INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet Café

Calcul Formel et Équations

Sophia Antipolis

THÈME 2B

Rapport d'Activité

2002

Table des matières

1. Composition de l'équipe

Responsable scientifique
Manuel Bronstein [DR]

Assistante de projet
Montserrat Argente [TR, à temps partiel dans le projet]

Personnel Inria
Stéphane Dalmas [IR, 10%]
Evelyne Hubert [CR]
Alban Quadrat [CR]
Jacques-Arthur Weil [CR (MdC en détachement de l'université de Limoges)]

Collaborateurs extérieurs
Raphaël Bomboy [ATER UNSA, jusqu'en juin 2002]
Marc Gaëtano [Maître de conférences UNSA]
Patrick Solé [DR CNRS]

Chercheurs doctorants
Nicolas Le Roux [MESR, depuis septembre 2002, co-encadrement U. Limoges]
Min Wu [BGF, depuis septembre 2002, co-tutelle Academia Sinica]

Chercheur post-doctorant
Maria Przybylska [Bourse PM Curie, depuis novembre 2002]

Stagiaires
Sunayana Ghosh [avril-juin 2002]
Amit Gupta [mai-juillet 2002]
Sébastien Marti [janvier-juin 2002, conjointement avec LEMME]
Julien Ohler [mai-juillet 2001]

2. Présentation et objectifs généraux

Notre but est de développer de nouvelles méthodes de résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles, c'est-à-dire d'équations où les inconnues représentent des fonctions plutôt que des valeurs numériques, et de faciliter le transfert de ces méthodes dans les sciences de l'ingénieur en produisant les programmes et outils nécessaires pour les appliquer à des problèmes industriels. Les équations fonctionnelles qui sont l'objet de nos études sont plus particulièrement les équations différentielles et les équations aux (q)-différences, ordinaires et partielles.

Nous poursuivons les axes de recherche suivants :

- Algorithmes algébriques : nous étudions des algorithmes efficaces en théorie de Galois différentielle ainsi que leurs généralisations aux équations aux différences et au-delà à des équations plus générales. Nous étudions aussi le traitement des cas non-génériques en présence de paramètres dans les équations.
- Bases de données mathématiques : nous développons une base de données déductive de formules mathématiques, qui permet de stocker naturellement les connaissances non algorithmiques utilisables en calcul formel. Ce thème génère de nombreux problèmes au croisement du calcul formel de la réécriture, et de la déduction automatique.
- Bibliothèques dédiées de calcul formel : nous implantons nos méthodes dans des bibliothèques dédiées utilisables à partir de divers systèmes de calcul formel.
- Composants logiciels : nous développons les outils et protocoles nécessaires à l'utilisation de bases de données et de bibliothèques dédiées comme composants logiciels d'un environnement plus large de calcul scientifique.

3. Fondements scientifiques

3.1. Algorithmes pour les équations linéaires

Mots clés : *algèbre linéaire*, *algèbre différentielle*, *équations différentielles*, *équations aux différences*, *intégration formelle*, *solutions analytiques*, *quadratures*, *solutions en forme close*, *fonctions spéciales*, *théorie de Galois*.

L'objectif de ce thème est d'étudier la résolution par le calcul formel d'équations fonctionnelles linéaires, principalement différentielles et aux (q)-différences. L'importance de l'approche par linéarisation des équations différentielles dans pratiquement toutes les sciences de l'ingénieur est bien connue, et se reflète dans l'importance des investissements en ordinateurs et temps de calcul consacrés à leur résolution numérique. Ingénieurs et physiciens essaient d'étendre la connaissance du linéarisé au problème non-linéaire, ce qui montre d'autant plus l'utilité d'une analyse fine de la structure du linéaire. La connaissance de solutions formelles amène à une meilleure compréhension des modèles étudiés, car les solutions ainsi obtenues contiennent des informations sur la structure même des problèmes résolus.

Une équation différentielle (resp. aux différences) ordinaire linéaire est une équation de la forme

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y(x) = b(x)\ ,$$

respectivement

$$a_n(x)y(x+n) + \cdots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = b(x)\ ,$$

où l'inconnue y, ainsi que les coefficients b et les a_i, sont des fonctions de la variable x. On cherche à déterminer s'il existe des solutions *Liouvilliennes*, c'est à dire si on peut exprimer au moins une solution non-nulle par une formule finie faisant intervenir des opérations algébriques, des primitives (resp. des sommes) et des exponentielles (resp. des produits). Ces solutions sont aussi appelées solutions en quadratures ou bien en forme close. Ce type de solution n'existe pas toujours lorsque l'ordre n est plus grand que 1 et que les coefficients a_i ne sont pas constants. Par exemple, l'équation de Bessel :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

n'en admet pas (ses solutions sont les fonctions de Bessel, qui sont définies implicitement par cette équation). Plus difficiles pour les systèmes de calcul formel, les équations :

$$(x^3+1)(x^2+1)(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2+2x-1)\frac{dy}{dx} + 15(x^3+1)y(x) = 0 \qquad (1)$$

et

$$y(x+2) + y(x+1) + xy(x) = 0 \qquad (2)$$

n'en admettent pas non plus, alors que :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{7x-4}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2592x^2-2963x+560}{252x^2(x-1)^2}\frac{dy}{dx} + \frac{57024x-40805}{24696x^2(x-1)^2}y(x) = 0 \qquad (3)$$

et

$$y(x+2)+\frac{(x+1)(5x^2+8x+4)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x+1)-\frac{x^2(x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+3)}{(x+2)(x^5+2x^4+x^3-1)}y(x)=0 \quad (4)$$

en admettent. On notera que MAPLE 7 et MATHEMATICA 4.0 ne sont capables, ni de trouver des solutions Liouvilliennes de (3) ou (4), ni de prouver que (1) ou (2) n'en ont pas. La théorie de Galois différentielle, développée tout d'abord par Picard et Vessiot au début du siècle, puis de façon algébrique principalement par Kolchin dans les années 60, associe un groupe de Galois à une équation de ce type, et donne des critères liant l'existence de solutions en forme close à une propriété de ce groupe. Des algorithmes permettant de tester cette propriété à partir de l'équation seulement[33][56] ont rendu le problème de l'existence de solutions en forme close décidable dans le cas de coefficients polynomiaux. Une généralisation récente de cette théorie aux équations aux différences finies[57] a engendré la découverte d'un premier algorithme de calcul des solutions Liouvilliennes de ces équations pour des coefficients polynomiaux[27]. Dans les deux cas, la complexité de ces algorithmes ainsi que leur besoin de résolution d'équations intermédiaires non-linéaires les rendent difficilement applicables en pratique, sauf pour les équations du second ordre.

Notre action dans ce thème a plusieurs buts :

- la généralisation des théories et méthodes à des équations aux (q)-différences,
- la généralisation des algorithmes à des classes de coefficients contenant des fonctions plus générales,
- le développement d'algorithmes permettant de calculer des solutions contenant des fonctions plus générales, telles que les fonctions spéciales,
- l'amélioration des algorithmes existants afin de pouvoir résoudre des équations d'ordres supérieurs,
- le développement de bibliothèques dédiées fournissant ces fonctionnalités de résolution.

3.2. Algorithmes pour les systèmes différentiels non linéaires

Mots clés : *algèbre différentielle*, *algèbre aux différences*, *élimination*, *système d'équations différentielles*, *invariants différentiels*, *symétrie*.

Des systèmes mécaniques pas si complexes, des réaction chimiques ou des systèmes contrôlés ne peuvent pas toujours être modélisés par des systèmes différentiels explicites ni même déterminés. Apparaissent naturellement les systèmes différentiels implicites. Ces systèmes peuvent être sur-contraints ou sous-contraints et les contraintes n'apparaissent pas forcément explicitement.

Pour les systèmes dynamiques (différentiels explicites) et certains types de systèmes aux dérivées partielles, le théorème de Cauchy ou de Cauchy-Kowaleskaya assure l'existence et l'unicité d'une solution pour certaines conditions initiales. La question de l'existence est déjà délicate dans le cas d'un système différentiel non-linéaire quelconque.

Une fois l'existence d'une solution assurée, plusieurs questions se posent. Quel est le *degré de liberté* du système ? Combien de fonctions où constantes doivent être fixées pour déterminer de façon unique la solution ? Quelles sont les conditions initiales qui donnent lieu à une solution ? À une solution réelle ? Quelle est la variété où vivent les solutions ? Une fonction des inconnues et de leurs dérivées s'annulle-t'elle sur les solutions ? Quelles sont les équations satisfaites par un sous-ensemble des inconnues ? Si le système original est un système aux dérivées partielles, les solutions satisfont elles une équation différentielle ordinaire ?

Par équation différentielle algébrique, nous entendons, le plus souvent, des équations différentielles polynomiales en les inconnues et leurs dérivées. On peut néanmoins aussi considérer les équations qui font intervenir des fonctions, telles $\sin$ et $\exp$, elles-mêmes définies par des équations différentielles polynomiales. L'algèbre différentielle[55][32] donne les fondements théoriques pour répondre aux questions ci-dessus dans le cas des systèmes différentiels algébriques. Les algorithmes de décomposition caractéristique, ou de triangulation-décomposition, donnent le moyen constructif de répondre à ces questions pour un système différentiel algébrique donné.

Plus précisément, les algorithmes de décomposition caractéristique [32][16][17][28] donnent une *bonne* représentation d'un système différentiel algébrique donné, disons $\mathcal{S}$. L'algorithme prend en entrée le système $\mathcal{S}$ et un classement des indéterminées différentielles, ou variable dépendantes, c'est à dire un ordre total sur toutes les dérivées de ces indéterminées qui soit compatible avec les dérivations. Le résultat de l'algorithme est alors un ensemble fini de systèmes différentiels $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$, tel que l'ensemble des solutions analytiques de $\mathcal{S}$ soit égal à l'union des solutions non singulières des systèmes $\mathcal{C}_i$. Les systèmes $\mathcal{C}_i$ ont une forme particulière : ils sont *différentiellement triangulaires* par rapport au classement choisi. Ils sont de plus minimaux, en un certain sens, parmi les systèmes admettant le même ensemble de solutions non singulières. Par conséquents les réponses aux questions précédentes se lisent sur les $\mathcal{C}_i$, à condition d'avoir choisi un classement adéquat.

Alors que les algorithmes lourdement récursifs proposés par Ritt et Kolchin font intervenir des factorisations dans des tours d'extension, les algorithmes récents procèdent sans récursion ni factorisation [17][28]. Bien qu'enfin effectifs, des algorithmes aussi généraux et potentiellement puissants ne permettent pas toujours d'obtenir une réponse en un temps raisonnable. Il est souhaitable à la fois d'améliorer ces algorithmes généraux et leurs implantations ainsi que d'apporter des alternatives pour des classes de problèmes spécialisés.

Les systèmes symétriques forment une classe de problèmes qui ne sont pas traitables en pratique par une triangulation-décomposition directe. En effet, l'introduction d'un ordre entre les dérivées casse la symétrie et engendre des expressions intermédiaires de taille excessive. Une idée naturelle est de vouloir utiliser cette symétrie pour, au contraire, diminuer les calculs.

Ce idée est développée en collaboration avec E. Mansfield, University of Kent, et I. Kogan, Yale University. L'approche que nous considérons est de ré-écrire le système en termes des invariants différentiels du groupe de symétrie et d'utiliser les opérateurs différentiels invariants au lieu des dérivations par rapport aux variables indépendantes.

Le premier écueil est le calcul effectif des invariants différentiels. Pour cela nous nous basons sur la méthode du repère mobile de Fels et Olver [23]. Le second écueil provient du fait que les opérateurs différentiels invariants ne commutent pas entre eux. On sort du cadre actuel de l'algèbre différentielle et des algorithmiques existantes où la commutativité des opérateurs de dérivation est une hypothèse fondamentale. Une généralisation de l'algèbre différentielle est à établir.

L'algèbre aux différences [20] adopte un point de vue algébrique sur les équations fonctionnelles similaire à l'algèbre différentielle introduite par Ritt. Néanmoins, il n'y a pas encore d'algorithmes effectifs pour la représentation de l'ensemble des solutions. Nous aspirons à établir une théorie de l'élimination pour les équations aux différences.

3.3. Analyse des solutions singulières

Mots clés : *algèbre différentielle*, *solutions singulières*.

Un problème spécifique aux équations implicites et non linéaires en leur terme de tête est l'existence de solutions dites singulières. Les propriétés de ces solutions singulières apportent des éléments pour l'étude globale des solutions de l'équation. Néanmoins seul le cas des équations différentielles du premier ordre est relativement bien connu[26][54] : les solutions singulières, qui sont alors des fonctions algébriques, sont soit des enveloppes de solutions non singulières soit peuvent être analytiquement plongées dans une famille de solutions non singulières.

Les algorithmes de décompositions caractéristiques permettent de calculer les équations des solutions singulières. Ceci constitue donc une première étape de l'analyse des solutions singulières. Une seconde étape consiste à calculer la décomposition minimale [55][29]. Pour les équations du premier ordre, la décomposition minimale permet de trancher sur la nature des solutions singulières.

De nouvelles recherches doivent apporter des éclaircissement sur les propriétés des solutions singulières des équations d'ordre supérieur. Si ces résultats ont aussi une nature algébrique, on pourra espérer mettre au point des algorithmes pour la détermination des propriétés des solutions singulières.

3.4. Algorithmes pour les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles

Mots clés : *systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles*, *analyse algébrique*, *D-modules*, *théories formelles des systèmes d'équations aux dérivées partielles*, *intégrabilité formelle*, *involution*, *systèmes holonomes*, *solutions polynomiales et rationnelles*, *théorie du contrôle*.

Ce thème de recherche a pour but l'étude de systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles linéaires à l'aide de la théorie des D-modules (ou analyse algébrique) et des théories formelles développées par E. Cartan, C. Riquier, M. Janet et D. Spencer. La première approche utilise des techniques algébriques (anneaux d'opérateurs différentiels, modules différentiels, théorie des modules, algèbre homologique...), alors que les secondes sont plutôt basées sur la géométrie différentielle (opérateurs différentiels, variétés différentielles, espaces de jets, intégrabilité formelle, involution, groupes de Lie...). L'intérêt d'étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à l'aide de ces deux approches est qu'elles sont duales (modules différentiels-opérateurs différentiels). Cette dualité permet d'utiliser simultanément différents résultats, techniques et algorithmes qui ont été développés de manière indépendante dans ces deux approches.

Les théories formelles des équations aux dérivées partielles ont pour but d'étudier des systèmes d'équations aux dérivées partielles surdéterminés et, en particulier, de connaître la dimension de l'espace des solutions du système − séries formelles ou fonctions analytiques − sans avoir à intégrer explicitement le système (ce qui est en général impossible). Pour déterminer le degré de généralité d'une solution d'un système d'équations aux dérivées partielles, il faut pouvoir déterminer quelles sont les dérivées que l'on doit fixer à chaque ordre afin de pouvoir développer une solution en série. Ceci est possible si, à partir des équations du système, on peut connaître toutes les relations différentielles pour un ordre donné, c'est-à-dire si l'on n'obtient pas d'équations d'ordre plus bas par combinaisons différentielles des équations du système. Un tel système est appelé formellement intégrable et un développement en série peut alors être obtenu en fixant au départ des valeurs numériques pour un certain nombre de dérivées bien déterminées des variables du système. Par exemple, si l'on note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, ce n'est qu'en rendant le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = -\partial_1 u(x_1, x_2) + x_2 \; u(x_1, x_2) = 0, \\ P_2 = \partial_2 u(x_1, x_2) = 0, \end{array} \right. \tag{5}$$

formellement intégrable que l'on se rend compte que la seule solution analytique de (5) vaut

$$u(x_1, x_2) = \partial_2 P_1 - \partial_1 P_2 - x_2 \; P_2 = 0.$$

Depuis plusieurs décennies, de nombreux algorithmes permettant de rendre un système formellement intégrable ont été développés sous différentes approches par E. Cartan [18] (systèmes extérieurs), C. Riquier [53], M. Janet [30] (intégrabilité formelle), J. Ritt [55], E. Kolchin [32] (algèbre différentielle), D. Spencer [58] (intégrabilité formelle, involution)... et récemment grâce au développement des bases de Gröbner sur des anneaux d'opérateurs différentiels (pour les algèbres d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux appelées algèbres de Weyl). Ces algorithmes consistent tous à saturer le système par certaines conséquences différentielles des équations du système initial afin de le mettre sous une certaine forme canonique. Une fois que le système est rendu formellement intégrable, on peut y lire plusieurs informations importantes dont la dimension de l'espace des solutions (séries formelles ou fonctions analytiques) [18][30][53][58], déterminer les conditions de compatibilité du système différentiel inhomogène associé [30][53][58] (c'est-à-dire, faire de l'élimination différentielle), étudier la variété caractéristique, *etc*. Cependant, les liens entre ces différents algorithmes ne semblent pas encore être bien compris. De plus, l'étude de nombreuses propriétés des systèmes différentiels fait intervenir l'étude de l'intégrabilité formelle de plusieurs systèmes différentiels. Il est donc important de bien comprendre les liens entre ces différents algorithmes afin de pouvoir implanter les plus efficaces. Nous nous intéresserons à ce problème.

Dans les années 70, les travaux de B. Malgrange [34], V. Palamodov [38], M. Kashiwara [31],... ont montré comment la théorie des D-modules permettait d'obtenir de nouveaux résultats sur les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à coefficients polynomiaux ou analytiques (conditions pour la résolution d'un système différentiel inhomogène, étude des propriétés algébriques, de leurs liens avec les propriétés analytiques, de la variété caractéristique, classification des systèmes différentiels, paramétrisations des solutions, représentation intégrale des solutions, prolongement des solutions à l'intérieur ou à l'extérieur de certains domaines de $\mathbb{R}^n$, systèmes holonomes, études des solutions polynomiales ou rationnelles, b-fonctions...). L'idée centrale de cette théorie est de voir un système linéaire d'équations aux dérivées partielles comme un système d'équations linéaires à coefficients dans un anneau D d'opérateurs différentiels, c'est-à-dire comme D-module. Ainsi, on peut étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles à l'aide de la géométrie algébrique, de la théorie des modules, de l'algèbre homologique, *etc*. La théorie des D-modules a eu de profondes applications dans la théorie des groupes de Lie, la physique mathématique, l'analyse microlocale, la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, la théorie des hyperfonctions, la théorie des systèmes holonomes et des fonctions spéciales, la théorie des singularités, *etc*.

Récemment, certaines techniques de la théorie des D-modules ont été rendues effectives grâce au développement des bases de Gröbner sur des anneaux d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux (algèbres de Weyl) [36][37] ou rationnelles [19]. Les bases de Gröbner sur les algèbres d'opérateurs différentiels sont un des moyens effectifs permettant d'étudier les systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles surdéterminées (voir le premier paragraphe). L'analyse algébrique a permis de montrer les liens entre certaines propriétés structurelles d'un système différentiel sous-déterminé et celles d'un système surdéterminé correspondant à l'adjoint formel (dont la dimension de ses solutions, d'où l'intérêt du premier paragraphe) [31][38][41][43][42][40]. Ainsi, il est maintenant possible d'étudier de manière effective un système général d'équations aux dérivées partielles. Notre action autour des D-modules a pour but :

- le développement d'algorithmes effectifs basés sur les différents résultats obtenus dans la théorie des D-modules,
- de développer des algorithmes permettant de calculer les solutions polynomiales ou rationnelles de systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles,
- l'amélioration des algorithmes existants,
- d'étudier les liens entre les propriétés algébriques et les propriétés analytiques d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles (la vérification effective des premières permettant alors de déduire des informations sur les secondes),
- développer des algorithmes effectifs pour l'étude et l'analyse des systèmes de contrôle.

3.5. Aspects logiciels du calcul formel

Mots clés : *calcul formel*, *base de formules*, *base de données déductives*, *communication*, *protocole*, *OpenMath*.

L'objectif général de ce thème est l'amélioration des systèmes de calcul formel. Deux directions ont été poursuivies cette année : la conception et la mise en œuvre de bases de données de formules mathématiques et la coopération entre systèmes (échange d'objets mathématiques) avec le développement et l'utilisation d'OpenMath.

La plupart des systèmes de calcul formel intègrent tout un ensemble de connaissances non algorithmiques (déclaratives), directement dans leur code, comme les valeurs d'intégrales ou de sommes particulières. Une idée naturelle est de regrouper ces connaissances dans une base de données pour pouvoir en rajouter facilement et les partager entre plusieurs systèmes. Les bases de données classiques ne conviennent pas, car elles n'ont pas la connaissance mathématique indispensable : prise en compte de la commutativité, des éléments neutres, déterminations d'instances de formules, *etc*. La réalisation d'une telle base qui soit à la fois suffisamment efficace pour être utilisable en pratique et suffisamment puissante dans son mécanisme de recherche et de reconnaissance, pose divers problèmes qui se situent au carrefour entre les techniques et outils du calcul formel et ceux de la déduction automatique. Le prototype que nous développons se présente comme une boite à outils permettant la construction de base de formules mathématiques et des mécanismes de recherche qui lui sont associés. Différents types d'application peuvent être réalisés à partir d'une telle bibliothèque de composants.

La première application est une base de formules déductive qui traite des requêtes de la forme « sous les conditions $C_1, ...C_n$, la formule P est-elle vraie ? », où P peut contenir des variables particulières qui sont instanciées par une expression convenable dans la réponse. Cette base permet, par exemple, de répondre à des questions telles que « quelle est l'expression (une expression) qui représente la primitive d'une fonction donnée ». La réponse à une telle requête est multiple et conditionnelle : des conditions supplémentaires peuvent être données dans la réponse. La base peut ainsi répondre « P est vrai si on rajoute la condition C_{n+1} aux conditions C_i ». Les réponses sont obtenues par un processus de déduction original qui combine une unification associative-commutative entre la requête et les formules de la base (il s'agit en fait d'un cas particulier d'unification associative-commutative) et une ou plusieurs étapes qui s'apparentent à de la paramodulation (certaines des équations provenant des échecs d'unification sont résolues en utilisant la base elle-même ou un algorithme spécialisé).

La deuxième application en cours est un outil d'indexation de documents contenant des expressions mathématiques. Les documents scientifiques électroniques (livres, journaux, cours, *etc*) sont de plus en plus nombreux, et la possibilité de rechercher dans ces documents les parties contenant une formule mathématique donnée est une fonctionnalité fondamentale qui peut être implantée à l'aide d'une base de formules. Les formules mathématiques apparaissant dans le document forment les entrées de la base. À une entrée sont associées les références aux parties du document qui contiennent cette formule. Dans ce type d'application, le mécanisme de reconnaissance est moins puissant que dans le cas d'une base déductive et c'est plutôt le choix de la structure de données qui détermine les performances de la base.

La communauté de calcul formel a reconnu depuis quelques années l'importance de définir un standard pour la communication d'objets mathématiques (communication inter-processus, par courrier électronique, par archivage dans des bases de données *etc*). Un protocole de communication et d'échange d'objets mathématiques a été développé dans le cadre du projet européen *OpenMath* auquel nous avons très activement participé. Les problèmes rencontrés sont multiples et nombre d'entre eux restent à résoudre à l'issue du projet : trouver le bon niveau de définition des objets, prendre en compte la variété des applications qui peuvent utiliser un tel standard ou encore intégrer *OpenMath* avec les standards actuels ou à venir pour les documents électroniques ou la communication entre applications (XML, CORBA, DCOM/OLE...) En parallèle à la définition d'*OpenMath*, nous participons au groupe de travail sur les mathématiques du Consortium Web, qui se concentre également sur la définition d'un standard pour la présentation des formules mathématiques sur le Web. Les deux projets apparaissent comme complémentaires. Des standards dans ce domaine sont un premier pas vers la mise au point d'une nouvelle architecture pour le calcul formel et plus généralement pour le calcul scientifique au sens le plus large, architecture au sein de laquelle il sera possible d'accéder de manière uniforme à différents services et d'integrer dynamiquement de nouveaux composants.

4. Domaines d'application

4.1. Panorama

Mots clés : *multimédia*, *base de formules*, *ingénierie*, *automatique*.

La stratégie principale du projet est d'enrichir les fonctionnalités des systèmes commerciaux de calcul formel, afin de transférer nos résultats et algorithmes vers leurs utilisateurs par l'intermédiaire de ces systèmes. Du point de vue de la recherche, nous envisageons d'étudier les applications possibles suivantes :

- Automatique :

- Le problème de la *platitude* des systèmes de contrôle non-linéaires est apparu en automatique à la fin des années 90. Il s'intéresse à la possiblité de trouver un bon système de coordonnées dans lequel un système de contrôle non-linéaire est équivalent à un système linéaire contrôlable (problème de linéarisation par feedback). Ce problème revient à savoir quand un système non-linéaire sous-déterminé d'équations différentielles peut être *paramétrisé* par un opérateur différentiel injectif. L'existence de ce problème remonte à des travaux de D. Hilbert et E. Cartan sur l'équivalence des systèmes et constitue un des problèmes difficiles de l'automatique de ces dernières années. Il a été longuement étudié par l'équipe de M. Fliess (CNRS, ENS Cachan) et par le projet MIAOU à l'INRIA[39]. Aucun test effectif de platitude n'est actuellement connu pour les systèmes différentiels non-linéaires. On a seulement pu prouver au cas par cas que certaines classes de systèmes étaient plates, dont certaines classes de systèmes mécaniques. Un problème difficile est donc de savoir reconnaître quand un système est plat et de calculer de manière effective ses paramétrisations. Cependant, on sait que la recherche d'une paramétrisation d'un système à un ordre donné revient à l'étude de l'intégrabilité formelle d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, la platitude des systèmes de contrôle est lié à l'étude de l'intégrabilité formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles.
- Depuis quelques années, la théorie des D-modules a été utilisée dans l'étude des *systèmes de contrôle linéaires multidimensionnels* (systèmes à retards, équations aux dérivées partielles...). De nouveaux algorithmes effectifs ont été obtenus pour vérifier certaines propriétés structurelles (contrôlabilité, platitude, observabilité, pôles et zéros, équivalences...) de ces systèmes ainsi que pour leur analyse (placement de pôles, commande optimale, commande robuste...). Voir [41][43][42][40] ainsi que leurs références.

- Analyse numérique : détermination de l'index d'un système différentio-algébrique, recherche de conditions initiales cohérentes.
- Bases de données mathématiques : consultation de formulaires mathématiques sur Internet.

5. Logiciels

5.1. Bibliothèque diffalg

Participante : Evelyne Hubert.

Mots clés : *systèmes différentiels non linéaires*, *élimination différentielle*, *algèbre différentielle*, *algorithme de triangulation-décomposition*, *solutions singulières*.

La bibliothèque *diffalg* fait partie du logiciel commercial de calcul formel MAPLE. Cette bibliothèque a initialement été développée en 1996 par François Boulier (à présent membre du LIFL), pour MAPLE V.5. Le développement a par la suite été repris par Evelyne Hubert pour les versions ultérieures de MAPLE.

La bibliothèque *diffalg* implante un algorithme de décomposition caractéristique pour les systèmes différentiels (systèmes d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles) ainsi que des outils pour l'analyse des solutions singulières d'équations différentielles non linéaires.

De nouveaux projets de développement ont été établis avec François Lemaire, actuellement membre du *Ontario Research Center in Computer Arlgebra*, lors de sa visite.

5.2. Bibliothèque Dmod de Mgfun

Participants : Frédéric Chyzak, Alban Quadrat [correspondant].

Mots clés : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires*, *D-modules*, *paramétrisations des systèmes sous-déterminés d'équations aux dérivées partielles*, *physique mathématique*, *systèmes linéaires multidimensionnels*.

En collaboration avec F. Chyzak (ALGO), une bibliothèque *Dmod* de *Mgfun* est en cours de développement sous Maple. Cette bibliothèque permet déjà d'étudier les systèmes sous-déterminés d'équations aux dérivées partielles linéaires (classification de certaines propriétés des D-modules associés aux systèmes), de calculer de manière effective les éléments autonomes ou les paramétrisations des solutions des systèmes, de découpler certaines variables du système ou de calculer des identités de Bézout généralisées. Ces résultats sont basés sur des algorithmes effectifs développés dans [41][43][42][22]. De nombreux exemples de la physique mathématique (élasticité linéaire, électromagnétisme, hydrodynamique, équations d'Einstein linéarisées, structures de Poisson et champs de vecteurs hamiltoniens, systèmes mécanique holonomes ...) ainsi que de l'automatique linéaire (systèmes de contrôle multidimensionnels, systèmes différentiels variant dans le temps (coefficients polynomiaux ou rationnels), systèmes différentiels à retards, équations aux dérivées partielles, contrôlabilité, platitude, suivi de trajectoire ...) ont déjà été étudiés grâce à cette librairie. Le calcul effectif des solutions rationnelles (polynomiales ou exponentielles) des systèmes d'équations différentielles sous-déterminées ainsi que la généralisation des précédents algorithmes pour les algèbres de Ore est actuellement en cours.

5.3. Bibliothèque libaldor

Participant : Manuel Bronstein.

Mots clés : *Aldor*, *standard*, *structures de données*.

La bibliothèque LIBALDOR, développée depuis plusieurs années dans le projet (anciennement sous le nom SALLI) est devenue la bibliothèque standard pour le langage ALDOR, et fait partie de la distribution officielle du compilateur ALDOR. Nous en avons assuré la maintenance en 2002, et avons produit la version 1.0.1, qui consiste à des réparations et ajouts mineurs basés sur des remarques d'utilisateurs.

5.4. Bibliothèque Algebra

Participants : Manuel Bronstein [correspondant], Marc Moreno-Maza, Julien Ohler.

Mots clés : *calcul formel*, *algèbre linéaire*, *algèbre commutative*, *polynômes*.

La bibliothèque ALGEBRA est une nouvelle bibliothèque de calcul formel en ALDOR, écrite en collaboration avec Marc Moreno-Maza du LIFL (UWO, London, Ontario). Elle se compose de l'ancien noyau d'algèbre commutative et d'algèbre linéaire de la bibliothèque Σ^{it} (cf. 5.5) et d'une nouvelle implémentation de polynômes multivariés par Marc Moreno-Maza. Tout comme la bibliothèque LIBALDOR (cf. 5.3) dont elle est une extension, la bibliothèque ALGEBRA fait partie de la distribution officielle du compilateur ALDOR. Nous en avons assuré la maintenance en 2002, et avons produit la version 1.0.1, qui consiste à des réparations et ajouts mineurs basés sur des remarques d'utilisateurs et les besoins des stagiaires Amit Gupta et Julien Ohler, qui l'ont utilisée comme plate-forme pour leur travaux.

5.5. Bibliothèque Σ^{it}

Participant : Manuel Bronstein.

Mots clés : *calcul formel*, *équations différentielles*, *équations aux différences*, *systèmes d'équations*.

La bibliothèque Σ^{it} incorpore nos algorithmes de résolution d'équations fonctionnelles. Elle continue à être développée dans le projet. La contribution principale en 2002 a été l'implémentation de nouveaux résolveurs pour le calcul des solutions radicales (cad dont une puissance positive est une fonction rationnelle) et exponentielles (cad dont la dérivée logarithmique est une fonction rationnelle) d'équations différentielles scalaires d'ordre arbitraire. Les algorithmes correspondants sont en cours de rédaction. Au dessus de ces résolveurs, nous avons implémenté la factorisation, la décomposition et le calcul du socle de Loewy pour les équations différentielles et aux différences d'ordre 2 et 3. Ces nouvelles fonctionalités font partie des versions 2002 des logiciels interactifs Bernina et Shasta, serveurs permettant de manipuler et de résoudre les équations et systèmes différentiels et aux différences finies. La nouvelle implémentation des solutions exponentielles a permis d'accélerer notre service web de résolution d'équations différentielles du second ordre basé, utilisable à http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/sumit/bernina_demo.html.

6. Résultats nouveaux

6.1. Algorithmes pour les équations linéaires ordinaires

Participants : Raphaël Bomboy, Manuel Bronstein, Amit Gupta, Alban Quadrat, Jacques-Arthur Weil.

Mots clés : *équations différentielles*, *équations aux différences*, *systèmes*, *D-modules*, *paramétrisations*, *courbes algébriques*.

Systèmes différentiels linéaires

En collaboration avec B.M. Trager (IBM Research), nous avons développé un nouvel algorithme direct pour transformer un système différentiel linéaire dont toutes les singularités dans le plan affine sont régulières, en un système équivalent à poles simples. Cette méthode, qui est une alternative globale et efficace à la réduction de Moser [15][35] permet le calcul des exposants de tes systèmes à toutes leurs singularités affines, ce qui permet en particulier le calcul rapide de leurs solutions rationnelles. Des implémentations prototypes en Maple et Aldor ont été réalisées par le stagiaire Amit Gupta (IIT Delhi). Ces travaux ont été présenté au séminaire Kolchin (New York, novembre 2002) et ont été soumis à publication.

Applications aux courbes algébriques

Le calcul des propriétés topologiques (genre, composantes irréductibles,...) d'une courbe algébrique plane peut se réduire à l'étude d'un opérateur différentiel linéaire qui lui est associé[21]. Durant 2001, nous avions remarqué qu'il était nettement plus efficace d'associer un système différentiel linéaire à une courbe qu'un opérateur scalaire. Puisque de tels systèmes sont toujours réguliers, nous avons cette année adapté notre algorithme de calcul des exposants de tels systèmes (voir paragraphe précédent) au calcul des composantes irréductibles de la courbe et de leur genres. Ces travaux, implémentés pour le calcul du genre en Maple et Aldor par le stagiaire Amit Gupta (IIT Delhi) ont permis d'obtenir un programme compétitif avec les méthodes classiques basées sur le polygone de Newton. Nous étudions maintenant un calcul semi-numérique des exposants, qui apparaissent comme valeurs propres d'une matrice diagonalisable.

Systèmes sous-déterminés d'équations différentielles linéaires

Un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires est dit *sous-déterminé* si l'espace de ses solutions dépend d'un nombre non nul de fonctions arbitraires ou, de manière équivalente, si le système est défini par une matrice rectangulaire d'opérateurs différentiels contenant plus de colonnes que de lignes. Par exemple, cette classe de systèmes est étudiée en automatique linéaire, physique mathématique, géométrie différentielle ou en mécanique non-holonome. Un système d'EDO linéaires est dit *déterminé* si l'espace de ses solutions ne dépend que d'un nombre fini de constantes ou, de manière équivalente, si le système est défini par une matrice d'opérateurs différentiels ayant le même nombre de fonctions inconnues que d'équations différentiellement indépendantes. Ainsi, un système déterminé d'EDO linéaires est un cas particulier d'un système sous-déterminé.

Depuis plusieurs années, le calcul effectif des solutions rationnelles (polynomiales ou exponentielles) de systèmes déterminés d'EDO linéaires a été abondamment étudié dans la littérature et, en particulier, par S. A. Abramov, M. A. Barkatou et M. Bronstein. Ce problème joue un rôle important en théorie de Galois différentielle et dans l'étude des factorisation d'opérateurs différentiels.

Il était donc naturel d'essayer de comprendre comment l'on pouvait généraliser les travaux précédents au cas des systèmes sous-déterminés d'EDO linéaires. En utilisant des résultats sur les paramétrisations et les identités de Bézout des systèmes des équations aux dérivées partielles (EDP) obtenus dans [41][43][42], nous avons récemment pu montrer comment le calcul des solutions rationnelles (polynomiales ou exponentielles) d'un système sous-déterminé d'EDO linéaires se ramène au cas d'un système déterminé. En particulier, en utilisant les algorithmes effectifs développés dans [41][43][42], nous avons obtenus un algorithme permettant de calculer toutes les solutions rationnelles (polynomiales ou exponentielles) d'un système déterminé d'EDO linéaires. La rédaction de ces différents résultats est en cours. De plus, la programmation sous Maple de ces différents algorithmes est actuellement en développement dans la bibliothèque *Dmod* de *Mgfun*. Pour cela, nous utilisons le package `Bernina` développé dans le projet.

Notons que la recherche des solutions d'un système sous-déterminé d'EDO linéaires a des applications dans l'étude de la contrôlabilité d'un système de contrôle non-linéaire au voisinage d'une trajectoire rationnelle donnée.

Finalement, deux extensions de ces travaux sont étudiées. La première consiste à étendre les résultats précédents à certaines classes (à déterminer) de systèmes sous-déterminés d'EDP linéaires. Cette étude utilise des résultats d'analyse algébrique développés dans [41][43][42]. La seconde, plus difficile, est l'étude du *Problème de Monge* [59], c-à-d de reconnaître quand il est possible de paramétriser toutes les solutions d'un système sous-déterminé d'EDP non-linéaires. Ce problème a été étudié en mathématique ainsi qu'en automatique (platitude des systèmes de contrôle, linéarisation dynamique par feedback) [39] dans le cas des systèmes d'EDO non-linéaires. Certains résultats récents de M. Gromov montrent comment, dans certaines situations, il est possible d'obtenir les solutions du système d'EDP non-linéaire à partir des solutions du système linéarisé ou d'en assurer l'existence grâce à une extension du théorème des fonctions implicites (théorème de Nash-Moser) [25]. Par exemple, ces techniques permettent d'étudier des exemples de systèmes sous-déterminés d'EDP non-linéaires venant de différents problèmes de géométrie différentielle ou de mathématique physique (par exemple, le problème du plongement isométrique d'une variété riemanienne dans un espace euclidien ou l'étude des structures de Poisson et des champs de vecteurs hamiltoniens) [25].

6.2. Algorithmes pour les systèmes non linéaires

Participants : Evelyne Hubert, Nicolas Le Roux.

Mots clés : *algèbre différentielle*, *systèmes différentiels*, *ensembles triangulaires*, *élément primitif différentiel*, *invariants différentiels*, *systèmes symétriques*.

Triangulation-décomposition des systèmes polynomiaux et différentiels

L'étude approfondie des algorithmes de triangulation-décomposition pour les systèmes polynomiaux et différentiels de ces dernières années a abouti à la rédaction de deux chapitres de livre. Ces chapitres présentent des notes didactiques qui couvrent de manière uniforme les systèmes différentiels et polynomiaux. Elles présentent tout le matériel algébrique nécessaire à la conception d'algorithmes dans le domaine et rassemblent les preuves détaillées de ces résultats. Elles présentent également de façon académique une sélection des algorithmes les plus intéressants avec leur preuve. C'est donc à la fois un texte de base pour les étudiants et une référence précise pour les experts. Une section rassemble cinq exemples d'applications différentes des algorithmes de triangulation-décomposition des systèmes différentiels. Ces deux chapitres paraitront dans la collection *Symbolic and Numerical Scientific Computing* dont les rédacteurs sont F. Winkler et U. Langer et édité par Springer-Verlag.

Calcul rapide des séries solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles

Dans le cadre du projet de DEA de Nicolas Le Roux nous avons étudié une méthode originale pour le calcul des solutions d'un système d'équations différentielles. Le système est supposé être *différentiellement triangulaire* et *cohérent*, ce qui est le cas des systèmes en sortie d'un algorithme de triangulation décomposition. Pour ces systèmes on peut déterminer des conditions initiales non singulières pour lesquelles il y a existence et unicité de la solution (ils sont donc *formellement intégrable*). Les algorithmes de calcul de la solution actuellement implantés dans la bibliothèque *diffalg* et sa concurrente *rif* reposent sur un processus relativement naïf de dérivation et d'évaluation. La nouvelle méthode proposée est une méthode de type Newton : on utilise le linéarisé pour calculer les coefficients des termes de degré inférieur au double du degré des termes déjà calculés. Une première implantation a montré que cette méthode est particulièrement adaptée pour les conditions initiales spécifiées, les autres implantations ne fonctionnant que pour des conditions initiales génériques.

Repère mobile et systèmes différentiels symétriques
Nous avons exploré quelques liens entre la théorie classique des invariants algébriques et celle du repère mobile. Récemment Harm Derksen, University of Michigan, a montré un algorithme général pour le calcul des invariants polynomiaux pour les groupes réductifs. La similitude en terme de calcul de la méthode du repère mobile et celle de Derksen mérite d'être explorée.
Systèmes différentiels généralisés
Dans le cadre de la collaboration avec Gregory Reid nous essayons de généraliser les algorithmes de triangulation-décomposition au cas ou il y a une fonction inconnue des variables dépendantes. Pour illustration, la question suivante se pose naturellement : quelles sont les fonctions f pour lesquels le système constitué de l'équation $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(u)$ et de la contrainte $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$, a-t-il une solution.

6.3. Systèmes d'équations aux dérivées partielles de type fini

Participants : Manuel Bronstein, Sunayana Ghosh, Alban Quadrat, Jacques-Arthur Weil, Min Wu.

Mots clés : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles de type fini*, *solutions polynomiales ou rationnelles*, *analyse algébrique effective*, *D-modules*, *variétés algébriques*.

Dans les années 80, l'analyse algébrique a permis de dégager une classe importante de systèmes d'EDP linéaires à coefficients polynomiaux ou analytiques, appelés *systèmes holonomes* ou *modules holonomes*. En dehors des singularités, les systèmes holonomes se comportent comme un *système de type fini* (ou D-finis), c-à-d leurs solutions formelles ne dépendent que d'un nombre fini de constantes. Rappelons qu'en général les solutions formelles d'un système d'EDP dépendent d'un certain nombre de fonctions arbitraires des variables indépendantes du système. Ces fonctions arbitraires correspondent aux conditions initiales que l'on doit se fixer pour obtenir une solution formelle. Ainsi, les systèmes holonomes ou de type fini constituent la classe d'EDP la plus proche des systèmes d'EDO. De tels systèmes se rencontrent en géométrie différentielle (groupes de Lie) ou dans l'étude des fonctions spéciales (voir les travaux de F. Chyzak et B. Salvy du projet ALGO).

Afin de pouvoir intégrer ou sommer des fonctions spéciales, F. Chyzak et B. Salvy ont été amenés à étudier les solutions polynomiales ou rationnelles des systèmes d'EDP de type fini. En collaboration avec eux, nous avons essaye de développer des algorithmes permettant de calculer de telles solutions pour les systèmes d'EDP holonomes. En particulier, nos résultats sur les systèmes ordinaires sous-détèrminés (cf. 6.1). ont été en grande partie développés dans ce but.
Applications aux variétés algébriques
De même que le calcul des propriétés topologiques d'une courbe algébrique plane peut se réduire à l'étude d'un opérateur ou système différentiel linéaire (cf. 6.1), l'étude des propriétés de variétés algébriques de dimension arbitraire peut se ramener à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles de type fini. Lors de son stage, Sunayana Ghosh a calculé le nombre de composantes irréductibles d'une hypersurface algébrique en calculant la dimension de l'espace des solutions rationnelles du système d'EDP associé, et vérifié que le résultat de [21] sur le nombre de composantes irréductibles d'une courbe se généralisait correctement aux hypersurfaces.

6.4. Analyse des systèmes multidimensionnels $\&$ Algèbres de Ore

Participant : Alban Quadrat.

Mots clés : *Théorie des systèmes*, *systèmes multidimensionnels*, *approche comportementale*, *analyse algébrique*, *algèbres de Ore*, *bases de Janet*, *intégrabilité formelle*, *systèmes involutifs*.

Un *système multidimensionnel* est un système dans lequel les informations se propagent dans plusieurs directions indépendantes. Ainsi, les systèmes dynamiques, évoluant dans la seule direction du temps (continu ou discret), sont les exemples les plus simples de systèmes multidimensionnels. Ces systèmes ont longuement été étudiés en théorie des systèmes, automatique, traitement du signal ou traitement d'images. Ils forment une classe de systèmes allant des systèmes d'EDO ou d'EDP jusqu'aux systèmes différentiels à retards, codes convolutifs ou filtres multidimensionnels. La théorie des systèmes multidimensionnels essaie d'unifier cette variété de systèmes à l'aide de concepts ou d'outils communs. Toutefois, ils sont souvent supposés linéaires et invariants dans chacune des directions indépendantes (c-à-d à coefficients constants). *L'approche comportementale* (behavioural approach) des systèmes linéaires multidimensionnels, principalement développée par J. C. Willems et son école, consiste à identifier un tel système à l'ensemble de ses trajectoires (*behaviour*) sans distinction initiale entre les entrées et les sorties du système.

Dans [22], nous avons pu préciser certains résultats de U. Oberst sur la dualité entre les approches par la théorie des modules (analyse algébrique) et comportementale pour certaines classes de systèmes linéaires multidimensionnels. De plus, nous avons caractérisé de manière effective le concept de *contrôlabilité*. Récemment, l'utilisation de certains résultats de B. Malgrange nous a permis de lier la contrôlabilité d'un système linéaire multidimensionnel (défini par des EDP à coefficients constants) à la possibilité de prolonger les trajectoires d'un certain système sur-déterminé (adjoint formel du système). Ainsi, un critère purement géométrique (borne sur la dimension de la variété caractéristique) a pu être obtenu pour vérifier cette propriété. Ces résultats sont en cours de rédaction dans un article.

En collaboration avec D. Robertz (université de Aachen), nous allons prochainement étudier comment étendre le concept de *bases de Janet* pour des *algèbres de Ore* (algèbres non-commutatives d'opérateurs fonctionnels tels que les opérateurs différentiels, aux différences, à retards, aux q-différences ...). Rappelons que les bases de Janet ont été développées dans les années 1920 afin d'obtenir des formes normales pour les systèmes d'EDP quasi-linéaires. Ensuite, il nous semble possible de généraliser la théorie formelle des EDP, développée par D. C. Spencer (intégrabilité formelle, système en involution, bases de Janet involutives ...) [58], à certaines algèbres de Ore en utilisant une approche algébrique (filtrations, graduations, morphismes stricts, polynômes de Hilbert, complexe de Kozsul, suites régulières ...). Finalement, certains résultats d'analyse algébrique (D-modules), développés dans [41][43][42], semblent aussi généralisables à certaines classes d'algèbres de Ore. L'intérêt de telles études est double. Tout d'abord, nous ne disposons actuellement que des bases de Gröbner pour étudier de manière effective les systèmes linéaires définis sur des algèbres de Ore. Ainsi, ces études nous permettraient de disposer de nouveaux outils théoriques et effectifs (développement de packages sous Maple) pour l'étude de tels systèmes (par exemple, pour l'étude des fonctions spéciales). Finalement, les systèmes sur des algèbres de Ore se recontrent dans l'étude des systèmes multidimensionnels tels que les systèmes hybrides, répétitifs ou les codes convolutifs. Ainsi, cette généralisation permettrait d'étendre la classe de systèmes multidimensionnels étudiés avec des concepts et outils communs.

6.5. Stabilisation des systèmes linéaires de dimension infinie

Participant : Alban Quadrat.

Mots clés : *Stabilisation*, *systèmes linéaires de dimension infinie*, *analyse algébrique*.

Ces recherches ont pour but l'étude des *systèmes linéaires de dimension infinie*, c'est-à-dire de certaines classes de systèmes de contrôle linéaires d'équations aux dérivées partielles (équations des ondes, de la chaleur, d'Euler-Bernouilli ...) ou différentiels à retards (équations de transport, les lignes de transmissions ...) à l'aide d'approches algébriques (algèbre commutative, théorie des modules, bases de Gröbner ...). Une approche classique par les modules différentiels (modules sur un anneau d'opérateurs différentiels) ne permet pas (encore) de prendre en compte les conditions initiales des systèmes ou les contrôles/observations s'appliquant sur le bord du domaine. Pour résoudre ce problème, l'utilisation du calcul symbolique (via la transformée de Laplace et l'intégration symbolique) permet de transformer le système en une matrice de transfert reliant les entrées aux sorties du système, c-à-d d'obtenir des relations fonctionnelles entre les entrées et les sorties (par exemple, matrices à coefficients dans les quasi-polynômes en s et e^{-s}). L'utilisation de la *représentation fractionnaire des systèmes* permet alors l'utilisation de la théorie des modules sur certains anneaux particuliers (par exemple $\mathbb{R}[s,\ e^{-s}]$, $\mathcal{E}$, $\hat{A}$, RH_∞, $H_\infty(\mathbb{C}_+)$) [52]. Grâce à cette approche, nous avons récemment pu obtenir de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de contrôleurs qui, en boucle fermée, permettent de stabiliser de manière interne les systèmes instables (infinités de pôles instables), d'obtenir une paramétrisation de tous les contrôleurs stabilisants (généralisation de la paramétrisation de

Youla-Kučera à tout système stabilisable) ainsi qu'une forme canonique permettant d'étudier la stabilisation forte (existence d'un contrôleur stable) ou simultanée (existence d'un contrôleur qui stabilise une famille de systèmes). Une grande partie de ces résultats a été obtenue lors du postdoctorat de A. Quadrat à l'université de Leeds (Angleterre) et a été rédigée à l'INRIA de Sophia Antipolis. Ces résultats ont été présentés dans [44][45][46][50][51][48][49][47]. Une première implantation sous Maple des différents algorithmes est actuellement en étude pour une classe de systèmes différentiels à retards particulièrement étudiée depuis plusieurs années dans la littérature (voir [24] ainsi que ses réferences). Ce travail va se faire en collaboration avec J.J. Loiseau (CNRS/IRCCyN) et C. Bonnet (INRIA SOSSO).

6.6. Séquences aléatoires, codage et cryptographie

Participants : Manuel Bronstein, Julien Ohler, Patrick Solé.

Mots clés : *Séquences*, *récurrences*, *cryptographie*, *sécurité*.

En collaboration avec P. Gaborit (Limoges), nous avons étudié un analogue polynomial du cryptosystème NTRU, appelé CTRU. Un prototype de ce nouveau cryptosystème a été implémenté en Aldor par Julien Ohler ainsi qu'une attaque sur clé basée sur la forme de Popov de matrices de polynômes. Dans le cadre de l'action COLOR Pseudo-aléatoire, nous avons étudié la périodicité de séquences linéaires générées sur un corps fini par une récurrence à coefficients polynomiaux, et avons soumis ces résultats à publication.

7. Contrats industriels

7.1. IBM

Participants : Manuel Bronstein, Patrick Solé.

Ce contrat détude conjointe a pour objet la construction de codes algébriques sur des surfaces de Riemann définies par des fonctions θ, plus précisément la construction d'encodeurs algébriques qui codent des données numériques en signaux qui ont des paramètres θ prescris. Ce contrat, signé par IBM, est en attente de signature par l'INRIA.

7.2. Seagate

Participants : Manuel Bronstein, Julien Ohler.

Ce contrat de 3 mois a eu pour objet le portage d'un logiciel de génération de code VHDL appartenant à Seagate depuis le système de calcul formel Axiom vers la bibliothèque ALGEBRA (cf. 5.4) du projet. Ce portage a été réalisé par Julien Ohler en 2002, mais le contrat est toujours en attente de signature par Seagate.

8. Actions régionales, nationales et internationales

8.1. Actions nationales

8.1.1. Accueils de chercheurs français

Bernard Malgrange, membre de l'Académie française, a été l'hôte de l'équipe MIAOU et CAFE du 15 septembre au 15 octobre. Il a professé deux séries de cours (cf. 9.1). Dans le cadre du séminaire CAFÉ et de nos collaborations nationales, nous avons reçu les visites d'Eduardo Corel (Lille, 3 jours en mars 2002), de Frédéric Chyzak (INRIA Rocquencourt, 5 jours en avril 2002), d'Anne Frédet (Polytechnique, 5 jours en avril 2002), de Marc Moreno Maza (Lille, 2 jours en juillet 2002), de Guy Casale (Toulouse, 5 jours en octobre 2002) et de Jean-François Pommaret (ENPC, 1 jour en novembre 2002). Dans le cadre du coencadrement par J.A. Weil (CAFÉ) et M. Barkatou (Limoges) de la thèse de Thomas Cluzeau, nous l'avons reçu dans le projet pour 3 périodes de 2 semaines durant 2002.

A. Quadrat participe régulièrement au Groupe de Travail (GT) « Systèmes à Retards » du GdR Automatique ainsi qu'aux réflexions sur les aspects logiciels pour les systèmes à retards (un des deux axes prioritaires de ce GT).

8.2. Actions européennes

8.2.1. OpenMath

Participants : Stéphane Dalmas, Marc Gaëtano.

CAFÉ continue sa participation au réseau thèmatique *OpenMath* (IST-2000-28719) qui a débuté ses travaux en juillet 2002, pour trois ans. Ce réseau fait suite au projet intitulé *OpenMath : Accessing and Using Mathematical Information Electronically* (IST 24.969) qui s'etait terminé fin août 2000. L'objectif est de continuer à développer et promouvoir OpenMath, un standard pour la communication d'objets mathématiques.

8.2.2. PAI Polonium

En collaboration avec l'équipe du Prof. K. Galkowski de l'université de Zielona Gora (Pologne), K. Avratchenkov (MISTRAL), P.A. Bliman (SOSSO) et A. Quadrat (CAFE) ont participé à la candidature d'une Action Intégrée Polonium, intitulée « Theory and applications of n-dimensional systems, delay systems and iterative learning control ». Cette proposition a été retenue et l'action commencera en 2003.

8.2.3. European training site

Sous la direction de A. Quadrat, Daniel Robertz de l'université de Aachen (Allemagne) a proposé un dossier « Computational methods in linear control systems » au Control Training Site (financement européen pour le déplacement de jeunes doctorants). Ce dossier a été accepté et permettra à Daniel Robertz de venir travailler trois mois chez CAFE durant 2003.

8.3. Actions internationales hors CE

8.3.1. Fonds France-Canada pour la Recherche

Le Fonds France-Canada pour la Recherche soutient une collaboration entre Evelyne Hubert et Gregory Reid, Ontario Research Center for Computer Algebra, et Allan Wittkopf, Maplesoft et Centre for Experimental and Constructive Mathematics in Vancouver. Le but est d'établir des algorithmes de triangulation-décomposition pour les systèmes différentiels où apparaissent une fonction arbitraire des variables dépendantes.

8.3.2. Institut Liapunov

Nous avons continué à collaborer avec S.A. Abramov (Moscou) dans le cadre du projet Liapunov *Équations linéaires aux (q)-différences à coefficients (q)-hypergéométriques*, dont l'objectif est le développement et l'implantation d'algorithmes efficaces pour la manipulation et la simplification de termes (q)-hypergéométriques, ainsi que pour le calcul de solutions en forme close d'équations aux (q)-différences linéaires dont les coefficients contiennent de tels termes. Ces travaux se font aussi en collaboration avec M. Petkovšek (Ljubljana).

8.3.3. PRA franco-chinois

Nous avons continué à collaborer avec Z. Li (Academia Sinica) dans le cadre du projet *Algorithmes efficaces pour polynômes de Ore* soutenu par le Programme de Recherche Avancées franco-chinois de l'AFCRST. Cette collaboration s'est intensifiée avec la thèse en co-tutelle de Min Wu, qui alterne des séjours de 6 mois dans le projet CAFÉ et de 6 mois à Pékin depuis septembre 2002.

8.4. Réseaux et groupes de travail internationaux

8.4.1. Groupe de travail sur les mathématiques du W3C

Stéphane Dalmas est membre du groupe de travail sur les mathématiques du World Wide Web Consortium (W3C), mis en place en juin 2002.

8.5. Accueils de chercheurs étrangers

8.5.1. Europe (CEE)

Dans le cadre du séminaire CAFÉ, nous avons reçu les visites d'Olivier Cormier (1 jour en octobre 2002) et de Preda Mihailescu (1 semaine en décembre 2002), tous deux de l'université de Parderborn (Allemagne).

8.5.2. Europe (hors-CEE)

Dans le cadre de notre projet Liapunov (cf. 8.3.2), nous avons reçu Sergei Abramov (Université de Moscou) et ses étudiants D. Khmelnov et A. Mitichkina pour une semaine en mai 2002. Marko Petkovšek (Ljubljana) nous a aussi rejoint pour une journée durant cette semaine. Collaborateur : M. Bronstein : résolution de systèmes fonctionnels linéaires, et équations aux différences à coefficients hypergéométriques.

8.5.3. Amérique du Nord

Peter Olver, University of Minnesota : 3 jours en mai. Collaboratrice : Evelyne Hubert. Voir également la section 9.1.

Gregory Reid, Ontario Research Center in Computer Algebra : 2 semaines à cheval sur juin et juillet, dans le cadre de la collaboration France-Canada (cf. 8.3.1). Collaboratrice : Evelyne Hubert.

François Lemaire, Ontario Research Center in Computer Algebra : 2 jours en juillet. Collaboratrice : Evelyne Hubert. Futurs développements de la bibliothèque *diffalg*.

Irina Kogan, Yale, Connecticut : 1 jour en juillet. Collaboratrice : Evelyne Hubert. Méthode du repère mobile et systèmes différentiels symétriques.

Martin Hassner (IBM Almaden, USA) : 1 jour en septembre 2002. Collaborateurs : M. Bronstein et P. Solé, étude conjointe sur les codes algébriques (cf. 7.1)

Stephen Watt (UWO, Canada) : 3 jours en décembre 2002. Collaborateur : M. Bronstein, bibliothèques de calcul formel en `Aldor`.

9. Diffusion des résultats

9.1. Animation de la communauté scientifique

- Evelyne Hubert a été élue au conseil d'administration de l'association Femmes et Mathématiques en juin 2002.
- Evelyne Hubert est membre du Comité du Suivi Doctoral, une émanation du Comité des Projets de l'UR, depuis mars 2001. Pour ce comité, elle a mis en place le un séminaire expérimental pour les doctorants de deuxième année de l'UR.
- Evelyne Hubert a animé un groupe de travail sur l'involution des systèmes différentiels auquel ont participé des membres des projets GALAAD, MIAOU, ICARE et CAFE.
- Evelyne Hubert a invité trois séries de cours, sur le site de l'UR, par des chercheurs de grande réputation :

Peter Olver, University of Minnesota, a professé en mai 2002 trois cours sur le thème *Moving Frames. Construction of invariants and applications to object recognition in computer vision and to symmetry-preserving numerical algorithms.* Ce cours a été suivi par les chercheurs et étudiants des projets CAFE, GALAAD et MIAOU mais aussi PRISME, ICARE, CHIR, EPIDAURE et ROBOTVIS.

Bernard Malgrange, Institut Fourier, a professé quatre cours sur les *systèmes différentiels en involution*. Outre les chercheurs et étudiants des projets GALAAD, MIAOU, PRISME et CAFE, ces cours ont attiré des chercheurs de l'INLN (Sophia) et du laboratoire Dieudonné (Nice). Ce cours était l'aboutissement naturel de notre groupe de travail Involution.

Bernard Malgrange, Institut Fourier, a professé quatre cours sur la *Théorie de Galois pour les systèmes différentiels non linéaires*. Ce cours, à la confluence des thématiques du projet CAFE, nous a permis de découvrir de nombreux outils pour l'analyse et de nouveaux thèmes à explorer du point de vue du calcul formel.

- Alban Quadrat a fait partie du comité de lecture de la journée « Représentation diffusive et applications », LASS (CNRS), Toulouse (24/10/02).
- M. Bronstein a participé à la section d'audition de l'INRIA Rocquencourt du concours CR2 (2002) ainsi qu'au jury d'admissibilité du concours INRIA DR1 externe (2002).
- M. Bronstein est membre de l'ILC (Industrial Liaison Committee), commission de conseil et de pilotage du centre de recherche ORCCA (Ontario Research Centre for Computer Algebra) et a participé à sa réunion annuelle, qui a eu lieu à London (Ontario) du 20 au 23 mai 2002.
- M. Bronstein est membre du comité de lecture du *Journal of Symbolic Computation*.
- J.A Weil a animé avec G. Villard l'action spécifique 46 (Calcul formel) du département Stic du CNRS (prospective, animation scientifique, et stimulation des interactions avec d'autres domaines).

9.2. Enseignement universitaire

- F. Boulier (Lille) et M. Bronstein (CAFÉ) ont enseigné en 2001/2002 un module « Équations différentielles » dans la filière « Calcul formel » du DEA X-ENS d'algorithmique (20h).
- Evelyne Hubert a présenté un cours pratique de Calcul Formel à l'occasion de l'Immersion Mathématique et Informatique des étudiants de deuxième année de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (organisé par Serge Piperno).
- E. Hubert assure la formation Informatique et Calcul Formel de classes préparatoires scientifiques au Centre International de Valbonne (55h).
- Alban Quadrat a donné un cours intitulé « An introduction to algebraic analysis with effective applications to linear control systems » (6 heures) à l'université de Aachen (Allemagne).
- Alban Quadrat a donné un cours « An introduction to internal stabilization of linear infinite dimensional systems » (1 heure) à l'école internationale d'automatique de Lille « Control of Distributed Parameters Systems : Theory and Applications », Ecole Centrale de Lille (02-06/09).

9.3. Thèses et Stages

Thèses en cours dans le projet :

1. Nicolas Le Roux, Université de Limoges : *Étude locale des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Thèse co-encadrée par Moulay Barkatou, Professeur à l'université de Limoges, et Evelyne Hubert.
2. Min Wu, UNSA et Academia Sinica (Pékin) : *Factorization of systems of linear partial differential equations*, thèse en co-tutelle, co-encadrée par Ziming Li (Academia Sinica) et Manuel Bronstein.

Stages effectués dans le projet :

1. Sunayana Ghosh, stage IIT Bombay, « Composantes irréductibles d'hypersurfaces », encadré par Manuel Bronstein.
2. Amit Gupta, stage IIT Delhi, « Calcul du genre d'une courbe algébrique », encadré par Manuel Bronstein.
3. Nicolas Le Roux, projet de DEA de l'université de Limoges : « Calcul rapide de la série solution d'un système d'équations aux dérivées partielles. », encadré par Evelyne Hubert.
4. Sébastien Marti, stage ingénieur, « Développement d'une interface graphique pour logiciels de calcul symbolique », co-encadré par Manuel Bronstein et Laurence Rideau (Lemme).
5. Julien Ohler, stage de maîtrise de l'université de Toulon : « Calcul du genre d'une courbe algébrique », co-encadré par Manuel Bronstein et Patrick Solé.

9.4. Participation à des colloques, séminaires, invitations

R. Bomboy a présenté ses travaux sur la factorisation et la recherche des solutions Liouvilliennes des équations aux différences finies linéaires au séminaire IMAG (Grenoble, 21 février 2002), et au séminaire IGD (Lyon, 28 février 2002).

M. Bronstein a présenté ses travaux sur la résolution d'équations et de systèmes différentiels à la conférence ISSAC'2002 (Lille, 7-10 juillet 2002), et en tant que conférencier invité au International Congress on Mathematical Software (Pékin, 17-19 août 2002), et au Séminaire Kolchin (New York, 23-24 novembre 2002). Il a aussi participé à l'International Congress of Mathematicians (Pékin, 20-28 août 2002).

S. Dalmas a participé à la réunion du groupe « math » du W3C (Mandelieu, 27-28 février 2002)

S. Dalmas et *M. Gaëtano* ont participé aux réunions de l'OpenMath Thematic Network de Nice (2-3 mars 2002) et Pise (28-29 septembre 2002), ainsi qu'a la réunion de lancement du projet OpenMath-MONET (Bath, 29-30 avril 2002) et à la conférence MathML'2002 (Chicago, 28-30 juin 2002).

E. Hubert a présenté ses travaux sur les systèmes différentiels non linéaires

- au séminaire Calcul Formel du LACO, Université de Limoges (janvier 2002).
- lors de son invitation au Forum des Jeunes Mathématiciennes, à l'Institut Henri Poincaré (mars 2002).
- à la conférence Foundations of Computational Mathematics, Minneapolis, Minnesota (aout 2002).

Elle a de plus participé au Workshop on Under- and Over-Determined Systems of Algebraic or Differential Equations à Karlsruhe, Allemagne (mars 2002) ainsi qu'aux cours sur la théorie des invariants du Workshop on Invariant Theory à Kingston, Ontario (avril 2002). Elle a rendu visite à l'Ontario Research Center in Computer Algebra, dans le cadre sa collaboration avec Gregory Reid, et à Irina Kogan, Yale University, Connecticut (une semaine à chaque fois, en avril). Elle a également participé aux ateliers scientifiques pluridisciplinaires de Cargèse sur le thème *sexes et genre dans le travail scientifique* et à la conférence *Femmes en Maths* à Strasbourg (novembre 2002).

A. Quadrat a présenté ses travaux dans les séminaires et les conférences suivants :

- LACO, Université de Limoges (18-20/11).
- Ecole internationale d'automatique de Lille « Control of Distributed Parameters Systems : Theory and Applications », Ecole Centrale de Lille, Lille (02-06/09).
- Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Nantes (08-10/07).
- Groupe de Travail Commande Robuste (GdR Automatique), Paris (17/06).
- Groupe de Travail Systèmes à Retards (GdR Automatique), Paris (13/06).
- Université de Aachen (Allemagne), (02-07/06).
- Séminaire au Centre de Mathématiques Appliquées, Sophia Antipolis (30/04).
- Groupe de Travail Systèmes à Retards (GdR Automatique), Paris (28/03).

J.-A. Weil a été invité deux semaines par l'université de Floride à Talahassee (USA, du 15 au 28 aout 2002), et a participé au congrès « Calcul formel et équations différentielles » (Strasbourg, 21-22 mars 2002) et aux ateliers « Open source computer algebra » (Lyon, 22-23 mai 2002) et « Résurgence » (CIRM, Luminy, 17-22 octobre 2002). Il a aussi présenté ses travaux en théorie de Galois différentielle dans divers séminaires et conférences :

- au séminaire ALGO (INRIA Rocquencourt, 14 janvier 2002)
- au séminaire Cartier-Waldschmidt (IHP, 4 février 2002)
- au séminaire d'évaluation Médicis (Polytechnique, 5 février 2002)
- au séminaire « équations différentielles » de Lille (25 mars 2002)
- au séminaire du bureau des longitudes (11 avril 2002)

- au séminaire GAGE (Polytechnique, 17 octobre 2002)
- au colloque « Differential and Algebraic Galois Theory » (Oberwolfach, 7-13 juillet 2002),
- à la conférence « Foundations of computational mathematics » (Minneapolis, 11-14 Juillet 2002),
- au colloque "algèbre effective" (Poitiers, 5-7 septembre 2002),
- aux journées « calcul symbolique et numérique » (Toulouse, 4-6 décembre 2002).

10. Bibliographie

Bibliographie de référence

[1] M. BRONSTEIN. *On solutions of linear ordinary difference equations in their coefficient field.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 6, volume 29, 2000, pages 841-877.

[2] M. BRONSTEIN. *Symbolic Integration I - Transcendental Functions.* Springer, Heidelberg, 1997.

[3] M. BRONSTEIN, M. PETKOVŠEK. *An Introduction to Pseudo-Linear Algebra.* in « Theoretical Computer Science », volume 157, 1996, pages 3-33.

[4] éditeurs M. BRONSTEIN, W. SIT., *Differential Algebra and Differential Equations (Special Issue of the Journal of Symbolic Computation).* Academic Press, Londres, 1999.

[5] E. HUBERT. *Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 4-5, volume 29, 2000, pages 641-662.

[6] E. HUBERT. *Essential Components of an Algebraic Differential Equation.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 4-5, volume 28, 1999, pages 657-680.

[7] J.-F. POMMARET, A. QUADRAT. *Algebraic analysis of linear multidimensional control systems.* in « IMA Journal of Control and Information », numéro 3, volume 16, 1999, pages 275-297.

[8] M. VAN HOEIJ, J.-F. RAGOT, F. ULMER, J.-A. WEIL. *Liouvillian Solutions of Linear Differential Equations of Order Three and Higher.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 4 and 5, volume 28, 1999, pages 589-610.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[9] M. BRONSTEIN, S. LAFAILLE. *Solutions of linear ordinary differential equations in terms of special functions.* in « Proceedings of ISSAC'2002 », ACM Press, éditeurs T. MORA., pages 23-28, 2002.

[10] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique I. Factorisations doublement faiblement copremières.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

[11] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique II. Stabilisation interne.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

[12] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique III. Sur une forme générale des contrôleurs stabilisants basée sur le rang stable.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

Rapports de recherche et publications internes

[13] S. ABRAMOV, M. BRONSTEIN. *Linear algebra for skew-polynomial matrices.* Rapport de Recherche, numéro RR-4420, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4420.html.

[14] P. GABORIT, J. OHLER, P. SOLÉ. *CTRU, a polynomial analogue of NTRU.* Rapport de Recherche, numéro RR-4621, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4621.html.

Bibliographie générale

[15] M. BARKATOU. *A rational version of Moser's algorithm.* in « Proceedings of ISSAC'95 », ACM Press, éditeurs A. LEVELT., pages 297-302, 1995.

[16] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER, M. PETITOT. *Representation for the radical of a finitely generated differential ideal.* in « ISSAC'95 », ACM Press, New York, éditeurs A. LEVELT., 1995.

[17] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER, M. PETITOT. *Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals.* rapport technique, numéro IT-306, LIFL, 1997.

[18] E. CARTAN. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Hermann, 1945.

[19] F. CHYZAK. *Gröbner Bases, Symbolic Summation and Symbolic Integration.* volume 251, LMS, 1998, pages 32-60.

[20] R. COHN. *Difference algebra.* New York-London-Sydney : Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons. XIV, 1965.

[21] O. CORMIER, M. SINGER, B. TRAGER, F. ULMER. *Linear Differential Operators for Polynomial Equations.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 5, volume 34, 2002, pages 355-398.

[22] J.-F. P. ET A. QUADRAT. *A functorial approach to the behaviour of multidimensional control systems.* in « Applied Mathematics and Computer Science », 2003, pages A paraître, à paraître.

[23] M. FELS, P. J. OLVER. *Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations.* in « Acta Appl. Math. », numéro 2, volume 55, 1999, pages 127-208.

[24] H. GLUESING-LUERSSEN. *Linear Delay-Differential Systems with Commensurate Delays : An Algebraic Approach.* Lecture Notes in Mathematics 1770, Springer, 2002.

[25] M. GROMOV. *Partial Differential Relations.* Springer-Verlag, 1986.

[26] M. HAMBURGER. *Ueber die sigulären Lösungen der algebraischen Differenzialgleichnungen erster Ordnung.* in « Journal für die reine und angewandte Mathematik », volume 112, 1893, pages 205-246.

[27] P. HENDRIKS, M. SINGER. *Solving Difference Equations in Finite Terms.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 3, volume 27, March, 1999, pages 239-260.

[28] E. HUBERT. *Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra.* in « Journal of Symbolic Computations », numéro 4-5, volume 29, 2000, pages 641-662.

[29] E. HUBERT. *Essential Components of an Algebraic Differential Equation.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 4-5, volume 28, 1999, pages 657-680.

[30] M. JANET. *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Cahiers Scientifiques IV, Gauthier-Villars, 1929.

[31] M. KASHIWARA. *Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations.* Mémoires de la Société Mathématiques de France, no. 63, 1995.

[32] E. KOLCHIN. *Differential Algebra and Algebraic Groups.* série Pure and Applied Mathematics, volume 54, Academic Press, New York-London, 1973.

[33] J. KOVACIC. *An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations.* in « Journal of Symbolic Computation », numéro 1, volume 2, March, 1986, pages 3-43.

[34] B. MALGRANGE. *Systèmes à coefficients constants.* numéro Exp. No. 246, volume 8, Soc. Math. France, 1962/63, pages 79-89.

[35] J. MOSER. *The order of a singularity in Fuch's theory.* in « Mathematische Zeitschrift », volume 72, 1960, pages 379-398.

[36] T. OAKU, N. TAKAYAMA. *Algorithms for D-modules – restriction, tensor product, localization, and local cohomology groups.* in « J. Pure Appl. Algebra », numéro 2-3, volume 156, 2001, pages 267-308.

[37] T. OAKU, N. TAKAYAMA, H. TSAI. *Polynomial and rational solutions of holonomic systems.* in « J. Pure Appl. Algebra », numéro 1-2, volume 164, 2001, pages 199-220.

[38] V. PALAMODOV. *Linear Differential Operators with Constant Coefficients.* Springer-Verlag, 1970.

[39] J.-P. POMET. *On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs.* in « ESAIM-COCV », numéro 6, volume 2, 1997, pages 151-230.

[40] J.-F. POMMARET, A. QUADRAT. *Formal elimination for multidimensional systems and applications to control theory.* in « Mathematics of Control, Signals, and Systems », numéro 3, volume 13, 2000, pages 193-215.

[41] J.-F. POMMARET, A. QUADRAT. *Generalized Bezout identity.* in « Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing », numéro 2, volume 9, 1998, pages 91-116.

[42] J.-F. POMMARET, A. QUADRAT. *Algebraic analysis of linear multidimensional control systems.* in « IMA Journal of Control and Information », numéro 3, volume 16, 1999, pages 275-297.

[43] J.-F. POMMARET, A. QUADRAT. *Localization and parametrization of linear multidimensional control systems.* in « Systems and Control Letters », numéro 4, volume 37, 1999, pages 247-260.

[44] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique I. Factorisations doublement faiblement copremières.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

[45] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique II. Stabilisation interne.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

[46] A. QUADRAT. *Une approche de la stabilisation interne par l'analyse algébrique III. Sur une forme générale des contrôleurs stabilisants basée sur le rang stable.* in « Proceedings of CIFA2002 », pages CDRom, 2002.

[47] A. QUADRAT. *A behavioural interpretation to the operator-theoretic approach to stabilizability. Part I : SISO systems.* in « SIAM J. Control and Optimization », 2003, pages Soumis.

[48] A. QUADRAT. *On a general structure of the stabilizing controllers based on the stable range.* in « SIAM J. Control and Optimization », 2003, pages Soumis.

[49] A. QUADRAT. *On a generalization of the Youla-Kucera parametrization. Part I : The fractional ideal approach to SISO systems.* in « Systems and Control Letters », 2003, pages Soumis.

[50] A. QUADRAT. *The fractional representation approach to synthesis problems : an algebraic analysis viewpoint. Part I : (weakly) doubly coprime factorizations.* in « SIAM J. Control and Optimization », 2003, à paraître.

[51] A. QUADRAT. *The fractional representation approach to synthesis problems : an algebraic analysis viewpoint. Part II : internal stabilization.* in « SIAM J. Control and Optimization », 2003, à paraître.

[52] H. Z. R.F. CURTAIN. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory.* Texts in Applied Mathematics 21, Springer-Verlag, 1995.

[53] C. RIQUIER. *La Méthode des Fonctions Majorantes et les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles.* Gauthier-Villars, 1928.

[54] J. RITT. *Analytical Theory of Singular Solutions of Partial Differential Equations of the First Order.* in « Annals of Mathematics », numéro 1, volume 46, 1945, pages 120-143.

[55] J. RITT. *Differential Algebra.* série Colloquium publications, volume XXXIII, American Mathematical Society, 1950, Reprinted by Dover Publications, Inc (1966).

[56] M. SINGER. *Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Differential Equations.* in « American Journal of Mathematics », volume 103, 1980, pages 661-682.

[57] M. SINGER, M. VAN DER PUT. *Galois Theory of Difference Equations.* série LNM 1666, Springer, 1997.

[58] D. C. SPENCER. *Overdetermined systems of partial differential equations.* in « Bull. Amer. Math. Soc. », volume 75, 1965, pages 1-114.

[59] P. ZERVOS. *Le probème de Monge.* Gauthiers-Villars, 1932.