INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Projet OMEGA

Méthodes numériques probabilistes pour les équations aux dérivées partielles et les mathématiques financières

Sophia Antipolis - Lorraine

THÈME 4B

Rapport d'Activité

2002

Table des matières

1. Composition de l'équipe

OMEGA *est un projet bi-localisé entre les unités de recherches de Nancy et de Sophia Antipolis.*

Responsable scientifique
Denis Talay [DR INRIA]

Responsable permanent à Nancy
Bernard Roynette [Professeur, Université Henri Poincaré (Nancy)]

Assistants de projet
Nathalie Arione [à Sophia Antipolis, depuis le 16 septembre 2002]
Philippe Dereymez [à Sophia Antipolis, du 1er mars 2002 au 31 août 2002]
Irène Urso [à Sophia Antipolis, jusqu'au 28 février 2002]
Hélène Zganic [TR INRIA à Nancy]

Personnel INRIA
Mireille Bossy [CR]
Madalina Deaconu [CR]
Antoine Lejay [CR]
Etienne Tanré [CR, depuis le 1er septembre 2002]

Personnel Université
Axel Grorud [MC, Université de Provence (Marseille) et Ura-CNRS 225, en délégation à l'INRIA jusqu'au 30 septembre 2002]
Pierre Vallois [Professeur, Université Henri Poincaré (Nancy)]

Chercheurs doctorants
Christophe Ackermann [allocataire MESR, Université Henri Poincaré (Nancy)]
Olivier Bardou [boursier INRIA]
Christophe Berthelot [boursier CIFRE Bull et INRIA, jusqu'au 31 octobre 2002]
Sébastien Chaumont [boursier Dyade, puis ATER Université Henri Poincaré (Nancy) à partir du 1er septembre 2002]
Ndeye Awa Diop [boursière CIES, puis Finrisk (Zürich) depuis le 1er septembre 2002]
Marie-Pierre Etienne [allocataire MESR, Université Henri Poincaré (Nancy), jusqu'au 31 août 2002]
Sylvain Maire [PRAG, Université de Toulon et du Var]
Miguel Martinez [boursier INRIA]
Ivan Nourdin [Moniteur à l'Université Henri Poincaré (Nancy)]
Agnès Volpi [PRAG, ESSTIN (Nancy)]

Chercheur invité
Eric Peirano [jusqu'au 31 mars 2002, à Sophia Antipolis]

Stagiaires
Sandrine Bobée [Juin-Août 2002]
Christian Cucurullo [Avril-Juillet 2002]

2. Présentation et objectifs généraux

Le projet OMEGA est bilocalisé entre les unités de Sophia Antipolis et de Lorraine. Sa composante nancéienne est rattachée à l'Institut Élie Cartan.

Le principal thème de recherche d'OMEGA est l'analyse de méthodes numériques probabilistes, avec deux champs d'application privilégiés : la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires et la modélisation et la simulation en mathématiques financières. Les méthodes que nous étudions impliquent la simulation de processus stochastiques. L'analyse numérique de ces méthodes en est encore à ses débuts, alors qu'elles sont utilisées dans l'ingénierie de pointe de secteurs industriels divers (secteurs nucléaire, électrique, électrotechnique et bancaire par exemple) pour résoudre des problèmes complexes ou de grande dimension. OMEGA effectue des travaux mathématiques portant sur la représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles, la conception d'algorithmes numériques probabilistes et la vitesse de convergence de tels algorithmes. Par ailleurs, OMEGA étudie les performances sur architectures parallèles des algorithmes développés et analysés. En effet, si les méthodes de Monte-Carlo sont souvent très bien adaptées à la programmation parallèle, c'est moins évident pour les méthodes qui font intervenir la simulation de particules dépendantes ou la simulation de processus à temps de vie aléatoire.

La théorie des processus stochastiques, en particulier des problèmes d'approximation de processus, est l'outil mathématique essentiel et commun à tous les problèmes traités.

2.1.1. À propos de la résolution d'EDP non linéaires :
en ce qui concerne la résolution probabiliste d'équations aux dérivées partielles non linéaires, OMEGA étudie les méthodes de Monte-Carlo, les méthodes particulaires stochastiques et les méthodes ergodiques. Actuellement, nous nous intéressons essentiellement à leurs applications aux équations de la Mécanique des fluides (Burgers, Navier-Stokes, etc.), aux équations du transport neutronique et aux modèles aléatoires de la turbulence. Certaines équations linéaires servent de problèmes de laboratoire pour l'étude des difficultés spécifiques liées aux conditions aux bords, aux dégénérescences des opérateurs différentiels sous-jacents, aux phénomènes de fausses convergences, etc. Nous effectuons des études d'erreur d'approximation non asymptotiques, afin de donner des bornes pour l'erreur correspondant à tout choix des paramètres numériques : nombre de particules, pas de discrétisation en temps, temps d'intégration, nombre de simulations, etc. En amont, l'étape-clef consiste à interpréter l'algorithme comme la discrétisation d'une représentation probabiliste de la solution de l'EDP : une part de l'activité d'OMEGA concerne donc l'élaboration de représentations probabilistes appropriées. En aval, les estimations théoriques de vitesse de convergence sont systématiquement confrontées aux simulations numériques.

2.1.2. À propos de la modélisation et de la simulation en mathématiques financières :
en mathématiques financières et en actuariat, OMEGA s'intéresse plus particulièrement aux méthodes de Monte-Carlo et aux modèles de marché. En ce qui concerne les méthodes de Monte-Carlo, OMEGA considère les problèmes d'approximation spécifiques aux modèles financiers, par exemple la simulation de fonctionnelles des historiques de cours et le calcul de dérivées d'espérances de ces fonctionnelles. En ce qui concerne les modèles de marché, les problèmes abordés actuellement concernent essentiellement la sensibilité des stratégies de couverture des produits dérivés par rapport aux erreurs de modélisation et le calcul de stratégies de gestion du risque. OMEGA s'intéresse aussi à la définition de mesures de risque utilisables en pratique et cohérentes avec un modèle mathématique du marché. On étudie également des problèmes d'adossement et de risques de défaut de trésorerie. Un accent particulier est porté sur la confrontation des modèles et des résultats numériques avec les données réelles.

3. Fondements scientifiques

3.1. Méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles

De nombreux problèmes d'évolution linéaires ou non linéaires :

$$\frac{du}{dt} = A(t,u)u + f(t,u) \tag{1}$$

peuvent être interprétés à l'aide de processus de Markov bien choisis : on interprète u à l'aide du générateur infinitésimal du semi-groupe de transition d'un processus de Markov $(X_t, t \geq 0)$ ou bien à l'aide de l'adjoint de ce générateur. Les motivations de cette démarche peuvent être d'ordre théorique et/ou numérique. En effet, en particulier lorsque $X = (X_t; t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique, le calcul stochastique permet parfois d'obtenir des résultats d'existence, d'unicité ou de régularité de la solution de (1) plus efficacement que les techniques d'analyse habituelles : le théorème de Girsanov, le calcul de Malliavin, la propagation du chaos sont des outils puissants qui n'ont pas d'analogues en analyse « déterministe » des équations aux dérivées partielles. D'autre part, dès que l'on peut écrire la solution de (1) sous la forme d'une espérance du type $u(t) = \mathbb{E}F(X_\cdot)$ avec F fonctionnelle sur l'espace des trajectoires de X entre 0 et t, on peut chercher à développer une méthode de Monte-Carlo pour approcher $u(t)$ même si on ne sait pas simuler des trajectoires exactes de X : il suffit de construire un processus proche (en loi) de X, en simuler un grand nombre de trajectoires entre 0 et t, évaluer la fonctionnelle F le long de chaque trajectoire simulée et enfin moyenner toutes les valeurs obtenues.

Donnons un exemple élémentaire. Considérons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nu \Delta u(t,x), \quad \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d \tag{2}$$

avec pour condition initiale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ une fonction mesurable bornée. Le paramètre ν est strictement positif et est appelé « paramètre de viscosité » en mécanique des fluides ou « volatilité » en finance.

On vérifie facilement que la fonction

$$\forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) := \mathbb{E}u_0(x + \sqrt{2\nu}W_t),$$

où (W_t) est un mouvement brownien[1] standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, satisfait (2) ainsi que $\lim_{t\longrightarrow 0} u(t,x) = u_0(x)$ en tout point de continuité de u_0. Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher $u(t,x)$ par :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_0(x + \sqrt{2\nu t}\, g_i(\omega))$$

où les $\{g_i(\omega)\}$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centrées et de matrice de covariance $Id_{\mathbb{R}^d}$. Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre : on sait effectuer des tirages gaussiens indépendants à l'aide d'appels à un générateur de nombres pseudo-aléatoires uniformément répartis ; en outre il est naturellement parallélisable : le i-ème processeur a la tâche d'engendrer $g_i(\omega)$. La vitesse de convergence est décrite par des théorèmes-limite tels que le théorème de limite centrale, la loi du logarithme itéré, l'inégalité de Berry-Esseen : la convergence est d'ordre $1/\sqrt{N}$, elle est donc lente. Toutefois, le coût de l'algorithme croît seulement linéairement avec la dimension d de l'espace puisqu'on simule Nd trajectoires d'un mouvement brownien unidimensionnel standard, et ce coût est indépendant du paramètre ν.

Typiquement, les méthodes de Monte-Carlo pour des équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques peuvent permettre de traiter des problèmes extrêmes, en très grande dimension ou avec de très faibles viscosités, lorsqu'il serait difficile, ou démesurément coûteux, d'utiliser des algorithmes classiques.

Soit à présent le problème parabolique sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \textstyle\sum_{i=1}^d b_i(t,x)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^d a_j^i(t,x)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), \\ \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indicées par le temps : $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{R}^+\}$; à ω fixé l'application $t \longrightarrow X_t(\omega)$ est appelée « trajectoire ». Un exemple de processus est le mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, processus à trajectoires presque sûrement continues défini de la manière suivante : $W_0 = 0$ presque sûrement ; pour tout $0 < s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi gaussienne centrée, de matrice de covariance $(t-s)Id_{\mathbb{R}^d}$, indépendante de la famille $\{W_\theta, 0 \leq \theta \leq s\}$.

où b est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et a une fonction à valeurs dans l'espace des matrices symétriques et définies positives. Sous certaines conditions, on sait que l'unique solution régulière vérifie

$$u(t,x) = \mathbb{E}u_0(X_T^{t,x}),$$

où $(X_\theta^{t,x})$ est le processus de Markov solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_\theta^{t,x} = x + \int_t^\theta b(s, X_s^{t,x})ds + \sum_{j=1}^r \int_t^\theta \sigma_j(s, X_s^{t,x})dW^j, \tag{4}$$

où les matrices $\sigma(t,x)$ sont des racines carrées des matrices $a(t,x)$. La discrétisation en temps de (4) conduit naturellement au processus de Markov à temps discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{X}_0^{t,x} & = & x, \\ \bar{X}_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^{t,x} & = & \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x} + b(p\frac{T-t}{n}, \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})\frac{T-t}{n} \\ & & + \sum_{j=1}^r \sigma_j(p\frac{T-t}{n}, \bar{X}_{p\frac{T-t}{n}}^{t,x})(W_{(p+1)\frac{T-t}{n}}^j - W_{p\frac{T-t}{n}}^j). \end{array}\right. \tag{5}$$

Il est facile de simuler des trajectoires indépendantes $(\bar{X}_\cdot^{t,x}(\omega_i))$ de ce processus puisque les variables aléatoires $W_{(p+1)(T-t)/n}^j - W_{p(T-t)/n}^j$ sont mutuellement indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance $(T-t)/n$. On peut donc numériquement approcher $u(t,x)$ par :

$$u(t,x) \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N u_0(\bar{X}_T^{t,x}(\omega_i)).$$

La vitesse de convergence de la méthode dépend à la fois du nombre N de simulations et du nombre n de pas de temps.

Le procédé s'étend dans des directions variées : problèmes elliptiques, problèmes de transport (applications en neutronique), problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, problèmes intégro-différentiels, etc.

Au lieu de vouloir résoudre (3), on peut s'intéresser au problème adjoint :

$$\begin{array}{r} \frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(t,x)p(t,x)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_j^i(t,x)p(t,x)), \\ \forall (t,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}^d, \end{array} \tag{6}$$

avec la condition : $p(t,x)dx$ converge faiblement vers une mesure de probabilité donnée lorsque t tend vers 0. Supposons (ce n'est pas une restriction) que cette mesure soit la masse de Dirac en x. Soit $(X_\cdot^{0,x}(\omega_i))$ des trajectoires indépendantes de la solution de (4) avec $t=0$. Sous de bonnes hypothèses, la mesure empirique :

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{0,x}}(\omega_i)$$

converge faiblement vers $p(t,x)dx$. Cette remarque sous-tend une famille de méthodes particulaires stochastiques pour les équations aux dérivées partielles non linéaires de type *équation de McKean-Vlasov* :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial U_t}{\partial t} & = & \frac{\sigma^2}{2}\Delta U_t - \mathrm{div}\left(U_t \quad \int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)U_t(dy)\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times]0,T], \\ U_{t=0} & = & U_0. \end{array}\right. \tag{7}$$

La fonction $b(\cdot,\cdot)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui intervient dans la partie non linéaire de l'équation est appelée *noyau d'interaction*. L'équation ci-dessus est considérée au sens des distributions. La théorie probabiliste de la *propagation du chaos* montre que la solution U_t s'interprète à l'aide de la loi limite d'un système de particules interagissant entre elles. La dynamique des particules est décrite par le système différentiel stochastique de dimension $N \times d$:

$$\begin{cases} X_t^i = \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b\left(X_s^i, X_s^j\right) ds + \sigma w_t^i, & i = 1, ..., N, \\ X_{t=0}^i = X_0^i \text{ variable aléatoire de loi } U_0, & \text{indépendante de } X_0^j, \quad i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

La *propagation du chaos* implique la convergence au sens des mesures, quand N tend vers l'infini, de la mesure empirique $1/N \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^i}$ vers U_t. En particulier, un lissage par convolution de la mesure empirique converge vers la fonction U_t. À partir de cette interprétation probabiliste, on développe un algorithme d'approximation de U_t fondé sur la simulation du système de particules $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$; la mesure initiale U_0 est approchée par une combinaison linéaire de masses de Dirac, ce qui fournit les positions initiales des particules, qu'on déplace en simulant une (et une seule) réalisation approchée du système $(X_t^i, 1 \leq i \leq N)$ ci-dessus.

La complexité de l'analyse de la vitesse de convergence dépend essentiellement de la singularité éventuelle du noyau d'interaction $b(\cdot,\cdot)$. Pour la plupart des équations provenant de problèmes physiques (et en particulier pour les équations de Burgers ou de Navier-Stokes en dimension 2), le noyau d'interaction est singulier. La vitesse de convergence dépend du nombre N de particules et du pas de temps utilisé pour la discrétisation de (8).

Pour un aperçu de résultats sur les méthodes de Monte-Carlo et certaines méthodes particulaires stochastiques, on pourra consulter[46].

4. Domaines d'application

4.1. Méthodes numériques probabilistes en ingénierie

Mots clés : *transport neutronique*, *mécanique des fluides*, *turbulence*, *polymère*, *mécanique aléatoire*.

Les méthodes numériques probabilistes sont utilisées dans des domaines variés. Nous avons abordé les sujets suivants : les calculs de criticité pour des modèles de transport neutronique par méthodes de Monte-Carlo, la simulation de modèles stochastiques d'écoulements turbulents, les simulations moléculaires de chaînes de polymères, les méthodes de vortex aléatoire pour la résolution des équations de la Mécanique des Fluides. Pour beaucoup de ces questions, un cadre général de travail est la résolution numérique probabiliste d'équations aux dérivées partielles de type *équation de McKean-Vlasov* introduites au paragraphe 3.1.

Un autre axe de recherche concerne l'étude des processus engendrés par un opérateur sous forme divergence à coefficients discontinus. Bien que de tels opérateurs interviennent naturellement dans de nombreux problèmes issus de la physique, comme en géophysique, ils restent encore mal connus du point de vue probabiliste. Nous essayons donc d'étudier ces processus, et de mettre au point des méthodes de Monte-Carlo, le tout en liaison avec des problèmes concrets : problèmes d'encéphalographie, de simulations de fluides dans des milieux poreux, ...

4.2. Mathématiques financières

Mots clés : *finance*, *évaluation d'options*, *gestion de bilan*, *risque financier*.

Le projet s'intéresse à divers aspects des mathématiques financières, liés principalement à l'évaluation et à la couverture des options d'une part, à la gestion de portefeuilles ou de bilans d'autre part.

Un premier champ de recherches concerne l'étude de stratégies de gestion de portefeuilles d'options correspondant à des actifs sous-jacents dont les volatilités sont des processus stochastiques à valeurs dans des intervalles bornés. Le marché est incomplet, il n'existe donc pas de stratégie de couverture parfaite. Il semble particulièrement intéressant de pouvoir calculer la plus faible valeur initiale des stratégies conduisant à des portefeuilles dont la valeur à l'échéance majore le payoff d'une option donnée, et ceci pour tout état futur du marché ou bien pour tout état appartenant à un ensemble pertinent en pratique.

Un autre champ de recherches concerne le calcul numérique de prix d'options complexes par des méthodes de Monte-Carlo, la simulation de bilans correspondant à des stratégies de gestion ou de couverture mal spécifiées et la gestion de portefeuilles sous contraintes. Ces questions motivent, par exemple, des études spécifiques sur l'approximation en loi de fonctionnelles diverses (et irrégulières) de solutions d'équations différentielles stochastiques.

6. Résultats nouveaux

6.1. Méthodes numériques probabilistes

Glossaire

EDS Équation différentielle stochastique
EDP Équation aux dérivées partielles

6.1.1. Simulation de processus associés à des opérateurs sous forme divergence

Participants : Mireille Bossy, Antoine Lejay, Miguel Martinez, Denis Talay.

Mots clés : *MEG*, *équations elliptiques*, *opérateurs sous forme divergence*, *équations différentielles stochastiques avec temps local*, *schéma d'Euler*.

Nous poursuivons notre étude sur les méthodes probabilistes pour la résolution numérique du problème de la MEG (MagnétoEncéphaloGraphie).

Le problème de la MEG, qui consiste à estimer les coefficients de conductivité des différentes couches du cerveau, est un problème inverse que le projet ODYSSÉE de l'INRIA résout numériquement à l'aide d'un algorithme itératif. A chaque itération de cet algorithme, il faut évaluer en quelques points du cerveau la solution d'une équation elliptique [43]. Cette équation fait intervenir un opérateur sous forme divergence (OD), c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Les coefficients $a_{i,j}$ de l'OD sont discontinus sur des hypersurfaces, ce qui rend difficile la résolution numérique de l'équation par des méthodes probabilistes[54].

Cependant, en dimension 1, il s'avère que le processus associé à l'OD est solution d'une équation différentielle stochastique avec temps local[49]. Pour simuler les trajectoires du processus associé à l'OD dans ce cas, nous utilisons une bijection qui annule le temps local et permet de proposer un schéma d'Euler dont les coefficients sont discontinus. Nous travaillons actuellement sur la vitesse de convergence de ce schéma.

6.1.2. Méthode numérique probabiliste pour les équations de McKean-Vlasov

Participants : Mireille Bossy, Denis Talay.

En collaboration avec Arturo Kohatsu-Higa (Université de Barcelone), nous travaillons sur le développement de l'erreur du schéma d'Euler dans le cadre des méthodes particulaires stochastiques pour les équations de McKean-Vlasov. Dans le cas de l'équation de Burgers, nous montrons que l'extrapolation de Romberg conduit bien à un schéma de discrétisation d'ordre 2. La technique employée repose pour le moment essentiellement sur l'hypothèse de régularité de la condition initiale.

6.1.3. Simulation de particules en milieu fissuré

Participant : Antoine Lejay.

Mots clés : *diffusion sur un graphe*, *mouvement brownien biaisé*.

Lorsqu'il est mis en mouvement, le pétrole contenu dans un réservoir pétrolier, c'est-à-dire une roche poreuse, a généralement tendance à se déplacer dans les fissures. Il n'est donc pas forcément possible de négliger le réseau de fissures, et il est donc intéressant de simuler des particules évoluant dans un réseau de fissures. Le temps passé par une particule dans les fissures permet par exemple de calculer le coefficient d'échange dans le modèle « double porosité ».

Nous continuons donc l'étude d'une méthode sans grille permettant de simuler l'évolution d'une particule dans un milieu poreux fissuré[37][38], ce qui permet de se passer de la coûteuse étape de discrétisation. Ce travail comporte deux parties, qui sont l'étude du temps de sortie d'une fissure et l'étude de la position de la particule à un temps donné dans le réseau.

Les outils utilisés sont ceux de l'analyse stochastique des trajectoires du mouvement brownien et reposent sur des considérations sur le temps local et la théorie des excursions.

6.1.4. Calcul critique en transport neutronique

Participant : Sylvain Maire.

Mots clés : *méthode de Monte-Carlo*, *valeur propre principale*.

On a développé une méthode numérique probabiliste pour le calcul de la valeur propre principale de l'opérateur de transport neutronique. Celle-ci a consisté à combiner le calcul via la formule de Feynman-Kac de la solution du problème d'évolution associé et le développement spectral de cette solution. L'avantage principal de cette approche est de ne pas nécessiter le calcul de la solution sur tout le domaine. Une interprétation probabiliste de la valeur propre principale a été obtenu pour un modèle homogène particulier.

6.1.5. Approximation de l'espérance de fonctionnelles de la trajectoire d'une diffusion par le schéma d'Euler

Participant : Étienne Tanré.

Mots clés : *discrétisation d'EDS*, *schéma d'Euler*.

Avec Jean-Sébastien Giet (maître de conférences à l'université Henri-Poincaré), nous avons considéré l'EDS, homogène en temps, dont les coefficients σ et b sont très réguliers :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s))\, dB(s) + \int_0^t b(X(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

On désigne par $(X(s))_{0\leq s\leq 1}$ sa solution, et par $\left(\bar{X}^\delta(.)\right)_{0\leq s\leq 1}$ l'approximation de cette solution donnée par le schéma d'Euler de pas $\delta > 0$. Le but de cette étude est de préciser les vitesses de convergence de $\mathbb{E}\left[\Phi_k(\bar{X}^\delta(\frac{1}{k}), \cdots, \bar{X}^\delta(\frac{k}{k}))\right]$ vers $\mathbb{E}[\Phi(X(.))]$ en fonction des paramètres δ et k, où $\Phi : \mathcal{C}([0,1]\,;\ \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle donnée et où $\Phi_k\ :\ \left(\mathbb{R}^d\right)^k \longrightarrow \mathbb{R}$ représente une approximation de Φ. Les cas où $\Phi(x(.)) = \left(\int_0^1 f(x(s))\, ds\right)^\ell$ et $\Phi(x(.)) = \exp\left(\int_0^1 f(x(s))\, ds\right)$ sont étudiés dans [29] ; ℓ est un entier positif et f une fonction mesurable et bornée. Dans le cas $\ell = 1$, *i.e.* l'approximation de $\mathbb{E}[\int_0^t f(X(s))ds]$, la vitesse optimale de convergence est obtenue : notre approximation converge à une vitesse au plus linéaire en fonction du pas de discrétisation.

6.1.6. Vitesse de convergence d'approximation de processus de type Cox-Ingersoll-Ross

Participants : Mireille Bossy, Awa Diop, Denis Talay.

On considère l'EDS homogène en temps utilisée en finance pour modéliser l'évolution de divers taux ou indices :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma \int_0^t X_s^\alpha dW_s,$$

avec $\sigma > 0$, $\alpha \in [1/2,\ 1)$. On suppose $b(\cdot)$ régulière avec $b(0) > 0$.

Nous analysons les vitesses de convergence forte et faible pour un schéma d'Euler dit « symétrisé » pour le processus $(X_t, t \geq 0)$.

Par une nouvelle méthode basée sur un changement de temps, nous obtenons une vitesse de convergence forte optimale pour le schéma d'approximation considérée. La vitesse de convergence faible est obtenue pour une classe de fonctions tests régulières. Notre étude se poursuit pour traiter le cas de fonctions tests mesurables.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'analyse d'erreur de schémas numériques associés au processus de Bessel $\rho_\cdot$ d'indice $\nu > 0$, solution de :

$$\rho_t = x + \int_0^t \frac{\nu + 1/2}{\rho_s} ds + W_t, \quad x > 0.$$

Nous proposons d'approcher $\rho_\cdot$ par un schéma d'Euler symétrisé. Nous obtenons une vitesse de convergence faible en fonction de l'indice du Bessel. Pour certaines valeurs de ν, la vitesse de convergence faible est optimale, c'est-à-dire linéaire par rapport au pas de discrétisation.

6.1.7. Réduction de variance pour l'intégration Monte-Carlo

Participant : Sylvain Maire.

Ce travail a consisté à créer un algorithme itératif permettant un calcul d'approximations quadratiques. Il a fourni des estimateurs Monte-Carlo d'ordre élevé pour le calcul d'intégrales de fonctions régulières. L'extension au cadre multidimensionnel a permis de calculer des approximations polynomiales sur des bases contenant peu d'éléments. Les résultats numériques sont comparables à une méthode récente atteignant un ordre optimal pour l'intégration numérique de fonctions régulières.

6.1.8. Décomposition de domaines par méthodes de Monte-Carlo

Participants : Eric Peirano, Denis Talay.

Le but de ce travail est d'évaluer les possibilités de résoudre certains problèmes faisant intervenir des EDP en utilisant la représentation probabiliste de leur solution, et de comparer cette méthode de résolution aux méthodes classiques. On peut, par exemple, dans le cas d'une résolution par décomposition de domaine approcher les conditions aux limites par méthode probabiliste, ce qui rend les simulations indépendantes et permet une parallélisation massive sur des architectures adaptées. Une autre application est le cas où l'on s'intéresse seulement à la solution en un point du domaine voire un sous-domaine réduit. Les méthodes de Monte-Carlo permettent alors une discrétisation locale contrairement aux méthodes de discrétisation classique.

Nous avons examiné deux exemples numériques, un problème elliptique et un problème parabolique. Pour le problème elliptique, nous avons opté pour un cas où la solution est très irrégulière sur une partie du domaine ce qui a priori est défavorable aux méthodes classiques. Nous avons donc proposé un algorithme hybride où l'on résout les EDP par méthode classique sur la partie du domaine où la solution est régulière et par méthode probabiliste sur la partie très irrégulière. Dans le cas du système parabolique, nous avons choisi un exemple de solution très irrégulière en temps et comparé les deux méthodes.

Les études numériques ont montré que, malgré leurs avantages indéniables, les méthodes hybrides étudiées ne sont pas concurrentielles des méthodes classiques pour des problèmes 2D à cause du temps de calcul prohibitif qui est requis pour calculer par méthode de Monte-Carlo avec une bonne précision la solution approchée le long de la frontière artificielle.

6.2. Méthodes probabilistes pour des modèles issus de la physique et de la biologie

6.2.1. Résonance stochastique et application en neuro-sciences

Participants : Mireille Bossy, Axel Grorud, Denis Talay, Etienne Tanré.

Mots clés : *transmission de signal par un neurone*, *bruit*.

Nous travaillons sur la modélisation stochastique de réponses neuronales à une excitation aléatoire, dans le cadre d'une recherche en collaboration avec K. Pakdaman de l'INSERM et l'Université Paris 6.

Notre travail consiste à comprendre comment modéliser le fonctionnement électrique des neurones et à rendre compte du fait expérimental suivant : la qualité de transmission d'un signal par le neurone est améliorée lorsque l'on ajoute un peu de bruit dans le système. Nous progressons, mais lentement, à cause des difficultés mathématiques posées par les singularités des modèles tels que ceux de Hodgkin-Huxley et Morris-Lecar et aussi à cause de l'approfondissement nécessaire de nos connaissances sur la nature biologique des phénomènes que nous cherchons à étudier.

6.2.2. Phénomènes de coagulation

Participants : Madalina Deaconu, Etienne Tanré.

Mots clés : *équation de coagulation*, *processus de Markov à sauts*.

Interprétation de la solution en terme de processus.
Le modèle introduit par Smoluchowski en 1916, pour décrire la coagulation, s'applique à divers phénomènes comme par exemple : la polymérisation, la formation des étoiles et planètes, le comportement du mélange d'huiles dans les moteurs à combustion, *etc*. Ce problème s'exprime sous la forme d'un système infini d'équations différentielles non linéaires.

L'approche probabiliste de l'équation de coagulation de Smoluchowski a pour objectif d'obtenir de nouveaux résultats ou de confirmer des conjectures énoncées par les analystes et les physiciens, à l'aide des méthodes d'analyse stochastique.

Le modèle. L'équation de coagulation décrit la dynamique d'un système de particules dans lequel des coagulations de deux particules se produisent. Les particules ne sont caractérisées que par leur masse. D'un point de vue physique il est naturel de supposer que le phénomène de coagulation de deux particules est proportionnel à la masse de chacune de particules et à une constante de proportionnalité dépendant de ces masses.

Notons $n(k,t)$ la densité de présence des particules de masse k à l'instant t, dans une unité de volume.

L'équation de coagulation donne l'évolution temporelle des $n(k,t)$. Elle s'écrit, pour le cas des tailles discrètes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j,k)n(j,t) \\ n(k,0) = n_0(k), \quad k \geq 1, \end{cases} \tag{9}$$

où K est le noyau de coagulation, supposé symétrique et positif.

Ce système décrit une équation d'évolution non linéaire en dimension infinie, avec $(n_0(k))_{k\geq 1}$ comme donnée initiale. La présence des sommes infinies fait que (9) n'est pas un problème classique du type système non linéaire d'équations différentielles ordinaires avec donnée initiale.

Dans la première ligne du système (9), le premier terme à droite décrit la création des particules de masse k par la coagulation des particules de masses j et $k-j$, c'est le terme de gain. Le second terme correspond aux particules de masse k disparaissant après coagulation avec d'autres particules, il représente le terme de perte.

Processus de Markov à sauts associé à l'équation de coagulation de Smoluchowski. Nous construisons un processus stochastique dont la loi est solution de l'équation de coagulation. Cette approche est originale et permet de comprendre, d'une manière intuitive, la dynamique du modèle introduit par Smoluchowski. Notre étude applique des techniques utilisées pour l'équation de Boltzmann. Ces deux équations ont plusieurs caractéristiques communes et principalement elles décrivent un phénomène discontinu : d'une part dans le modèle de Smoluchowski une particule change de taille après coagulation avec une autre particule, d'autre part dans le modèle de Boltzmann une particule change de vitesse après collision avec une autre particule.

Nous obtenons aussi une approximation numérique facile et intuitivement claire de la solution par le système de particules associé au processus : plus précisément le système décrit la dynamique d'une particule moyenne qui, à des instants aléatoires, coagule avec d'autres particules et change donc de taille. Ce travail a fait l'objet d'un article publié à *Annals of Probabilty* [16], et d'un article en révision à *Methodology in Computing and in Applied Probability*.

Processus stochastique et équation de coagulation avec diffusion. Dans le modèle précédent chaque particule est caractérisée uniquement par sa taille. M. Deaconu et N. Fournier (maître de conférence à l'Université Henri Poincaré), se sont intéressés à l'équation de coagulation non homogène. Nous considérons le modèle plus réaliste qui prend en compte la position de la particule. Chaque particule se déplace suivant une diffusion brownienne, perturbée par une fonction qui dépend de sa taille.

On interprète la solution comme étant la loi d'un couple de processus stochastiques, une composante décrit l'emplacement de la particule et la deuxième sa taille. Les résultats obtenus sont très intéressants. Cette étude comporte aussi un vaste aspect approximation numérique de la solution par le système de particules associé au processus.

Ce travail s'est concrétisé par un article paru à *Stochastic Processes and Their Applications* [15].

6.2.3. *Interprétation probabiliste de l'équation de Prandtl*

Participantes : Mireille Bossy, Madalina Deaconu.

Mots clés : *mécanique des fluides*, *couche limite*.

Nous travaillons sur une interprétation probabiliste de l'équation de couche limite de Prandtl. Cette équation décrit l'évolution d'un écoulement incompressible et faiblement visqueux dans un demi-plan. Comme l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Prandtl contient le phénomène de création de vorticité sur le bord. Notre objectif est de formuler une interprétation probabiliste de cette équation correspondant à la limite de l'algorithme de nappe de vortex de A. Chorin[39][40]. En nous inspirant du travail de Benachour, Roynette et Vallois [35] sur l'interprétation probabiliste des solutions de l'équation de Navier-Stokes avec condition dans un domaine borné, nous pouvons donner une formulation stochastique de la dynamique du tourbillon de Prandtl en terme de processus de branchement, mais le lien avec l'algorithme de Chorin reste encore à éclaircir.

6.2.4. *Modélisation d'un phénomène de fissuration*

Participant : Pierre Vallois.

En collaboration avec A. Mézin (laboratoire de génie des surfaces à l'école des Mines de Nancy), nous avons modélisé un phénomène de fissuration unidirectionnelle avec l'hypothèse de non-relaxation de contrainte. Le modèle prend en compte à la fois la localisation des fissures et la contrainte exercée.

Avec P. Calka (étudiant en thèse à l'université de Lyon sous la direction d'A. Goldman), nous travaillons sur un modèle plus réaliste prenant en compte la relaxation de contrainte : lorsqu'une fissure a lieu en x, il existe une zone « relaxée » autour de x dans laquelle de nouvelles fissures ne peuvent pas se former.

Nous avons donc construit dans [28] un processus stationnaire sur $\mathbb{R}$ modélisant la localisation des fissures. Nous retrouvons le modèle de Widom et à saturation le modèle de Renyi.

Un prolongement de ce travail est prévu. D'un point de vue physique, il serait intéressant de considérer un intervalle de relaxation aléatoire ou dépendant de la contrainte exercée.

6.2.5. *Génomique : comportement asymptotique du score local associé à une marche aléatoire de moyenne nulle ou « petite »*

Participants : Marie-Pierre Etienne, Pierre Vallois.

Le premier travail est en collaboration avec J.J. Daudin (INAPG).

Le score local est un outil important pour l'analyse des séquences biologiques. En effet on attribue une valeur appelée score à chaque nucléotide ou à chaque acide aminé en fonction des propriétés de chacun (charge électrique, propriétés physiques...). Le score global est la somme des scores sur une séquence et le score local est le score maximal obtenu sur l'ensemble de tous les segments possibles. Ayant obtenu un score local élevé, le biologiste se demande s'il est possible que le seul hasard en soit responsable. Pour répondre il faut déterminer la distribution de probabilité du score en supposant que la séquence soit une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Karlin et Altschul[47] ont obtenu un résultat asymptotique pour un score local positif quand l'espérance du score pour une lettre est négative. Récemment, Daudin et Mercier ont obtenu[41] la distribution exacte du score local quelle que soit l'espérance du score pour une lettre. L'étude asymptotique dans le cas d'une espérance nulle n'avait jamais été faite à notre connaissance. Nos résultats démontrent que la croissance du score local est en racine de n au lieu de $\log(n)$ quand $\mathbb{E}[X] = 0$. De plus ils sont facilement utilisables pour déterminer pratiquement le niveau de signification statistique du score local quand $\mathbb{E}[X] = 0$ ou proche de 0 et que n est assez grand. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i; \quad n \geq 1,$$

où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et équidistribuées et admettant un moment d'ordre deux. On notera :

$$a = \mathbb{E}[X_0], \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_0).$$

Le score local associé à la marche $(S_n)_{n\geq 0}$ est le processus :

$$H_n = \max_{0\leq i\leq j\leq n} (S_j - S_i) = \max_{0\leq i\leq j\leq n} (X_{i+1} + \ldots + X_j); \quad n \geq 0.$$

La loi de la variable aléatoire réelle H_n est en général inconnue.

Lorsque $a = \mathbb{E}[X_1] < 0$, Karlin et Dembo[42] ont étudié le comportement asymptotique de H_n, lorsque n tend vers l'infini.

Nous montrons que lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $H_n/(\sigma\sqrt{n})$ converge en loi vers la variable aléatoire $\max_{0\leq u\leq 1} |B_u|$, où $(B_t; t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0.

Rappelons que $\max_{0\leq u\leq 1} |B_u|$ admet une densité qui s'exprime comme la somme d'une série explicite.

Etudions le cas où a est « petit ». On suppose que la loi de X_1 dépend de N (N représentant l'ordre de l'approximation) et que de plus :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 > 0 \quad ; \quad \lim_{N\longrightarrow\infty} \sqrt{N}\mathbb{E}[X_1] = \delta.$$

On montre que, lorsque N tend vers $+\infty$, $H_N/\sqrt{N}$ converge en loi vers ξ avec

$$\xi = \max_{0\leq u\leq 1} (B(u) + \delta u - \min_{0\leq s\leq u} (B(u) + \delta u))$$

La densité de ξ n'est pas explicite mais on montre qu'elle peut s'exprimer à l'aide d'une fonction qui vérifie une équation intégrale. D'où une possibilité de calcul numérique.

Cette direction devrait être menée à bien avec un numéricien nancéien.

Afin de chercher des applications potentielles de notre travail précédent, nous avons étudié dans le cas centré la vitesse de convergence de $\mathbb{P}[H_n/\sqrt{n} \leq x]$ $F(x) = \mathbb{P}[\max_{0\leq u\leq 1} |B_u| \leq x/\sigma]$.

Nous avons montré dans [17] que la valeur absolue de la différence peut être majorée par $C\sqrt{\ln(n)/n}$, où C est une constante explicite.

6.3. Mathématiques financières

6.3.1. Modèles financiers avec asymétrie d'information

Participant : Axel Grorud.

Mots clés : *asymétrie d'information*, *marché financier*, *agent informé*, *grossissement de filtration*, *stratégie optimale*, *équilibre économique*.

Nous étudions des marchés financiers avec asymétrie d'information, c'est-à-dire un modèle mathématique d'évolution d'actifs boursiers dans lequel on suppose la présence d'un investisseur informé ou d'agents faisant des paris différents sur l'évolution de ces actifs.

6.3.2. Techniques de réduction de variance pour les méthodes de Monte-Carlo

Participants : Olivier Bardou, Denis Talay.

Mots clés : *réduction de variance*, *calcul de Malliavin*, *méthodes de Monte-Carlo*.

Olivier Bardou poursuit sa thèse sur le problème de la réduction de variance dans le cadre des méthodes de Monte-Carlo. Les principales applications envisagées concernent le domaine de la finance mathématique. En nous fondant sur des travaux récents[52][45][44][34], nous nous proposons d'utiliser les potentialités du calcul stochastique des variations pour obtenir une réduction de variance dans le cas de certains problèmes numériques liés à la couverture d'options.

En collaboration avec le Professeur Arturo Kohatsu-Higa (Universitat Pompeu Fabra à Barcelone), nous étudions également une approche alternative reposant sur la méthode traditionnelle de fonction d'importance.

6.3.3. Techniques de réduction du biais pour les estimateurs des paramètres d'une diffusion

Participants : Olivier Bardou, Sandrine Bobée, Denis Talay.

Mots clés : *estimateurs de maximum de vraisemblance*, *réduction du biais*, *bootstrap*.

Les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres d'une diffusion sont biaisés. Pour réduire le biais de ces estimateurs, nous leur appliquons la méthode du bootstrap. L'objectif de cette méthode est la construction d'un nouvel estimateur, obtenu à partir de l'estimateur initial par soustraction de son biais empirique. Ce biais empirique est estimé à l'aide d'un algorithme de Monte-Carlo.

La preuve théorique de l'efficacité de cette méthode repose sur le développement asymptotique de la fonction de répartition des estimateurs. Ces développements ont été démontrés récemment dans un cadre très général[56][55]. Des tests numériques réalisés par Sandrine Bobée lors de son stage de DEA ont confirmé la pertinence de cette approche.

6.3.4. Interprétation probabiliste de la solution d'inéquations variationnelles, à l'aide d'EDSR

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Denis Talay.

L'objectif de cette étude est lié au problème de localisation et au choix des conditions aux bords artificielles pour des inéquations variationnelles de la finance. Nous analysons d'une part l'erreur commise par l'introduction de conditions artificielles (de type Neumann tout d'abord, puis de type Dirichlet). D'autre part, nous analysons l'erreur en fonction de la taille du domaine de localisation.

Pour cela, nous donnons une interprétation probabiliste au problème variationnel localisé, avec condition de Neumann

$$\begin{cases} \min(u(t,x) - L(t,x); -\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) - Au(s,x) - f(t,x,u(s,x),(\nabla u\sigma)(t,x))) = 0 \\ u(T,x) = \phi(x) \\ (\nabla u(s,x); (\nabla p(x))) + g(t,x) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\mathcal{O} \end{cases} \tag{10}$$

Le cas du problème variationnel dans tout l'espace a été traité dans [57] en 1997. On montre que le problème (10) admet une unique solution au sens des viscosités, dont on donne une représentation probabiliste grâce à l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie (EDSRR)

$$\begin{cases} Y(s) = \phi(X(T)) + \int_s^T f(\theta, X_\theta, Y_\theta, Z_\theta)d\theta - \int_s^T Z_\theta dW_\theta + R(T) - R(s) + \int_s^T g(\theta, X_\theta)d|\eta_\theta| \\ Y(s) \geq L(s, X_s), \quad t < s \leq T \\ \{R(s)\} \text{ est un processus continu croissant tel que } \int_t^T (Y_\theta - L(\theta, X_\theta))dR_\theta = 0, \end{cases},$$

où la diffusion X est réfléchie sur les bords du domaine

$$\begin{cases} X(s) = x + \int_t^s b(\theta, X_\theta)d\theta + \int_t^s \sigma(\theta, X_\theta)dW_\theta + \eta_s \\ \eta_s = \int_t^s \nabla p(X_\theta)d\eta_\theta, \quad \text{avec} \quad \eta_s = \int_t^s 1_{X(\theta)\in\partial\mathcal{O}} d\eta_\theta. \end{cases}$$

On montre alors que $u(t,x) = Y_t$ est l'unique solution de viscosité du problème localisé.

Actuellement une étude similaire est en cours pour l'interprétation probabiliste du problème variationnel localisé, avec condition de Dirichlet.

6.3.5. Problème de la ruine

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois, Agnès Volpi.

Pour modéliser le niveau d'eau d'un barrage (resp. les actifs d'une compagnie d'assurance) on associe un processus stochastique X, et on s' intéresse au premier instant $T_x(X)$ où X atteint un niveau donné $x > 0$. Dans le premier cas, les sauts de X sont négatifs, et on a montré que, pour une large classe de processus, la loi de $T_x(X)$ s'exprime à l'aide de la famille de lois $\{\mathbb{P}[X_t \in .]; t > 0\}$ (relation dite de Zolotarev).

L'objet du travail est l'étude de $F(x) := \mathbb{P}[T_x(X) < \infty]$ lorsque les sauts sont de signe quelconque.

Nous avons montré que lorsque X est un processus de Poisson composé, F vérifie une équation intégrale. Ce résultat est intéressant car il fournit une méthode d'approximation de la fonction F, en général inconnue.

Nous nous sommes aussi intéressés au comportement asymptotique de $F(x)$ lorsque $x \longrightarrow \infty$: désignons par ψ l'exposant caractéristique du processus de Lévy X. Si ψ admet un zéro $\gamma_0 > 0$ alors $F(x)$ est équivalent à $Ce^{-\gamma_0 x}, \;\; x \longrightarrow \infty$. Avec des hypothèses supplémentaires sur la queue de distribution de la mesure de Lévy associée à X, il est possible de donner un développement asymptotique de $F(x), x \longrightarrow \infty$.

La quantité $K_x = X(T_x(X)) - x$, est appelée « l'overshoot ». Nous montrons qu'il existe une « renormalisation » $\tilde{T}_x(X)$ de $T_x(X)$ tel que le couple $(\tilde{T}_x(X), K_x)$ converge en loi, lorsque x tend vers l'infini, vers une variable aléatoire (T, ξ), où T et ξ sont indépendantes, T est de loi gaussienne et ξ de loi explicite lorsque les sauts de X sont positifs.

6.4. Analyse stochastique

6.4.1. Étude des diffusions rapides

Participants : Christophe Ackermann, Agnès Volpi.

Nous étudions un processus $(X_t; t \geq 0)$, non linéaire, associé à l'équation de diffusion rapide. Ce processus $(X_t; t \geq 0)$ et sa famille de densités $(u(t,.)\ ,\ \ t \geq 0)$ satisfont le système suivant :

$$S_{m,\mu} \qquad \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s)dB_s \\ X_t \;\text{ admet pour densité }\; u(t,.)\ ,\ \ t > 0 \\ X_0 \;\text{ a pour loi }\; \mu \end{cases}$$

où $(B_t; t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, X_0 est une variable aléatoire indépendante de $(B_t; t \geq 0)$ et m est un réel de $]-1/2, 0[$.

Dans un premier temps, nous supposons que μ est la masse de Dirac en 0. Nous montrons alors que (S_{m,δ_0}) admet une unique solution faible $((^0X_t\ ,\ \ t \geq 0),\ \ (^0u(t,.)\ ,\ \ t \geq 0))$, et nous analysons le comportement trajectoriel et en loi de cette solution.

Ensuite nous calculons explicitement, à l'aide de fonctions hypergéométriques bien choisies, les transformées de Laplace de divers temps d'arrêt liés aux trajectoires.

Nous supposons, dans un deuxième temps, que μ a une densité. Nous montrons alors, sous cette hypothèse, que l'équation $(S_{m,\mu})$ a encore une solution faible $(^\mu X_t\ ,\ \ t \geq 0)$. Puis nous obtenons un théorème de renormalisation et nous montrons que le processus $(\lambda\ {}^\mu X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}\ ,\ \ t \geq 0)$ converge en loi, lorsque λ tend vers 0, vers le processus $({}^0X_t\ ,\ \ t \geq 0)$. Le processus $({}^0X_t\ ,\ \ t \geq 0)$ sert donc de « processus de référence » pour l'équation $(S_{m,\mu})$.

6.4.2. Sur les processus engendrés par des opérateurs sous forme divergence

Participant : Antoine Lejay.

Mots clés : *retournement en temps de diffusion*, *processus de Dirichlet*.

Nous continuons notre étude sur les processus dont le générateur infinitésimal est un opérateur sous forme divergence $L = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. En utilisant des techniques de retournement en temps d'une diffusion, nous avons étendu au cas où les coefficients a et b dépendent du temps une décomposition de type Lyons-Zheng[50]. Sous la loi $\mathbb{P}_{s,y}$, c'est-à-dire quand $X_s = y$, le processus engendré par L s'écrit $X_t = y + M_t + N_t + V_t$ pour $t \in [s,T]$. Dans cette expression, M_t est une martingale par rapport à la filtration engendrée par X entre s et t, $N_t = -\frac{1}{2}M_t + \frac{1}{2}(\bar{M}_{T+s-t} - \bar{M}_{T+s})$, où $\bar{M}$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par X entre les temps t et T, et $V_t = -\frac{1}{2}\int_s^t \Gamma^{-1} a \cdot \nabla\Gamma(r, X_r)\ \mathrm{d}r + \int_s^t b(r, X_r)\ \mathrm{d}r$, où Γ est la densité du processus X. Cette expression prouve d'une part que X est un processus de Dirichlet, c'est-à-dire la somme d'une martingale et d'un processus à variation quadratique nulle. Mais elle permet surtout de définir des intégrales stochastiques de type $\int_0^t f(X_r)\ \mathrm{d}X_r$ (voir [53] par exemple), ainsi que des solutions d'équations différentielles $Y_t = y + \int_0^t f(Y_r)\ \mathrm{d}X_r$ à l'aide de la théorie des *rough paths*. Pour cela, voir le paragraphe 6.4.3.

6.4.3. Rough paths

Participant : Antoine Lejay.

Mots clés : *intégration le long de trajectoires irrégulières*, *équations différentielles stochastiques*, *processus stochastiques engendrés par un opérateur sous forme divergence*.

La théorie des « rough paths », qui s'est développée au cours de la dernière décennie[51], permet de donner un sens aux intégrales et équations différentielles suivantes :

$$y_t = y_0 + \int_0^t f_i(x_s)\ \mathrm{d}x_s^i \quad \text{et} \quad z_t = z_0 + \int_0^t g_i(z_s)\ \mathrm{d}x_s^i$$

lorsque x est une fonction continue pouvant être irrégulière. Cela est vrai si, étant donné un chemin x à p-variation finie (c'est-à-dire $\sup_{\text{partitions}\ 0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n\leq 1} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|^p < +\infty$), il est possible de construire l'équivalent des intégrales itérées $\int_{s<r_1<\cdots<r_k<t} \mathrm{d}x_{r_1}^{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{r_k}^{i_k}$ pour $k = 1,\cdots,\lfloor p \rfloor$. Dans le cas du mouvement brownien, $p > 2$, et les intégrales ainsi construites par cette théorie correspondent aux intégrales de Stratonovich.

Dans [30], nous avons appliqué cette théorie aux trajectoires d'un processus X engendré par un opérateur sous forme divergence $\mathrm{div}(a\nabla\cdot) + b\nabla\cdot$, ce qui permet de donner un sens aux intégrales $Y_t = y + \int_0^t f_i(X_s)\mathrm{d}X_s^i$ et aux équations différentielles stochastiques $Z_t = z + \int_0^t g_i(Z_s)\mathrm{d}X_s^i$. De plus, nous donnons aussi une réponse aux questions suivantes :

(i) Si $(X^\delta(\omega))_{\delta>0}$ est une famille d'approximations linéaires par morceaux d'une trajectoire de $X(\omega)$, qu'elle est la limite de $Y^\delta(\omega) = y + \int_0^\cdot f_i(X_s^\delta(\omega))\mathrm{d}X_s^{i,\delta}(\omega)$ et de l'équation différentielle ordinaire $Z^\delta = z + \int_0^\cdot g_i(Z_s^\delta(\omega))\mathrm{d}X_s^{i,\delta}(\omega)$?

(ii) À quelle condition a-t-on la convergence des processus Y^δ et Z^δ définis ci-dessus lorsque $(X^\delta)_{\delta>0}$ est une famille convergente de processus engendrés par des opérateurs sous forme divergence ?

Nous avons aussi rédigé un article d'introduction à la théorie des « rough paths » [21]. Par sa généralité, cette théorie est potentiellement riche en applications, et permet aussi de comprendre ou d'expliquer certains résultats, notamment en ce qui concerne la simulation des équations différentielles stochastiques.

6.4.4. Indépendance du temps et de la position d'une marche aléatoire

Participants : Christophe Ackermann, Bernard Roynette.

Soit $(S_n, n \geq 0)$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, et T un temps d'arrêt dans la filtration naturelle engendrée par cette marche. En collaboration avec G. Lorang (Université du Luxembourg), nous avons cherché à caractériser tous les temps d'arrêt T tels que S_T et T soient des variables aléatoires indépendantes. Ce travail a été soumis pour publication au journal *Revista Matemática Iberoamericana*.

6.4.5. Convergence d'un processus de branchement

Participant : Bernard Roynette.

Soit $(Z_t, t \geq 0)$ un processus de branchement à valeur dans une variété compacte. Soit $|Z_t|$ la masse de la mesure aléatoire Z_t. Nous décrivons comment il faut choisir la loi de branchement de sorte que $Z_t/|Z_t|$ converge, quand $t \longrightarrow +\infty$ vers une distribution spécifiée à l'avance. Ce travail, en collaboration avec Nicolas Fournier (Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré), a été soumis pour publication aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré*.

6.4.6. Renormalisation brownienne

Participants : Bernard Roynette, Pierre Vallois.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un processus brownien linéaire, et $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. En collaboration avec Marc Yor (professeur à l'Université Paris 6), nous nous intéressons à la convergence quand $t \longrightarrow \infty$ de la mesure

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t u(B_s)ds\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t u(B_s)ds\right)\right]}\mathbb{W}_{|\mathcal{F}_t},$$

où $\mathbb{W}$ est la mesure de Wiener. Nous montrons que lorsque cette limite existe, elle est la loi d'un processus de Markov que nous décrivons.

6.4.7. Diffusions coalescentes

Participants : Bernard Roynette, Étienne Tanré.

Nous décrivons le comportement d'une particule (X_t, M_t), où X_t désigne la position d'une particule et M_t sa masse. Le processus X_t est la solution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients dépendent de la masse. La masse M_t est régie par une équation de type Smoluchowski. En collaboration avec Nicolas Fournier (Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré), nous mettons à jour un phénomène de « changement de phase » : le comportement de X_t est tout-à-fait différent de ce qui se passerait si la masse n'intervenait pas. Nous montrons, en particulier, la création d'un amas de masse infinie à l'origine, quand $t \longrightarrow +\infty$.

6.4.8. Amplitude du mouvement brownien avec dérive

Participants : Étienne Tanré, Pierre Vallois.

Nous nous sommes intéressés à l'amplitude du mouvement brownien avec dérive. Supposons que la dérive soit positive. Le processus tend vers l'infini lorsque le temps tend vers l'infini. Il existe en particulier un minimum absolu. Il est alors possible de décomposer la trajectoire brownienne en remontant le temps (à partir de l'instant où le processus atteint son minimum) à travers les amplitudes successives. Il apparaît une suite dénombrable d'instants aléatoires (qui ne sont pas des temps d'arrêt) et de processus. Il est possible de décrire la loi de ces différents objets. Désignons par $\theta(a)$ le premier instant où l'amplitude du mouvement brownien avec dérive atteint le niveau a. On sait démontrer deux théorèmes de convergence au premier et second ordre de $\theta(a)$ lorsque $a \longrightarrow +\infty$ (du type loi des grands nombres et théorème central limite). Ces résultats peuvent s'appliquer en finance : dans le cadre du modèle de Black et Scholes, les cours suivent une loi qui est l'exponentielle d'un mouvement brownien avec dérive. Il semble possible d'estimer la tendance grâce aux amplitudes successives des cours. Notre étude pourrait fournir un cadre mathématique rigoureux à certaines techniques de l'analyse qualitative.

6.4.9. Calcul stochastique généralisé

Participants : Ivan Nourdin, Pierre Vallois.

Dans une série de travaux précédents, avec Fransesco Russo (professeur à l'Université Paris XIII), nous avions défini la notion d'intégrale stochastique et de crochets généralisés.

Errami et Russo ont montré récemment une formule d'Itô avec une fonction f de classe C^3 et un processus stochastique admettant un crochet « fort » d'ordre trois.

Avec Mihai Gradinaru (Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré) et F. Russo, nous venons de montrer dans [18] une formule d'Itô avec une fonction f de classe C^4 et le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \geq 1/4$. Ce processus stochastique est moins régulier que ceux considérés par Errami et Russo car il n'admet pas de crochet « fort » d'ordre trois. En revanche un crochet faible d'ordre trois et une variation d'ordre quatre peuvent être définis. Avec M. Gradinaru, F. Russo, nous avons prolongé le travail précédent en introduisant des intégrales symétriques d'ordre m associées à une mesure symétrique ν sur $[0, 1]$. Ceci nous permet d'obtenir de nouvelles formules d'Itô. Nous avons étudié en profondeur le cas du mouvement brownien fractionnaire.

Dans l'article [18], les intégrales stochastiques généralisées (par exemple la variation quadratique, l'intégrale de Stratonovich) que nous définissons sont des limites dans L^2 de processus. Il parait naturel de montrer que sous certaines hypothèses, la convergence a lieu presque sûrement. Nous étudions également la convergence au second ordre.

7. Contrats industriels

7.1. Collaboration avec EDF-Chatou : Modélisation du prix de l'électricité sur un marché spot

Participants : Mireille Bossy, Madalina Deaconu, Etienne Tanré.

Nous poursuivons notre collaboration avec EDF-Chatou sur le thème de la formation des prix de l'électricité sur des marchés spots localisés et animés par plusieurs producteurs. Nous nous intéressons aux prix spot sur les différents marchés, résultant d'un équilibre de production pour les demandes spot entre les producteurs présents. En s'appuyant sur le rôle d'ajustement de ces marchés spots, par rapport à la demande, nous faisons des hypothèses comportementale simples sur les deux composantes principales du problème « fonctions de demande/demandeurs » et « fonctions d'offre/offreurs ». Notre approche consiste à donner les grandes lignes caractéristiques des équilibres potentiels (sous ces hypothèses) dans le cas général et l'étude plus détaillée de cas particuliers à petits nombres de marchés et producteurs.

7.2. Collaboration avec EDF-Chatou : Etude de schémas numériques pour les équations différentielles stochastiques intervenant dans les écoulements diphasiques turbulents et dispersés

Participants : Eric Peirano, Denis Talay.

En collaboration avec Jean-Pierre Minier (EDF), nous nous sommes intéressés à l'intégration numérique des équations différentielles stochastiques (EDS) intervenant dans la modélisation et la simulation numérique des écoulements diphasiques selon l'approche Lagrangienne.

Les écoulements diphasiques turbulents et dispersés se caractérisent par un fluide en régime turbulent au sein duquel se trouvent des particules (sous forme liquide, solide ou gazeuse). L'approche Lagrangienne consiste à simuler l'écoulement fluide avec des méthodes de résolution classiques pour équations aux dérivées partielles (EDP) et à décrire le comportement dynamique des particules discrètes par des EDS de type Mac-Kean

$$dZ_i(t) = A_i(t, \mathbf{Z}, \mathbb{E}[\mathbf{Z}], \mathbb{E}[\mathbf{ZZ}], \cdots)\ dt + B_{ij}(t, \mathbf{Z}, \mathbb{E}[\mathbf{Z}], \mathbb{E}[\mathbf{ZZ}], \cdots)\ dW_j,$$

où $\mathbf{Z}$ est le vecteur d'état qui contient les variables qui caractérisent les particules discrètes. Nous nous intéressons ici à une approche faible, c'est à dire à l'approximation de quantités de type $\mathbb{E}\left[f(Z_i(T))\right]$, ce qui dans la pratique correspond aux préoccupations de l'ingénieur qui aura à donner des estimations sur les différents moments des variables aléatoires.

Des schémas numériques faibles d'ordre 1 et 2 en temps ont été développés dans les travaux de l'exercice 2001. Nous avons finalisé des simulations d'écoulements types mettant en évidence, dans certains cas, l'apport considérable d'un schéma d'ordre 2. Ces essais numériques ont à nouveau confirmé que l'on peut réduire le temps de calcul d'un facteur 10 par rapport au schéma d'Euler (ordre 1) pour une précision a priori identique.

7.3. Contrat GDF

Participants : Olivier Bardou, Axel Grorud, Antoine Lejay, Denis Talay.

7.3.1. Prix des produits pétroliers

Nous avons étudié la modélisation des prix par des séries chronologiques et par des processus stochastiques.

La modélisation par des séries chronologiques n'a pas été totalement satisfaisante. Les évolutions paraissaient plutôt non linéaires.

La modélisation des prix par des processus de la forme $dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$ avec volatilité locale et surtout l'utilisation d'estimateurs non paramétriques (de D. Florens-Zmirou) pour la fonction volatilité σ a permis de faire apparaître une convexité de la volatilité locale qui s'interprète en terme d'équilibre économique. Le minimum de la courbe est le point d'équilibre (là où les prix sont les moins discutés).

La courbe de σ remonte plus vers les grandes valeurs de S qu'elle ne remonte lorsque les prix baissent car dans ce cas l'OPEP diminue les quotas de production ; nous avons donc une courbe de σ caractéristique des produits « rares ».

7.3.2. Test d'indépendance de diffusions

Mots clés : *tests statistiques*, *indépendance de diffusion*, *mouvement brownien*.

Dans le cadre du contrat avec GDF sur l'étude des indices boursiers pétroliers, nous étudions la modélisation de ces indices par des processus stochastiques. Ces indices boursiers sont modélisés par un système de semimartingales de type

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \sigma_{i,j}(r, X_r)\mathrm{d}B_r^j + \int_0^t b_i(r, X_r)\mathrm{d}r$$

pour $i = 1, \cdots, \ell$, où $B^1, \cdots, B^k$ sont des mouvements browniens indépendants. Si le nombre ℓ de diffusions est connu, la question est de savoir combien de mouvements browniens doivent être utilisés. Cette question est d'ailleurs cruciale pour bien d'autres applications, notamment en finance.

Dans un premier temps, nous nous intéressons donc à l'étude des crochets de semimartingales $\langle X^i, X^j\rangle$. Si le crochet de X^i et X^j n'est pas identiquement nul, alors le coefficient $a_{i,j}(r)$ de la matrice $a(r) = \sigma(r)\sigma^{\mathrm{t}}(r)$ n'est pas identiquement nul. Cela implique qu'au moins un même brownien unidimensionnel est nécessaire pour modéliser à la fois X^i et X^j.

Nous montons donc un test statistique afin de décider si, étant donné un échantillon $(X^i_{t_m}, X^j_{t_m})_{m=0,\cdots,M}$ de la trajectoire du processus bidimensionnel (X^i, X^j) en des temps $t_0, \cdots, t_M$ de $[0, T]$, alors $a_{i,j}$ est nul ou non.

7.4. Collaboration AMAZONE, Bull/INRIA

Participants : Christophe Berthelot, Mireille Bossy, Sébastien Chaumont, Madalina Deaconu, Denis Talay.

Mots clés : *équations différentielles stochastiques rétrogrades*, *solution de viscosité*, *condition au bord artificielle*, *contrôle stochastique*, *équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman*.

Cette collaboration poursuit le travail effectué dans le cadre de l'action Amazone du G.I.E. Dyade qui s'est arrêté fin mars. Pour une présentation d'Amazone, voir http://www-sop.inria.fr/omega/Archives/Amazone/amazone.html.

Le travail sur l'estimation d'erreur due à la localisation du domaine pour des inéquations variationnelles correspond à la thèse de Christophe Berthelot. Le travail sur la gestion optimale de bilan correspond à la thèse de Sébastien Chaumont.

Cette collaboration, démarrée en mars 1999, s'intéresse aux problèmes de performance de codes de calcul numérique intensif en finance. Dans ce domaine, l'utilisation de calculateurs puissants est nécessaire pour traiter soit des problèmes simples de très grande dimension ou nécessitant des temps de réponse courts (évaluation d'option, prévisions et sensibilité de bilan), soit des problèmes complexes comme la résolution de problèmes de contrôle stochastique (gestion de bilan).

Pour les calculs numériques, Amazone utilise les machines de la gamme SX de NEC à architecture vectorielle/parallèle.

7.4.1. Gestion optimale de bilan de compagnie d'assurance

Mots clés : *contrôle optimal*, *équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman*, *solutions de viscosité*, *différences finies généralisées*.

Ce travail correspond au sujet de thèse de Sébastien Chaumont, co-dirigée par Bernard Roynette et Elisabeth Rouy, soutenue le 6 décembre 2002.

On s'intéresse au problème de la gestion du bilan bancaire d'une compagnie proposant un contrat financier de type assurance-vie, sur la base d'un modèle élaboré par Mireille Bossy, Nathalie Pistre et Denis Talay[36].

Dans ce modèle, l'assuré a le droit de quitter le contrat à tout instant, il perçoit alors une somme qui dépend des bénéfices de la compagnie sur ses placements financiers. L'originalité de notre étude provient essentiellement de la présence de cette option de retrait anticipé, qui empêche l'application des méthodes de couverture habituelles.

Afin d'éviter le recours à des méthodes de calcul probabilistes (de type Monte-Carlo) trop coûteuses en temps de calcul, on souhaite utiliser une méthode déterministe (de type différences finies). Cependant pour ce type de problème où la variance dépend fortement de la stratégie choisie, un schéma aux différences finies classique (calcul à partir des plus proches voisins sur une grille de discrétisation) peut ne pas être efficace (en particulier si la matrice de covariance n'est pas à diagonale dominante). En se basant sur des idées de Harold J. Kushner[48], on a mis au point un algorithme de calcul de type différences finies généralisées (où interviennent des points non-immédiatement voisins sur la grille). On justifie la convergence de cet algorithme en étendant des techniques utilisées par Guy Barles et Elisabeth Rouy[33] dans leurs travaux récents sur le problème de Dirichlet généralisé au cas d'EDP non-linéaires du second ordre dégénérées.

En collaboration avec Christophe Berthelot, nous avons programmé et mis en œuvre cet algorithme rapide qui permet d'approcher la solution d'une large classe d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman avec condition au bord de type Dirichlet. On présente quelques illustrations des résultats obtenus et leur interprétation.

8. Actions régionales, nationales et internationales

8.1. Actions nationales

A. Lejay est coordinateur du projet « Études probabilistes autour des opérateurs sous forme divergence » du Groupe de Recherche MOMAS (Modélisations Mathématiques et Simulations numériques liées aux problèmes de gestion des déchets nucléaires) financé par le CEA, l'ANDRA, l'EDF, le BRGM, le CNRS et le CEA. D. Talay et M. Martinez sont aussi membres de ce projet.

9. Diffusion des résultats

9.1. Animation de la communauté scientifique

M. Bossy a été élue membre du conseil d'administration de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées & Industrielles).

M. Deaconu et D. Talay sont reviewers permanents à *Mathematical Reviews*.

M. Deaconu est membre du Comité des Projets de l'INRIA Lorraine.

M. Deaconu, B. Roynette et P. Vallois sont membres de la Commission de Spécialistes des sections 25 et 26 de l'université Henri Poincaré.

M. Deaconu est membre du Conseil du Laboratoire de l'Institut Élie Cartan.

M. Deaconu a été membre de la Commission d'Audition, Concours de recrutement de chargés de recherche de 2$^{\text{ème}}$ classe, 2002, à l'INRIA Lorraine ainsi que de la Commission pour les postes d'accueil 2002 de l'INRIA Lorraine.

M. Deaconu est membre du bureau du groupe MAS (Modélisation Aléatoire et Statistiques) de la SMAI.

A. Lejay a co-organisé une journée thématique probabiliste intitulée « Méthodes particulaires et modèles probabilistes pour le transport des déchets radioactifs » dans le cadre du Groupe de Recherche MOMAS en novembre à Paris.

A. Lejay est membre de l'*Opération Postes* (action soutenue par la SMAI et la SMF).

A. Lejay est responsable depuis septembre 2002 du groupe de travail de probabilités de l'équipe de probabilités de l'Institut Élie Cartan.

B. Roynette et P. Vallois ont organisé la rencontre *NancyProb@* en novembre 2002 à Nancy. Trois thèmes ont été retenus : les équations de Smoluchowski, les arbres aléatoires et l'analyse stochastique.

B. Roynette et P. Vallois ont organisé les *journées Évry-Nancy-Strasbourg* à Nancy en décembre 2002.

B. Roynette est chef du département de mathématiques de l'Institut Élie Cartan depuis mars 2002.

B. Roynette est responsable du séminaire de probabilités de l'Institut Élie Cartan.

B. Roynette a été président de la commission d'évaluation du CNRS du laboratoire de mathématiques d'Orléans.

B. Roynette a été membre de la CNE, qui vient de remettre son rapport d'évaluation des départements de mathématiques de Reims, Amiens et Rouen.

D. Talay est membre de la Commission de Spécialistes des sections 25 et 26 de l'université de Nice Sophia Antipolis.

D. Talay est éditeur associé des revues suivantes : *Stochastic Processes and their Applications*, *Annals of Applied Probability*, *Finance and Stochastics*, *Monte Carlo Methods and Applications*, *Mathematics of Computation-AMS*, *Stochastics and Dynamics*, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, *ESAIM Probability and Statistics*.

D. Talay est membre des comités scientifique et de gestion du « France Hong Kong Center for Financial and Insurance Engineering » (INRIA, Hong Kong City University, École Polytechnique).

D. Talay est membre du comité scientifique du Cemracs.

D. Talay a achevé en septembre son mandat de trois ans de président du groupe MAS (Modélisation Aléatoire et Statistique) de la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées & Industrielles).

D. Talay a participé à trois jurys de thèse, dont un à l'étranger.

D. Talay a été membre des comités scientifiques des Journées MAS-SMAI 2002 (Grenoble) et de la conférence *Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods 2002* (Singapour).

P. Vallois a participé au jury de thèse de C. Tudor le 11 septembre 2002 à La Rochelle.

9.2. Enseignement universitaire

M. Bossy a donné les cours suivants : « Introduction au calcul stochastique et mathématiques financières » dans le DESS IMAFA (« Informatique et Mathématiques Appliquées à la Finance et à l'Assurance ») de l'UNSA intitulé *Introduction aux risques financiers des marchés de l'énergie*, dans le mastère « Ingénierie et Gestion de l'Energie » de l'École des Mines de Paris à Sophia-Antipolis.

M. Deaconu (30h) a donné un cours-TD en Licence de l'IUP de Mathématiques financières de l'Université de Nancy 2. Le sujet a porté sur les mathématiques financières.

D. Talay est professeur chargé de cours à l'École Polytechnique, et enseigne au DEA de probabilités de l'Université Paris 6. Il a aussi enseigné à l'ETH-Zürich et à l'ESSI.

P. Vallois a donné un cours de mathématiques financières en DESS, option Aide à la Décision, et en section Mathématiques pour la Finance, une nouvelle section de DESS ouverte avec l'École des Mines de Nancy en septembre 2001. Il a aussi donné un cours sur la construction du mouvement brownien au DEA de mathématiques appliquées de Nancy.

9.3. Thèses et habilitation à diriger des recherches

Sébastien Chaumont a soutenu sa thèse intitulée « Gestion optimale de bilan de compagnie d'assurance » le 6 décembre 2002 a Nancy.

9.4. Participation à des colloques, séminaires, invitations

M. Bossy a exposé aux *Journées MAS* de Grenoble (2-4 septembre 2002).

A. Grorud a été invité par le Professeur Bernt Øksendal (Université d'Oslo) au Workshop sur l'Insider trading du 18 octobre 2002.

A. Lejay a été invité à la conférence *Backward Stochastic Differential Equations, Finance and Applications* (29 août 2002-2 septembre 2002, Weihei, Chine), aux *journées MAS* (septembre 2002, Grenoble). Il a également été invité aux séminaires de probabilités du CMI (Université de Provence, Marseille), de l'équipe de probabilités de l'Université du Maine (Le Mans), ainsi qu'à celui de Probabilités de Toulouse III.

A. Lejay a exposé aux Journées Évry-Nancy-Strasbourg (Mai 2002, Strasbourg), et aux Journées OMEGA à Nancy (Mars 2002, Nancy).

A. Lejay a été invité pour une visite scientifique de quelques jours à l'Université Toulouse III.

B. Roynette a été invité à donner des séminaires à Strasbourg et à l'École Polytechnique. Il a également donné un exposé aux « Journées de probabilités » à La Rochelle.

D. Talay a été orateur plénier à la *14th International Conférence on Domain Decomposition Methods* (Cocoyoc, Mexique) et à la conférence *Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods 2002* (Singapour). Il a donné un exposé de Colloquium des universités de Berlin. Il a également donné des séminaires à la City University of Hong Kong et à l'université de Marne la Vallée.

E. Tanré a exposé au séminaire de Probabilités de Barcelone, au séminaire *Modèles Stochastiques* de l'École Polytechnique, au séminaire *EDP-Analyse numérique* de l'Université de Nice, au séminaire de Statistique et Probabilités de l'Université de Lille.

E. Tanré a exposé aux *Journées MAS* de Grenoble (2-4 septembre 2002).

P. Vallois a exposé à la *Second Maphysto conference on Lévy processes. Theory and applications* à Aarrhus (21-25 janvier 2002), au Weirstraß Institute de Berlin en février 2002, à la conférence *Stochastic analysis, random fields and applications* à Ascona (19-22 mai 2002), aux *Neuvièmes journées Évry-Nancy-Strasbourg* à Strasbourg (30-31 mai 2002), à la *8th International Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics* à Vilnius (juin 2002), aux *Journées MAS* à Grenoble (2-4 septembre 2002) et aux *Journées de Probabilités de La Rochelle* (9-13 septembre 2002).

9.4.1. Invitations

Paavo Salminen de l'université de Turku (Finlande) a passé un mois à Nancy en tant que professeur invité. Nous avons établi de nouveaux théorèmes de Ray et Knight concernant le processus des temps locaux browniens arrêtés en certains temps d'arrêt randomisés. Ce travail est en cours de rédaction.

Le séminaire de Probabilités de l'Institut Élie Cartan organisé à Nancy par B. Roynette a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants :

Pierre Calka (Université C. Bernard de Lyon) ; Christian Lecot (Université de Savoie) ; Ely Merzbach (Université de Barilan, Israël) ; Fabienne Castell (Université de Provence) ; M. Bojecko (Université de Besançon) ; Gérard Lorang (Centre universitaire de Luxembourg) ; Jean Bertoin (Paris 6) ; Thomas Bruss (Université libre de Bruxelles) ; Jean-François Delmas (École des Ponts) ; Clémentine Coulon-Prieur (Université de Cergy-Pontoise) ; Samuel Herrmann (Université de Berlin) ; Gilles Pagès (Université Paris 6) ; Philippe Robert (INRIA Rocquencourt) ; Paavo Salminen (Abo Akademic University, Finlande) ; Bartek Blasczczyzyn (ENS Ulm et INRIA) ; Ilya Pavlyukevich (Humboldt-Universität de Berlin) ; Aimé Lachal (INSA de Lyon) ; Olivier Garet (Université d'Orleans).

Le séminaire *Théorie et applications numériques des processus stochastiques* organisé à Sophia-Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs extérieurs au projet suivants :

Arturo Kohatsu-Higa (Universitat Pompeu Fabra, Barcelone) ; François Delarue (Université de Provence) ; Christophe Giraud (Université de Nice) ; Eulalia Nualart (Université Paris 6) ; Florent Malrieu (Université de Rennes).

Le séminaire de Mathématiques financières organisé à Sophia Antipolis par M. Bossy a accueilli les orateurs : Marian Ciucă (Université de Provence) et Monique Jeanblanc (Université d'Évry).

10. Bibliographie

Bibliographie de référence

[1] V. BALLY, D. TALAY. *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II) : convergence rate of the density.* in « Monte Carlo Methods and Applications », volume 2, 1996, pages 93-128.

[2] V. BALLY, D. TALAY. *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I) : convergence rate of the distribution function.* in « Probability Theory and Related Fields », numéro 1, volume 104, 1996.

[3] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, D. TALAY, P. VALLOIS. *Nonlinear self stabilizing processes I : Existence, invariant probability, propagation of chaos.* in « Stoch. Proc. Appl. », volume 75, 1998, pages 173-201.

[4] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS. *Branching process associated with 2d-Navier Stokes equation.* in « Rev. Mat. Iberoamericana », numéro 2, volume 17, 2001, pages 331-373.

[5] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS. *Nonlinear self stabilizing processes II : Convergence to invariant probability.* in « Stoch. Proc. Appl. », volume 75, 1998, pages 203-224.

[6] P. BERNARD, D. TALAY, L. TUBARO. *Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients.* in « Math. Comp. », numéro 208, volume 63, 1994, pages 555-587.

[7] M. BOSSY, D. TALAY. *Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles : application to the Burgers equation.* in « Ann. Appl. Probab. », volume 6, 1996, pages 818-861.

[8] C. GRAHAM, T. KURTZ, S. MÉLÉARD, P. PROTTER, M. PULVIRENTI, D. TALAY. *Probabilistic Models for Nonlinear PDE's and Numerical Applications.* série Lecture Notes in Mathematics, numéro 1627, Springer-Verlag, 1996, CIME Summer School, D. Talay and L. Tubaro (Eds.).

Articles et chapitres de livre

[9] C. BERTHELOT, M. BOSSY, N. PISTRE. *Risque associé au contrat d'assurance-vie pour la compagnie d'assurance.* in « Économie et Prévision », numéro 3, volume 149, 2002.

[10] M. BOSSY. *Optimal rate of convergence of a stochastic particle method to solutions of 1d viscous scalar conservation laws.* in « Math. Comp. », 2003, à paraître.

[11] M. BOSSY, B. JOURDAIN. *Rate of convergence of a particle method for the solution a 1D viscous scalar conservation law in a bounded interval.* in « Ann. Probab. », numéro 4, volume 30, 2002.

[12] F. CAMPILLO, A. LEJAY. *A Monte Carlo method without grid for a fractured porous domain model.* in « Monte Carlo Methods Appl. », numéro 2, volume 8, 2002, pages 129-147.

[13] B. DE MEYER, B. ROYNETTE, P. VALLOIS, M. YOR. *On independent times and positions for Brownian motion.* in « Rev. Mat. Iberoamericana », à paraître.

[14] B. DE MEYER, B. ROYNETTE, P. VALLOIS, M. YOR. *Sur l'indépendance d'un temps d'arrêt et de la position B_T d'un mouvement brownien $(B_u; u \geq 0)$.* in « C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. », 2002, à paraître.

[15] M. DEACONU, N. FOURNIER. *Probabilistic approach of some discrete and continuous coagulation equations with diffusion.* in « Stochastic Processes Appl. », volume 101, 2002, pages 83-111.

[16] M. DEACONU, N. FOURNIER, E. TANRÉ. *A pure jump Markov process associated with Smoluchowski's coagulation equation.* in « Ann. Probab. », numéro 4, volume 30, 2002.

[17] M.-P. ETIENNE, P. VALLOIS. *Approximation of the distribution of the supremum of a centered random walk. Application to the local score.* in « Methodol. Comput. Appl. Probab. », à paraître.

[18] M. GRADINARU, F. RUSSO, P. VALLOIS. *Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geq 1/4$.* in « Annals Probab. », 2003, à paraître.

[19] A. LEJAY. *BSDE driven by Dirichlet process and semi-linear parabolic PDE. Application to homogenization.* in « Stochastic Process. Appl. », numéro 1, volume 97, 2002, pages 1-39.

[20] A. LEJAY. *On the decomposition of excursions measures of processes whose generators have diffusion coefficients discontinuous at one point.* in « Markov Process. Related Fields », numéro 1, volume 8, 2002, pages 117-126.

[21] A. LEJAY. *An introduction to rough paths.* série Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2003, à paraître.

[22] L. PASTUR, A. LEJAY. *Matrices aléatoires : Statistique asymptotique des valeurs propres.* série Lecture Notes in Mathematics, volume 1801, Springer-Verlag, 2002, pages 135-165.

[23] B. ROYNETTE, P. VALLOIS, M. YOR. *A solution to Skorokhod's embedding for linear Brownian motion and its local time.* in « Stud. Sci. Math. Hung. », volume 39, 2002, pages 97-127.

[24] D. TALAY. *Stochastic Hamiltonian systems : exponential convergence to the invariant measure, and discretization by the implicit Euler scheme.* in « Markov Process. Related Fields », numéro 2, volume 8, 2002, pages 163-198, Inhomogeneous random systems (Cergy-Pontoise, 2001).

[25] D. TALAY, O. VAILLANT. *A stochastic particle method with random weights for the computation of statistical solutions of McKean-Vlasov equations.* in « Annals Appl. Prob. », 2002, à paraître.

[26] D. TALAY, Z. ZHENG. *Worst case model risk management.* in « Finance and Stochastics », numéro 4, volume 6, 2002, pages 517-537.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[27] E. PEIRANO, D. TALAY. *Domain decomposition by stochastic methods.* in « 14th International Conference on Domain Decomposition Methods », 2002, http://ihrserver.igeofcu.unam.mx/dd14/proceedings/index.html.

Rapports de recherche et publications internes

[28] P. CALKA, A. MÉZIN, P. VALLOIS. *Stochastic modelling of a unidirectional multicracking phenomenom.* Prépublication, Institut Élie Cartan, Université Nancy I, 2002.

[29] J. GIET, E. TANRÉ. *Euler scheme for rough functional of regular diffusions.* Prépublication, numéro 6, Institut Élie Cartan, Université Nancy I, 2002.

[30] A. LEJAY. *Stochastic Differential Equations driven by processes generated by divergence form operators.* Prépublication, numéro 23, Institut Élie Cartan, Université Nancy I, 2002.

Divers

[31] O. BARDOU, S. BOBÉE, C. CUCURULLO, A. GRORUD, A. LEJAY, D. TALAY. *Modélisation et simulation des indices pétroliers.* 2002, Rapport intermédiaire de collaboration INRIA-GDF.

[32] K. BERKAOUI, M. BOSSY, É. PEIRANO, D. TALAY, J.-P. MINIER. *Rapport de Collaboration EDF/INRIA (Projet* OMEGA*) sur la simulation d'écoulements diphasiques et turbulents réactifs.*. 2002, Rapport final de collaboration INRIA-EDF.

Bibliographie générale

[33] G. BARLES, E. ROUY. *A Strong Comparison Result for the Bellman Equation Arising in Stochastic Exit Time Control Problems and its Applications.* in « Comm. Partial Differential Equations », numéro 11 & 12, volume 23, 1998, pages 1945-2033.

[34] E. BEN-HAMOU. *Application of Malliavin Calculus and Wiener Chaos to Option Pricing Theory.* thèse de doctorat, The London School of Economics and Political Science, 2000.

[35] S. BENACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS. *Branching process associated with 2d-Navier Stokes equation.* in « Rev. Mat. Iberoamericana », numéro 2, volume 17, 2001, pages 331-373.

[36] M. BOSSY, N. PISTRE, D. TALAY. *Étude numérique de sensibilité d'un bilan de société d'assurance dans le cadre de contrats avec options de sortie.* in « Banques et marchés », volume 28, 1997.

[37] F. CAMPILLO, A. LEJAY. *A Monte Carlo Method to Compute the exchange coefficient in the double porosity model.* in « Monte Carlo Methods Appl. », numéro 1-2, volume 7, 2001, pages 65-72, Conference proceedings of *Monte Carlo 2000*.

[38] F. CAMPILLO, A. LEJAY. *A Monte Carlo method without grid for a fractured porous domain model.* in « Monte Carlo Methods Appl. », numéro 2, volume 8, 2002, pages 129-148.

[39] A. CHORIN. *Numerical study of slightly viscous flow.* in « J. Fluid Mech. », numéro 4, volume 57, 1973, pages 785-796.

[40] A. CHORIN. *Vortex sheet approximation of boundary layers.* in « J. Comp. Phys. », volume 27, 1978, pages 428-442.

[41] J.-J. DAUDIN, S. MERCIER. *Distribution exacte du score local d'une suite de variables indépendentes et identiquement distribuées.* in « C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. », numéro 9, volume 329, 1999, pages 815-820.

[42] A. DEMBO, S. KARLIN. *Poisson approximations for r-scan processes.* in « Ann. Appl. Probab. », numéro 2, volume 2, 1992, pages 329-357.

[43] O. FAUGERAS, F. CLÉMENT, R. DERICHE, R. KERIVEN, T. PAPADOPOULO, J. ROBERTS, T. VIÉVILLE, F. DEVERNAY, J. GOMES, G. HERMOSILLO, P. KORNPROBST, D. LINGRAND. *The inverse EEG and MEG problems : The adjoint state approach I : The continuous case.* rapport technique, numéro RR-3673, INRIA, mai, 1999, http://www.inria.fr/rrrt/rr-3673.html.

[44] E. FOURNIÉ, J.-M. LASRY, J. LEBUCHOUX, P.-L. LIONS. *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II.* in « Finance and Stochastics », volume 5, 2001, pages 201-236.

[45] E. FOURNIÉ, J.-M. LASRY, J. LEBUCHOUX, P.-L. LIONS, N. TOUZI. *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance.* in « Finance and Stochastics », volume 3, 1999, pages 391-412.

[46] C. GRAHAM, T. G. KURTZ, S. MÉLÉARD, P. E. PROTTER, M. PULVIRENTI, D. TALAY. *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations.* série Lecture Notes in Mathematics, volume 1627, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Lectures given at the 1st Session and Summer School held in Montecatini Terme, May 22-30, 1995, Edited by Talay and L. Tubaro, Fondazione C.I.M.E...

[47] S. F. KARLIN. *Methods for assessing the statistical significance of molecular sequence features by using general scoring schemes.* in « Proc. Natl. Acad. Sci. USA », numéro 6, volume 87, 1990, pages 2264-2268.

[48] H. J. KUSHNER. *Consistency Issues for Numerical Methods for Variance Control, With Applications to*

Optimization in Finance. in « IEEE Trans. Automat. Control », numéro 44, volume 12, 1999, pages 2283-2296.

[49] A. LEJAY. *Méthodes probabilistes pour l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence : cas linéaires et semi-linéaires.* thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, France, Janvier, 2000.

[50] A. LEJAY. *A probabilistic representation of the solution of some quasi-linear PDE with a divergence form operator. Application to existence of weak solutions of FBSDE.* 2002, Prépublication.

[51] T. LYONS. *Differential equations driven by rough signals.* in « Rev. Mat. Iberoamericana », numéro 2, volume 14, 1998, pages 215-310.

[52] N. J. NEWTON. *Variance Reduction for Simulated Diffusions.* in « SIAM J. Appl. Math. », 1994.

[53] A. ROZKOSZ. *Stochastic representation of diffusions corresponding to divergence form operators.* in « Stochastic Process. Appl. », numéro 1, volume 63, 1996, pages 11-33.

[54] A. ROZSKOSZ, L. SLOMINSKI. *Stochastic representation of reflecting diffusions corresponding to divergence form operators.* in « Stud. Math. », numéro 2, volume 139, 2000, pages 141-174.

[55] Y. SAKAMOTO, N. YOSHIDA. *Asymptotic Expansion of M-Estimator Over Wiener Space.* in « Stat. Inference Stoch. Process. », numéro 1, volume 1, 1998, pages 85-103.

[56] N. YOSHIDA. *Malliavin calculus and asymptotic expansion for martingales.* in « Probab. Theory Relat. Fields », numéro 3, volume 109, 1997, pages 301-342.

[57] N. EL KAROUI, C. KAPOUDJIAN, E. PARDOUX, S. PENG, M-C. QUENEZ. *Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's.* in « Ann. Probab. », volume 25, 1997, pages 702-737.