INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Équipe Preval

Probabilités, modélisation et évaluation de systèmes

Rocquencourt

THÈME 1B

Rapport d'Activité

2002

Table des matières

1. Composition de l'équipe

Responsable Scientifique
Guy Fayolle [DR]

Assistante de projet
Delphine Mahoney [Agent temporaire jusqu'au 01/09/02]
Brigitte Larue-Bourdon [Depuis le 01/10/02]

Personnel Inria
Jean-Marc Lasgouttes [CR]
Vadim Malyshev [DR]

Collaborateurs extérieurs
Pierre Brémaud [Ensta et Supelec]
Franck Delcoigne [EDF Clamart]
Arnaud de La Fortelle [X-Ponts, mis à disposition par le ministère de l'Équipement]
Roudolf Iasnogorodski [Université d'Orléans]

Ingénieur expert
Cyril Furtlehner

2. Présentation et objectifs généraux

L'équipe PREVAL est formée des membres de l'ancien projet MEVAL, arrêté le 31 décembre 2001 après vingt années d'existence. Actuellement, l'équipe définit de nouveaux axes de recherche qui utiliseront naturellement les compétences et les méthodes mathématiques développées antérieurement. Ce rapport d'activité est donc le prolongement analytique direct des versions antérieures.

Le but essentiel des travaux est de parvenir à une bonne compréhension du comportement de systèmes aléatoires issus de l'informatique et des télécommunications, mais aussi de la physique et de la biologie, par la mise en œuvre de méthodes quantitatives d'évaluation. Deux moyens d'approche sont proposés :

- principalement, l'élaboration et la résolution de modèles mathématiques ;
- à titre complémentaire, la simulation.

Les compétences acquises par l'équipe couvrent largement les domaines liés à la *modélisation stochastique*, point n'étant besoin de rappeler que l'utilisation de la théorie des probabilités s'avère fructueuse dans nombre de branches de la science moderne (physique, économie, sociologie, etc.). L'évolution de la technologie (parallélisme, vitesse, modularité), la complexité et la taille sans cesse croissantes des systèmes ont eu des conséquences importantes :

- d'abord une demande plus forte d'analyse prévisionnelle de performance, afin d'assister les choix de conception ;
- ensuite, un impact considérable sur la théorie (réseaux de files d'attente, graphes et complexes aléatoires, séquences biologiques, etc.).

Les recherches menées sont éclectiques et touchent à des domaines d'applications variés : réseaux téléinformatiques et de transport, architecture des ordinateurs, physique statistique, réseaux de neurones, graphes et structures aléatoires. L'analyse macroscopique (temporelle et spatiale) de ces divers objets conduit inexorablement à l'étude de processus stochastiques, souvent physiquement significatifs (temps de séjour dans un système, répartition des clients ou des données, régime stationnaire, etc.). Les thèmes abordés comportent à la fois des aspects méthodologiques et des modèles particuliers. La démarche scientifique est toujours, à partir de problèmes concrets, de proposer des méthodes de portée générale, permettant d'obtenir des résultats quantitatifs sur l'efficacité, la stabilité ou le contrôle de telle ou telle structure

2.1.1. Axes de Recherche

Depuis une vingtaine d'années, des théories originales sont développées au sein de l'équipe dans les domaines d'expertise suivants.

- Réseaux et marches aléatoires : résolution d'équations fonctionnelles de plusieurs variables complexes ; classification des chaînes de Markov dans des polyèdres avec frontières à l'aide de systèmes dynamiques équivalents ; méthodes de construction de semi-martingales pour déterminer les conditions de stabilité des systèmes.
- Grands systèmes : lorsque la taille ou le volume d'un système augmente (on parle alors de limite thermodynamique), des phénomènes de propagation du chaos ou de transition de phase apparaissent, comme en physique classique.
- Grammaires et complexes aléatoires : on bâtit de nouveaux ponts théoriques entre la physique et l'informatique (chaînes aléatoires, énumération, gravité quantique).
- Grandes déviations : il s'agit d'estimer les probabilités d'événements rares, qui parfois n'en sont pas moins cruciaux ! (ouragan, réacteur nucléaire divergeant, réseau internet en panne). Une exploitation fouillée de la notion d'entropie permet d'obtenir des résultats généraux.

2.1.2. Relations Internationales et Industrielles

- PREVAL entretient des relations suivies avec les universités de Berkeley, Braunschweig, Cambridge, EURANDOM, Columbia, Moscou, Novosibirsk, Monterey, San Diego.
- L'équipe est également partenaire de IMARA, programme national d'expérimentation de nouvelles technologies pour le transport routier.

3. Fondements scientifiques

3.1. Introduction

Mots clés : *factorisation*, *file d'attente*, *fonction analytique*, *fonction de Lyapounov*, *grammaire*, *grande déviation*, *limite thermodynamique*, *marche aléatoire*, *modélisation*, *neurone*, *processus stochastique*, *protocole*, *réseau*, *semi-martingale*, *système dynamique*, *transition de phase*.

Le ciment existant entre les diverses activités s'est constitué à partir des champs scientifiques suivants : marches aléatoires (méthodes analytiques, classification), réseaux et grands systèmes, réseaux neuronaux et physique statistique. On donne ici un aperçu des domaines d'expertise du projet, mettant en exergue les techniques originales qui y ont été inventées.

3.2. Réseaux et marches aléatoires dans $\mathbf{Z}_+^n$

Si on choisit l'exemple des systèmes de télécommunications ou de transport, la plupart d'entre eux se laissent modéliser de façon assez réaliste par un ensemble de stations de service, où les serveurs sont les ressources (logiques ou physiques) du système considéré et où les entités circulant entre les stations représentent les requêtes, messages, programmes partageant ces ressources. À un réseau formé de n stations avec plusieurs classes de clients, on pourra souvent associer un processus Markovien vectoriel

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)),$$

$X_i(t)$ décrivant la configuration des clients à la station i au temps t. L'étude de ces processus nécessite, principalement, des outils de deux natures :

- probabiliste, pour trouver les conditions d'existence de régimes stationnaires ;

- analytique, lorsqu'on veut calculer des distributions, estimer des vitesses de convergence ou avoir des équivalents.

Pour des raisons physiques évidentes de positivité des quantités mises en jeu, il appert que les marches aléatoires dans $\mathbf{Z}_+^n$ sont isomorphes à des familles de réseaux comportant n sites. La difficulté majeure provient de l'existence des frontières naturelles.

3.2.1. *Méthodes analytiques*

Participants : Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, Vadim Malyshev.

Ce thème est fondamental et en perpétuel approfondissement. Lorsque $n = 2$, les sauts étant d'amplitude 1, la détermination de la mesure invariante équivaut souvent à résoudre une équation fonctionnelle de la forme

$$Q(x,y)\pi(x,y) + q(x,y)\pi(x) + \tilde{q}(x,y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00}q_0(x,y) = 0.$$

Il s'agit de trouver des fonctions $\pi(x,y), \pi(x), \tilde{\pi}(y)$, holomorphes dans les régions $|x|, |y| < 1$ et continues dans $|x|, |y| \leq 1$. Ici, $Q, q, \tilde{q}, q_0$ sont des polynômes. En se plaçant sur la courbe algébrique $Q(x,y) = 0$ (en général elliptique), deux approches fondamentales ont été développées, conduisant (par factorisation ou uniformisation) à des formes explicites des solutions.

- Dans [8] est introduit le *groupe* $\mathcal{G}$ de la marche aléatoire, dont l'étude, via les automorphismes de Galois et en uniformisant la courbe algébrique, permet un calcul effectif sous forme de série.
- Dans [3], on se ramène à la résolution d'un problème aux limites de type Riemann-Hilbert-Carleman, pour une fonction d'une variable, posé dans le plan complexe et dont la forme la plus simple s'énonce ainsi : *trouver une fonction analytique dans un domaine simplement connexe* $\mathcal{D}$ *et satisfaisant une condition sur la frontière* $\delta\mathcal{D}$.

Vers la fin des années 70, cette méthododologie a été reprise avec fruit dans certains laboratoires étrangers (CWI, Université de Newcastle) et elle fait toujours l'objet d'études immédiates ou à long terme (Bell Laboratories, IBM Yorktown Heights, Universités du Michigan, d'Ottawa, etc.). Le livre [4], écrit par les trois auteurs précités, présente une synthèse, esquissée ci-dessous, des principaux résultats.

- Liaison avec la géométrie algébrique et le prolongement analytique des fonctions inconnues.
- Lorsque le groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre fini, détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions soient rationnelles ou algébriques.
- Lorsque $\mathcal{G}$ est d'ordre infini, un problème de factorisation est formulé, dont *l'indice*, calculé analytiquement, donne les conditions d'ergodicité (i.e. pour que les fonctions cherchées n'aient pas de pôle dans le disque unité) ; la représentation des fonctions inconnues est donnée sous forme intégrale, à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass.
- Pour le genre 0 (problème posé sur la sphère de Riemann), expression des solutions au moyen des fonctions automorphes.
- Comportement asymptotique des probabilités stationnaires, par une analyse fine de type méthode du col + résidus sur la surface de Riemann sous-jacente.

Toujours en dimension 2, lorsque les sauts à l'intérieur du quart de plan sont non bornés selon les directions cardinales Est, Nord, Nord-Est, certaines généralisations ont été effectuées par J. W. Cohen (alors professeur à l'université d'Utrecht, décédé le 12 novembre 2000). Par contre, il n'existe actuellement aucune technique de portée générale à partir de la dimension 3.

Le potentiel des méthodes évoquées ci-dessus est loin d'être épuisé. On citera par exemple :

- la détermination de la *vitesse intrinsèque* de convergence (i.e. invariante par rapport aux perturbations dans un domaine fini), pour des chaînes de Markov dans $\mathbf{Z}_+^2$;

- la description analytique de certaines *frontières de Martin* ;

- certaines équations fonctionnelles rencontrées en *gravité quantique*.

3.2.2. Classification et théorie constructive des chaînes de Markov dans $\mathbf{Z}_+^n$

Si les conditions de non explosion ou de non saturation des réseaux ont un intérêt pratique évident, leur caractérisation à l'aide de formules explicites résiste encore souvent à l'analyse, même pour de petites dimensions ($n = 2$ ou 3). On a vu ci-dessus, qu'il est difficile de disposer de la forme analytique de la mesure invariante, voire très vite impossible, sauf dans des cas bien répertoriés, tel celui des réseaux éponymes (Jackson, BCMP), dits à *formes produit* car leur mesure invariante est factorisable. Cependant, il existe maintenant une approche très générale pour obtenir les conditions d'ergodicité de marches aléatoires fortement homogènes dans $\mathbf{Z}_+^n$ ou dans des domaines similaires, qui donne une explication structurelle globale de la situation, en ramenant le problème de l'ergodicité d'une marche dans $\mathbf{Z}_+^n$ à une série de problèmes en dimension $n - 1$, par construction de semi-martingales et de systèmes dynamiques (paragraphes suivants). Ces travaux fondamentaux ont reçu un cadre, avec la parution de l'ouvrage [7], dans lequel sont consignés des résultats originaux obtenus depuis une vingtaine d'années, sur la classification détaillée en termes d'ergodicité, de récurrence et de transience. Ce champ de recherches très vivant constitue l'un des points d'ancrage du projet.

3.2.3. Techniques de martingales

Participants : Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, Vadim Malyshev.

L'idée est de construire des *fonctions de Lyapounov* (FL) idoines, via des techniques de semi-martingales, la difficulté principale étant due à la présence de frontières. Cette approche a été décisive pour la résolution de nombreux problèmes (cf. rapports d'activité antérieurs) :

Fonctions de Lyapounov pour les réseaux En exhibant une FL linéaire par morceaux pour les fameux réseaux de Jackson, on a pu retrouver les équations de conservation de flux liées à l'existence d'un régime stationnaire. Le phénomène intéressant est qu'il est possible d'appliquer cette fonction à des politiques de service ou d'arrivées en groupes, alors que la mesure invariante pour ce système est hors de portée (D. Botvitch et A. Zamyatin à l'Université de Moscou).

Dérives nulles En dimension 2 et 3, lorsque les sauts moyens sont nuls à l'intérieur du cône positif, on a introduit de nouvelles classes de FL, non linéaires (en particulier de la forme $Q^\delta(x, y, z)$, Q étant une forme quadratique ; mais aussi des objets plus complexes faisant intervenir des caractéristiques géométriques). La classification complète des processus peut ainsi être obtenue et il existe des liens directs avec les diffusions.

Stabilité Une série de recherches sur l'intégrabilité de certaines fonctionnelles des temps d'atteinte τ_A d'ensembles compacts A, pour des chaînes de Markov, en collaboration avec S. Aspandiiarov (Université Paris 5) et M. Menshikov. Les moments $E\tau_A^p$ jouent en effet un rôle important dans les théorèmes limites concernant ces chaînes. En liaison avec la théorie du mouvement brownien réfléchi, on donne notamment la valeur critique p_0 maximale, telle que $E\tau_A^p < \infty,\ \forall p < p_0$, lorsque l'espace d'états est $\mathbf{Z}_+^2$. Là encore, les critères donnés reposent sur la construction explicite de semi-martingales et permettent d'étudier le comportement fin de la queue de distribution de τ_A, ainsi que la vitesse de convergence vers le régime stationnaire.

3.2.4. Systèmes dynamiques

Participants : Frank Delcoigne, Guy Fayolle, Jean-Marc Lasgouttes, Vadim Malyshev.

Comme il est montré dans [9] et [7], il est toujours possible d'associer à une marche aléatoire fortement homogène dans $\mathbf{Z}_+^n$, un système dynamique linéaire par morceaux, dont le champ de vecteurs associé (vitesses) ne dépende que des faces du domaine considéré. Cette propriété est équivalente à *l'approximation d'Euler* en physique statistique : on effectue des changements d'échelle identiques en temps et en espace (disons x/ϵ et t/ϵ) pour se placer dans le contexte de la loi des grands nombres. [Il est utile de remarquer d'emblée que, si certaines vitesses sont nulles, la situation se complique, car elle impose de mélanger la normalisation d'Euler avec celle du théorème central limite (diffusions) et la plupart des problèmes restent alors ouverts]. Ces méthodes, plus profondes que celles dites des *approximations fluides*, sont utilisées et développées pour la résolution de modèles très divers :

Réseaux à une classe de clients Il s'agit principalement des systèmes dits à *polling* (scrutin), où V serveurs partagent leur puissance entre N stations, et des réseaux de files d'attente classiques avec routage Markovien. Un point agréable ici est qu'on peut souvent donner une caractérisation complète du champ de vecteurs, à l'aide de systèmes d'équations linéaires. Pour une large classe de politiques de service, ont été trouvées les conditions de stabilité des systèmes de polling à V serveurs homogènes avec routage Markovien : la condition nécessaire est donnée par un argument direct classique, l'obtention de la condition suffisante reposant sur l'étude d'un modèle fluide associé (http://www.inria.fr/rrrt/rr-3347.html).

Chaînes aléatoires en interaction On propose diverses lois de stabilisation pour l'évolution stochastique de chaînes modifiables à leurs extrémités gauche ou droite. Cette représentation à base de chaînes est commode et permet de dégager des liens entre des domaines apparemment disjoints : réseaux multiclasses, marches aléatoires sur des groupes (libres non commutatifs, modulaires, graphes, etc.), théorie des champs quantiques en dimension 3, réseaux de neurones, etc. En collaboration avec des chercheurs du LLRS (Univ. de Moscou), a été amorcée la construction d'une théorie décrivant les interactions mutuelles d'un nombre quelconque de chaînes. Elle englobe en particulier les réseaux de files multi-classes de type PAPS (premier arrivé, premier servi) ou DAPS (dernier arrivé, premier servi), et généralise le cadre des marches aléatoires homogènes classiques. Une vision synthétique des objets ci-dessus est donnée dans la section 3.5.

3.3. Grands systèmes aléatoires

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Jean-Marc Lasgouttes, Vadim Malyshev.

Schématiquement, on peut dire que la résolution de modèles raisonnablement réalistes (ce vocable étant bien sûr subjectif !) n'est possible que pour les dimensions extrêmes, c'est dire faibles (disons ≤ 3) ou très grandes. Dans ce dernier cas, on parle de systèmes en *limite thermodynamique*, i.e. dont la taille (volume, graphe associé, nombre de nœuds, etc.), représentée par un paramètre N, augmente indéfiniment. S'il y a clairement une analogie avec les systèmes de particules rencontrés en physique, de nouvelles difficultés surgissent par suite de la non homogénéité des composants (sites). Les questions essentielles sont liées aux phénomènes suivants :

3.3.1. *Propagation du chaos*

Elle existe dans un réseau si, par définition, tout p-uplet de nœuds se comporte, lorsque $N \longrightarrow \infty$, comme un ensemble de p nœuds indépendants : on peut alors obtenir des renseignements quantitatifs sur la dynamique, l'état stationnaire et les vitesses de convergence. Pour les systèmes à fort degré de symétrie, les techniques utilisées sont issues de la mécanique statistique et dites *à champ moyen* : asymptotiquement, chaque site aura tendance à évoluer comme un processus de saut Markovien non homogène en temps, dont les taux de transition sont déterminés par calcul de la mesure empirique des actions dues aux autres sites, laquelle devient en fait déterministe. Une des difficultés provient de la rencontre d'équations différentielles non linéaires. Nous avons démontré la propagation du chaos pour diverses classes de réseaux (BCMP, *polling*). Quand la dissymétrie est totale, la plupart des problèmes restent encore largement ouverts.

3.3.2. *Condensation et transition de phase*

Considérons un réseau fermé du type standard BCMP, non symétrique, comportant M clients et N noeuds. On veut trouver des fonctions $M = f(N)$ conduisant, lorsque $N \longrightarrow \infty$, à un *bon* comportement, autrement dit à une bonne utilisation des ressources disponibles. Cette problématique a de multiples origines : gestion de parcs de véhicules en libre service, réseaux informatiques, etc. À l'aide de facettes fines du théorème central limite, on montre dans [6] que, pour des conditions initiales indépendantes, il y a propagation du chaos, mais différentes situations peuvent se produire :

- les files restent toutes uniformément bornées ;
- certaines files, en nombre peut-être infini, se saturent : on parle alors de *condensation*.

On a ainsi très logiquement introduit une classe de fonctions $f(N)$, dites *critiques*, non nécessairement linéaires, différenciant les zones de *stabilité* et les zones de *saturation*. En outre, la vitesse de convergence vers l'état chaotique est d'ordre $O(f^{-1}(N))$.

3.4. Réseaux de neurones

Participant : Vadim Malyshev.

Globalement, on distingue trois classes de réseaux de neurones : ceux de *Hopfield*, les réseaux *biologiques* et le *perceptron*. Si des progrès concernant l'état stationnaire ont été accomplis par diverses équipes ces quinze dernières années, la dynamique de ces modèles, beaucoup plus délicate, reste encore assez mystérieuse. Sur ce dernier point, plusieurs études significatives ont été menées au sein de l'équipe.

Le modèle de Hopfield (1982), très répandu en mécanique statistique, est caractérisé par le nombre de nœuds N, qui peut tendre vers l'infini, et le nombre d'images p. Lorsque p est arbitraire, la dynamique à température finie est analogue à celle d'une marche aléatoire évoluant dans une union de polyèdres, avec discontinuités aux frontières (comme dans les réseaux de communications !). Les propriétés temporelles locales et globales ont été abordées en analysant les limites fluides obtenues à l'aide de changements d'échelle appropriés. Il a ainsi été montré que le temps pour atteindre un point fixe, à température zéro, est presque sûrement uniformément borné en p, lorsque $p \longrightarrow \infty$. En ce qui concerne la région des températures finies, il faudra trouver les répartitions spatiales des minima locaux d'énergie et les distributions correspondantes.

La seconde catégorie de réseaux intervient fréquemment en biologie (modèle dit *hourglass*) pour analyser le fonctionnement de cellules cérébrales. En fait, ils sont assez proches de certains réseaux de files d'attente et ont été étudiés par des techniques d'approximations fluides, conjointement avec l'IPPI de Moscou et l'Université de Lund en Suède. Il s'agissait principalement de décrire des attracteurs, ainsi que leur structure de Gibbs, pour divers types de connexions (asymétriques, aléatoires, d'inhibition et d'excitation, en dimension 2 aux températures extrêmes).

Enfin, la dernière classe de réseaux, analysée en collaboration avec le centre de physique théorique de Luminy, est plus connue des ingénieurs et apparaît comme une généralisation du *perceptron* multi-couches, proposé par Rosenblatt dans les années 60. Le point de vue adopté part d'une représentation sous forme de réseaux *feedforward*, i.e. sans réaction, dont la topologie est relativement simple.

3.5. Grammaires aléatoires, grammaires de graphes, grammaires quantiques

Participant : Vadim Malyshev.

Cette activité vise à développer les liens entre l'informatique et la physique théorique moderne, au delà des réseaux. Un mot dans un alphabet peut être vu comme une file d'attente, dont seules les extrémités sont modifiées de façon aléatoire, les symboles jouant le rôle des clients. Une généralisation immédiate consiste à admettre qu'arrivées et départs de clients puissent avoir lieu à un endroit arbitraire dans la file : il devient alors possible de décrire nombre de nouvelles applications, grâce à la notion de grammaire aléatoire (connue en informatique) et, plus généralement, de *grammaire de graphe*. Ces grammaires conduisent à des constructions géométriques (complexes aléatoires) maintenant très populaires en théorie de la gravité quantique ; elles participent à la modélisation de processus rencontrés en informatique (e.g. machine de Turing, fractales, graphes aléatoires) ; elles décrivent également l'évolution de longues séquence d'ADN en biologie. La dynamique et le comportement stationnaire des objets considérés sont analysés sous un angle nouveau, dans une série d'articles, notamment [30]. Les méthodes probabilistes utilisées sont fortement liées à la physique statistique (perturbations d'opérateurs, changements d'échelle, processus à interaction locale, limite thermodynamique).

On traite également des grandes grammaires de graphes multi-dimensionnelles, selon deux lignes directrices :

- d'abord, en faisant ressortir les propriétés qualitatives de ces objets : croissance asymptotique du nombre de composantes connexes, degré de compacité locale, chaos et phases topologiques, etc.
- Ensuite, en définissant la limite thermodynamique, plus exactement les aspects de dynamique en grappes (*clusters*) sur des configurations infinies. En particulier, on discute des différences entre grammaires de graphes et champs de Gibbs sur les treillis, en introduisant la notion de *complexe infini statistiquement homogène*.

Il est important de noter qu'existe une correspondance naturelle entre grammaires quantiques et systèmes à spins quantiques.

3.6. Complexes aléatoires

Participants : Guy Fayolle, Vadim Malyshev.

Les *complexes* interviennent dans différents domaines : topologie, géométrie, physique, etc. Il existe plusieurs points de vue.

- En mathématiques discrètes, il s'agit surtout de l'énumération de certaines classes de complexes bi-dimensionnels.
- En probabilités, la croissance de certains complexes fait appel à des processus de Markov, parfois non linéaires.
- Enfin, en physique, on s'intéresse à la gravité quantique, plus précisément aux conditions stochastiques laissant invariante la distribution stationnaire de cette gravité. Partant de l'étude théorique de la dynamique, il est possible de donner des résultats sur l'existence et les propriétés de fonctions de corrélations locales en limite thermodynamique.

3.7. Grandes déviations

Participants : Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle.

La théorie des grandes déviations s'intéresse principalement aux événements *rares*. Par exemple, pour un processus $(X_n, n \geq 1)$ prenant ses valeurs dans un espace métrique E et dont les moyennes $\hat{S}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ admettent une limite (e.g. les suites de variables i.i.d. ou les chaînes de Markov), on étudie le comportement asymptotique de $\mathsf{P}(\hat{S}_n \in \Gamma)$, où Γ est un borélien de l'espace E. De façon plus générale, il s'agit d'analyser le comportement de certaines familles de distributions dépendant d'un paramètre.
Partant du travail fondamental d'Ellis en mécanique statistique, qui considère la mesure empirique d'ordre 2

$$L_n(\omega) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega),X_{i+1}(\omega)} + \delta_{X_n(\omega),X_1(\omega)}\right),$$

il a été montré dans [12] un théorème de Sanov généralisé, valable pour toute chaîne de Markov à espace d'états discret, irréductible mais non nécessairement ergodique. Plus précisement, L_n verifie le *principe faible de grandes déviations* (PGD) : pour tout ouvert O (resp. fermé K) dans l'ensemble $M_s(E^2)$ des mesures équilibrées, on a

$$\begin{array}{r}\liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\ln \Pr[L_n \in O] \geq -\inf_{A\in O} H(A\|P),\\ \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\ln \Pr[L_n \in K] \leq -\inf_{A\in K} H(A\|P),\end{array}$$

où la fonctionnelle d'action H est l'entropie relative. On retrouve le principe de moindre action : *pour atteindre un état exceptionnel, un système emprunte la trajectoire de moindre information*. Ce résultat est une amélioration de l'état de l'art, car habituellement les PGD soit supposent la finitude de E, soit imposent sur X une forte condition d'uniformité, qui exclut d'importantes classes de chaînes, notamment les réseaux de files d'attente à sauts bornés. Plusieurs conséquences intéressantes ont été mises en évidence. Ainsi,

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\ln P^n(x,y) = -\inf_{A\in M_s(E^2)} H(A\|P) = -\alpha, \quad \forall (x,y),$$

la constante α étant nulle pour tout système ergodique. L'équation ci-dessus montre le lien existant entre le PGD et la frontière de Martin (i.e. l'ensemble des fonctions harmoniques), laquelle, dans le cas de transience, rend compte de la façon dont s'effectue la dérive vers l'infini. La plupart des résultats ci-dessus sont généralisables au temps continu et aux processus semi-markoviens, grâce à la notion de générateur empirique développée dans [2]. Il est en outre conjecturé, et vérifié dans plusieurs cas, que le PGD permet généralement d'accéder à l'information sur les queues des distributions stationnaires.

4. Domaines d'application

4.1. Introduction

Si la section précédente mettait l'accent sur la méthodologie, en liaison avec les processus stochastiques, il faut souligner que l'évolution des problèmes que nous traitons reste souvent guidée par les développements technologiques. Le mot « réseau » évoque aujourd'hui immanquablement les technologies de l'information, mais il couvre une problématique beaucoup plus large. En effet, l'information véhiculée peut avoir des contenus sémantiques aussi variés que le sont communications téléphoniques, transactions boursières, calculs scientifiques, marchandises, énergie, etc. *« Timeo hominem unius libri »*, disait Saint-Thomas d'Aquin : de fait peu de domaines sont, par essence, foncièrement étrangers à la modélisation. Nous en énumérons trois, dont l'importance relative varie au fil des temps et qui ont de fortes dépendances mutuelles : Télécommunications, Systèmes et Architectures Parallèles, Transports.

4.2. Télécommunications

Il s'agit d'un terrain de prédilection pour l'application des outils présentés dans le paragraphe 3.2. De nombreuses études ont été réalisées au sein du projet dès le début des années 1980, certaines dans un cadre contractuel avec le CNET, au moment de l'essor des réseaux à commutation de paquets. Nous citons, par ordre chronologique :

- l'analyse des procédures de liaison dans les systèmes téléinformatiques, principalement le standard HDLC alors très en vogue avec la notion de canal virtuel ;
- l'évaluation de protocoles d'accès et de transmission de données (Aloha, canal satellite Télécom-1, Ethernet, etc.) ;
- les problèmes de multiplexage liés à l'apparition des RNIS (*réseaux numériques à intégration de services*) ;
- allocation de ressources dans les réseaux large bande.

4.3. Systèmes et architectures parallèles

Plusieurs actions de recherche appuyées par la DRET ont donné lieu, pendant la période 1982-1995, à des études sur diverses architectures de supercalculateurs. Parmi les principaux résultats, on mentionnera :

- la représentation, à l'aide d'un modèle stochastique, des références à la mémoire générées par un programme, avec application à l'analyse des *caches* (taux de défaut, localité spatiale, ensemble de travail ou *working set*) ;
- une approche traitant les architectures complexes comme des systèmes de files d'attente avec plusieurs types de priorités ;
- l'analyse de réseaux d'interconnexion : étant donnés M processeurs et N bancs mémoire, avec $M = cN$, on a mis en évidence (à l'aide de changements d'échelle spatio-temporels) certains phénomènes qualitatifs, quant à la répartition des demandes aux différents bancs.

4.4. Transports

Ce champ, très actuel et riche en questions difficiles, s'est inséré de façon effective dans nos activités sous l'impulsion du programme PRAXITÈLE, qui visait à la conception de nouveaux modes de déplacement en zone urbaine, basés sur l'utilisation de petits véhicules en libre service (cf. sections 6.3 et 7.1). La continuation de PRAXITÈLE est l'action IMARA, sur la route automatisée, à laquelle nous participons.

4.5. Aspects statistiques des réseaux chimiques et biologiques

Cette application est destinée à devenir un axe important de recherche de PREVAL. Des résultats partiels ont déjà été obtenus (cf. section 6.10).

5. Logiciels

5.1. QNAP2

Le logiciel QNAP2 (Queueing Network Analysis Package 2) permet la résolution et l'estimation de réseaux de serveurs et de files d'attente très généraux. Ils sont décrits au moyen d'un langage spécialisé comportant les fonctionnalités algorithmiques usuelles, des manipulations d'objets et divers mécanismes (temporisations, sémaphores, routages statiques ou calculés dynamiquement, etc.). Selon les hypothèses retenues à l'analyse, le programme procède par calculs mathématiques (exacts ou approchés) ou par simulation.

L'idée de développer un logiciel original pour l'analyse de réseaux s'est concrétisée en 1976, avec un premier prototype dénommé QNAP, fruit d'une coopération entre l'INRIA et le centre scientifique CII (ultérieurement devenu BULL) de Grenoble. Il permettait déjà, grâce à un langage approprié, de décrire et de traiter certains systèmes de files d'attente, avec des mécanismes de service compliqués. Vers 1982, le logiciel a évolué vers un état plus industriel se transformant en QNAP2, diffusé d'abord par BULL, puis par la société SIMULOG depuis 1985.

Les ajouts de fonctionnalités ont été réalisés grâce au soutien logistique constant de l'INRIA et particulièrement de Marc Badel, membre du projet jusqu'en 1997 : nouvelles méthodes de résolution mathématique, fonctions et procédures attachées à des types d'objets utilisateur, ainsi que la notion de fonctions et procédures virtuelles. Cette approche, inspirée des langages SIMULA67 et C++, fait évoluer QNAP2 vers un langage orienté objet. QNAP2 a été intégré dans l'environnement MODLINE, réalisé par la société SIMULOG et issu du projet européen IMSE, dont l'INRIA était partenaire, de 1988 à 1991. MODLINE est actuellement commercialisé par SIMULOG.

6. Résultats nouveaux

6.1. Introduction

Les points énumérés ci-dessous doivent être plongés dans le contexte des sections 3.1 et 4.1, bien que les chronologies ne soient pas identiques, certains recouvrements étant par ailleurs inévitables.

6.2. Modèles de réseaux de télécommunications

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle, Jean-Marc Lasgouttes.

6.2.1. Partage de bande passante dans les réseaux

Ce sujet est issu de l'action contractuelle mentionnée dans la section 7.2. Typiquement, on considère un réseau parcouru par un ensemble de routes de longueur fixée, dans lequel la bande passante disponible sur chaque canal est partagée entre les connexions actives suivant la politique dite du « min » : chaque lien partage sa capacité équitablement entre les différents appels qu'il gère, de façon totalement décentralisée ; en outre, un appel est servi au taux offert par le lien le plus chargé qu'il utilise. Les travaux amorcés depuis 1999 ont continué et donné lieu à de nouvelles publications.

- Dans [20], sous l'angle des grandes déviations (cf. section 6.8.3), on généralise les résultats sur le réseau en étoile. On remarque en effet que les méthodes proposées les années précédentes fonctionnent sous des hypothèses très larges, satisfaites par des topologies et des classses de protocoles générales : partage de processeur généralisé, allocation-α de bande passante, politiques « min » et « équité max-min »).

- Une approche originale ébauchée dans [5] qui devrait permettre de travailler sur des grands réseaux non symétriques (cf. section 6.5). Ainsi, dans le cas spécial où l'entrée du réseau est un seul gros « backbone », on trouve des conditions d'insensibilité aux valeurs de certains paramètres, lesquelles perdurent pour une grande variété de politiques d'allocation, dont la fameuse « équité max-min ».
- Dans [29] On s'intéresse à différents modèles d'allocation de bande passante dans des réseaux de télévision câblée. Deux files d'attente $M/M/1$ en tandem figurent les deux étapes de la transmission : d'abord le passage dans un arbre de résolution de collisions permettant à chaque client d'émettre ses données sans conflit, puis la transmission des données elles-mêmes. Dans le cadre du projet PELICAN, en collaboration entre l'institut Eurandom et Philips Research, on a en particulier cherché à décrire l'ensemble des processus ayant des distributions stationnaires à forme produit et soumis à des contraintes de partage de bande passante.

6.2.2. Systèmes à polling

Les systèmes dits à *polling,* où V serveurs partagent leurs services entre N stations, selon une politique fixée, font toujours l'objet d'une abondante littérature à cause de leur vaste champ d'applications. Si des percées spectaculaires ont été accomplies concernant les conditions d'existence de régimes stables, il est encore rarement possible de calculer les grandeurs phares intéressantes, telles par exemple les temps d'attente ou les nombres moyens, et les méthodes asymptotiques deviennent relativement incontournables. Dans ce contexte a été réalisée l'étude [11] présentée dans la section 6.8.

6.3. Réseaux de transport

Participant : Cyril Furtlehner.

Dans le cadre de l'action Imara, on a défini dans [23] un modèle de voitures automatiques (*cybercars*) circulant sur un réseau quelconque, par exemple celui de l'INRIA. Les demandes sont aléatoires et il s'agit d'acheminer les utilisateurs vers des destinations également tirées au hasard suivant des poids prédéfinis. Le modèle est implémenté numériquement sur un simulateur graphique. Un algorithme basé sur l'effet d'un champ d'interaction sur le réseau entre les clients et véhicules permet d'optimiser l'offre en fonction de la demande et de limiter les temps d'attente. Le champ permettant d'orienter les véhicules est de la forme

$$V(i) = \sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}[q_1 n_1(j) + q_2 n_2(j) + q_3 n_3(j)],$$

où $n_1(j), n_2(j), n_3(j)$ représentent les nombres respectifs d'utilisateurs, de voitures arrivant et de parking libres au nœud j, et q_1, q_2, q_3 sont les charges correspondantes.

$$K_{ij} = (\Delta + \xi^{-2})^{-1}_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq N.$$

est l'inverse du Laplacien discret $\Delta_{ij} = \sum_{k\in\langle i\rangle}(\delta_{jk} - \delta_{ij})$, régularisé par ξ, la portée (finie) de l'interaction. Ici q_1 et q_3 sont négatifs, mais q_2 est positif. Le champ a donc pour effet d'orienter les cybercars vers la demande tout en réduisant l'engorgement. Le simulateur a permis de montrer l'efficacité de l'algorithme sur un grand réseau de 1000 nœuds. Les démonstrations théoriques de ces phénomènes sont en cours.

6.4. Méthodes analytiques

6.4.1. Comptage de cartes sur des surfaces

Participants : Guy Fayolle, Vadim Malyshev.

En collaboration avec M. Krikun (Université de Moscou), on veut déterminer le comportement asymptotique du nombre de cartes pour des surface de genre arbitraire. Dans [15], des résultats partiels ont été obtenus pour des surfaces compactes orientables, avec p sommets et $b+p$ arcs.

Une généralisation est en cours, conduisant à une équation fonctionnelle de deux variables complexes, non linéaire et aux dérivées partielles. Elle se résout explicitement par réduction intermédiaire à une équation de Riccati. Interviennent alors des fonctions de Whittaker et de Kummer, qui semblent être des objets génériques pour les structures analysées [27].

6.4.2. Files d'attente avec service en ordre aléatoire

Participant : Jean-Marc Lasgouttes.

En collaboration avec O. Boxma, S. Foss et R. Núñez Queija, on considère dans [26] une file d'attente à un serveur, le service des clients ayant lieu selon un ordre aléatoire. Pour une large classe de distributions de temps de service, on détermine le comportement de la queue de distribution du temps d'attente. Lorsque les arrivées sont de Poisson et les temps de service sont à variation régulière d'indice $-\nu$, on montre que la distribution du temps d'attente est aussi a variation régulière, avec indice $1-\nu$, et la constante est déterminée explicitement.

On s'intéresse aussi au comportement de la distribution du temps d'attente en trafic fort pour une file $M/G/1$. On obtient des résultats non seulement dans le cas où la variance du temps de service est finie, mais aussi quand sa distribution est à variation régulière avec variance infinie.

6.5. Systèmes en limite thermodynamique

Participants : Guy Fayolle, Jean-Marc Lasgouttes.

Nous avons poursuivi l'analyse de réseaux généraux de grande taille, pour lesquels la mesure invariante n'a pas de forme explicite. Il s'agit de déterminer les conditions de propagation du chaos, en dynamique ou en régime stationnaire, les techniques étant d'ailleurs fort différentes dans les deux cas.

6.5.1. Réseaux de files M/G/1

Le premier candidat étudié est le réseau de Jackson ouvert, dans lequel les distributions des temps de service sont arbitraires. En fait, la possible existence du chaos s'avère a priori intimement liée à l'approximation poissonnienne des flux totaux arrivant à chaque file d'attente. Mais rien n'est ici évident, car il est connu que dans la plupart des réseaux à forme produit les flux internes ne sont pas de Poisson, même si chaque file se comporte comme une simple $M/M/1$ avec distribution géométrique.

6.5.2. Réseaux markoviens généraux

Une approche basée sur l'analyse spectrale de générateurs infinitésimaux des processus semble prometteuse. Elle a déjà été testée avec succès dans [5], à l'occasion des travaux sur le partage de bande passante évoqués dans la section 6.2.1. On étend les méthodes *champ moyen* à certaines fonctionnelles de chaînes de Markov à espace d'états non dénombrable et ne possédant pas de symétrie. Des liens normaux apparaissent avec le théorème central limite pour des variables faiblement dépendantes.

6.6. Grammaires aléatoires, grammaires de graphes, grammaires quantiques

Participant : Vadim Malyshev.

Les grammaires aléatoires existent depuis longtemps en informatique, mais les études concernant leur limite thermodynamique et leur comportement stationnaire sont très embryonnaires. Dans [14][24], on analyse de façon détaillée les grammaires « context-free » dans la région sur-critique, i.e. lorsque le longueur du mot croît exponentiellement. Des statistiques et limites diverses sont calculées, relatives notamment à la taille des sous-mots, lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Quant à l'introduction des grammaires quantiques, le but est double :

- contribuer au développement de l'informatique quantique ;

- introduire rigoureusement des modèles simples dans la physique moderne (spécialement pour la gravité quantique).

Elles ont des analogues en termes de systèmes à spins quantiques. Dans [18], on les étudie sous divers aspects : caractère auto-adjoint de l'Hamiltonien, algèbres C^* et leurs automorphismes, états KMS. Le spectre de l'Hamiltonien est exhibé dans plusieurs exemples. Des liens avec le modèle classique de Lorentz à deux dimensions sont établis : on montre l'existence de semi-groupes unitaires complètement positifs, dont on obtient les spectres, puis on caractérise le comportement stationnaire.

6.7. Complexes aléatoires

Participant : Vadim Malyshev.

Cette notion a été brièvement présentée dans la section 3.6.

6.7.1. *Champs de Gibbs*

On a donné les années précédentes les prémisses d'une nouvelle théorie : champs de Gibbs sur les graphes de Gibbs. La notion de champ de Gibbs est centrale pour la physique statistique mathématique, particulièrement dans le domaine des champs quantiques euclidiens. On a introduit une généralisation naturelle, en rendant aléatoire l'espace sur lequel est défini le champ, cet aléa pouvant dépendre de la configuration. L'objet résultant est encore une famille de Gibbs, car elle paramétrise des champs de Gibbs sur différents graphes.

Dans [17], on considère des distributions de Gibbs sur des cartes colorées avec champ de matière. Par des techniques de développements en grappes (*clusters*), il est prouvé que dans les zones de haute température l'exposant critique peut changer.

6.7.2. *Cartes*

Partant d'une approche combinatoire, on détermine dans [15] le comportement asymptotique de la longueur de la frontière pour les triangulations d'un disque à l'aide de N triangles, lorsque $N \longrightarrow \infty$. Des résultats généraux sont également donnés dans [16].

6.8. Grandes déviations

6.8.1. *Résultats généraux*

Participants : Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle.

Comme il a été évoqué dans la section 3.7, une approche nouvelle, basée sur une décomposition en cycles, a permis d'étendre le théorème de Sanov aux chaînes de Markov à espace d'états dénombrable, sous la seule hypothèse d'irréductibilité [12] : la mesure empirique d'ordre 2 satisfait un PGD. On obtient un certain nombre de corollaires, parmi lesquels le lemme intégral de Varadhan ou encore, sous certaines conditions, un principe de contraction qui entraîne immédiatement le théorème de Sanov faible pour les mesures empiriques d'ordre 1. La preuve repose sur une agrégation des états et sur des propriétés fines de la fonctionnelle d'action H, l'entropie.

Une approche alternative a été développée dans [2], qui semble plus générale et se fonde sur la notion de processus *déviant*, où intervient un principe analogue à celui de la loi dite de moindre action : pour atteindre un état exceptionnel, un système emprunte la trajectoire d'information minimale. Un changement de mesure permet de focaliser sur cette trajectoire et H quantifie l'information. Au delà d'une technique de calcul, on a une méthode pour mieux appréhender la dynamique des systèmes. La même démarche a permis de montrer un PGD pour les chaînes en temps continu, à l'aide de la notion de *générateur empirique*, qui est une extension de la mesure empirique classique [19].

6.8.2. *Développements fins de l'entropie*

Participant : Arnaud de La Fortelle.

En dépit de sa non-continuité, l'entropie admet une sorte de développement de Taylor donnant des résultats asymptotiques plus précis que le PGD. En outre, le Hessien de l'entropie, au point où elle est minimale, est exprimé dans [2] en fonction de la matrice de variance-covariance, selon une formule beaucoup plus générale, du type

$$\Sigma_{ij} = \langle \nabla^2 H(G)^{-1} f_i, f_j \rangle. \tag{1}$$

On arrive ainsi à quantifier les covariances à l'intérieur de certains réseaux, ce qui est nouveau. La justification des opérations de dérivation dans l'équation (1) requiert une analyse fine des espaces mis en jeu. On démontre, en s'appuyant sur certains résultats de [12] utilisés pour les grandes déviations, que la variance s'exprime à l'aide de (1) dans les trois cas suivants : suite de variables *i.i.d*, chaînes de Markov sur un espace polonais, processus de sauts markoviens sur un espace d'états dénombrable. Ces développements ont donné lieu au rapport [19].

6.8.3. Réseaux à polling

Participants : Franck Delcoigne, Arnaud de La Fortelle.

En poursuivant l'étude faite en 2001, on a exploité les résultats de grandes déviations pour obtenir le comportement de la queue de la distribution stationnaire. Ces développements sont exposés dans [20] et prolongent, par d'autres techniques, des idées liées aux frontières de Martin (cf. rapport d'activité 2001). La théorie de Freidlin et Wentzell suggère que la queue de la distribution stationnaire d'un nœud quelconque, par exemple 1, est liée à la fonctionnelle d'action des grandes déviations I_T par la formule

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P\{q_1 > n\} = - \inf_{T \geq 0} \inf_{\varphi} \{I_T(\varphi) : \varphi(0) = 0, \varphi_1(T) = 1\}. \tag{2}$$

Sous la conjecture que les trajectoires de saturation sont des droites, le problème d'optimisation (2) est ramené à un programme en dimension finie.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log P\{q_1 > n\} = \inf_{G: D_1 > 0} \frac{H(G \| R)}{D_1},$$

où intervient l'entropie du réseau $H(.\|R)$, et qui se résoud assez aisément numériquement. La démarche proposée s'étend à d'autres classes de réseaux (Jackson, l'étoile de la section 6.8.4).

6.8.4. Réseaux en étoile

Participants : Franck Delcoigne, Arnaud de La Fortelle.

En appliquant les techniques de changement de mesure et la notion de processus déviant mentionné dans la section 6.8.1, on a pu caractériser dans [20] les modes de saturation pour un réseau étoilé de taille finie, non symétrique. Ces résultats théoriques donnent, au prix d'une heuristique encore à l'étude, un algorithme de calcul pour la queue de la distribution stationnaire. En comparant les résultats avec le critère d'ergodicité et avec les simulations, on constate que le critère de grandes déviations est de fait bien meilleur que celui de l'ergodicité.

6.9. Arbres aléatoires

Participants : Guy Fayolle, Jean-Marc Lasgouttes.

Dans [13], en collaboration avec M. Krikun, on donne le taux de croissance et les conditions d'ergodicité pour une classe d'arbres aléatoires avec adjonction d'arcs suivant un processus de Poisson et suppression des feuilles avec un taux μ. Les résultats principaux mettent en vedette le fameux nombre e. On obtient une classification complète du processus selon les valeurs du facteur d'intensité $\rho = \lambda/\mu$: ergodicité si $\rho \leq e^{-1}$ et transience si $\rho > e^{-1}$. Un phénomène de transition de phase apparaît : dans l'espace des paramètres, la région correspondant habituellement à la récurrence nulle n'existe pas. Cette situation est rare pour des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable. On prouve aussi un théorème de type ergodique pour la hauteur H de l'arbre qui, lorsque $t \longrightarrow \infty$, croît presque sûrement linéairement à une vitesse obtenue analytiquement. Dans [22], on analyse plus finement certaines grandeurs (nombre de nœuds, distribution de H dans le cas ergodique) et on étend le modèle au cas où il y a plusieurs classes de nœuds.

6.10. Réseaux chimiques

Participants : Guy Fayolle, Vadim Malyshev.

Les réseaux chimiques peuvent être vus comme des marches aléatoires non-homogènes en espace, avec sauts non bornés.

Dans [25], on considère le cas d'un nombre fini de types de molécules, sous divers changwements d'échelle et on donne des conditions suffisantes d'existence de points fixes pour certaines équations de Boltzmann.

Dans [28] Ici, on s'intéresse à un système formé de N molécules qui modifient leurs niveaux d'énergie par des interactions en couples, tout en conservant l'énergie totale du système proportionnelle à N. Par analogie au fameux modèle de M. Kac (1956), on montre l'existence, lorsque $N \longrightarrow \infty$, d'équations de Boltzmann non linéaires, dont on caractérise le régime stationnaire. Le raisonnement s'étend au cas multi-types.

6.11. Enroulements de marches aléatoires

Participants : Guy Fayolle, Cyril Furtlehner.

On considère dans [21] une marche aléatoire évoluant dans le plan et soumise à des déformations stochastiques. Selon les taux de déformations, en particulier suivant la valeur d'un paramètre η responsable d'une brisure de symétrie gauche-droite, la distribution des enroulements de la marche est modifiée et le système présente trois phases différentes : enroulée, tendue et vitreuse. Une tranformation explicite est proposée, qui conduit à considérer le système comme résultant de deux processus d'exclusion couplés : les particules du premier se déplacent dans un environnement déterminé par la distribution des particules du second et vice-versa. Chaque composante peut alors être vue comme un modèle d'exclusion inhomogène. Pour toute marche périodique fermée, un changement d'échelle permet de montrer une convergence en loi (ou presque sûre sur un espace de probabilité agrandi) vers une courbe, dont l'équation est donnée par un système d'équations différentielles stochastiques explicites. La dynamique est analysée par une approche formelle de type limite fluide, qui met en lumière un système d'équations de Burgers.

6.12. Divers

Participant : Roudolf Iasnogorodski.

En collaboration avec H. Lhéritier (Université d'Orléans), un livre [10] (niveau cours de DEA) est en cours de publication. Il propose une théorie exacte et asymptotique de l'estimation paramétrique, présentée d'un point de vue global.

7. Contrats industriels

7.1. Praxitèle, Imara

Le programme Praxitèle, qui avait donné lieu en 1993 à un consortium industriel regroupant l'INRIA, l'INRETS, la CGEA, DASSAULT AUTOMATIQUE, EDF et RENAULT, s'est achevé en Juin 1997. Il a été suivi d'une expérimentation en vraie grandeur dans la région de Saint-Quentin en Yvelines, terminée en 1999 de façon très convaincante.

Il s'agissait d'étudier et de promouvoir un nouveau mode de transport public, basé sur l'utilisation de petits véhicules urbains, de préférence électriques, dont le parc serait géré par un système informatique s'appuyant sur un réseau de télécommunications. La relation contractuelle établie avec PREVAL, issue d'une proposition intitulée *Problèmes de modélisation mathématique pour la conception de réseaux de véhicules électriques à usage collectif*, a permis de subventionner une thèse. Cette thématique a aussi concerné des équipes du centre scientifique franco-russe A. M. Lyapounov.

Outre les modèles, les travaux de ces trois dernières années ont comporté un volet sur la conception de simulations rapides. L'un des problèmes cruciaux pour un dimensionnement correct du système provient de la non-stationnarité des demandes, ce qui impose une politique des retours à vide (hauts-le-pied). Des réponses partielles à ces questions ont été données (cf. section 6.3 et les rapports d'activité 1999-2000).

Actuellement, le projet PREVAL participe à l'action IMARA sur la route automatisée, qui s'inscrit dans le prolongement de PRAXITÈLE et fait partie du consortium français « La Route Automatisée » en coopération avec l'INRETS, le LCPC, l'ENSMP, l'ENPC et l'ENST. Des réflexions récentes ont mis l'accent, du point de vue modélisation, sur des liens possibles avec la mécanique statistique.

7.2. France Télécom R&D

Participants : Franck Delcoigne, Guy Fayolle, Arnaud de La Fortelle, Jean-Marc Lasgouttes.

La consultation thématique France Télécom R&D N^{o}, lancée en 1997, a donné lieu à l'action contractuelle N^{o}981B016, qui a pris effet en Février 1998 et s'est achevée en Avril 2001.

Cette convention s'inscrivait dans le cadre d'études menées à FTRD/DAC/GTR, dans le groupe *Modélisation du trafic et analyse des performances des réseaux large bande*. Il s'agissait principalement d'étudier les problèmes d'ingénierie du trafic, liés à l'introduction du service dit ABR, afin de dégager des règles de dimensionnement et de contrôle de flux pour les réseaux offrant un tel service. Les travaux ont été réalisés au sein du projet, à l'aide de méthodes de modélisation mathématique. Le but était d'acquérir une compréhension structurelle des phénomènes, afin d'établir une sorte de typologie des réseaux ATM et large bande, en les considérant comme essentiellement équivalents à un ensemble de systèmes dynamiques, fonctionnant sous différentes échelles de temps. L'exécution du contrat comportait deux phases principales.

- D'abord, à partir de critères donnés pour le partage de charge (par exemple équité *max-min*), analyser les performances d'une configuration *typique* de réseau. Compte tenu de la complexité des systèmes, on pouvait appliquer des méthodes asymptotiques de type champ moyen et limite thermodynamique.
- Ensuite, dans le cadre de l'allocation de ressources imposée par le service ABR, étudier les différentes façons de satisfaire un critère donné.

Le contenu scientifique du rapport de synthèse, évoqué dans diverses rubriques de la section 6.2.1, peut être consulté dans [5].

8. Actions régionales, nationales et internationales

8.1. Actions nationales

8.1.1. Relations académiques

Le projet entretient des collaborations plus ou moins étroites avec les centres de recherche suivants :

- Université PARIS I (M. Cottrell) ;
- Université d'Orléans (R. Iasnogorodski) ;
- Université PARIS 6, Laboratoire de Probabilités, (J. Jacod) ;
- Université PARIS 10, Département de Mathématiques, (S. Méléard) ;
- Université de Marne-la Vallée (J. Diebolt) ;
- France Télécom R&D, DAC/GTR (T. Bonald, J. Roberts) ;

- École polytechnique (F. Dunlop, C. Graham) ;
- École normale supérieure de Paris (B. Derrida, J.-F. Le Gall, G. Ruget) ;
- ENSAE (P. Doukhan) ;
- SUPELEC et ENSTA (P. Brémaud).

8.1.2. Séminaires

Le séminaire hebdomadaire *Probabilité Optimisation Contrôle* a lieu à Rocquencourt, en synergie avec les projets FRACTALES et METALAU. L'organisation, côté PREVAL, en est confiée à A. de La Fortelle.

8.1.3. Divers

G. Fayolle est membre du conseil scientifique de l'Inria.

8.2. Actions internationales

8.2.1. Centre Franco-Russe

G. Fayolle et V. Malyshev participent aux activités du centre *A. M. Lyapounov*, situé au sein de l'Université de Moscou et officiellement inauguré le 19 Décembre 1993. Ils ont été co-responsables du projet intitulé *Probabilités et analyse de grands réseaux* et ont également organisé plusieurs séminaires. La partie russe comprenait des équipes du LLRS (*Laboratoire d'analyse des grands systèmes*, Université de Moscou) et le *Laboratoire R. Dobrushin* de l' IPPI (*Institut des problèmes de transmission de l'information*, dépendant de L'Académie des Sciences).

8.2.2. Comités de programmes et d'édition de revues

V. Malyshev fait partie du comité éditorial des revues russes *Problems of Information Transmission* et *Fundamental and Applied Mathematics* ; il est également fondateur et éditeur en chef du journal *Markov Processes and Related Fields*, G. Fayolle étant membre du comité de rédaction.

G. Fayolle est membre du groupe de travail IFIP WG 7.3, qui comprend une centaine de membres élus et représente diverses communautés scientifiques intéressées par la modélisation des systèmes.

8.2.3. Relations internationales

G. Fayolle et V. Malyshev collaborent avec les universités et centres de recherches de Leuven (Belgique), Bielefeld et Braunschweig (Allemagne), Lund (Suède), Moscou (Département de probabilités de l'université + IPPI de l'Académie des Sciences), EURANDOM (Pays-Bas), Cambridge et Newcastle (Angleterre).

De longue date, l'équipe maintient divers contacts avec les États-Unis (Berkeley, Columbia, Georgia Inst. of Tech., San Diego, Monterey, AT&T) et avec la Russie (Moscou, Novossibirsk, Saint-Petersbourg).

8.2.4. Visites de chercheurs et professeurs étrangers

S. Pirogov (IPPI, Moscou) a passé le mois de novembre dans l'équipe. Nous avons également reçu D. Gaver (Post Graduate Naval School, Monterey).

9. Diffusion des résultats

9.1. Introduction

Les résultats obtenus dans l'équipe ont été diffusés dans quelques uns des principaux colloques concernant le domaine et ont fait l'objet de conférences et d'invitations dans divers centres de recherche. On ne cite que les éléments principaux.

9.2. Visites de laboratoires

G. Fayolle a reçu des invitations des universités de Moscou, de Columbia (USA), de Newcastle, de Cambridge, ainsi que de AT&T (Murray Hill, USA).

A. de La Fortelle a séjourné au centre Lyapounov pendant le mois d'août.

J.-M. Lasgouttes a été invité par O. Boxma pendant neuf mois à l'institut EURANDOM (Eindhoven, Pays-Bas), de décembre 2001 à septembre 2002.

V. Malyshev a séjourné plusieurs fois en Russie (universités de Saint-Pétersbourg et de Moscou).

9.3. Conférences

A. de La Fortelle a fait un exposé au *Colloque Franco-Tunisien sur les grandes déviations* (université de Versailles-Saint-Quentin, 17-19 décembre 2002).

G. Fayolle et V. Malyshev ont présenté respectivement [13] et [15] au *Colloquium on Mathematics and Computer Science* (Versailles, 16-19 septembre 2002). V. Malyshe a été co-éditeur de [16] avec A. Vershik.

V. Malyshev a donné plusieurs séminaires : université de Leuwen en Belgique (mars), ENS de Lyon (novembre), IPPI de Moscou (février). Il était co-éditeur avec A. Vershik du volume [16].

9.4. Activités universitaires

G. Fayolle a été membre du jury des épreuves orales du concours d'agrégation externe de mathématiques, du 24 juin au 18 juillet 2002.

9.5. Jurys de thèse

Guy Fayolle est co-directeur avec B. Bercu (Laboratoire de Statistique et Probabilités, université P. Sabatier) de la thèse de P. Cenac, qui vient de débuter en décembre.

10. Bibliographie

Bibliographie de référence

[1] S. ASPANDIIAROV, R. IASNOGORODSKI. *General Results on Stationary Measures of Recurrent Countable Markov Chains and their Applications.* in « Bernoulli », 1999.

[2] A. DE LA FORTELLE. *Contribution à la théorie des grandes déviations et applications.* thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées, novembre, 2000.

[3] G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI. *Two Coupled Processors : The Reduction to a Riemann-Hilbert Problem.* in « Z. Wahrscheinichkeitstheorie verw. Gebiete », volume 47, 1979, pages 325-351.

[4] G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI, V. A. MALYSHEV. *Random walks in the Quarter Plane.* série Applications of Mathematics, numéro 40, Springer-Verlag, 1999.

[5] G. FAYOLLE, J.-M. LASGOUTTES. *Partage de bande passante dans un réseau : approches probabilistes.* Rapport de Recherche, numéro 4202, INRIA, 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4202, 70 pages.

[6] G. FAYOLLE, J.-M. LASGOUTTES. *Asymptotics and Scalings for Large Product-Form Networks via the Central Limit Theorem.* in « Markov Processes and Related Fields », numéro 2, volume 2, 1996.

[7] G. FAYOLLE, V. A. MALYSHEV, M. V. MENSHIKOV. *Topics in the constructive theory of countable Markov chains.* Cambridge University Press, 1995.

[8] V. A. MALYSHEV. *Marches aléatoires, équations de Wiener-Hopf dans le quart de plan, automorphismes de Galois.* Éditions de l'Université de Moscou, 1970, en russe.

[9] V. A. MALYSHEV. *Networks and dynamical systems.* in « Adv. Appl. Prob. », volume 25, 1993, pages 140-175.

Livres et monographies

[10] R. IASNOGORODSKI, H. LHÉRITIER. *Théorie de l'Estimation Paramétrique.* EDP Sciences, 2002, à paraître.

Articles et chapitres de livre

[11] F. DELCOIGNE, A. DE LA FORTELLE. *Large Deviations Rate Function for Polling Systems.* in « Queueing Syst. Theory Appl. », numéro 1-2, volume 41, 2002.

[12] G. FAYOLLE, A. DE LA FORTELLE. *Large Deviation Principle for Markov Chains in Discrete Time.* in « Problems of Information Transmission », numéro 4, volume 38, 2002.

[13] G. FAYOLLE, M. KRIKUN. *Growth Rate and Ergodicity Conditions for a Class of Random Trees.* éditeurs B. CHAUVIN, P. FLAJOLET, D. GARDY, A. MOKKADEM., in « Mathematics and Computer Science », série Trends in Mathematics, volume II, Birkhäuser, 2002, pages 381-391.

[14] F. KARPELEVICH, V. MALYSHEV, A. PETROV, S. PIROGOV, A. RYBKO. *Random Context Free Evolution.* in « Analytic and Probabilistic Methods in Complex Networks », Amer. Math. Soc., 2002, à paraître.

[15] M. KRIKUN, V. MALYSHEV. *Random boundary of a Planar Map.* éditeurs B. CHAUVIN, P. FLAJOLET, D. GARDY, A. MOKKADEM., in « Mathematics and Computer Science », série Trends in Mathematics, volume II, Birkhäuser, 2002, pages 83-93.

[16] V. A. MALYSHEV. *Combinatorics and Probability of Maps.* éditeurs V. MALYSHEV, A. VERSHIK., in « Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics », série Nato Science Series, volume 77, Kluwer, 2002, pages 71-95.

[17] V. MALYSHEV. *Dynamical Triangulation Models with Matter : High Temperature Region.* in « Commun. in Math. Physics », numéro 1, volume 226, 2002, pages 163-181.

[18] V. MALYSHEV. *Quantum Evolution of Words.* in « Theoretical and Computer Science », volume 273, 2002, pages 263-269.

Rapports de recherche et publications internes

[19] A. DE LA FORTELLE. *Variance calculation Through Large Deviation Techniques.* rapport technique, numéro 4441, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4441.html, soumis à *Annals of Probability*.

[20] F. DELCOIGNE, A. DE LA FORTELLE. *Large deviations for a class of Markov processes modelling communication Networks.* rapport technique, numéro 4474, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4474.html, soumis à *Stochastic Processes and their Applications*.

[21] G. FAYOLLE, C. FURTLEHNER. *Dynamical Windings of Random Walks and Exclusion Models. Part I : Thermodynamic Limit.* rapport technique, numéro 4608, INRIA, novembre, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4608.html, soumis à *Journal of Statistical Physics*.

[22] G. FAYOLLE, M. KRIKUN, J.-M. LASGOUTTES. *Birth and Death Processes on Certain Random Trees : Classification and Stationary Laws.* rapport technique, numéro 4380, INRIA, février, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4380.html, soumis à *Probability Theory and Related Fields*.

[23] C. FURTLEHNER. *Stochastic Model of Automatic Traffic Service Controlled by Lattice Coulomb Interactions.* rapport technique, numéro 4681, INRIA, décembre, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4681.html.

[24] F. KARPELEVICH, V. MALYSHEV, A. PETROV, S. PIROGOV, A. RYBKO. *Context Free Evolution of Words.* rapport technique, numéro 4413, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4413.html.

[25] V. A. MALYSHEV. *Random walks and Chemical Networks.* rapport technique, numéro 4412, INRIA, 2002, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4412.html.

Divers

[26] O. BOXMA, S. FOSS, J.-M. LASGOUTTES, R. NÚÑEZ QUEIJA. *Waiting time asymptotics in the single server queue with service in random order.* 2002, en préparation.

[27] G. FAYOLLE. *A Ricatti equation in the Asymptotic Number of Maps on Compact Surfaces.* mars, 2002.

[28] G. FAYOLLE, V. MALYSHEV, S. PIROGOV. *Chemical Networks in Thermodynamic Limit.* 2002, en préparation.

[29] J.-M. LASGOUTTES. *On Allocation of Bandwidth in Cable Access Network.* 2002, en préparation.

Bibliographie générale

[30] V. A. MALYSHEV. *Random Grammars.* in « Russian Math. Reviews », volume 2, 1998, pages 107-134.