtenir l'approximation au second ordre ; cette approximation est de très bonne qualité par rapport au problème initial ; elle fournit un modèle défini seulement dans la formation mais qui prend néanmoins en compte le courant de casing, évitant ainsi un maillage très fin de ce casing.

Un autre objectif de ce stage visait à limiter les calculs à faire pour simuler un « log ». Il faut en effet pour cela reprendre un grand nombre de simulations correspondant à des variations

de position de la sonde dans la région d'intérêt. On limite donc le domaine de la simulation à un domaine proche de la région d'intérêt, mais il faut trouver des conditions aux limites qui résument la région négligée. Elles sont définies grâce à un opérateur Dirichlet-Neumann calculé par la méthode de factorisation (cf section 6.28). Le stage a montré la faisabilité de cette approche.

6.9 Modélisation numérique en acoustique musicale : étude de la guitare

Participants : Eliane Bécache, Grégoire Derveaux, Patrick Joly.

Mots clés : modèle de plaques de Kirchhoff-Love, éléments finis mixtes, dynamique des structures, domaine fictif.

Ce travail est effectué en collaboration avec Antoine Chaigne du laboratoire d'acoustique musicale de l'Unité d'Enseignement et de Recherche en Mécanique (UME) à l'ENSTA. Il s'inscrit dans le thème de recherche baptisé *synthèse sonore d'instruments de musique par modèle physique*. On s'intéresse ici à la modélisation de la guitare.

L'objectif est d'obtenir une modélisation physique simple qui conduise à une synthèse sonore de qualité. Le modèle général consiste en un couplage entre une ou plusieurs cordes (*équation des ondes 1d*) à la table supérieure de l'instrument (*équation de plaque 2d*) par l'intermédiaire d'un chevalet. La table est elle-même couplée à une cavité d'air percée d'un trou, ainsi qu'à l'air environnant (*équation des ondes acoustique 3d*). L'ensemble est excité par le pincer de la corde.

On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles que l'on cherche à résoudre numériquement dans le domaine temporel. Les difficultés auxquelles on est confronté pour construire une méthode numérique sont multiples : efficacité de la résolution d'un problème 3d, prise en compte de la géométrie de l'instrument, stabilité numérique des divers couplages, prise en compte des phénomènes d'amortissement, résolution de l'équation de plaque... Le problème est réécrit sous une forme variationnelle mixte pour laquelle on a un résultat de conservation d'énergie, que l'on cherche à conserver au niveau discret afin d'assurer la stabilité de la méthode.

La table supérieure de la guitare est une plaque mince en bois, matériau orthotrope, en forme de guitare (!), encadrée sur son bord extérieur et percée d'un trou, le long duquel on a une condition de bord libre. En outre, elle est renforcée par des raidisseurs, baguettes de bois rigides collées sous la table de la guitare, qui ont une influence notable sur la forme et la fréquence des modes propres de la plaque, et par conséquent sur ses propriétés acoustiques.

Nous avons choisi de la modéliser à l'aide de l'équation de Kirchhoff-Love dynamique pour des matériaux inhomogènes et anisotropes, avec condition d'encastrement sur une partie du bord et une condition libre sur l'autre partie du bord. La discrétisation spatiale de cette équation repose sur une formulation mixte qui permet d'utiliser des éléments finis standards. La discrétisation temporelle quand à elle impose de choisir des pas de temps très petits que ce soit dû à la précision dans le cas de schémas implicites ou à la stabilité dans le cas de schémas explicites — en pratique, $\Delta t \leq \alpha h^2$, où h est le pas d'espace et α dépend des paramètres physiques du problème — On obtient typiquement $\Delta t = 5.10^{-7}$, ce qui, d'une part, conduit à

des temps de calcul cruellement longs et d'autre part compromet définitivement la résolution du problème de couplage avec l'air.

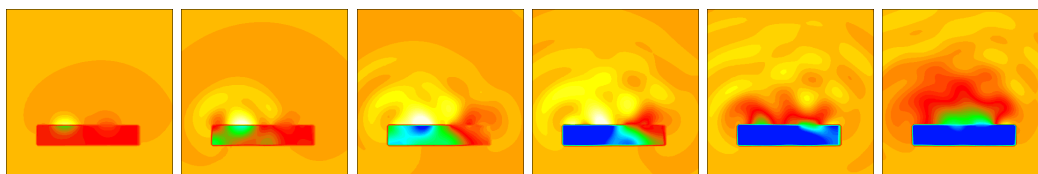
On renonce donc à la discrétisation en temps, ce qui d'une certaine façon est coûteux car la résolution exacte en temps du problème semi-discrétisé en espace nécessite de diagonaliser la matrice de raideur ; en outre, les matrices de couplage avec l'air et avec la corde deviennent pleines dans cette nouvelle base, ce qui remet en cause un des principes essentiels de la méthode des éléments finis. Mais ce surcoût est compensé par la possibilité d'utiliser n'importe quel pas de temps sans perte de précision, ce qui permet de résoudre effectivement notre problème.

Les couplages Résoudre un problème 3d est nettement plus efficace quand on peut utiliser un maillage structuré. Afin d'éviter d'avoir à construire un maillage tétraédrique qui prenne en compte la forme de la guitare, on utilise une méthode de domaines fictifs introduite par Rhaouti *et al.* pour la modélisation de la timbale [4]. On introduit λ , le saut de pression à travers l'instrument. Une formulation mixte dans laquelle la guitare n'apparaît que via le multiplicateur de Lagrange λ , permet alors d'utiliser un maillage régulier pour approcher le champ acoustique. Il suffit de mailler la surface de la guitare pour approcher le saut de pression. Des conditions absorbantes d'ordre élevées sont utilisées pour restreindre l'extérieur à un domaine fini [1].

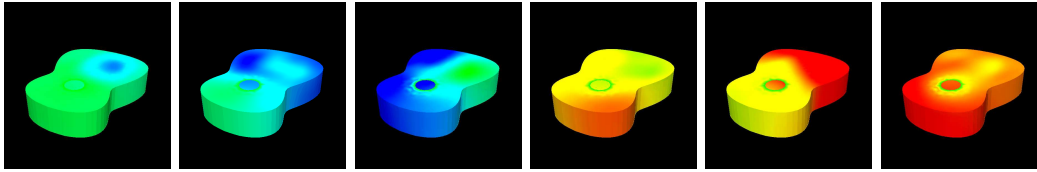
Le couplage entre la corde et la table supérieure est contrôlé par un schéma stable, sans perte de précision.

Résultats numériques L'un des objectifs de ce travail étant la synthèse sonore, on s'attache bien sûr à écouter les sons produits par ce modèle. L'écoute est en fait un indicateur précieux permettant d'apprécier la qualité du timbre obtenu et constitue ainsi une première étape de validation. Le champ acoustique étant calculé en chaque point de l'espace environnant la guitare, on peut écouter ou « visualiser » le son en n'importe quel point de l'espace, ce qui est une information utile aux preneurs de sons par exemple.

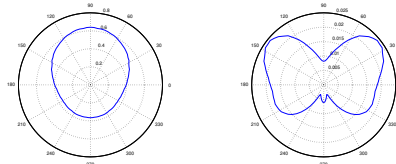
En outre, dans la mesure où toutes les vibrations des structures mises en jeu sont déterminées, on peut s'intéresser à d'autres indicateurs, et confronter ces résultats à des mesures effectuées sur instruments réels : impédance au chevalet, diagrammes de directivité, analyse spectrale, analyse énergétique.



*Instantanés de la pression acoustique au cours des 10 ms suivant le pincer de corde.
Coupe transversale de la guitare, passant par le trou*



Instantanés du saut de pression acoustique à la surface de l'instrument au cours des 10 ms suivant le pincer de corde.



Diagrammes de directivité pour deux fréquences données. (200 Hz à gauche et 820 Hz à droite)

6.10 Diffraction d'une onde acoustique par un obstacle mobile

Participants : Eliane Bécache, Isabelle Champagne, Patrick Joly.

Il s'agit d'un sujet ambitieux et difficile sur lequel il existe en particulier très peu de travaux numériques. Nous mettons sur pied une collaboration scientifique avec Mihai Bostan (Université de Franche-Comté) et Francesca Rapetti (Université de Nice). Du côté applicatif, nous entamons une collaboration sur ce thème avec la DGA (J. M. Quenez) : l'application visée est l'étude de la diffraction d'une onde acoustique par l'hélice d'un sous-marin lorsque celle-ci est en rotation.

L'un des objectifs visé est le développement d'une méthode de domaines fictifs pour la résolution numérique du problème. Cette méthode avait déjà été utilisée avec un certain succès en deux dimensions (stage de DEA d'A. Ben Haj Yedder en 1999). Nous sommes en train de compiler et compléter les expériences numériques réalisées avec le code de calcul développé à l'époque afin de rédiger un rapport INRIA faisant le point sur nos travaux dans cette direction.

6.11 Acoustique en présence d'écoulement

Participants : Anne-Sophie Bonnet-BenDhia, Gary Cohen, Patrick Joly, Eric Lunéville, Guillaume Legendre, Jean-François Mercier.

Ce thème, assez récemment abordé, est un thème très riche encore mal compris mathématiquement et numériquement. En outre, le champ des applications, ne serait-ce qu'en aéronautique, est très vaste. Le développement de ce sujet bénéficie aujourd'hui d'un contexte particulièrement favorable, notamment grâce à la collaboration avec V. Pagneux (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM)) et A. Maurel (Laboratoire Ondes et Acoustique de l'ESPCI) qui a fait l'objet d'un projet 'Jeune Equipe' qui a obtenu le soutien

du CNRS. Suite à l'école INRIA-CEA-EDF de 1999, il nous a paru opportun de mettre en place un groupe de travail sur le sujet, groupe de travail auquel participent notamment des chercheurs de l'ONERA et EADS. Les travaux sur ce thème ont été poursuivis dans deux directions. Notre objectif est notamment de remettre les choses à plat : revenir à la base des modèles mathématiques, faire le point sur les résultats connus et les questions, identifier des sujets de recherche en mathématiques appliquées.

Par ailleurs nos travaux de recherche se sont essentiellement poursuivis dans trois directions :

Diffraction acoustique par une plaque rigide située dans un écoulement uniforme.

On considère la géométrie bidimensionnelle suivante : une plaque rigide plane de longueur finie est placée dans un conduit parallèlement aux plaques de celui-ci. Le fluide présent dans le conduit est en écoulement uniforme subsonique. On cherche alors à modéliser la diffraction d'une perturbation acoustique par la plaque, en régime périodique établi.

Ce sujet est développé dans le cadre d'une collaboration avec V. Pagneux, du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans. Bien qu'il s'agisse du cas simple où l'écoulement est uniforme, la présence d'un sillage tourbillonnaire dans le prolongement amont de la plaque est déjà une manifestation intéressante de l'influence de l'écoulement sur l'acoustique.

Pour ce problème, nous avons établi une formulation pour le potentiel des vitesses. Cette formulation couple une partie variationnelle au voisinage de la plaque avec des représentations spectrales, au voisinage des extrémités de la plaque d'une part et dans les deux parties infinies du conduit d'autre part. Ceci nous a permis de prouver, sauf pour une éventuelle suite de fréquences de résonance, l'existence d'une solution vérifiant une condition de type *Kutta* au bord de fuite de la plaque. Le modèle a été justifié mathématiquement par l'obtention d'un principe d'absorption limite. La formulation retenue, discrétisée par éléments finis, a été mise en oeuvre dans le code MELINA et a fourni des résultats satisfaisants. Elle présente néanmoins des inconvénients pour les faibles Mach (inférieurs à 0.3), car le sillage devient alors très fin et très oscillant.

Ce travail a fait l'objet d'une publication à paraître dans le journal M3AS et de plusieurs communications orales.

Résolution des équations de Galbrun en régime harmonique.

L'équation de Galbrun est une équation linéaire qui décrit la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement quelconque. Elle utilise comme variable le déplacement lagrangien, qui représente le déplacement d'une particule fluide dans un écoulement perturbé par rapport à sa position dans l'écoulement non perturbé, et s'exprime en fonctions des coordonnées Eulériennes. Cette équation constitue une alternative séduisante aux équations d'Euler linéarisées qui sont utilisées classiquement. En effet, l'équation de Galbrun présente de nombreuses analogies avec d'autres modèles de propagation d'ondes (en particulier avec les équations de Maxwell) : elle est d'ordre 2 en temps et en espace et permet de tenir compte sous forme variationnelle de conditions aux limites usuelles. Cependant, elle présente des difficultés nouvelles, comparativement aux modèles de propagation classiques, liés aux phénomènes de convection.

En nous inspirant des travaux déjà réalisés sur les équations de Maxwell, nous avons proposé une technique de régularisation des équations de Galbrun harmoniques en écoulement cisailé. Sur un problème académique posé dans un domaine rectangulaire borné (une portion de conduit), nous avons montré que la formulation régularisée est bien posée (sauf pour des fréquences exceptionnelles) et que l'on peut l'approcher par des éléments finis nodaux usuels. La méthode a été mise en oeuvre dans le code MELINA pour un écoulement uniforme ou constant par morceaux. Les résultats numériques obtenus, avec ou sans régularisation, illustrent de façon très convaincante le rôle essentiel de cette dernière. Des difficultés théoriques subsistent dans le cas où le domaine présente des coins rentrants ou dans le cas où l'on veut imposer sur la frontière des conditions d'impédance.

Ce travail a fait l'objet d'un Compte-Rendu à l'Académie des Sciences.

Modélisation numérique en régime transitoire.

En ce qui concerne le régime transitoire, nous avons poursuivi nos recherches pour obtenir des frontières absorbantes efficaces. Il est bien connu que les couches parfaitement adaptées (PML) « à la Bérenger » sont instables pour les équations d'Euler linéarisées et nous travaillons sur la recherche de nouvelles couches PML stables (voir paragraphe 6.18 sur les couches absorbantes).

6.12 Éléments finis mixtes d'ordre élevé en maillage hexaédrique pour les ondes acoustiques et élastiques

Participants : Gary Cohen, Sandrine Fauqueux.

Mots clés : 3D, éléments finis mixtes quadrilatéraux, équation de l'élastodynamique, équation de l'acoustique, condensation de masse, milieu anisotrope, couches absorbantes.

Résumé : *Construction, étude et implémentation d'éléments finis mixtes d'ordre élevé avec condensation de masse pour les équations de l'élastodynamique.*

Une nouvelle formulation du système de l'élastodynamique 2D (contrainte-déplacement) sous une forme $H(\text{div}) - L^2$ avait été mise en place pendant la première année de thèse de Sandrine Fauqueux, dans le but d'appliquer la méthode des éléments finis mixtes spectraux introduite par G. Cohen.

Cas bidimensionnel : L'algorithme mis en place alors a permis la modélisation de la propagation d'une onde sismique dans le milieu géophysique 2D réaliste décrit dans la figure 3. Quelques instantanés sont représentés dans la figure 4. Ce programme a été installé à l'IFP. Des recherches sont en cours afin de trouver le mailleur quadrangulaire 2D le plus convivial et le plus efficace possible à associer au programme.

Extension au cas tridimensionnel : La formulation $H(\text{div}) - L^2$ a été étendue au cas tridimensionnel. Il est alors apparu des problèmes spécifiques au 3D : cette nouvelle formulation fait intervenir l'inverse de matrices A_{ij} , matrices 3×3 définissant les caractéristiques élastiques du milieu. Or pour certains matériaux, en particulier isotropes, ces matrices ne sont pas toutes

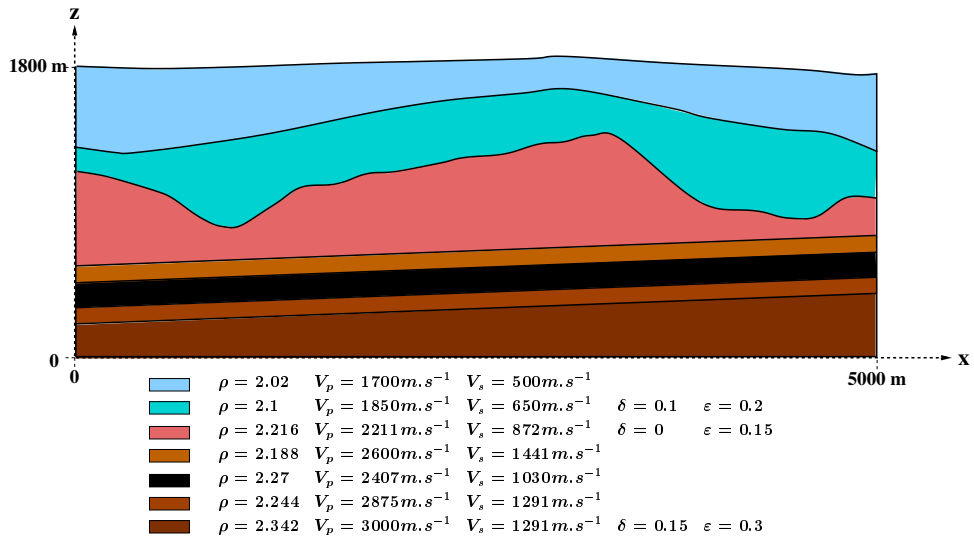


FIG. 3 – Un modèle réaliste 2D

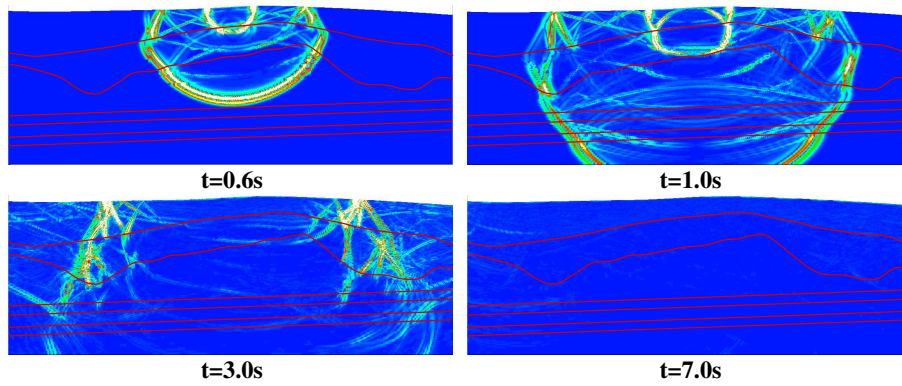


FIG. 4 – Quelques instantanés

inversibles. Toutefois, la forme explicite du schéma faisant intervenir les matrices A_{ij} dans leur forme primaire, cette non-inversibilité ne pose pas de problème au niveau algorithmique. Une conservation de l'énergie discrète a été démontrée. De plus, le théorème d'équivalence entre la méthode des éléments finis mixtes spectraux et la méthode des éléments finis spectraux, démontrée dans le cas acoustique, a été généralisé à l'élastodynamique. Ainsi, le problème de la non-inversibilité des matrices est contourné, même s'il est important de retravailler le contexte théorique de l'étude afin de justifier plus élégamment ce résultat. La méthode sans PML a été implémentée mais doit être validée.

Etude de Réflexion-Transmission : Une généralisation de l'étude de réflexion-transmission a permis de démontrer un théorème général assurant que, pour un schéma Q_r et en acoustique, l'erreur de réflexion-transmission sur un maillage non-adapté au milieu est en $O(h)$ alors que sur un maillage adapté, elle est en $O(h^{r+1})$, quelque soit la dimension de l'espace. Cette étude confirme la supériorité du maillage adapté, le maillage non-adapté pénalisant fortement la méthode d'ordre élevé.

6.13 Modélisation numérique de la propagation d'ondes en milieu élastique fissuré avec condition de contact unilatéral

Participants : Eliane Bécache, Marius Cocou, Jean-Charles Gilbert, Patrick Joly, Gilles Scarella.

Mots clés : élément fini mixte, élastodynamique, fissure, contact unilatéral.

La thèse de Gilles Scarella, financée par EDF, se fait en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille. Dans ce cadre, Gilles a passé un an au LMA et a mené, sous la direction de Marius Cocu, une étude théorique sur le problème de contact unilatéral en élastodynamique dans un milieu fissuré. Plusieurs aspects théoriques ont été abordés. Une expression des conditions aux limites de contact unilatéral sans frottement au niveau d'une fissure préalablement ouverte a été proposée sur un espace de paramétrisation. Plusieurs formulations du problème de contact unilatéral dans un milieu fissuré en élastodynamique ont été présentées : formulation classique (ou forte) en déplacements, formulation variationnelle primale en déplacements, formulation mixte en déplacements et contraintes et une formulation en domaines fictifs dans le cas d'une fissure initialement fermée, obtenue en introduisant des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux composantes normale et tangentielle du saut du déplacement au niveau de la fissure.

Bien que l'objectif de l'étude était initialement l'obtention d'un résultat d'existence pour le problème élastodynamique, un problème dynamique viscoélastique de contact unilatéral a été étudié, la viscosité étant introduite dans la loi de comportement du milieu. Afin d'obtenir un résultat d'existence pour ce problème, un problème viscoélastique de contact avec pénalisation a été introduit. Un résultat d'existence et d'unicité à ce problème a été obtenu par une méthode de Galerkin classique. Par passage à la limite sur le terme de pénalisation et à l'aide de résultats de compacité classiques, un résultat d'existence pour le problème dynamique de contact unilatéral en viscoélasticité a été obtenu.

Dans la suite, des estimations d'erreurs pour le problème viscoélastique de contact unilatéral

seront étudiées, pour la formulation primale en déplacements. Des estimations d'erreurs pour la formulation en domaines fictifs, dans le cas de l'élastodynamique, seront également étudiées.

En ce qui concerne nos travaux numériques débutés l'an dernier sur ce sujet, rappelons que nous avons proposé une formulation de type domaines fictifs pour la résolution de ce problème. Pour ce faire, nous avons été amené à utiliser une formulation en déplacements-contraintes. De plus, pour la discrétisation en temps, nous ne pouvons pas employer un schéma centré car il conduirait à un schéma inconditionnellement instable. C'est pourquoi nous avons proposé un schéma décentré stable. Ce schéma est explicite pour les inconnues de volume mais implicite pour le multiplicateur de Lagrange. De plus, nous sommes amenés à résoudre un problème d'optimisation sur le multiplicateur avec contraintes de borne à chaque pas de temps. L'an dernier nous avons programmé cette méthode dans le cas 1D (pour lequel le problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte de borne est très simple) et une comparaison avec une solution analytique avait donné des résultats très satisfaisants. Pour le 2D, cette méthode conduit à la résolution d'un problème d'optimisation de type programmation quadratique avec contraintes de borne sur le multiplicateur. En collaboration avec Jean-Charles Gilbert (projet ESTIME), nous avons développé un programme pour cette résolution. Avant le départ de Gilles pour Marseille, les premiers résultats 2D ont été obtenus et semblent aussi satisfaisants.

6.14 Modélisation de la propagation d'ondes en milieu viscoélastique.

Participants : Eliane Bécache, Abdelaâziz Ezziani, Patrick Joly.

Mots clés : Couches absorbantes, différences finies, éléments finis, équation de la viscoélasticité.

Le sujet de cette étude concerne les méthodes de sismique haute résolution pour analyser la structure du fond marin dans le cadre d'une collaboration avec l'IFREMER (Y. H. De Roeck). On veut en particulier être en mesure d'exploiter les données recueillies avec des géophones de fond de mer (OBS-Ocean Bottom Sismometer). Pour bien simuler les expériences physiques, il est important de tenir compte de l'absorption des ondes car celle-ci est sensible à haute fréquence. Ce phénomène d'absorption est en particulier dû à une propriété viscoélastique du milieu de propagation.

Nous nous sommes donc intéressés à la modélisation mathématique et numérique de la propagations d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. Pour bien comprendre les propriétés de ce type d'onde, nous avons commencé par un modèle unidimensionnel : le modèle de Zener ou modèle $\tau_0 - \tau_1$ (stage de DEA d'Abdelaâziz Ezziani).

$$\begin{cases} \rho(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x} = f(t, x) \\ \sigma(t, x) + \tau_0(x) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu(x) \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \tau_1(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \right) \end{cases}$$

Une analyse mathématique, notamment une analyse par onde planes nous a en particulier permis de comprendre l'influence de chacun des temps de relaxation τ_0 et τ_1 sur l'absorption

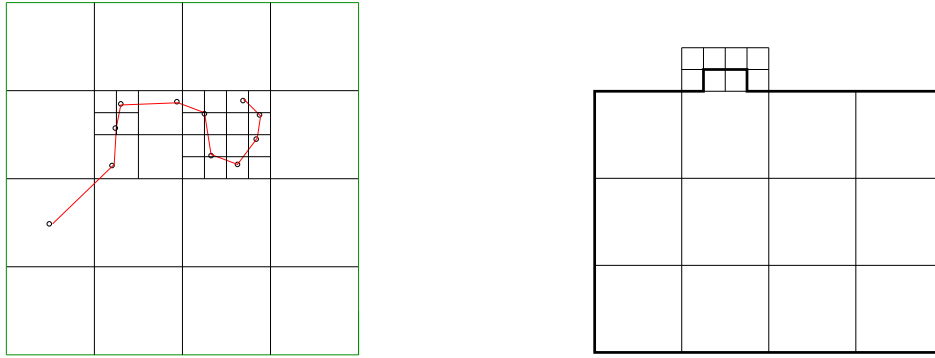


FIG. 5 – Exemples d'applications du raffinement de maillage.

des ondes en milieu homogène. Nous avons ensuite proposé un schéma numérique pour l'approximation de ce modèle ayant pour propriétés d'être : explicite, centré, consistant d'ordre deux, conceptuellement généralisable en dimension supérieur. Une analyse de stabilité de ce schéma nous a permis d'établir une condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma dépendant du rapport des temps de relaxation τ_0/τ_1 . Afin de borner le domaine de calcul, nous avons adapté un modèle de couches absorbantes PML.

L'objet de nos prochains travaux sur ce sujet (thèse d'A. Ezziani) est de généraliser cette étude dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel anisotrope.

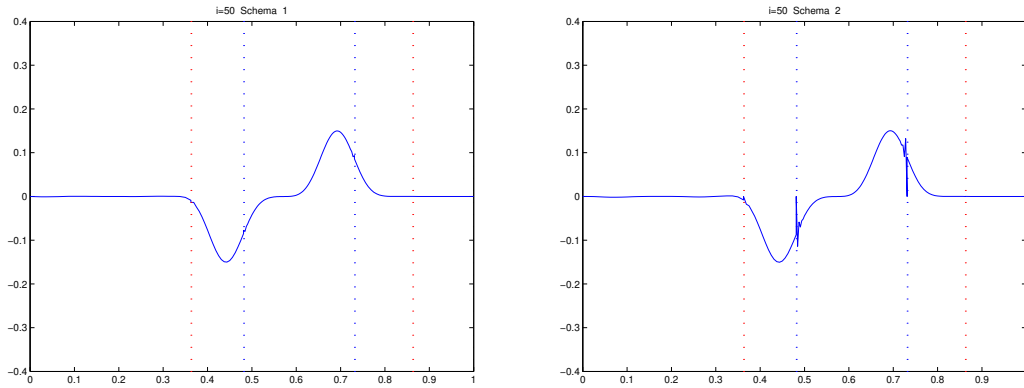
6.15 Raffinement de maillage local spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique

Participants : Eliane Bécache, Patrick Joly, Jerónimo Rodríguez García.

Mots clés : raffinement de maillage, stabilité, convergence.

Résumé : *Étude théorique et numérique du raffinement de maillage local spatio-temporel pour la résolution du système de l'élastodynamique.*

Ce sujet a été développé pendant le stage de DEA et le début de la thèse de Jerónimo Rodríguez et c'est la continuation des travaux réalisés par Georges Kayo-de-Kayo pendant son stage de DEA (2000). Il s'agit d'étendre aux équations de l'élastodynamique la méthode de raffinement espace-temps développé par Thierry Fouquet pour les équations de Maxwell pendant sa thèse (thèse qui s'est déroulée à l'INRIA et a été soutenue en Juin 2000) (Voir rapport d'activité précédent). Rappelons qu'on s'intéresse à la résolution des équations de l'élastodynamique avec une méthode basée sur l'utilisation d'un maillage régulier (Voir travaux de C. Tsogka). Il est alors naturel de vouloir raffiner localement par exemple près d'un détail géométrique (Voir Figure 5). Si on ne raffine pas en temps là où on raffine en espace, le pas de temps va être contraint par le plus petit pas d'espace, ce qui mène à un schéma coûteux et dispersif. C'est pourquoi nous avons choisi de raffiner également en temps. L'introduction d'un multiplicateur de Lagrange sur l'interface entre les grilles permet la construction d'une famille de méthodes

FIG. 6 – a) Schema A, $\alpha = 0.9$ b) Schema B, $\alpha = 0.9$

de raffinement de maillage local spatio-temporel **stables** sous la CFL habituelle grâce à la conservation d’une énergie discrète (Nous allons dire qu’il s’agit de méthodes conservatives).

Dans le cas 1-D on a choisi deux méthodes issues de cette famille (appelées schéma A et schéma B) dont on a étudié la convergence (sujet du stage de DEA de Jerónimo Rodríguez). On a ainsi montré pour le schéma A une convergence ℓ^2 d’ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ et pour le schéma B une convergence ℓ^2 d’ordre $\Delta x^{\frac{1}{2}}$. Pour vérifier les résultats obtenus en théorie on a programmé les deux méthodes avec un code récursif qui nous permet de faire plusieurs raffinements emboîtés. Les expériences numériques montrent que telles estimations sont quasi-optimales. (Voir Figure 6.a et Figure 6.b).

Pour pouvoir étendre nos résultats aux dimensions supérieures on a écrit une formulation variationnelle générale d’une famille de méthodes de raffinement stables qui peut se particulariser aux équations de l’élastodynamique. L’étude menée en 1-D nous fournit un guide pour choisir un schéma dans cette famille (le schéma A). Notre objectif est de faire une étude de convergence de ce schéma et de mettre au point un code de calcul basé sur ce schéma (en Fortran 90). A plus long terme nous comptons coupler cette formulation de raffinement avec la méthode des domaines fictifs utilisée pour prendre en compte des fissures (voir Figure 5) ou des topographies de géométrie complexe (Voir thèse de C. Tsogka).

Nous avons aussi commencé à étudier une famille de méthodes de raffinement de maillage conservatives sans multiplicateur. Ce type de méthode s’appuie sur une formulation que nous appelons « primale-duale » qui repose sur un choix d’éléments finis différents dans chaque grille (voir aussi les travaux de Julien Diaz, Patrick Joly et Eliane Bécache).

6.16 Modélisation numérique en couplage Fluide-Structure transitoire.

Participants : Eliane Bécache, Julien Diaz, Patrick Joly.

Mots clés : éléments finis, élastodynamique, acoustique.

Résumé : *Etude théorique et numérique de la propagation d’une onde en interaction fluide-structure*

Nous nous intéressons à la modélisation numérique de la propagation d'une onde en interaction fluide-structure. Ce type de problème a notamment des applications en imagerie médicale (simulation de propagation d'une onde acoustique dans l'os, en collaboration avec le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de Paris VI) et en sismique haute-résolution (détermination de la structure des fonds sous-marins, contrat avec l'Ifremer).

Il est bien connu que la technique qui consiste à faire dégénérer les équations de l'élasticité discrétisées en un modèle acoustique n'est pas satisfaisante (présence d'ondes de cisaillement parasites dans le fluide, absence de coercivité H^1 dans le fluide ...).

Il est alors souhaitable de travailler avec la pression dans le fluide (et non plus le champ de déplacement). Toute la difficulté réside dans le traitement de l'interface fluide-structure (interface os/muscle ou mer/sous-sol pour les applications qui nous intéressent). On cherche à satisfaire les propriétés suivantes :

- La méthode doit être capable de traiter un raccord non-conforme entre le fluide et le solide
- Le schéma reste explicite en dehors de l'interface fluide-structure.
- La stabilité est garantie par la conservation d'une énergie discrète.
- La condition de stabilité n'est pas affectée par la présence de l'interface fluide-structure.

Dans cet esprit une première classe de méthode consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange sur l'interface fluide-solide, selon la philosophie des éléments joints. Cette démarche, déjà validée dans le cas d'une interface entre 2 fluides par les travaux de Bamberger, Glowinski et Tran a été adoptée par V. Duwig.

Nous proposons une stratégie alternative qui évite le recours à des multiplicateurs de Lagrange grâce à l'utilisation de ce que nous appelons une formulation primale-duale du problème de couplage : typiquement, si la pression est calculée dans un espace de fonctions régulière (H^1) dans le fluide, dans le solide c'est le champ de déplacement qui sera cherché dans un espace de fonctions régulières. On est alors dans le cadre de méthodes conformes dont l'analyse mathématique est plus simple.

La méthode que nous avons commencé à étudier, s'appuie sur :

- un calcul en vitesses L^2 - contraintes H_{div} (afin d'utiliser les éléments finis mixtes développés par C. Tsogka) dans le solide.
- un calcul en vitesses H_{div} - pression L^2 (on utilise les éléments de Raviart-Thomas) dans le fluide.

Le cadre fonctionnel adapté à la formulation primale-duale correspondante amène à modifier les éléments finis de C. Tsogka au voisinage de l'interface. Les premiers résultats numériques obtenus sont très encourageants.

6.17 Interaction onde élastique - dislocation

Participant : Jean-François Mercier.

Jean-François Mercier a engagé cette année, avec Agnès Maurel du Laboratoire Ondes et Acoustiques de l'ESPCI, une collaboration internationale avec Fernando Lund, du Département de Physique de l'Université du Chili à Santiago. Le thème est la propagation d'onde en milieu continu désordonné et l'application à l'interaction onde élastique - dislocation. Il s'agit d'un

projet de recherche sur conventions internationales du CNRS qui s'est traduit par un séjour de l'équipe française à l'Université du Chili d'un peu plus de deux mois (du 22 juillet au 1 Octobre 2001).

Les travaux de recherche effectués pendant ce séjour ont porté sur l'interaction entre une onde élastique et deux types de distributions de dislocations : des dislocations « vis » ou « coins ».

Les deux types de dislocations considérées ont la forme d'une ligne (invariantes par translation selon une direction) : ainsi on se ramène à l'étude d'un problème 2D.

Les applications pratiques du projet sont l'élaboration de méthodes de diagnostic non intrusif. On a en effet montré que l'acoustique est un moyen de quantifier la densité de dislocations, par exemple dans la transition fragile - ductile des métaux.

Fernando Lund s'est intéressé dans le passé à deux problèmes qui présentent des analogies méthodologiques : en mécanique des fluides, le problème bidimensionnel de la diffusion d'une onde sonore dans un fluide par un tourbillon, et la multidiffusion du son par une forêt de tourbillons, qui modélisent la vorticité d'un écoulement turbulent, et en mécanique des solides, le rayonnement d'une dislocation vis ou d'une dislocation coin en mouvement.

Nous avons montré qu'il était possible de généraliser le problème de l'interaction onde - tourbillon développé par F. Lund à l'interaction onde élastique - dislocation.

L'analogie a été mise en œuvre en remplaçant un vortex par une dislocation ligne. Une équation d'onde avec terme source a été obtenue, puis résolue grâce à une représentation intégrale pour une grandeur physique pertinente. La grandeur physique est la pression acoustique pour le problème de propagation du son à travers un vortex et le déplacement de l'onde élastique dans un milieu comportant des dislocations.

Dans les deux cas étudiés, dislocation vis et coin, la vitesse effective calculée dépend de la densité de dislocations, et une mesure de l'atténuation d'une onde élastique à travers un matériau peut donc permettre de remonter à la densité de dislocation.

6.18 Méthodes de couches absorbantes parfaitement adaptées.

Participants : Eliane Bécache, Gary Cohen, Aïssatou Diop, Sandrine Fauqueux, Patrick Joly.

Rappelons que ces techniques, appelées PML (pour Perfectly Matched Layers) ont été introduites récemment en électromagnétisme (travaux de J. P. Bérenger) comme outil numérique pour borner artificiellement un domaine de calcul. Ce type d'outil s'avère particulièrement efficace pour bon nombre des applications que nous développons en régime transitoire et c'est pourquoi nous avons choisi d'intensifier nos recherches dans cette direction pour le traitement de frontières artificielles.

Stabilisation géométrique des PML en acoustique anisotrope. Gary Cohen et Peter Monk ont développé une nouvelle méthode d'implémentation Les PML standard se révèlent instables en acoustique anisotrope (dès que la matrice d'anisotropie est non-diagonale). G. Cohen, P. Joly et S. Fauqueux (en collaboration avec Peter Monk (University of Delaware)) ont développé deux familles de nouvelles PML qui peuvent s'interpréter comme issues d'une stabilisation « géométrique » des PML habituelles. L'approche consiste à coupler (via un chan-

gement de variable) un milieu anisotrope à un milieu isotrope sans créer aucune réflexion (c'est le caractère PML) à l'interface anisotrope-isotrope, puis à appliquer les PML dans le milieu isotrope. L'étude et l'implémentation de ces PML ont été menées dans le cadre du stage d'Aïssatou Diop, sous la direction de Gary Cohen et Sandrine Fauqueux. L'extension à d'autres équations est à l'étude.

Étude théorique des PML pour les ondes électromagnétiques. Nous avons finalisé nos travaux sur l'analyse de la stabilité des couches absorbantes PML pour l'électromagnétisme. Nous avons mené une analyse mathématique du modèle PML, d'une part par une analyse modale par transformation de Fourier, d'autre part par des techniques énergétiques. Nous avons ainsi obtenu des résultats de stabilité uniforme en temps (qui précisent des résultats déjà connus dans la littérature) et avons établi des résultats de décroissance d'énergie qui illustrent les propriétés d'absorption du modèle. Cette dernière technique permet aussi de démontrer la stabilité du schéma de Yee pour discrétiser les couches absorbantes. Ces travaux ont donné lieu à un article [12].

Étude des PML pour les ondes élastiques. Cette étude termine celle que nous avons commencée l'année dernière et dans laquelle nous avons essayé de comprendre l'origine d'instabilités qui avaient été observées numériquement en utilisant les PML avec certains matériaux anisotropes (Fig. 7) mais pas avec tous (Fig. 8).

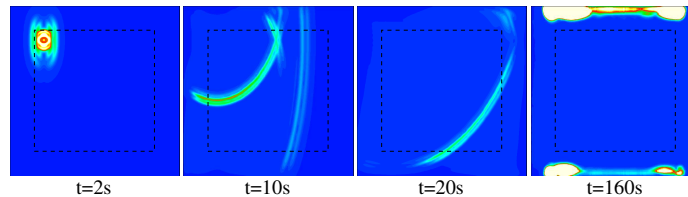


FIG. 7 – Explosion pour $c_{11} = 4$, $c_{22} = 20$, $c_{33} = 2$ et $c_{12} = 4.9$

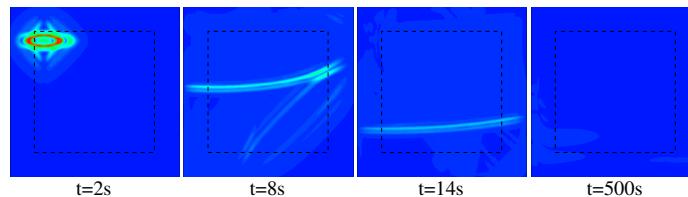


FIG. 8 – Pas d'explosion pour $c_{11} = c_{22} = 20$, $c_{33} = 2$ et $c_{12} = 3.8$

Pour comprendre ces phénomènes, nous avons étudié un modèle PML pour un système hyperbolique général et nous avons établi une condition nécessaire de stabilité pour ce système. Cette condition peut être interprétée en terme de propriétés géométriques des surfaces de lenteur : une couche absorbante parallèle à l'axe des x (c'est-à-dire, absorbant les ondes provenant du demi-plan $y < 0$) sera instable si la projection du vecteur lenteur $S(K)$ et la projection du vecteur vitesse de groupe $V(K)$ sur l'axe des y sont de sens opposés (Fig. 9)

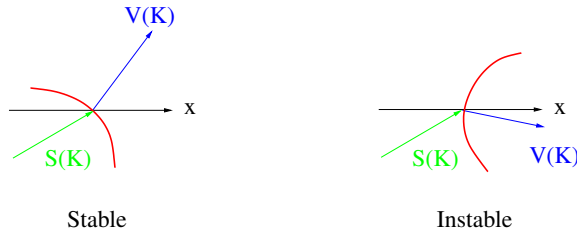


FIG. 9 – Interprétation géométrique de la condition nécessaire de stabilité.

Cette condition a été utilisée pour expliquer des instabilités observées avec les ondes élastiques. Ainsi, les courbes de lenteurs des deux matériaux étudiés dans les figures Fig. 7 et Fig. 8 sont représentés dans la figure 10.

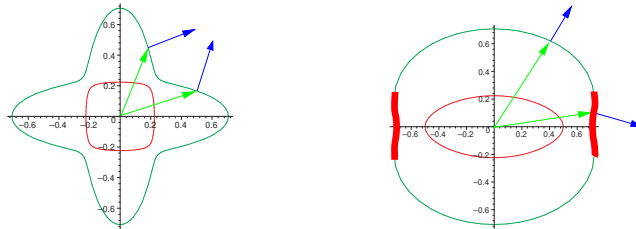


FIG. 10 – Courbes de lenteurs du matériau stable (à gauche) et instable (à droite).

Cette condition s’applique d’ailleurs à d’autres modèles de propagation (équations de Maxwell anisotropes, équations d’Euler linéarisées).

En ce qui concerne plus particulièrement les ondes élastiques se propageant dans un milieu orthotrope, cette condition géométrique ne suffit pas à expliquer toutes les instabilités (Fig. 11). Nous obtenons alors séparément une condition nécessaire de stabilité et une condition suffisante de stabilité qui peuvent être exprimées comme des inégalités sur les coefficients élastiques du modèle. Cette étude a fait l’objet d’un rapport de recherche [44].

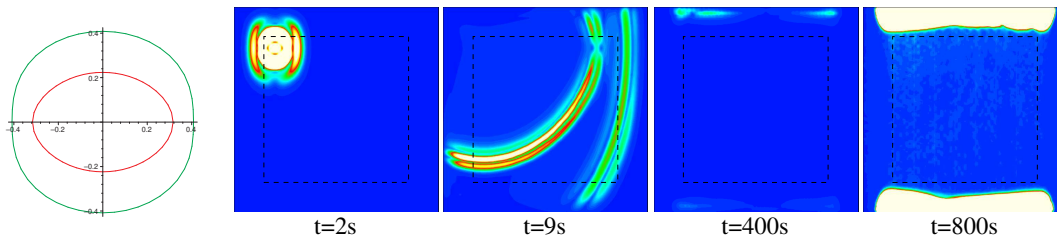


FIG. 11 – Courbes de lenteurs et instabilités pour $c_{11} = 10$, $c_{22} = 20$, $c_{33} = 6$ et $c_{12} = 2.5$

Etude des P.M.L. pour l’acoustique en écoulement. Comme pour les ondes élastiques, on peut établir géométriquement une condition nécessaire de stabilité à partir des courbes de

lenteur. Cette condition est respectée en acoustique sans écoulement, par contre la présence d'un écoulement, par exemple suivant l'axe des x , décale la courbe de lenteur et fait apparaître une zone d'instabilité (voir figure 12). Dans cette zone les solutions ω de l'équation de dispersion sont à partie imaginaire négative, ce qui entraîne une explosion exponentielle en temps.

Pendant son stage de D.E.A., Julien Diaz a étudié un nouveau modèle P.M.L.. Le principe

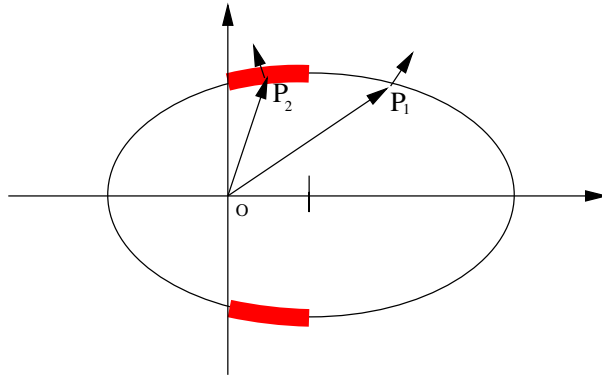


FIG. 12 – Courbe de lenteur, acoustique avec écoulement

de ce modèle consiste à utiliser un amortissement dépendant de (k_x, k_y) , permettant ainsi de modifier le signe de la partie imaginaire de ω dans la zone d'instabilité. Nous avons montré que ce modèle est stable à haute fréquence (ω grand). Malheureusement il engendre une instabilité à basse fréquence qui n'apparaît pas dans le modèle classique. La question de trouver des couches parfaitement adaptées pour l'acoustique en écoulement reste donc encore ouverte.

6.19 Résonances d'une plaque élastique dans un conduit

Participants : Anne-Sophie Bonnet-BenDhia, Jean-François Mercier.

On considère dans ce travail une plaque plane, rigide ou élastique, située au centre d'un conduit bidimensionnel. Le fluide qui se trouve dans le conduit peut être au repos ou en mouvement uniforme.

Si la plaque est rigide et le fluide au repos, il est bien connu qu'il existe des modes de vibration du fluide confinés au voisinage de la plaque. Il s'agit de modes antisymétriques par rapport au plan de la plaque et dont les fréquences sont inférieures à la fréquence de coupure du premier mode antisymétrique qui se propage dans le conduit : c'est pourquoi ils ne rayonnent pas dans le fluide.

L'étude théorique de ces modes localisés s'exprime mathématiquement comme un problème de théorie spectrale pour un opérateur auto-adjoint : elle peut donc s'effectuer à l'aide du Principe du Min-Max, en appliquant des techniques similaires à celles qui ont été développées pour l'étude des guides d'ondes ouverts.

Nous avons appliqué la méthode aux cas où la plaque est élastique et/ou le fluide est en écoulement uniforme dans le conduit. Ainsi, nous avons montré, en choisissant des fonctions test appropriées, qu'il existe encore dans ces différents cas des modes localisés. En particulier,

nous avons montré que le nombre de fréquences de résonance augmente quand on passe d'une plaque rigide à une plaque élastique, et quand on passe, pour une plaque rigide, d'un fluide au repos à un fluide en mouvement.

Enfin, nous avons montré que, dans le cas où l'on tient compte à la fois de l'élasticité de la plaque et de la présence d'un écoulement (et dans ce cas seulement), il peut exister des instabilités lorsque le nombre de Mach dépasse une valeur critique.

Parallèlement à cette étude théorique, Jean-François Mercier a développé dans le code MELINA une méthode numérique pour calculer les modes localisés. La méthode repose sur une discrétisation par éléments finis dans le fluide et une méthode modale sur la plaque.

6.20 Résonances en hydrodynamique navale

Participants : Christophe Hazard, François Loret.

Le problème de la stabilisation dynamique des navires (par déplacement de masses ou commande d'appendices mobiles) n'est pas récent mais son importance est croissante, en raison notamment de la réduction de leur taille. La question préliminaire concerne la simulation des mouvements transitoires du navire dans un champ de vagues quelconque : avant d'aborder la question du contrôle de ces mouvements, il faut disposer d'une méthode à la fois rapide et précise pour les prévoir. Les modèles retenus jusqu'ici sont beaucoup trop grossiers pour obtenir une simulation réaliste des mouvements. Mais on peut craindre qu'en enrichissant le modèle, on soit conduit à des temps de calcul trop importants pour envisager un contrôle en *temps réel* des mouvements.

La connaissance des résonances et des modes associés fournit peut être l'outil de simulation recherché. La méthode, développée initialement (dans les années 70) sous le nom de « Singularity Expansion Method » (SEM) dans le cadre de l'électromagnétisme, ne semble pas avoir connu un grand succès : l'absence de techniques fiables de calcul numérique de résonances limitait son utilisation aux rares cas où les calculs deviennent explicites. *Nous disposons maintenant de telles techniques.*

Le principe de la méthode est très simple. Il s'agit en quelque sorte d'une extension de la méthode de la transformation de Laplace. Elle repose précisément sur le caractère analytique du prolongement aux fréquences complexes d'un problème de diffraction. Chaque résonance, qui constitue un pôle de ce prolongement, se traduit (via le théorème des résidus) par une contribution oscillante, amortie de façon exponentielle, de la réponse transitoire du navire. Cette réponse va alors apparaître comme une superposition (discrète) de tels comportements élémentaires, à laquelle il faut adjoindre une contribution « basse fréquence » associée au rôle particulier de la fréquence nulle dans le prolongement analytique du problème (singularité de type logarithmique). Plus précisément, on obtient ainsi le comportement asymptotique en temps de la réponse du navire, l'erreur commise étant exponentiellement décroissante en temps (selon un facteur qui dépend de la quantité de résonances retenues). D'un point de vue numérique, ce comportement est beaucoup moins coûteux à calculer que la réponse elle-même, si on a déterminé au préalable les résonances et les modes associés. Toute la question est de savoir si cette estimation de la réponse est suffisamment précise pour alimenter un processus de stabilisation des mouvements.

Pour disposer d'une méthode de référence permettant de calculer de façon précise (mais coûteuse) la réponse transitoire d'un navire, Christophe Hazard et François Loret ont établi une *décomposition en fonctions propres généralisées* de cette réponse (article en préparation). Celle-ci revient à représenter les mouvements transitoires en les projetant sur les modes de vibrations libres du système qui apparaissent pour un continuum de fréquences (le spectre du problème est *continu*). Le code MELINA développé au SMP est particulièrement adapté au calcul de ces modes : la mise en oeuvre numérique d'une telle décomposition ne devrait pas soulever de difficultés particulières (elle nécessite seulement le calcul de réponse périodiques pour un grand nombre de fréquences).

L'application de la SEM et la comparaison avec une méthode modale sont à l'origine d'une collaboration avec Mike MEYLAN (Auckland, Nouvelle Zélande). Ce dernier a pu montrer dans un cadre monodimensionnel que la SEM fournissait une excellente approximation de la réponse, et ce même pour des temps très petits. Qu'en est-il pour des situations plus réalistes ? La collaboration est destinée à apporter des éléments de réponse pour le problème des mouvements d'une *plaque mince* flottant librement à la surface de l'océan (par exemple, une piste d'atterrissage). La difficulté essentielle soulevée par l'application de la « SEM » aux équations de l'hydrodynamique navale est analogue à celle que l'on rencontre pour l'équation des ondes acoustiques en dimension paire. Dans ce cas, le principe de Huyggens n'est plus respecté, ce qui se traduit par une composante lentement décroissante de la réponse transitoire à une excitation localisée en espace et en temps. Cette dernière apparaît dans la SEM comme une intégrale contournant une coupure dans le plan des fréquences complexes : le calcul numérique de cette contribution constitue le « point dur » de la méthode. . .

6.21 Guides d'ondes électromagnétiques en Optique

Participants : Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Patrick Joly, Dolores Pedreira, Christine Poirier.

Les travaux menés sur le calcul de modes guidés en optique intégrée sous l'hypothèse du faible guidage se sont poursuivis par la réalisation d'un code pour le calcul des modes guidés dans le cas où le milieu de référence est un milieu stratifié général. Ce code est en cours de validation. Ces travaux y seront notamment présentés à l'occasion d'un mini-symposium organisé par D. Pedreira et P. Joly à l'occasion des prochaines Journées Européennes en Electromagnétisme à Toulouse (Mars 2002).

6.22 Technique multimodale pour les guides d'ondes non uniformes

Participants : Christophe Hazard, Eric Lunéville, Emilie Bangratz.

Le SMP a repris une activité dans le domaine de l'utilisation de technique multimodale dans le cadre de la propagation dans les guides d'ondes fermés à section variable. Ces techniques s'appuient sur la connaissance d'une décomposition spectrale de l'opérateur transverse des ondes et sur une discrétisation par éléments finis suivant l'axe de propagation. Or l'utilisation de la base spectrale de l'opérateur transverse conduit à des approximations de mauvaise qualité, en présence d'une condition de Neumann à la paroi. L'adjonction d'une ou de plusieurs fonctions

supplémentaires bien choisies permet d'améliorer de façon significative la convergence. Un premier travail a été mené dans le cadre du stage de DEA d'Emilie Bangratz. Parallèlement, cette approche a été utilisée dans le cadre de l'optimisation de forme de guides d'ondes et a fait l'objet d'une étude numérique réalisée dans le cadre d'un stage de deux étudiants de l'Ensta (I. Maoui, S. Pitollat).

6.23 Factorisation de l'équation de Helmholtz dans un guide d'ondes

Participants : Isabelle Champagne, Jacques Henry, Patrick Joly.

Au cours de son stage de DEA et pour le début de sa thèse, Isabelle Champagne a appliqué la méthode de factorisation (cf section 6.28) à l'équation de Helmholtz. Ceci permet de retrouver des calculs faits par des mécaniciens (V. Pagneux et al.) pour obtenir l'impédance acoustique dans des guides d'onde. Cette approche, plus abstraite ne nécessite pas de connaître une base de fonctions propres de la section du guide ; elle propose de plus des points de vue alternatifs pour les guides de section variable. Elle n'a été abordée pour le moment que de façon formelle et sa justification se heurte à une première difficulté : lors de l'utilisation de la technique de plongement invariant, certaines longueurs du guide d'onde vont correspondre à un phénomène de résonance pour lequel l'opérateur d'impédance n'est plus défini. Deux voies se présentent pour surmonter cette difficulté : soit la transformation de l'opérateur d'impédance par une transformation de Cayley, soit la transformation de l'équation de Riccati en une équation linéaire par des transformations homographiques proposée par M. Sorine. Les deux voies semblent prometteuses.

6.24 Problèmes inverses : la Linear Sampling Method

Participant : Houssein Haddar.

Il s'agit d'un travail effectué en collaboration avec Fioralba Cakoni, David Colton et Peter Monk (University of Delaware).

La Linear Sampling Method (LSM) a été introduite par Colton et Kirsh (en 1996) pour l'identification d'un objet diffractant à partir de la mesure de son champ lointain à une fréquence donnée, l'objet diffractant étant éclairé par des ondes planes provenant de toutes les directions.

La particularité de la méthode, par rapport aux méthodes classiques, est qu'elle n'utilise pas d'hypothèses simplificatrices sur la solution du problème direct (du type approximations de Born). Elle évite en même temps d'avoir recours à la résolution du problème direct, qui peut être pénalisant dans le cas de problèmes de grande taille (c'est typiquement le cas si on traite un problème 3D). De plus cette méthode ne requiert pas, dans son principe, une connaissance préalable de la nature de l'objet (réfléchissant, absorbant, pénétrable ...). Il faut néanmoins montrer sa convergence au cas par cas. Sa seule restriction est qu'elle ne permet de connaître que le support de l'objet diffractant (et non pas ses caractéristiques par exemple). Mais, dans nombre de problèmes (radar, imagerie médicale, contrôle non destructif...), ce support constitue la seule information utile.

Nous avons montré l'applicabilité de la méthode à la reconstitution d'un milieu anisotrope ([24], [47]) dans le cas d'ondes acoustiques, complétant ainsi la validation de la méthode pour ce type d'ondes.

Le cas des ondes électromagnétiques est encore en progression bien que quelques avancées aient été accomplies. Les premiers résultats relatifs à la reconstitution d'objets parfaitement réfléchissants ou partiellement absorbants (modélisés par des conditions d'impédances sur le bord) ont été obtenus dans [26]. Les expériences numériques 3D qui y sont menées représentent (à notre connaissance) un des tous premiers résultats du genre. On y montre en particulier l'influence du choix de la polarisation de l'onde incidente sur la qualité de la reconstitution. Les meilleurs résultats requièrent en effet la combinaison de trois polarisations orthogonales entre-elles. Ces expériences numériques ont également confirmé la possibilité de reconstruire plusieurs objets à la fois. La qualité de la reconstruction peut cependant être affectée lorsque le contraste entre les caractéristiques physiques de chaque composante est très important. Par exemple on verra moins bien un objet absorbant lorsque celui-ci se trouve à côté d'un objet parfaitement réfléchissant. Nous avons également étendu ces résultats aux cas des diélectriques isotropes (travail soumis à publication).

Les perspectives de ce travail sont multiples. Nous souhaitons dans un premier temps étudier l'application de la LSM à la détection de matériaux anisotropes par des ondes électromagnétiques. La difficulté essentielle du travail semble liée à l'étude mathématique de convergence. Une première étude, basée sur des méthodes intégrales, a été menée par Colton-Potthast. Cependant, la convergence de la méthode n'a été montrée que lorsque les caractéristiques du matériau sont suffisamment petites, sans avoir pour autant de précision sur cette petitesse. Nous pensons que cette hypothèse restrictive est purement technique, et est liée simplement à la méthode mathématique utilisée. Nous pensons également qu'il est possible de s'en affranchir en étudiant le problème sous forme variationnelle par exemple. C'est d'ailleurs l'objet d'un travail en cours.

Nous souhaitons étudier dans un deuxième temps l'applicabilité de la LSM à la détection d'objet réfléchissant dans un milieu à deux couches. Il s'agit typiquement de la reconstruction de mines personnelles enfouies dans le sol. Une investigation numérique du problème a déjà été engagée.

A plus long terme, nous souhaitons pouvoir traiter des exemples où les mesures du champ lointain ne sont effectuées que dans un cône limité, ou encore lorsque les directions des ondes planes incidentes appartiennent à ce même cône. Enfin, il serait très intéressant également de pouvoir inclure à la méthode la possibilité d'utiliser plusieurs fréquences ou plus généralement de lui trouver un équivalent pour les problèmes en temps.

6.25 Optique géométrique et solutions multivaluées d'équations d'Hamilton-Jacobi

Participants : Jean-David Benamou, Ian Sollic.

La technique numérique traditionnelle pour la résolution de problèmes de type optique géométrique est celle du lancer de rayons. On peut la qualifier de Lagrangienne car, comme en mécanique des fluides, diverses quantités (phase, amplitudes, indices ...) sont transportées

le long des rayons. La solution est donc connue le long de ces trajectoires qui ne sont pas définies par l'utilisateur mais lui sont imposées par la physique du problème. Les rayons peuvent diverger ou alors converger vers un phénomène de caustique et se croiser. Dans ce dernier cas on dit que la solution est multi-valuée, la phase et les autres quantités pouvant prendre plusieurs valeurs au même point de l'espace physique.

Il est aussi possible de calculer directement la phase vue comme une fonction de l'espace physique solution d'une équation de Hamilton-Jacobi : c'est l'approche Eulérienne. La solution obtenue correspond à la solution Lagrangienne lorsqu'elle est classique, en pratique cela signifie que les rayons ne se croisent pas et que la solution lagrangienne est uni-valuée. Dans le cas contraire la solution calculée par des schémas numériques dits « décentrés » est appelée solution de viscosité et est naturellement uni-valuée. Elle ne représente qu'une partie de la solution calculée par la méthode Lagrangienne. La discrétisation de l'équation est dans ce cas laissée au choix de l'utilisateur ce qui résout le problème des zones de basse densité de rayons. Le problème des caustiques est lui lié à l'existence de solutions multi-val uées et n'autorise pas a priori l'utilisation directe de l'équation.

Nous avons obtenu une formulation Eulerienne couplée dans le cadre de solutions bi-valuées dont les deux branches sont séparées par une caustique de type pli. La caustique satisfait une équation différentielle intégrée au système. Une étude fine de la précision des schémas numériques utilisés est en cours.

L'optique géométrique fournit une bonne approximation des équations d'ondes en régime haute fréquence et c'est sous cette forme que sont simulés par exemple les phénomènes de propagation et d'absorption laser grâce à l'équation de Maxwell. On est donc amené à résoudre une équation d'Hamilton-Jacobi pour la phase (eikonale) couplée à une équation de transport pour l'amplitude (énergie). La représentation de la solution des équations de Maxwell fait alors intervenir de façon plus ou moins complexe les inconnues du problème d'optique géométrique associé. Une représentation asymptotiquement correcte au voisinage de caustique de type pli est à l'étude, assortie de comparaisons numériques utilisant les quantités calculées par la méthode originale présentée ci dessus.

Ce projet rentre dans le cadre du programme de conception d'outils de simulation numérique pour le laser Méga-Joule. Le CEA finance la thèse de Ian Sollic. Il s'agit d'une collaboration avec R.Sentis (CEA) et O. Lafitte (Université Paris 13).

6.26 Méthodes de raccordement modal généralisé

Participants : Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Patrick Joly, Karim Ramdani, Axel Tillequin.

Dans le cadre de la thèse d'Axel Tillequin (soutenue le 5 Janvier 2001), nous avons développé une méthode, dite *de raccord modal généralisé*, qui constitue une approche originale pour traiter certains problèmes de diffraction par des obstacles non bornés. Après avoir appliqué la méthode au calcul du champ rayonné par un guide acoustique bidimensionnel semi-infini, nous l'avons étendue à un problème de grande importance pour les applications : il s'agit des pertes

par diffraction à la jonction de guides ouverts (jonction de microguides optiques par exemple). Des résultats numériques bidimensionnels ont été obtenus.

Nous avons déjà montré que la méthode de raccord modal généralisé permettait également de formuler le problème de la diffraction d'une onde plane par un obstacle, situé dans un réseau périodique de plaques rigides semi-infinies. Cette année, nous avons traité le cas d'un défaut situé à proximité d'un milieu semi-infini stratifié périodiquement. La méthode repose alors sur l'utilisation de la transformation de Floquet-Bloch et permet de mettre en évidence une grande variété de phénomènes, liée au spectre de bandes du milieu périodique. Ainsi par exemple, l'onde diffractée par le défaut ne rayonne dans la direction orthogonale aux stratifications que lorsque la fréquence de l'onde incidente appartient à l'une des bandes du spectre.

Une réflexion est en cours portant sur l'extension de la méthode aux problèmes vectoriels tridimensionnels (en électromagnétisme ou en élastodynamique).

6.27 Distance de Wasserstein

Participants : Jean-David Benamou, Kevin Guittet.

Le problème de transport optimal de masse a été introduit par Monge à la fin du 18^{ème} siècle dans le but de calculer la manière la moins coûteuse de construire un remblai en creusant un déblai. Aujourd'hui, la généralisation du problème de Monge et de ses applications couvre un large spectre, de la modélisation économique à la mécanique des fluides... Le cadre abstrait du problème de transport est le suivant : étant données deux densités de masse 1, il faut trouver une application conservant les volumes et réalisant le transport de l'une vers l'autre. Ce problème est sous-déterminé, et peut admettre plusieurs solutions, il est donc naturel d'introduire un critère permettant de sélectionner parmi ces applications celle qui minimise un coût de transport. La fonction coût la plus étudiée est celle qui fait intervenir la norme L2 de la distance totale parcourue par la masse. L'existence d'une application optimale pour ce critère a été résolu par Kantorovich en 1942 et permet de définir une distance entre densités appelée distance de Wasserstein.

Nous avons récemment proposé une reformulation de ce problème dans un contexte « mécanique des fluides ». Au prix de l'ajout d'une dimension appelée temps qui introduit un continuum de densité entre densité initiale et finale, le problème de transport optimal peut être vu comme un problème de minimisation convexe non quadratique qui peut être résolu par itérations de problème de Laplace espace-temps.

Du point de vue théorique, K. Guittet a établi la validité de cette reformulation dans un cadre mathématique « Hilbertien » rigoureux. Du point de vue pratique, la précision de la méthode est limitée par un problème de compatibilité de discrétisation des inconnues. K. Guittet travaille toujours ce point.

Il s'est par ailleurs intéressé au problème dérivés dit des « célibataires » et a proposé un nouvel algorithme numérique pour sa résolution.

6.28 Programmation dynamique et factorisation d'opérateurs elliptiques

Participants : Jacques Henry, Angel Ramos, Maria do Céu Soares.

Les travaux sur la factorisation des problèmes aux limites elliptiques du second ordre ont été poursuivis. Cette méthode permet, pour des ouverts cylindriques, par plongement invariant, de montrer qu'un problème elliptique du second ordre peut se factoriser en un produit de deux problèmes du premier ordre non couplés et qui font intervenir un opérateur vérifiant une équation de Riccati. Cet opérateur relie des conditions aux limites sur la frontière mobile, ce peut être par exemple l'opérateur Dirichlet-Neumann. Sur le problème discrétisé, cette factorisation s'interprète exactement comme la factorisation de Gauss par blocs de la matrice du système linéaire. Pour les aspects géométriques, on a étudié comme modèle de la situation où la famille de domaines variables est limitée par une famille de surfaces sans bord démarrant au bord du domaine et venant se réduire en un point, le cas d'une famille de sphères concentriques. La principale difficulté est alors de définir la condition initiale à l'origine pour la phase de « remontée » qui n'est pas une donnée du problème comme dans le cas cylindrique. On a montré que cette valeur est fournie par la limite à l'origine du résidu r dans la phase « descente ». Ce travail fait partie de la thèse de M. C. Soares de l'universidade nova de Lisbonne.

Dans les travaux précédents avec A. Ramos dans le cas d'une géométrie cylindrique, les preuves pour l'établissement de l'équation de Riccati sont basées sur l'approche de J.L. Lions pour le calcul du feedback optimal pour les problèmes de contrôle optimal d'équations paraboliques. Dans le but de généraliser la méthode de factorisation à des situations plus larges (généralisation de l'opérateur, de la géométrie, de la surface balayant le domaine,...) il paraît important d'étudier l'équation de Riccati directement, c'est-à-dire sans référence à un problème de contrôle associé. Dans ce but on a repris des travaux anciens de R. Temam sur l'étude de la solution d'équations de Riccati dans le cadre des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Les résultats de Temam ne permettent pas d'apporter une réponse directe dans notre cadre. Cependant en s'en inspirant on a pu montrer des résultats d'existence et d'unicité dans un sens plus faible que celui attendu. Mais les propriétés que possède l'opérateur Neumann-Dirichlet permettent de compléter ces résultats et d'aboutir à ceux attendus. Par ailleurs, en liaison avec un problème issu de l'industrie pétrolière (cf section 6.8), on a essayé d'utiliser la technique de factorisation pour limiter le volume des calculs à effectuer : en effet pour certains problèmes aux limites elliptiques on est amené à effectuer de nombreuses fois le même calcul pour des données variant uniquement dans un sous domaine. On propose alors de n'effectuer les calculs que dans ce sous domaine ce que l'on peut faire à condition de définir des conditions aux limites représentant le domaine extérieur négligé dans le calcul. C'est ce que permet l'opérateur Dirichlet-Neumann.

6.29 Préconditionnement par factorisation incomplète

Participants : Jacques Henry, Jean-Pierre Yvon.

Comme cela a été présenté en section 6.28 la méthode de factorisation peut être vue comme une extension au problème continu de la factorisation de Gauss par blocs. Il est alors naturel d'utiliser cette méthode de factorisation pour concevoir en continu des preconditionneurs par factorisation incomplète. Une première expérimentation dans ce sens a été entreprise avec J.P.

Yvon de l'INSA-Rennes. L'idée est alors d'approcher l'opérateur Dirichlet-Neumann par un opérateur local, en l'occurrence le laplacien sur la section. L'opérateur de préconditionnement est alors défini sous forme factorisée à l'aide de deux fonctions vérifiant des équations non linéaires, couplées et paraboliques dans la direction privilégiée par la méthode. Cette méthode est différente des méthodes connues de préconditionnement ILU. Elle est proche, mais différente, des travaux menés par F. Nataf au laboratoire de mathématiques appliquées de l'école polytechnique. Les résultats numériques préliminaires sont encourageants.

7 Contrats industriels (nationaux, européens et internationaux)

7.1 Contrat INRIA-IFP

Participants : Gary Cohen, Sandrine Fauqueux.

Dans le cadre d'une contrat CIFRE avec l'IFP, S. Fauqueux, sous la direction de G. Cohen, a étudié une formulation par éléments finis mixtes des équations de l'élastodynamique en dimension 2. Un code 2D a été réalisé. Ce code peut traiter des milieux hétérogènes non-bornés ou anisotropes bornés. La prise en compte de milieux anisotropes non-bornés pose encore quelques problèmes.

7.2 Contrat INRIA-IFP

Participants : Eliane Bécache, Abdelaaziz Ezziani, Patrick Joly, Sandrine Fauqueux.

Dans le cadre de cette collaboration qui a pour objet les méthodes de sismique haute résolution pour analyser la structure du fond marin, nous nous intéressons à la propagation d'ondes dans un milieu constitué par un fluide (la mer) surplombant un milieu solide viscoélastique.

7.3 Contrat INRIA-Université de Tampere

Participants : Patrick Joly, Christine Poirier.

Cette collaboration a pour objectif la mise au point d'un code de résolution des équations de Maxwell transitoires à l'aide d'éléments finis d'arête adaptées à la condensation de masse. Les applications envisagées concernent la téléphonie mobile.

7.4 Contrat INRIA-EDF

Participants : Eliane Bécache, Patrick Joly, Gilles Scarella.

Un nouveau contrat avec EDF a démarré pour poursuivre nos travaux sur la diffraction d'ondes élastiques par des fissures. Il s'agit d'étendre la méthode développée par Chrysoula Tsogka pour des fissures modélisées par une condition aux limites de surface libre, au cas des fissures modélisées par une condition aux limites de contact unilatéral. Ces travaux font l'objet de la thèse de Gilles Scarella (voir paragraphe 6.13).

7.5 Contrat INRIA-EDF

Participants : Eliane Bécache, Patrick Joly, Jerónimo Rodríguez García.

Un nouveau contrat avec EDF a démarré pour financer la thèse de J. Rodríguez (voir paragraphe 6.15). L'objectif est d'étendre la méthode de raffinement spatio-temporel développée par T. Fouquet en électromagnétisme à un problème d'élastodynamique. Ce contrat fait également suite au précédent contrat finançant la thèse de C. Tsogka.

7.6 Contrat INRIA-CEA

Participants : Jean-David Benamou, Ian Sollic.

Ce contrat finance la thèse de Ian Sollic qui porte sur la résolution directe d'équations d'Hamilton-Jacobi et le calcul numérique d'ondes hautes fréquences en présence de caustiques plis et frouces.

7.7 Contrat INRIA - Schlumberger

Participants : Anne-Laure Baril, Jacques Henry, Patrick Joly.

Le stage de maîtrise de mathématiques d'Anne-Laure Baril a donné lieu à un contrat avec la société Schlumberger. L'étude sur la modélisation du CHFR décrite ci-dessus a eu lieu dans ce cadre.

7.8 Contrat INRIA-ONERA

Participant : Gary Cohen.

Gary Cohen a initialisé une collaboration avec le département DEMR de l'ONERA à Toulouse sur une méthode d'éléments finis mixtes d'ordre 3 avec condensation de masse pour les équations de Maxwell avec pertes électriques. Cette collaboration s'est traduite cette année par l'achat d'un logiciel 2D qui a été testé à l'ONERA. Les résultats encourageants ont conduit à un contrat de trois ans pour l'encadrement d'une thèse sur le sujet en 3D.

8 Actions régionales, nationales et internationales

8.1 Actions nationales

- Participation à l'action concertée incitative Télémédecine dans le projet « Problèmes directs et inverses en EEG et MEG » consacrée à l'imagerie cérébrale, avec les projets Robotvis et Estime (Jacques Henry).
- J.-D. Benamou est responsable de l'ACI jeune chercheur GO++ (2000-2002) qui a pour objet la réalisation, par une approche orientée objet, d'une bibliothèque modulaire de programmes pour la résolution numérique de problèmes de type optique géométrique. Cette ACI a financé le post-doct. de Ph. Hoch. Une première version du logiciel est disponible <http://www-rocq.inria.fr/~benamou/gopp.html>.

8.2 Relations bilatérales internationales

- Le projet participe à deux projets de l'Institut Lyapounov :
Avec l'équipe du professeur Komech de l'université de Moscou sur l'étude de problèmes de propagation d'onde non-linéaire et l'étude de problèmes de diffraction dans des domaines singuliers.
Avec l'équipe du professeur Tcheverda du centre de calcul de Novosibirsk sur les problèmes de modélisation numérique en sismique.
- Les travaux sur les guides d'ondes en interaction fluide-structure entrent dans le cadre d'une collaboration avec le LAMSIN (Laboratoire de Modélisation et de Simulation Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis.
- L'accord bilatéral INRIA - ICCTI avec l'université nouvelle de Lisbonne a été renouvelé. Cet accord permet d'organiser l'encadrement de la thèse de Maria do Céu Soares en co-tutelle avec Bento Louro de cette université.
- Une proposition d'action intégrée « Picasso » (franco-espagnole) avec A. Ramos de l'université Complutense de Madrid a été acceptée. Elle porte sur la factorisation des opérateurs elliptiques.

8.3 Accueils de chercheurs étrangers

Les chercheurs suivants ont séjourné au sein du projet :

- D. Gomez Pedreira (Université Saint-Jacques de Compostelle) en février et octobre 2001.
- A. Ramos (Université complutense de Madrid), de février à juin 2001.
- Christophe Hazard et François Loret ont établi une collaboration avec Michaël Meylan, maître de conférences à Auckland (Nouvelle Zélande) : ce dernier a séjourné au laboratoire durant deux semaines en avril 2001.
- Dans le cadre du projet commun France-Hong Kong PROCORE, le Prof. Jun ZOU, de la Chinese University of Hong Kong, a séjourné au laboratoire du 22 juin au 21 juillet 2001.

9 Diffusion de résultats

9.1 Animation de la communauté scientifique

- Le projet est coorganisateur, avec l'ENSTA, du séminaire mensuel CRESPO qui donne l'occasion d'accueillir de nombreux chercheurs, professeurs et industriels.
- A. S. Bonnet-Ben Dhia est membre du Comité National du CNRS (section 09 et section 41).
- G. Cohen et P. Joly ont organisé un cours INRIA dans la série « Ecole INRIA des Ondes » (intégrée dans les Ecoles d'Été CEA-EDF-INRIA) sur le thème « Ondes élastiques dans les solides » (12 au 16 Novembre 2001).
- P. Joly est membre du Comité éditorial de la Revue M2AN (Modélisation Mathématique et Analyse Numérique).
- P. Joly est membre du Comité National des Universités (26^{ème} section).

- J. Henry a été élu vice-président du technical committee 7 de l'IFIP et a été membre du comité international de la conférence IFIP TC7 « System modeling and optimization » qui a eu lieu à Trier en juillet 2001.
- J.-D. Benamou a co-organisé avec B. Engquist le workshop « Geometric high-frequency methods – applications to geophysics », *Institute for Pure and Applied Math, UCLA* avril 2001.
- Patrick Ciarlet, en collaboration avec Pierre-Arnaud Raviart et Eric Sonnendrücker, a organisé le Workshop intitulé *Numerical Simulation of charged particles* qui s'est tenu les 20 et 21 juin 2001, à Nancy.
- J. E. Roberts a organisé le minisymposium *Flow and Transport in Fractured Porous Media* au Sixth SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences (GS01), Boulder Colorado, Etat-Unis, juin 2001.

9.2 Enseignement universitaire

- Eliane Bécache
Deux cours : Éléments finis mixtes pour l'élastodynamique, Analyse de dispersion et de stabilité et Modélisation de la propagation d'ondes élastiques en domaines non-bornés, dans le cadre du cours INRIA « sur les ondes élastiques dans les solides » (Novembre 2001).
- Eliane Bécache et Patrick Joly
Cours sur les méthodes numériques en propagation d'ondes, troisième année à l'ENSTA.
- J.-D. Benamou
Cours d'initiation au calcul Scientifique, DEA MMSAP (P6/UVSQ/X).
Cours d'optique géométrique numérique, DEA de math. appliquées (Paris 9)
Travaux dirigés de contrôle optimal, Formation post-graduée Pôle Universitaire Léonard de Vinci.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia
Deux cours sur la théorie du guide d'ondes élastiques dans le cadre du cours INRIA « sur les ondes élastiques dans les solides » (Novembre 2001).
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Jean-François Mercier
Cours « Ondes dans les milieux continus », troisième année à l'ENSTA.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Christophe Hazard
Cours de Méthodes Numériques au DEA de Mécanique de Paris 6.
Cours intitulé Propagation d'ondes commun au DEA de dynamique des structures et couplages et à l'option MMS de l'Ecole Centrale de Paris.
- A. S. Bonnet-Ben Dhia et P. Joly
Cours à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis dans le cadre du DEA de Mathématiques Appliquées : Modèles de propagation d'ondes. (Avril 2001)
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Marc Lenoir
Cours ENSTA de première année : Outils élémentaires d'analyse pour les EDP .
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Vincent Pagneux
Cours intitulé *Propagation acoustique guidée* pour le DEA de dynamique des structures et des systèmes couplés à l'Ecole Centrale de Paris (avec Vincent Pagneux)

- P. Ciarlet
Cours intitulé Ondes électromagnétiques : Approche théorique et numérique au DEA de Mathématiques de la Modélisation, Simulation et Applications de la Physique à l'Université de Versailles (avec Franck Assous (CEA)).
Travaux dirigés de première année du cours ENSTA Algèbre linéaire et optimisation.
- Patrick Ciarlet, Eric Luneville et Christophe Hazard.
Cours de tronc commun à l'ENSTA sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles.
- G. Cohen
Cours sur les méthodes numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire à l'École des Ondes INRIA (novembre 2001).
- G. Cohen et P. Joly
Méthodes Mathématiques en propagation d'ondes, DEA à l'Université Paris IX Dauphine.
- Grégoire Derveaux
Monitorat à l'Université Paris Dauphine. Travaux dirigés d'algèbre linéaire et d'analyse en deuxième année de DEUG MASS.
- S. Fauqueux
Deux cours : « Eléments Finis Mixtes Spectraux : Analyse » et « Application à l'Elastodynamique » dans le cadre du cours INRIA sur les ondes élastiques dans les solides.
- Emmanuelle Garcia
Travaux dirigés du cours « Calcul Scientifique » de 2ème année de l'ENSTA.
- Christophe Hazard et Eric Luneville
Diffraction d'ondes : application numérique. Cours en troisième année à l'ENSTA.
Calcul Scientifique. Cours de 2ème année de l'ENSTA.
- J. Henry
Analyse numérique, deuxième année à l'école des Mines de Paris.
- P. Joly
Professeur Chargé de Cours à temps partiel à l'École Polytechnique, Département de Mathématiques Appliquées.
Formation sur les méthodes numériques pour les équations de Maxwell, formation dispensée dans le cadre du Collège Polytechnique.
Cours dans le cadre du DEA de Mathématiques Appliquées de l'Université de Bordeaux I sur l'analyse mathématique des modèles de guides d'onde ouverts.
Cours de DEA à l'Université de Saint-Jacques de Compostelle : introduction à l'analyse mathématique de l'équation de Helmholtz.
- Guillaume Legendre
Travaux dirigés du cours Equations aux dérivées partielles de licence I.U.P., filière Génie des Systèmes Industriels, à l'université d'Évry Val d'Essone.
- Marc Lenoir
Cours sur les équations intégrales au DEA de Mathématiques de la Modélisation, Simulation et Applications de la Physique à l'Université de Versailles.
- Eric Lunéville
Cours intitulé Optimisation et éléments finis en maîtrise à l'Université Paris 13.

TD du cours d'Analyse Numérique en 2ème année de la filière MACS à l'Université Paris 13.

Cours de Différences Finies en 1ère année de la filière MACS à l'Université Paris 13.

- François Loret
Travaux dirigés du cours de 2ème année de l'ENSTA intitulé *Calcul Scientifique*.
- Jean-François Mercier assure Travaux Dirigés du cours intitulé Ecoulements Compressibles en Deuxième année de l'ENSTA.
- Jean Roberts
Méthodes d'approximation, quatrième année du Pôle Universitaire Léonard de Vinci.
Volumes finis et éléments finis mixtes, (avec J. Jaffré du projet Estime) DEA de Mathématiques appliquées Université de Tunis II et Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis.

9.3 Participation à des séminaires, colloques, invitations

- E. Bangratz, C. Hazard and V. Pagneux
 - *Improved multimodal approach in waveguides with varying cross section*, 17th International Congress on Acoustics, Rome, September 2001.
- E. Bécache
 - *Domaines fictifs et éléments finis mixtes pour un problème de diffraction d'ondes élastiques en régime transitoire*, séminaire de l'Équipe de Mathématiques Appliquées, UTC, Compiègne, Janvier 2001.
 - *Domaines fictifs et conditions aux limites de contact unilatéral en élastodynamique*, séminaire CRESPO (INRIA/ENSTA), Mai 2001.
 - *A fictitious domain method for unilateral contact problems in non-destructive testing*, Day on Diffraction, Annual International Seminar, St.Petersburg, Russia, May 29-31, 2001.
 - *Stability and instability results for PML models*, Minisymposium sur « Numerical methods for wave propagation in unbounded media », First SIAM-EMS Conference « Applied Mathematics in our Changing World », Berlin, September 2 - 6, 2001.
- J.-D. Benamou
 - *The Monge-Kantorovitch mass transfer and its Computational Fluid Mechanics formulation*, conférence plénière, International Conf. in Fluid Dynamics, Oxford, mars 2001.
 - *Numerical techniques for multivalued geometric optics*, Workshop on Semiclassical Limits : WKB vs the Wigner Transform, Vienne ESI, novembre 2001.
 - *Caustic localization and Multi-valued Solution of the Eikonal equation* Workshop « Geometric high-frequency methods – applications to geophysics », Institute for Pure and Applied Math, UCLA, avril 2001.
- K. Guittet
 - *An Hilbertian framework for the time-continuous Monge-Kantorovich problem*, workshop « Problems and Perspectives on the Calculus of Variation », Toronto, août 2001.
- I. Sollic
 - a participé au programme « Geometrically based motion », Institute for Pure and Applied Math, UCLA, avril 2001.

- F. Assous, P. Ciarlet, Jr. et E. Garcia
 - *The Singular Complement Method applied to Maxwell-Vlasov simulation*. Workshop « Numerical Simulation of charged particles », Nancy, juin 2001.
- F. Assous, P. Ciarlet, Jr. et S. Labrunie :
 - *Numerical methods for the axisymmetric singular Maxwell equations*. Workshop « Numerical Simulation of charged particles », Nancy, juin 2001.
- A.S. Bonnet-Ben Dhia, E. Lunéville et J.F. Mercier
 - *Diffraction par une plaque en présence d'écoulement : 1) Sillage et condition de Kutta 2) Etats résonnants*. Deuxièmes journées sur l'acoustique de Galbrun, Arcachon, 4-6 avril 2001.
 - *Diffraction of an acoustic wave by a plate in a uniform flow : a numerical approach.*, 17th International Congress on Acoustics, Rome, September 2001.
- A.S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre et E. Lunéville
 - *Quelques réflexions sur la résolution des équations de Galbrun fréquentielles par éléments finis*. Deuxièmes journées sur l'acoustique de Galbrun Arcachon, 4-6 avril 2001.
- G. Cohen
 - Gary Cohen a été invité à l'UNAM (Mexico) par Ricardo Weder du 11 au 16 février 2001 pour préparer la Conférence Waves'2002.
 - Gary Cohen a été invité à l'Université du Delaware par Peter Monk du 19 au 28 février 2001.
 - *Efficient mixed finite elements for the elastics system*. Day on Diffraction, Annual International Seminar, St.Petersburg, Russia, May 29-31, 2001.
- Conférence sur *les éléments finis d'ordre élevé pour les équations des ondes* à l'Atelier MELINA qui s'est tenu du 5 au 7 juin 2001 au Tronchet.
- G. Derveaux
 - 2nd European Conference on computational mechanics (ECCM - 2001) *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*. Cracow, Poland, June 26-29, 2001.
 - 1^{er} congrès national de mathématiques appliquées et industrielles, SMAI 2001. Pompadour, France, 28 mai - 1^{er} Juin 2001.
- S. Fauqueux
 - *A plane wave analysis of the acoustics equation*. Day on Diffraction, Annual International Seminar, St.Petersburg, Russia, May 29-31, 2001.
 - *2D elastic modelling with efficient mixed finite elements*. 63rd EAGE, European Association of Geoscientists and Engineers, Amsterdam, The Netherlands, 11-15 June 2001.
- H. Haddar
 - *Electromagnetic Inverse Medium Problem*, Inverse Problems Seminar, Mars 2001, Mathematical Department, University of Delaware,
 - *Thin Layer Approximations for Electromagnetic Waves Scattering by Linear and Non-linear Coatings*, Scientific Computing. Seminar, Division of Applied Mathematics, Brown University, Novembre 2001.
- *Introductory Workshop in Inverse Problems and Integral Geometry* , MSRI, Berkeley,

- California, August 2001.
- J. Henry
 - *Sur des opérateurs de préconditionnement pour des problèmes aux limites elliptiques issus de la factorisation en continu du problème*, Congrès SMAI 2001 Pompadour, 27 mai - 1 juin 2001.
 - *Sur la factorisation des problèmes aux limites elliptiques par plongement invariant* séminaires à l'université complutense de Madrid en octobre, au laboratoire de mathématiques appliquées de l'école centrale en octobre, au laboratoire de mathématiques appliquées de l'école polytechnique en novembre et à l'institut Elie Cartan de Nancy en novembre 2001.
 - P. Joly
 - *Méthodes de couches absorbantes parfaitement adaptées*. Séminaire à l'Ecole Centrale de Lyon. Mai 2001.
 - *Modélisation par domaines fictifs de conditions de contact unilatéral en élastodynamique*. Séminaire au Laboratoire de Modélisation en Mécanique de l'Université Paris VI. Mai 2001.
 - *A fictitious domain method for unilateral contact in elastodynamics*. First MIT International Conference in Computational Mechanics. Juin 2001. (conférencier invité dans le minisymposium « Domaines fictifs » organisée par O. Pironneau)
 - *Modélisation de problèmes de contrôle non destructif*. Journées en l'honneur de Jean-Claude Guillot. Université Paris-Nord. Juin 2001. (conférencier invité)
 - *Conservative Space-Time Mesh Refinement Methods for Maxwell's equations*. Numeric Seminar, University Of Technology of Darmstadt. Décembre 2001.
 - C. Poirier Participation à l'atelier MELINA, du 5 au 7 juin 2001 au Tronchet.
 - J. E. Roberts
 - Participation au Oberwolfach Meeting Mixed Finite Element Methods, Oberwolfach, Allemagne. Février 2001.
 - Exposé au séminaire LAMSIN de l'ENIT Tunis, Tunisie. Mai, 2001.
 - Participation à la 6ième Conférence de SIAM sur Mathematical and Computational Issues in the Geosciences (GS01), Boulder, Colorado, Etats-Unis. Juin, 2001.
 - Participation au Joint Summer Research Conference : Fluid Flow and Transport in Porous Media : Mathematical and Numerical Treatment, de l'AMS de l'AMS, l'IMS (Institute of Mathematical Sciences), et la SIAM, et présentation de *Flow and transport of contaminants in a porous medium with faults*, (conférencière invitée), Mount Holyoke College, South Hadley, Massachusetts, Etats-Unis. Juin 2001.
 - Invitation de deux semaines par le professeur Mary F. Wheeler au TICAM (Texas Institute for Computational and Applied Mathematics), Université de Texas, Austin, Texas, Etats-Unis. Juillet 2001.
 - Invitation de deux jours par le professeur Yuri Kuzenetzov au Département de Mathématiques, Université de Houston, Houston, Texas, Etat-Unis. Juillet 2001.
 - Invitation de trois jours par le professeur Richard E. Ewing au ISC (Institute for Scientific Computation), Texas A&M Université, College Station, Texas, Etats-Unis. Juillet 2001.
 - Participation à la 3ième Conférence ISSAC et présentation de *Two models for flow and*

transport of contaminants in a porous medium with faults (conférence invité dans le minisymposium « Homogenization, moving boundaries and porous media » organized by A. Bourgeat et R. P. Gilbert) Berlin Allemagne. Aout 2001.

9.4 Réalisation de vidéos scientifiques

- Auteur(s) scientifique(s) : Joly, Patrick / Rodriguez, Jeronimo
Raffinement de maillage espace-temps pour les équations de Maxwell, réalisation : Paouri, Arghyro, 2001, 5 mn10
- Auteur(s) scientifique(s) : Bécache, Éliane / Chaigne, Antoine / Derveaux, Grégoire / Joly, Patrick
Modélisation numérique de la guitare, réalisation : Paouri, Arghyro, 2001, 3 mn 56
- Auteur(s) scientifique(s) : Fauqueux, Sandrine / Joly, Patrick
Couches P.M.L. en électromagnétisme anisotrope, réalisation : Paouri, Arghyro, 2001, 1 mn
- Auteur(s) scientifique(s) : Joly, Patrick / Scarella, Gilles
Propagation d'ondes avec condition de contact unilatéral : simulation monodimensionnelle, réalisation : Paouri, Arghyro, 2001, 5 mn 58

10 Bibliographie

Ouvrages et articles de référence de l'équipe

- [1] F. COLLINO, « Conditions absorbantes d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3-D », *rapport de recherche n°2932*, Inria, Rocquencourt, France, 1996, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-2932.html>.
- [2] M. COSTABEL, M. DAUGE, D. MARTIN, G. VIAL, « Weighted regularization of Maxwell equations - Computations in curvilinear Polygons », *rapport de recherche*, IRMAR, Université de Rennes 1, France, Dec. 2001.
- [3] M. COSTABEL, M. DAUGE, « Weighted Regularization of Maxwell equations in polyhedral domains », *rapport de recherche n°01-26*, IRMAR, Université de Rennes 1, France, April 2001, Accept'e (Dec. 2001) pour publication dans Numer. Math.
- [4] L. RHAOUTI, A. CHAIGNE, P. JOLY, « Time domain modeling and numerical simulation of a kettledrum », *J. Acoustic. Soc. Am.* 105, 6, June 1999, p. 3545–3562.

Livres et monographies

- [5] G. C. COHEN, *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Springer, 2001.

Thèses et habilitations à diriger des recherches

- [6] L. DAHI, *Guidage et diffraction d'ondes acoustiques : étude mathématique et analyse numérique.*, thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, 2001.
- [7] C. HAZARD, *Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches : Analyse modale de la propagation des ondes*, thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, 2001.
- [8] A. TILLEQUIN, *Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d'ondes.*, thèse de doctorat, Université Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines, 2001.

Articles et chapitres de livre

- [9] F. ASSOUS, P. CIARLET JR., S. LABRUNIE, « Theoretical tools to solve the axisymmetric Maxwell equations », *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, à paraître.
- [10] E. BÉCACHE, P. JOLY, C. TSOGKA, « A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem », *SIAM J. on Num. Anal.*, à paraître.
- [11] E. BÉCACHE, P. JOLY, C. TSOGKA, « Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2D elastic wave propagation », *J. of Comp. Acoustics* 9, 3, September 2001, p. 1175–1203.
- [12] E. BÉCACHE, P. JOLY, « On the analysis of Bérenger's Perfectly Matched Layers for Maxwell's equations », *M2AN*, à paraître.
- [13] J. BENAMOU, Y. BRENIER, « Mixed L^2 /Wasserstein Optimal Mapping Between Prescribed Densities Functions », *J. Optim. Theory Applic.* 111, 2001.
- [14] A. BERMUDEZ, D. GOMEZ-PEDREIRA, P. JOLY, « An hybrid Approach for the Computation of Guided Modes in Integrated Optics », *Advances in Computational Mathematics*, A paraître.
- [15] A.-S. BONNET-BEN DHIA, G. CALOZ, M. DAUGE, F. MAHÉ, « Study at high frequencies of a stratified waveguide », *IMA Journal of Applied Mathematics* 66, 2001, p. 231–257.
- [16] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. DAHI, E. LUNÉVILLE, V. PAGNEUX, « Acoustic diffraction by a rigid plate in a uniform flow », *Mathematical Models and Methods in the Applied Sciences*, A paraître.
- [17] A.-S. BONNET-BEN DHIA, P. JOLY, *Mathematical Analysis and Numerical Approximation of Optical Waveguides*, SIAM, 2001.
- [18] A.-S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE, E. LUNÉVILLE, « Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Tome 329*, à paraître, p. 601–606.
- [19] A.-S. BONNET-BEN DHIA, K. RAMDANI, « Diffraction by an acoustic grating perturbed by a bounded obstacle », *Advances in Computational Mathematics*, à paraître.
- [20] A.-S. BONNET-BEN DHIA, A. TILLEQUIN, « A generalized mode matching method for scattering problems with unbounded obstacles », *Journal of Computational Acoustics*, à paraître.
- [21] A.-S. BONNET-BEN DHIA, A. TILLEQUIN, « A limiting absorption principle for scattering problems with unbounded obstacles », *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24, 2001, p. 1089–1111.
- [22] A. BUFFA, P. CIARLET JR., « On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I : an integration by parts formula in Lipschitz polyhedra », *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24, 2001, p. 9–30.
- [23] A. BUFFA, P. CIARLET JR., « On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications », *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24, 2001, p. 31–48.
- [24] F. CAKONI, D. COLTON, H. HADDAR, « The linear sampling method for anisotropic media », *J. Comp. and Appl. Math.*, A paraître.
- [25] G. COHEN, P. JOLY, N. TORDJMAN, J. ROBERTS, « Higher Order Triangular Finite Elements with Mass Lumping for the Wave Equation », *SINUM* 38, 6, 2001, p. 2047, 2078.
- [26] D. COLTON, H. HADDAR, P. MONK, « The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem », *SIAM J. Sci. Comp.*, A paraître.

- [27] E. GARCIA, S. LABRUNIE, « Régularité spatio-temporelle de la solution des équations de Maxwell dans des domaines non convexes », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, à paraître.
- [28] H. HADDAR, P. JOLY, « Effective Boundary Conditions For Thin Ferromagnetic Layers : the 1D Model », *Siam J. Appl. Math.*, à paraître.
- [29] H. HADDAR, P. JOLY, « Effective Boundary Conditions for Thin Ferromagnetic Coatings. Asymptotic Analysis of the 1D Model », *Asymptotic Analysis*, 2001.
- [30] H. HADDAR, P. JOLY, « Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and non linear coatings », *Computational and Applied Math.*, A paraître.
- [31] C. HAZARD, S. LOHRENGEL, « A singular field method for Maxwell's equations : numerical aspects in two dimensions », *SIAM J. on Applied Mathematics*, accepté.
- [32] C. HAZARD, « Numerical simulation of corner singularities », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, à paraître.
- [33] P. JOLY, D. PEDREIRA, « A method for computing guided waves in integrated optics. Part (I) Mathematical analysis », *SIAM. J. of Num. Anal.*, A paraître.
- [34] P. JOLY, D. PEDREIRA, « A method for computing guided waves in integrated optics. Part (II) Numerical approximation », *SIAM. J. of Num. Anal.*, A paraître.
- [35] J.-F. MERCIER, C. NORMAND, « Recirculation eddies in thermocapillary-driven flows », *Int. J. Heat Mass Transfer* 45, 2001, p. 793–801.
- [36] J.-F. MERCIER, C. WEISMAN, M. FIRDAOUSS, P. L. QUÉRÉ, « Heat transfers associated to a natural convection flow in a partially porous cavity », *J.Heat Transfer* 124, à paraître.

Communications à des congrès, colloques, etc.

- [37] F. ASSOUS, P. CIARLET JR., S. LABRUNIE, S. LOHRENGEL, « The singular complement method », in : *12th International Conference on Domain Decomposition Methods, Lyon, France*, SIAM, à paraître.
- [38] E. BÉCACHE, P. JOLY, G. SCARELLA, « A fictitious domain method for unilateral contact problems in non destructive testing », in : *Computational and Fluid and Solid Mechanics*, Elsevier (éditeur), p. 65–67, 2001.
- [39] J. BENAMOU, Y. BRENIER, K. GUITTET, « The Monge-Kantorovitch mass transfer and its Computational Fluid Mechanics formulation », in : *Proc. of ICFD01 Conference and Exhibition*, 2001.
- [40] G. COHEN, S. FAUQUEUX, « Mixed Finite Elements with Mass-Lumping for the Transient Wave Equation », in : *Proc. of the 63rd EAGE Annual International Conference and Exhibition*, p. 0–023, 2001.

Rapports de recherche et publications internes

- [41] C. ALBOIN, J. JAFFRÉ, J. ROBERTS, C. SERRES, « Modeling fractures as interfaces for flow and transport in porous media », *Rapport de recherche*, INRIA, décembre 2001, soumis à publication.
- [42] C. ALBOIN, P. JOLY, J. JAFFRÉ, J. ROBERTS, C. SERRES, « A comparison of methods for calculating the matrix block source term in a double porosity model », *Rapport de Recherche n°4280*, INRIA, 2001, soumis à publication, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4280.html>.
- [43] C. ALBOIN, P. JOLY, J. JAFFRÉ, J. ROBERTS, « On a convolution operator arising in a double porosity model », *Rapport de Recherche n°4126*, INRIA, 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4126.html>.

-
- [44] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, P. JOLY, « Stability of Perfectly Matched Layers, Group Velocities and Anisotropic Waves », *rapport de recherche n°4304*, INRIA, 2001, soumis, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4304.html>.
 - [45] E. BÉCACHE, P. JOLY, « On the analysis of Bérenger's Perfectly Matched Layers for Maxwell's equations », *rapport de recherche n°4164*, INRIA, 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4164.html>.
 - [46] A. BERMUDEZ, D. GOMEZ-PEDREIRA, P. JOLY, « An hybrid Approach for the Computation of Guided Modes in Integrated Optics », *Rapport de Recherche n°4148*, INRIA, 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4148.html>.
 - [47] F. CAKONI, H. HADDAR, « The linear sampling method for anisotropic media : part II », *rapport de recherche*, MSRI Preprint, 2001.
 - [48] M. COSTABEL, M. DAUGE, D. MARTIN, G. VIAL, « Weighted regularization of Maxwell equations - Computations in curvilinear Polygons. », *Rapport interne*, IRMAR, Rennes, 2001.
 - [49] K. GUITTET, « An Hilbertian framework for the time-continuous Monge-Kantorovich », *rapport de recherche n°4122*, INRIA, 2001, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4122.html>.
 - [50] Y. SOLLIEC, « Résolution directe de l'absorption laser dans un plasma », *rapport de recherche*, CEA/DAM, 2001.