INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Équipe Otto

Optique Transport et Trajectoires Optimales

Rocquencourt

THÈME 4B

Rapport d'Activité

2002

Table des matières

1. Composition de l'équipe

Responsable scientifique
Jean-David Benamou [DR, Inria]

Assistante de projet (avec les projets Ondes et Estime)
Sandrine Boute [AJT]

Chercheurs extérieurs
Yann Brenier [Prof. P6/Détaché CNRS Université de Nice]
Francis Collino [Consultant]
Olivier Lafitte [Prof. P13]
Rémi Sentis [CEA-DCSA]

Chercheur invité
Olof Runborg [Ass. Prof. NADA KTH, 6/02->15/02, 16/09->27/09,9/12->12/12]

Chercheur post-doctorant
Philippe Hoch [post-doctorant Inria/ Chercheur CEA-DAM depuis le 1/3]

Doctorants
Kevin Guittet [Corps de l'Aviation Civile]
Ian Solliec [Boursier INRIA/INSTN]

Stagiaire
Monika Krysta [DEA MMSA, Université de Versailles 01/04 au 30/09]

2. Présentation et objectifs généraux

Les objectifs généraux de l'action OTTO sont la conception, l'étude et l'application de méthodes numériques dans les problèmes faisant intervenir la notion de trajectoires optimales. L'accent est mis sur les trajectoires qui modélisent, soit un phénomène physique de type optique, soit un flot de transport.

Les fondements mathématiques de ces problèmes incluent le calcul des variations, le contrôle optimal, la théorie du transfert optimal de masse de Monge-Kantorovitch, les équations de Hamilton-Jacobi, les modèles de propagation d'ondes hautes fréquences (optique géométrique).
L'action développe une expertise sur les méthodes numériques dites Lagrangiennes qui consistent à calculer effectivement les trajectoires (comme le lancer de rayons optiques) et sur les méthodes Eulériennes à base de solutions de viscosité (entropiques) d'équations aux dérivées partielles et de schémas décentrés (les courbes caractéristiques de ces EDPs sont en général les trajectoires optimales recherchées).
Elle applique ces techniques dans des contextes qui peuvent nécessiter la conception d'algorithmes innovants. Elle explore également les approches mathématiques qui peuvent déboucher sur de nouvelles méthodes numériques.
C'est le cas en particulier dans le domaine nouveau de l'optique géométrique Eulérienne. L'enjeu est ici de fournir une méthode alternative robuste aux techniques de lancer de rayons lorsque celles-ci sont, soit inopérantes, soit trop lourdes à mettre en œuvre. L'application la plus importante de cette technique est la simulation de modèles hautes fréquences en propagation d'ondes et l'utilisation de ces derniers dans les problèmes d'identification et d'imagerie. Cet axe de recherche couvre également le domaine, particulièrement fécond en applications (traitement d'image, combustion, croissance cristalline, ...), des méthodes de « level set » qui consistent à simuler de façon Eulérienne (c'est à dire via une équation aux dérivées partielles) un phénomène de propagation.
Le deuxième axe de recherche d'OTTO porte sur la résolution de problèmes de transport de masse avec données prescrites aux deux bouts. L'intérêt de la communauté EDP pour ce concept mathématique va

actuellement croissant et le nombre de domaines où cette théorie intervient augmente sensiblement (optimisation combinatoire, équations semi-géostrophiques en mécaniques des fluides, équations de Maxwell non-linéaires, équations de type Fokker-Planck, équations de Monge-Ampère, ...). Notre groupe étudie des méthodes numériques performantes que nous espérons exploiter au niveau applicatif. Nous pensons par exemple à l'exploitation numérique du transport de masse en traitement du signal, problèmes inverses, optimisation de flots de transport, ...

3. Fondements scientifiques

3.1. Optique Géométrique

L'optique géométrique est un principe connu depuis l'antiquité selon lequel la lumière se propage le long de rayons. Dès 300 avant J.C., Empédocle et Euclide posent les fondements de l'optique géométrique. Vers 140 après J.C., Ptolémée énonce les premières lois de l'optique géométrique (pour la réflexion). Jusqu'au $XVI^{\text{ème}}$ siècle, l'optique se limite à des problèmes de géométrie simples qui rendent compte du fonctionnement d'un certain nombre d'instruments d'optique.

La discipline connaît un nouveau développement au $XVII^{\text{ème}}$ siècle, avec les travaux de Snell et Descartes qui établissent les lois de réfraction. Pierre de Fermat couronne l'édifice en posant le principe de minimisation du chemin optique, qui permet de retrouver les principes fondamentaux de l'optique géométrique. A la même époque, certains savants observent des phénomènes dont l'optique géométrique ne permet pas de rendre compte (Bartholi pour la diffraction). Huyghens émet l'hypothèse que la lumière est une vibration haute fréquence qui se propage.

Au $XIX^{\text{ème}}$ siècle, Fresnel explique la diffraction par la nature ondulatoire de la lumière. Après Maxwell, la lumière a été en général considérée comme une onde électromagnétique. Se pose alors la question du lien entre l'optique géométrique et l'optique physique du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, reposant sur les équations de Maxwell. En fait, l'optique géométrique est une approximation haute fréquence des équations de Maxwell.

Dans la théorie mathématique moderne on entend généralement par optique géométrique une méthode asymptotique de représentation et parfois de calcul d'une équation aux dérivées partielles dépendant d'un grand paramètre k_0. Le principe de base consiste à rechercher des solutions asymptotiques en k_0 de l'équation sous la forme $a\exp(ik_0\phi)$, où la fonction a s'appelle l'amplitude et ϕ la phase.

Dans le cas de l'équation des ondes, cette expression peut s'interpréter comme une onde localement plane lorsque la longueur d'onde est petite devant la longueur caractéristique des variations de ϕ. Cette forme de solution a probablement été introduite par Debye en 1911 pour expliquer le lien entre les équations de Maxwell et l'optique géométrique.
On montre alors que la phase et l'amplitude (et éventuellement des termes d'ordre plus élevés dans la série asymptotique) sont des solutions locales d'équations aux dérivées partielles hyperboliques : l'équation non-linéaire « Eikonale » pour la phase et une équation de transport linéaire le long du flot défini par le gradient de la phase pour l'amplitude.

Le caractère local de ces solutions rend, à l'exception de cas simples, inutilisables en l'état ces équations pour la résolution effective des solutions asymptotiques. La structure asymptotique globale de la solution peut en effet être formée de superposition de solutions élémentaires $a\exp(ik_0\phi)$. De façon assez remarquable le principe de moindre action de Fermat et son traitement par le calcul des variations fournit une réponse simple à ce problème. Les trajectoires extrémales correspondent d'une part aux rayons qui définissent une solution globale du problème et d'autre part aux caractéristiques des solutions locales de l'équation Eikonale.

La construction de représentations asymptotiques valides lorsque les rayons se superposent fait appel à des notions mathématiques sophistiquées (géométrie différentielle, opérateurs Fourier intégraux). C'est une branche des mathématiques à part entière étudiée entre autre par Hormander, Maslov, Arnold, Duistermaat ...

La méthode numérique traditionnelle est celle des rayons, solutions d'un simple système d'équations différentielles ordinaires. Les intégrateurs les plus utilisée sont les solveurs de Runge Kutta. L'optique géométrique se conçoit alors comme une méthode de calcul de solutions asymptotiques reposant sur le transport de variables ad-hoc le long des rayons.

3.2. Solutions de Viscosité des équations de Hamilton-Jacobi-Lien avec le calcul des variations et le contrôle optimal

l'équation Eikonale peut être considérée comme le prototype d'une classe d'EDPs appelées équations de Hamilton-Jacobi. Ces équations apparaissent naturellement dans la théorie du contrôle optimal de système dynamiques. Le domaine sur lequel est posé l'équation décrit les états du système, les rayons représentent ses trajectoires optimales pour un critère donné et la solution de l'équation la valeur du critère le long de ces trajectoires. Il faut bien noter que la résolution de l'EDP permet de s'affranchir du calcul des trajectoires optimales. La théorie classique ne permet de traiter localement en temps que des conditions initiales régulières. Dans les années 80, Crandall et Lions ont développé une notion de solution faible des équations de Hamilton-Jacobi et ont montré que les schémas numériques stables convergent vers ce type de solutions appelées solutions de viscosité. Celles ci permettent peuvent présenter des discontinuités de gradient qui apparaissent naturellement lorsque les trajectoires extrémales (et non optimales) se croisent. La solution de viscosité effectue alors automatiquement le choix optimal parmi les trajectoires rendant stationnaires le critère.
L'étude théorique des solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi est aujourd'hui très complète et il existe un grand nombre de schéma numériques adapté a leur calcul.

3.3. Optique Géométrique Numérique Eulérienne

Par analogie avec la mécanique des fluide on qualifie de Lagrangienne la méthode des rayons qui décrivent le « flot » optique et d'Eulérienne toute méthode numérique discrétisant l'équation Eikonale sur le domaine physique de façon (plus ou moins) indépendante des rayons.

L'optique géométrique Eulérienne est devenue dans les années 90 une discipline a part entière (voir [5]). Elle entend proposer une méthode alternative au lancer de rayons qui, en dépit de sa simplicité conceptuelle souffre de plusieurs inconvénients : couverture irrégulière et/ou insuffisante du domaine difficile à contrôler en raison d'une possible forte sensibilité aux conditions initiales, structures de données lourdes à manipuler lorsque les rayons se croisent. Dans ce cas en effet la phase peut être considérée comme une fonction multi-valuée du domaine. Cependant il n'y a aucun moyen de connaître localement a priori le nombre de rayon et leur organisation en famille cohérente (on parle de « branches »).

On s'intéresse donc à des méthodes Eulériennes permettant de discrétiser a priori et indépendamment du problème le domaine sur lequel on a besoin de calculer la solution. Évidemment la solution de viscosité ne correspond à la solution rayons que lorsque celle ci bien définie et uni-valuée. Elle choisit sinon une des branches suivant le critère d'optimalité du problème. Il existe bien sur de nombreuses applications (voir section 3.5) ou cela suffit. En ce qui concerne l'optique géométrique toutes les trajectoires extrémales (rayons) sont importantes et on souhaite donc calculer directement à l'aide de l'équation Eikonale la solution géométrique multi-valuée.

On peut globalement distinguer deux type de méthodes. Des méthodes de découpage de la solution multivaluée en autant de solutions de l'équation Eikonale que nécessaire. La difficulté est alors de déterminer leur domaine et conditions aux limites respective. L'autre possibilité est de chercher la solution dans un espace de dimension supérieure (en général deux fois plus grand) dans lequel elle va être uni-aluée et bien posée. Ceci est relativement aisé mais en dimension 3 il est indispensable de réduire le coût de la méthode ce qui est plus difficile à réaliser.
Ce problème reste assez largement ouvert.

3.4. Propagations de fronts (Level-Set Method)

Depuis son acte fondateur dans l'article d'Osher et Sethian de 1988 : « Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations » (in Journal of Computational

Physics) et trois livres plus tard (Sethian 1999 et 2001, Osher et Fedkiw 2002) la méthode des « level set » a été appliquée dans de nombreux domaines : robotique, traitement d'image, cristallographie , optimisation de forme, ... L'idée de base consiste à représenter les déformations d'un front comme les lignes de niveaux successives d'une fonction et la dynamique de propagation - en général donnée par des trajectoires solutions d'équations différentielles ordinaires locales - par une équation aux dérivées partielles (de Hamilton-Jacobi) satisfaite par cette même fonction. Les avantages et inconvénients de cette technique sont comparables a ceux que l'on observe dans les approches Lagrangienne/Eulérienne de l'optique géométrique décrites ci-dessus. Pour la plupart des applications traitées toutefois seule la solution de viscosité est intéressante et dans ce cadre il existe des algorithme Euleriens de coût linéaire par rapport aux nombres d'inconnues (fast marching , fast sweeping, paraxial solvers etc ...)

3.5. Problème de Monge Kantorovitch

Le problème de transport optimal de masse a été introduit en 1781 par Gaspard Monge dans son « Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais » dans le but de déterminer la manière la plus économique permettant de déplacer un tas de sable pour combler une fosse. Le critère choisi peut ainsi être par exemple le trajet moyen des grains de sable, ou encore l'énergie nécessaire pour effectuer le transport. Le cadre mathématique moderne du problème de transport est le suivant : étant données deux densités de même masse totale, il faut trouver une application (un plan de transport) conservant les volumes et réalisant le transport de l'une vers l'autre. Ce problème est sous-déterminé, et admet plusieurs solutions, il est donc naturel d'introduire un critère permettant de sélectionner parmi ces applications celle qui minimise un coût de transport. La fonction coût la plus étudiée est celle qui fait intervenir la norme L^2 de la distance totale parcourue par la masse. L'existence d'une application optimale pour ce critère a été résolu par Kantorovich en 1942. On parle aujourd'hui du « problème de Monge Kantorovitch » (MKP) et le coût optimal permet de définir une distance entre densités appelée « distance de Wasserstein » (DW). Cette distance possède des propriétés très différentes de celles de la distance usuelle des moindres carré (notée DL2). Elle est en particulier régulière par rapport aux translations ; en dimension 1 par exemple la DW (mise au carré) entre deux signaux, identiques à une translation près, est exactement la valeur du paramètre de translation.
Le MKP est devenu à la fois un outil mathématique important en théorie des équations aux dérivées partielles et un outil fondamental de modélisation de phénomènes physiques ou de traitement de données ; en particulier en astrophysique, météorologie, électromagnétisme ou mécanique des fluides.
Le MKP et ses généralisations sont également appelés à jouer un rôle important au niveau applicatif, en particulier en traitement des données (signal, images,...). La résolution numérique du MKP, et en corrolaire l'évaluation du plan de transport et de la DW, est un problème d'optimisation difficile et coûteux. Le MKP numérique (et donc discrétisé) peut-être formulé comme un problème d'optimisation combinatoire : le problème d'affectation. Pour des problèmes issus de la physique et des équations aux dérivées partielles le nombre important d'inconnues rend inutilisables les meilleurs algorithmes de programmation linéaire. La structure très particulière du problème laisse toutefois espérer une amélioration possible de l'approche « combinatoire ».

Le MKP peut aussi être interprété comme une équation de Monge-Ampère où les conditions aux limités sont remplacées par des contraintes d'état. La démonstration historique d'existence d'une solution pour cette équation elliptique non-linéaire (Pogorelov) est constructive et a inspiré la méthode proposée par Cullen et Purser pour résoudre le modèle semi-géostrophique en météorologie. Indépendamment, un effort de recherche important pour la mise au point d'une méthode numérique robuste et performante est mené à l'INRIA depuis une dizaine d'années. L'approche retenue repose sur l'interprétation (assez naturelle) du MKP en un problème de mécanique des fluides contraint aux deux bouts. Cette méthode a permis le développement d'un code robuste et facilement adaptable à différentes situations (transport multiphasiques, donnes non équilibrées ...).

4. Domaines d'application

4.1. Ondes Hautes Fréquences

Un grand nombre de phénomènes physiques de propagation d'ondes (acoustiques, électromagnétiques, élastodynamiques, de gravité, etc...) peuvent se modéliser sous la forme d'une équation hyperbolique du deuxième ordre dans laquelle un paramètre fondamental caractérise la ou les fréquences caractéristiques des oscillations de la solution.

La discrétisation et donc la résolution numérique de ces équations doit prendre en compte ce paramètre et assurer une représentation raisonnable des oscillations, La règle généralement admise exige au moins 10 points/éléments de discrétisation par longueur d'onde soit, dans un milieu homogène pour simplifier, 10 points par unité de longueur $2\pi/$fréquence dans chaque dimension. On voit donc qu'en dimension 3 par exemple et pour un domaine de taille fixe la discrétisation du problème est de l'ordre de $(10 * \text{fréquence})^3$. Ceci limite les possibilité de calcul des ordinateurs actuels a des phénomènes de quelques dizaines de longueurs d'ondes (voir quelques centaines en dimension 2).

L'optique géométrique (et ses généralisations : théorie géométrique de la diffraction, optique physique) offre donc une alternative abordable puisqu'il s'agit d'une approximation de la solution lorsque la fréquence tend vers $+\infty$. Dans ce cadre l'amplitude et la phase sont des variables régulières et indépendantes de la fréquence qui interviennent dans des formes oscillantes choisies a priori.

Cette technique est très populaire pour la simulation de phénomène de propagations en géophysique et en électromagnétisme.

4.2. Traitement de données

Certaines équations de Hamilton-Jacobi sont communément utilisées pour le filtrage d'images bruitées ou pour mettre en oeuvre des méthodes variationelles de détection ou de reconstruction de contours (courbes ou de surfaces). Dans ce cadre on recherche les solutions de viscosité.

Parmi les autres applications importante en traitement d'image citons le calcul de flots optiques entre deux images ou la mise en correspondance (recalage) de structures dans plusieurs clichés d'une même scène. Le problème fondamental est ici de définir une distance capable d'évaluer la différence entre deux images de façon adaptée aux problème. Notons que le problème de Monge-Kantorovitch suggère une approche globale : la distance de Wasserstein qui de plus calcule un « flot » de transport entre densité. On envisage d'explorer cette technique.

Il est également parfois nécessaire de quantifier la différence entre deux ensembles de données. Par exemple, pour évaluer la qualité d'un modèle, on calcule une différence entre résultats simulés et de varies observation. Pour cela il faut définir une distance et les propriétés de la distance de Wasserstein, particulièrement régulière par rapport a certaines déformations, peut s'avérer un choix judicieux.

La simulation spatio-temporelle de phénomènes physiques peut produire, au prix parfois de gros efforts de calculs, des données dont le volume est tel qu'il rend l'interprétation du phénomène simulé très difficile. Dans le cas de phénomènes pouvant être approchés par la propagation d'un front (la combustion par exemple) on peut construire à partir des données un modèle de type optique géométrique qui concentre les rayons dans les zones de fortes variations de la solution. Ceci doit en principe permettre une sélection automatique des parties « significatives » des données.

En Géophysique, l'imagerie en profondeur est une technologie complexe pour laquelle l'estimation du modèle de vitesse demeure l'étape cruciale. Plusieurs approches ont été proposées pour aborder ce problème. Bien souvent ces approches imposent l'identification et le pointé d'évènements dans les données (Il s'agit de collections de traces sismiques, c'est a dire d'enregistrements du champ d'onde en fonction du temps). Les traces associées à des capteurs voisins se ressemblent à une translation près qui dépend du temps mis par l'onde pour se propager d'un capteur a l'autre. La encore on doit calculer une distance entre deux sismogrammes voisins afin d'évaluer numériquement et automatiquement le différentiel de pointé. Cette l'information est nécessaire à toute une famille de d'approches tomographiques utilisant la pente des événements.

4.3. Modélisation / Problèmes inverse

Le premier volet consiste à étudier les méthodes d'identifications de l'indice de réfraction à partir de mesures que l'on peut simuler par des modèles haute-fréquence Eulériens plus performants. Un des domaines d'applications important est la détermination des modèles de vitesses en sismique réflexion. La même démarche est possible en tomographie avec des applications en imagerie médicale.
La formulation mathématique du problème d'imagerie, appelé simplement « problème inverse » en géophysique est un problème d'identification des paramètres d'un modèle (par exemple la vitesse des ondes dans l'équation du même nom) à partir des traces. Il faut donc choisir une distance pour comparer les données réelles (mesurées ou synthétisées) aux données simulées à partir d'une estimation des paramètres ; et ce afin d'en évaluer la qualité. Pour le problème inverse en géophysique les données sont les sismogrammes et donc des fonctions fortement oscillantes. Il est bien connu que la distance des moindre carrés est peu satisfaisante car en fonction des paramètres estimés cette distance présente de nombreux minima locaux. Différentes autres normes ont été proposées sans toutefois apporter de réponse pleinement satisfaisante. Ici encore la notion de distance est centrale.

4.4. Maillage - Raffinement adaptatif

L'algorithme de Delaunay est une méthode populaire de génération de maillage. A partir d'un ensemble de points il fournit une triangulation optimale au sens de la qualité de ce maillage. Il reste en général a fournir une méthode pour placer les points. La distance entre points, Euclidienne ou Riemannienne pour une métrique donnée a priori (dans le cas de maillages anisotropes), est alors un outil mathématique de base. Il semble naturel que l'équation Eikonale et sa variante anisotrope dont la solution est précisément la fonction distance peut jouer un rôle dans ce domaine. Il en va de même des problèmes de maillage et de raffinement adaptatifs.

5. Logiciels

5.1. GO++

Participants : Jean-David Benamou, Philippe Hoch.

Ce logiciel a été conçu et développé dans le cadre d'une action concertée incitative (1999-2002). Il s'agit d'une suite de routines évolutives (en C++) qui permet l'enseignement, l'utilisation, la combinaison et la comparaison des différentes méthodes numériques Lagrangiennes ou Eulériennes utilisées pour la résolution de problèmes de type optique géométrique. Ce programme a également vocation à stimuler les échanges scientifiques dans ce domaine et trois workshops GO++ ont été organisés. La base du logiciel est désormais disponible (freeware) ainsi qu'un article [3] décrivant sa construction et son fonctionnement. Un cours de DEA ($M^2SA\phi$) d'initiation au calcul scientifique utilise depuis cette année (2002) GO++ comme support numérique.
Divers projets d'extensions/utilisations sont envisagés :

- Écriture d'un solveur d'équations de Hamilton-Jacobi sur maillages non-structurés et intégration de cette fonctionnalité dans le logiciel de simulation d'EDP sur maillages non-structurés FreeFem+.
- Réalisation d'un module de reconstruction de surfaces (a partir d'une méthode « level set »).
- Réalisation d'un module « Shape from Shading » (reconstruction d'une topographie à partir de la carte d'ombre.
- Couplage de GO++ avec la bibliothèque FDTD (développée à Rice U.) qui réalise automatiquement l'inversion de problème d'identification ; GO++ fournit le modèle direct.

6. Résultats nouveaux

6.1. Optique Géométrique Eulérienne pour caustique de type pli

Participants : Jean-David Benamou, Olivier Lafitte, Rémi Sentis, Ian Solliec.

Comme souligné en introduction, une des principales difficultés des méthodes Euleriennes consiste à déterminer les domaines de définition et les conditions aux limites pour les différentes branches Euleriennes de la solution multivaluée. Nous proposons une méthode permettant de résoudre entièrement ce problème en présence d'une caustique de type pli.

Dans ce cas, la solution multivaluée se décompose en deux solutions Euleriennes reliées entre elles par une condition aux limites à la caustique. L'originalité de notre méthode tient à l'ajout au modèle multivalué d'une équation portant sur la position de la caustique, couplée par une méthode numérique approchée aux équations eikonales. La connaissance de la position de la caustique est primordiale pour plusieurs raisons. La caustique constitue la limite du domaine de définition des solutions Euleriennes, et le voisinage de la caustique est une zone de forte concentration d'énergie. La détermination Eulerienne « continue » de la caustique représente donc un atout par comparaison avec la détection lacunaire des méthodes de lancer de rayons.

De plus, la caustique est une zone de dégénérescence des solutions, et un certain nombre de traitements particuliers doit être appliqué au voisinage de la caustique. Ainsi, l'ordre des schémas habituels de type différences finies dégénère au voisinage de la caustique. Nous proposons donc une équation différentielle supplémentaire permettant de calculer la valeur de la phase le long de la caustique. Nous proposons également un schéma de transport pour l'amplitude permettant de compenser la dégénérescence du champ d'advection à la caustique. Une étude fine de la précision des schémas numériques utilisés a été réalisée.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la comparaison entre la solution asymptotique globale que nous calculons et la solution exacte de l'équation de Helmholtz dans des cas simples. L'originalité de notre approche de ce problème classique réside dans l'utilisation de méthodes numériques de type Eulerien pour l'évaluation de l'ansatz de l'optique géométrique.

6.2. Ansatz pour caustique de type pli

Participants : Olivier Lafitte, Ian Solliec.

Il est bien connu que l'optique géométrique, qui est une approximation haute fréquence de l'équation de Helmholtz, n'est pas valide au voisinage des caustiques. De nouvelles formes de solutions asymptotiques ont été proposées, dont l'ansatz de Ludwig reposant sur les fonctions d'Airy, uniformément valide au voisinage d'une caustique de type pli. Les résultats de Ludwig n'ont pas, à notre connaissance, été exploités numériquement à ce jour, en raison de coefficients difficiles à évaluer dans les équations de transport.

Nous utilisons une formulation constructive et explicite de l'existence d'une solution asymptotique de type Airy-Ludwig au voisinage d'un pli, reposant sur la théorie des Opérateurs Intégraux de Fourier. Cette approche nous permet de calculer d'une part une amplitude par la résolution d'une équation de transport régulière posée dans l'espace des phases, et d'autre part le changement de variable conduisant aux fonctions d'Airy. Nous utilisons alors ces résultats pour donner les coefficients des fonctions d'Airy dans la solution asymptotique qui nous intéresse.

Du point de vue théorique, cette approche nous permet d'évaluer asymptotiquement le dépôt d'énergie électromagnétique au voisinage de la caustique, résultat exploité dans les travaux présentés à la section suivante. Du point de vue numérique, nous utilisons les résultats des méthodes présentées à la section précédente pour évaluer les coefficients des fonctions d'Airy. Nous comparons alors les résultats obtenus à ceux de l'optique géométrique, avec pour référence la solution exacte de l'équation dans certains cas simples.

6.3. Dépot d'énergie laser

Participants : Jean-David Benamou, Olivier Lafitte, Rémi Sentis, Ian Solliec.

Ce projet entre dans le cadre du programme de conception d'outils de simulation numérique pour le laser Mega-Joule. Le CEA finance la thèse de Ian Solliec. Il s'agit d'une collaboration avec R. Sentis (CEA) et O. Lafitte (Université Paris 13).

La gamme de fréquences du laser impose l'utilisation de méthodes asymptotiques haute fréquence pour la résolution de l'équation régissant la propagation du laser dans un plasma. Cependant, l'utilisation de la méthode classique du lancer de rayons ne permet pas d'évaluer le dépôt d'énergie de façon satisfaisante auprès de la caustique. En effet, le voisinage de la caustique est une zone de forte concentration de l'énergie, et le nombre de rayons disponibles pour un coût de calcul raisonnable ne permet pas d'approcher de façon fiable ce phénomène. Par ailleurs la structure des rayons au sein du dispositif du laser Mega-Joule est connue et relativement simple. La séparation des différentes branches est alors possible, et permet l'emploi de méthodes numériques de type Eulerien.

Nous appliquons nos méthodes numériques à un modèle tridimensionnel avec une symétrie cylindrique. Nous nous ramenons à un problème à deux dimensions, présentant deux caustiques de type pli. A l'aide d'un changement de variable qui permet d'adapter le domaine de calcul à la forme des caustiques, et du transport d'un étalement géométrique réduit, nous donnons des évaluations numériques du dépôt d'énergie asymptotique dans le cadre de ce modèle.

6.4. Raffinement adaptatif

Participants : Jean-David Benamou, Monika Krysta.

Pour certains problèmes hyperboliques (dont l'équation Eikonale) la présence de discontinuités dans la solution ou son gradient rend inutilisable des schéma numériques d'ordre supérieur à 1. Pour obtenir une erreur prescrite, la seule solution reste alors d'utilise une discrétisation plus fine ce qui engendre un coût de calcul supérieur. Les zones de dégénérescence de la solutions sont en général très localisées d'où l'idée d'utiliser une méthode de raffinement adaptatif.

Les méthodes classiques sont soit purement Eulériennes et basées sur des estimations d'erreur locales soit Lagrangiennes (ou semi-Lagrangiennes) c'est a dire que la discrétisation est adaptée continuement suivant des trajectoires qui sont en général les caractéristiques de l'équation. Les méthodes Lagrangiennes sont conceptuellement plus simples mais plus difficile à mettre en oeuvre car le calcul des trajectoires est indépendant de la discrétisation elle même. Nous proposons, suivant l'idée de l'optique géométrique Eulérienne d'utiliser une méthode Lagrangienne de raffinement adaptatif mais le calcul des trajectoires est reformulé sous une forme Eulérienne facilement couplée à l'équation à résoudre.

De premiers résultats mitigés ont été obtenus dans le cas de l'équation Eikonale.

6.5. Couplage de modèles en propagation d'onde

Participants : Jean-David Benamou, Francis Collino, Olof Runborg.

L'optique géométrique fournit un cadre théorique et pratique pour approcher la solution d'un modèle de propagation d'onde. C'est une méthode efficace du point de vue du coût de calcul mais parfois compliquée conceptuellement. Dans certaines configurations, le couplage du modèle exact et du modèle « haute fréquence » chacun posé dans des zones différentes pourrait s'avérer un bon compromis coût/simplicité. Afin d'atteindre cet objectif il faut être capable d'exprimer la solution de chacun de ces modèle en fonction de l'autre. L'optique géométrique fournit naturellement et par construction une solution de l'équation des ondes. De même, étant donnée une solution du modèle exact il faut alors en extraire la sa représentation équivalente haute fréquence. L'analyse microlocale fournit un point de vue théorique sur la question : Il faut localiser la solution a la fois en position et en direction afin de retrouver le « wavefront set ». D'un point de vue pratique cependant le choix de la fonction de localisation semble délicate. Il est toujours possible d'analyser la solution en ondes planes (via une transformée de Fourier) mais cette technique est non-locale et ne correspond donc pas au contenu « haute fréquence » de la solution.

Nous proposons une méthode d'inversion de l'ansatz haute fréquence basée sur la formule de Jacobi-Anger. Son implémentation est très facile et nous avons obtenu de premiers résultats numériques encourageants. Cette méthode semble s'apparenter à une technique multipole utilisée en électromagnétisme.

6.6. Propriété de convergence de la formulation « mécanique des fluides » du problème de Monge-Kantorovitch

Participant : Kevin Guittet.

K. Guittet s'est employé a justifier rigoureusement la formulation « mécanique des fluides » du problème de Monge-Kantorovitch proposée par Brenier et Benamou. Il a montré de l'existence du point-selle calculé par l'algorithme et la convergence de l'algorithme « continu » (c'est à dire non-discrétisé). Par ailleurs, le lien formel entre la formulation classique et la formulation continue est justifié rigoureusement dans un cadre Hilbertien (qui n'est pas utilisé habituellement pour les problèmes de transport de masse). Ainsi, ces résultats théoriques s'ajoutent au bon comportement numérique de l'algorithme, déjà constaté.
Il a par ailleurs étudié deux différentes discrétisations possibles, donnant toutes deux lieu à un problème de point-selle discret. La première est une discrétisation centrée mais non locale, tandis que la seconde, en décentrant certains opérateurs, est locale et de coût linéaire. Ces discrétisations sont étudiées de manières différentes et complémentaires. La première, pour laquelle on espère une plus grande qualité d'approximation, est rejetée car trop lente, tandis que la convergence de la seconde est établie rigoureusement.

6.7. Problème de Monge Kantorovitch non équilibré

Participant : Jean-David Benamou.

Un obstacle majeur à l'utilisation du problème de Monge-Kantorovitch tel qu'il est formulé est la contrainte d'équilibre sur la masses totale des données : le MKP calcul un plan de transport optimal et son coût entre deux densités de même norme L^1. Il est rare de rencontrer des données réelles équilibrées ou exactement équilibrées. Il faut donc soit normaliser les données soit modifier le MKP lui même pour qu'il soit capable de traiter des données non équilibrées. Différentes normalisations on été traitées et il semble qu'elles modifient de façon inévitable la distribution de masse et donc le plan et le coût de transport. Si un bruit ou un autre phénomène non significatif est à l'origine du défaut d'équilibre, une normalisation peut détériorer le résultat attendu.
Nous avons donc recherché une modification du MKP qui permette l'utilisation de donnée non équilibrée. L'idée est de relaxer une des donnée et de la prendre en ajoutant a la fonction coût une pénalisation de type moindre carrés. Le nouveau problème consiste donc a rechercher le plan de transport entre la première donnée et une densité qui tout en lui étant équilibrée se rapproche en un sens L^2 de la deuxième donnée. Bien sur un paramètre de pénalisation vient pondérer les deux composantes du coût. Nous avons adapté la méthode de Lagrangien Augmenté utilisé pour le MKP classique.
Une application envisagée est un problème très général d'estimation d'erreur. Il s'agit de comparer des cartes de temps prévues (par exemple la densité de pluie) avec le temps réellement observé afin d'évaluer la qualité de la technique de prédiction utilisée. La différence entre cartes au sens des moindres carrés est utile lorsque l'erreur commise est localisée dans des zones d'intérêt secondaires. Par contre, lorsque l'erreur intervient dans les phénomènes physique de transport, elle prend souvent la forme de légère déformation dans la zone centrale (par exemple une translation). C'est alors la distance de Wassertein qui a un sens.

6.8. Problème de Monge-Kantorovitch multi-phasique

Participants : Jean-David Benamou, Yann Brenier, Kevin Guittet.

L'algorithme de Benamou et Brenier est adapté à un problème multiphasique de transport de masse, motivé par l'approche variationnelle des équations d'Euler. On est ici en présence de plusieurs phases. On cherche a transporter séparément la masse de chacune des phases de façon optimale suivant un critère qui n'est que la somme des critères monophasiques pour toutes les phases. Les plans de transports de chaque phases sont couplée par un une contrainte additionnelle qui traduit l'incompressibilité globale du fluide. Ceci induit un multiplicateur de Lagrange supplémentaire, dont le traitement numérique nécessite une modification de la méthode. Des résultats numériques permettent de vérifier le bon comportement de l'algorithme.

7. Contrats industriels

7.1. CEA-INSTN

Participants : Jean-David Benamou, Olivier Lafitte, Rémi Sentis, Ian Solliec.

L'INSTN finance 50% de la thèse de Ian Solliec co-encadrée par Jean-David Benamou, Olivier Lafitte, et Rémi Sentis.

7.2. CEA-DCSA

Participants : Jean-David Benamou, Rémi Sentis.

Contrat de recherche en vue de la fourniture d'un code de simulation du dépot dénergie par un laser dans un plasma.

8. Actions régionales, nationales et internationales

8.1. Actions nationales

L'ACI « jeune chercheur » GO++ , voir logiciel

8.2. Actions Européenne

J.-D. Benamou est membre du RTN (5^{e} programme cadre Européen) « HYKE » : HYperbolic an Kinetic Equations.

9. Diffusion des résultats

9.1. Animation de la communauté scientifique

- Dans le cadre de l'ACI GO++ une école d'« hiver » a été organisée à l'INRIA du 9 au 12 Décembre portant sur les méthodes numériques dédiées aux Équations de Hamilton-Jacobi et Hamilton-Jacobi Bellman. Elle a rassemblée une quarantaine de participants représentant une dizaine de nationalités et une vingtaine de jeunes chercheurs ont pu présenter leurs travaux sous forme de posters.
- J.-D. Benamou a assuré en Juin pour la SMAI une journée de formation à l'utilisation de Matlab en calcul scientifique.
- J.-D. Benamou est membre du comité des bourses de l'INRIA UR de Rocquencourt.

9.2. Enseignement universitaire

- J.-D. Benamou assure un cours de calcul scientifique dans le DEA $M^2SA\Phi$ (Université de Versailles/P6/X/INRIA) - en collaboration avec F. Coquel et Ph. Hoch.
- J.-D. Benamou assure un cours de Problèmes Inverse pour l'équation des ondes dans le DEA EDPA (Université P9) - G. Chavent.
- I. Solliec a assuré un TD d'Analyse à l'ENSTA - première année.

9.3. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- J.-D. Benamou a participé aux Rencontre : Électromagnétisme numérique organisée par le Laboratoire « J.-A. Dieudonné », Université de Nice et Sophia Antipolis les 14 et 15 Juin.
- J.-D. Benamou a participé (et organisé) l'école d'hiver GO++ en Décembre.
- I. Solliec a participé aux doctoriales 2002 organisée par l'école Polytechnique et l'Université Paris 6.

10. Bibliographie

Articles et chapitres de livre

[1] J.-D. BENAMOU, Y. BRENIER, K. GUITTET. *The Monge-Kantorovitch mass transfer and its Computational Fluid Mechanics formulation.* in « Int. J. Numer. Meth. Fluids », 2002.

[2] J.-D. BENAMOU, F. CASTELLA, T. KATSAOUNIS, B. PERTHAME. *High Frequency limit of the Helmholtz Equation.* in « Rev. Mat. Iberomaericana », 2002.

[3] J.-D. BENAMOU, P. HOCH. *GO++ : A modular Lagrangian/Eulerian software for Hamilton Jacobi equations of Geometric Optics type.* in « M2AN », 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4409.html, également INRIA RR-4409.

Communications à des congrès, colloques, etc.

[4] J.-D. BENAMOU. *An Eulerian numerical method for geometric optics.* in « Canum 2000 : Actes du 32e Congrès national d'analyse numérique », série ESAIM : Proceedings, numéro 11, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles , EDP Sciences, éditeurs A. B. ET AL., pages 13-40, 2002.

Rapports de recherche et publications internes

[5] J.-D. BENAMOU. *An introduction to Eulerian Geometrical Optics (1992-2002).* rapport technique, numéro RR-4628, INRIA, Novembre, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4628.html, à paraître dans JSC.

[6] J.-D. BENAMOU, O. LAFITTE, R. SENTIS, I. SOLLIEC. *A geometric optics based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics - Part I.* rapport technique, numéro RR-4422, INRIA, Mars, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4422.html, à paraître dans JCAM.

[7] J.-D. BENAMOU, O. LAFITTE, R. SENTIS, I. SOLLIEC. *A geometric optics based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics - Part II.* rapport technique, numéro RR-4627, INRIA, Novembre, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4627.html, soumis.

[8] K. GUITTET. *Extended Kantorovich norms : a tool for optimization.* rapport technique, numéro RR-4402, INRIA, Mars, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4402.html.