INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision

Rocquencourt

THEME 4A

Activity Report

2003

Table of contents

1. Team

Responsable scientifique
Stéphane Gaubert [DR, Inria]

Responsable permanent
Marianne Akian [CR, Inria]

Assistante de projet
Martine Verneuille [TR, Inria]

Personnel Inria
Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus]
Cormac Walsh [CR]

Conseiller scientifique
Guy Cohen [Professeur ENPC, conseiller scientifique dans le projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus]

Collaborateurs extérieurs
Michel Gondran

Doctorants
Ricardo Katz [Université de Rosario, Argentine]
Asma Lakhoua [Paris VI]

Stagiaires
Alexandru Costan [Ecole Polytechnique]

Personnel imaginaire
Max Plus [Nom collectif pour le groupe de travail de Rocquencourt[1]]

2. Overall Objectives

Key words: *algèbre max-plus*, *systèmes à événements discrets*, *décision markovienne*.

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent : théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique, théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle.

On peut distinguer les axes de recherche suivants.

2.1.1. Commande optimale et théorie des jeux

. On s'intéresse aux problèmes de décision, et en particulier aux méthodes de programmation dynamique, que l'on aborde aussi bien du point de vue théorique (étude des propriétés de structure), que de la résolution pratique (par le développement d'algorithmes rapides). On développe en particulier les thèmes suivants :

1. Systèmes dynamiques monotones ou contractants, théorie spectrale non-linéaire.
2. Algorithmes d'itération sur les politiques, algorithmes de graphe, problèmes de grande taille en programmation dynamique.
3. Étude et discrétisation d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

[1]Réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus : Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie de Maxplus.

2.1.2. *Systèmes à événements discrets*

On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe en particulier les thèmes suivants :

1. Théorie des systèmes max-plus linéaires (approche géométrique).
2. Théorie des automates (automates à multiplicité).
3. Algorithmique pour l´évaluation de performance.
4. Réseaux de transport (en collaboration avec le projet Metalau).

2.1.3. *Recherche opérationnelle*

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation discrète, et notamment à l'application de méthodes algébriques à la résolution de problèmes d'optimisation discrète (techniques d'agrégation, ordonnancement, problèmes de flots).

2.1.4. *Algèbre max-plus et domaines reliés*

L'algèbre max-plus apparaît dans plusieurs problèmes des mathématiques et de la physique, en particulier dans l'étude de phénomènes asymptotiques. On s'intéresse au développement théorique de l'algèbre max-plus, en relation avec ces problèmes. On étudie notamment des questions de :

1. Perturbations de valeurs propres ;
2. Probabilités idempotentes et grandes déviations ;
3. Algèbre linéaire et convexité.

2.1.5. *Logiciel*

On développe la boîte à outils max-plus de Scilab, qui implémente certains de nos travaux.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a,b) \mapsto a \oplus b = \max(a,b)$ et de la multiplication $(a,b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente : $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure, comme le semi-corps *min-plus*, qui s'obtient en remplaçant $\max$ par $\min$ et $-\infty$ par $+\infty$, ou le *semi-anneau tropical*, qui s'obtient en prenant comme ensemble sous-jacent $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ dans la définition du semi-corps min-plus. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus : tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement « l'algèbre max-plus ».

L'algèbre max-plus apparaît dans plusieurs domaines des mathématiques et des sciences de l'ingénieur. Sa théorie a été, et continue à être développée, par plusieurs écoles, voir par exemple, et de manière non-exhaustive, [44], [74][75][76], [50], [59][60][54], [70], [40], [6], [58], [52], [73][48][38][61].

Nous nous bornons ici à décrire de manière très succinte, en donnant des références, les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet : problèmes de plus court chemin, et plus généralement recherche opérationnelle, commande optimale et théorie des jeux, équations d'Hamilton-Jacobi, asymptotiques (de type grandes déviations), modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, commande optimale

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est celui de trouver le chemin de longueur k de coût minimum d'un point à l'autre d'un graphe orienté : si l'on se donne un ensemble

$\mathcal{N}$ de nœuds, et pour toute paire (i, j) de nœuds, un coût $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ce problème conduit à calculer la fonction valeur $v : \mathbb{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(k, i, j) \mapsto v_{ij}(k)$, qui associe à un état initial i, un état final j, et un horizon, k, la quantité :

$$v_{ij}(k) = \min_{\substack{\ell_0,\dots,\ell_k \in \mathcal{N} \\ i=\ell_0 \quad \ell_k=j}} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \,. \tag{1}$$

L'équation de la programmation dynamique est une équation linéaire min-plus, qui peut s'écrire avec des notations matricielles :

$$v(k) = Mv(k-1), \qquad \text{i.e.} \quad v_{ij}(k) = \min_{s \in \mathcal{N}} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \,. \tag{2}$$

Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x, T) = \inf_{X(\cdot),\ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \,,$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \leq t \leq T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, n'est autre qu'une version en dimension infinie de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot, 0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad \text{où} \quad H(x, p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x, y)) \,, \tag{3}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (3) vérifient un principe de superposition min-plus : si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\min(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (3). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement d'une école « russe » de l'*analyse idempotente* (voir [60][54][56]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de mieux comprendre la structure de l'espace des solutions des versions stationnaires de (2) et (3). Ainsi, la théorie spectrale max-plus, développée par de nombreux auteurs, décrit complètement les espaces propres d'applications max-plus linéaires en dimension finie. Voir aussi [60][54] pour des généralisations en dimension infinie.

3.3. Dynamique d'applications monotones, théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, jeux

Un point de vue plus général consiste à étudier la dynamique d'applications croissantes. Ainsi, on sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les équations de programmation dynamique de problèmes de contrôle ou de jeux, avec critère additif, conduisent à étudier des dynamiques de la forme

$$x(k+1) = f(x(k)) \,,$$

où l'application f vérifie les propriétés

Homogénéité	$f(\lambda + x)$	$=$	$\lambda + f(x)$	(H)
Monotonie	$x \leq y$	$\Rightarrow$	$f(x) \leq f(y)$	(M)
Contraction	$\\|f(x) - f(y)\\|_\infty$	$\leq$	$\\|x - y\\|_\infty$	(C)

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$, avec $\lambda + x \overset{\text{def}}{=} (\lambda + x_1, ..., \lambda + x_n)$, et où $\leq$ désigne l'ordre partiel usuel sur $\mathbb{R}^n$. (On reconnait dans l'équation dynamique (2) d'un problème de commande optimale discret, un exemple très particulier d'une telle dynamique). On s'intéresse à l'asymptotique de la fonction valeur, $x(k)$, lorsque l'horizon, k, tend vers l'infini. Ce point de vue s'étend aux problèmes de commande et de jeux à espace d'états infinis : dans ce cas, l'application f opère sur certains espaces de fonctions. On peut voir l'étude de telles applications comme un cas particulier de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la théorie des applications contractantes au sens large (voir par exemple [63] pour un panorama), les problèmes étudiés étant typiquement l'existence d'un point fixe de f (fonction valeur en horizon infini), d'un vecteur propre non-linéaire de f (solution x de $f(x) = \lambda + x$, où le scalaire λ s'interprète comme le gain par unité de temps ou gain ergodique), et l'existence de la limite $\lim_k f^k(x)/k$ ou temps de cycle. Il existe une littérature considérable sur ces questions. On travaille tout particulièrement sur les conditions structurelles qui garantissent l'existence de points fixes ou de vecteurs propres [15][18], et sur les algorithmes permettant de calculer des quantités telles que le temps de cycle, voir par exemple [49],[7].

3.4. Processus de Bellman

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [68][62], [13][4][1], analogue max-plus de la théorie des probabilités, qui a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov : les variables aléatoires opèrent comme des changements de variables ou des paramétrisations de problèmes d'optimisation, la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique (Bellman), la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites associés aux distributions stables (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale), fournissent des résultats de convergence en commande optimale. Ces résultats sont utiles par exemple pour comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi.

3.5. Algèbre max-plus et systèmes à événements discrets

Les équations de type (2) interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans l'étude des systèmes à événements discrets. Lorsque l'on modélise un système (par exemple un atelier, un réseau de transport, etc.) dans lequel certaines tâches s'effectuent de manière répétitive, il est commode d'associer à chaque tâche i un *compteur*, qui est une application $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ donne le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple (qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe des graphes d'événements temporisés [41]), on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation équivalente faisant intervenir des dateurs qui vérifient des équations duales max-plus linéaires, a été le point de départ [43] du travail du groupe Max Plus, lequel a développé l'analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques (voir notamment [6][8]), incluant des notions de stabilité, de séries de transfert, une résolution algébrique des problèmes d'optimisation de ressources, etc. Ce travail a ensuite été généralisé, afin de modéliser des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources : on introduit dans ce cas des modèles d'automates à multiplicités max-plus [9][10] (et des modèles de tas de pièces ou de traces [11]), très étudiés par ailleurs en informatique théorique (voir notamment [70][53][55][71][64]).

3.6. Algèbre linéaire max-plus

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires, qui est plus délicate que dans l'algèbre usuelle à cause de l'idempotence de l'addition. On peut distinguer trois familles de problèmes.

- Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral $Ax = \lambda x$ et ses généralisations.

- Le problème $Ax = b$, qui intervient en commande juste-à-temps, est intimement relié au problème d'affectation. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [46][39], [74][75],[6]. Dans un cadre de dimension infinie, ce problème est essentiellement relié aux questions d'analyse convexe abstraite [72][69],[3][25].
- Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [51][65],[6][13]).

3.7. Algèbre max-plus et Analyse

Le rôle de l'algèbre min-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$\epsilon^a + \epsilon^b \asymp \epsilon^{\min(a,b)}, \qquad \epsilon^a \times \epsilon^b = \epsilon^{a+b},$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$.

Une manière de voir algébriquement les choses est de déformer l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a,b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a,b) \mapsto a+b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [59], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger.

Ce point de vue permet d'algébriser des problèmes d'analyse. En particulier, le passage à la limite quand $\epsilon \to 0^+$ fait passer des probabilités classiques aux probabilités idempotentes, ce qui fournit une approche max-plus [4][1], [66] de la théorie des grands écarts à la loi des grands nombres, ou *grandes déviations* (voir par exemple [45]). Voir aussi [2], [37] pour des applications de ces idées aux perturbations de valeurs propres.

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux, systèmes temps réel)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Relèvent de l'approche par systèmes dynamiques max-plus, ou plus généralement monotones contractants : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux, des problèmes de calcul de débit pour des ateliers, pour des réseaux ferroviaires ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication. Le projet colabore avec le projet Metalau, qui s'intéresse particulièrement aux applications de l'algèbre max-plus aux réseaux de transport routier [57].

4.2. Commande optimale et jeux à somme nulle

Les applications de la commande optimale et de la théorie des jeux constituent un domaine d'application important pour le projet Maxplus. Des applications à des problèmes de mathématiques financières ont été développées ces dernières années, en collaboration avec le projet Mathfi, voir par exemple [5] pour un résultat partiellement inspiré de certaines idées de [15].

4.3. Recherche opérationnelle

L'algèbre max-plus fournit des résultats de structure précis sur les solutions de certaines classes particulières de problème de flots à coût minimum. Ces renseignements peuvent être exploités dans des problèmes plus difficiles (ordonnancement [11], programmation dynamique en dimension grande), en fournissant des arguments d'agrégation [67], des bornes, et aussi des idées algorithmiques.

4.4. Analyse statique de programmes, vérification

Les techniques classiques de vérification conduisent à résoudre de « gros » problèmes de points fixes dans des treillis plus ou moins abstraits. Ces problèmes sont justiciables de la théorie des opérateurs monotones et des algorithmes déjà évoqués dans la section 3.3. Voir aussi la section 6.12 ci-dessous.

5. Software

5.1. Boîte à outil max-plus de SCILAB

La boîte à outils max-plus[2] de SCILAB, écrite en FORTRAN et en C, a été développée par Guy Cohen, Stéphane Gaubert, et Jean-Pierre Quadrat, à partir d'une première version réalisée par Michael Mc Gettrick, dans le cadre du projet européen TMR ALAPEDES. La boîte à outils permet d'effectuer rapidement et simplement en SCILAB l'ensemble du calcul numérique matriciel en max-plus (algèbre de base, résolution de problèmes spectraux, résiduation, etc), avec stockage plein ou creux des matrices.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi

L'équipe max-plus a une longue tradition sur la résolution numérique d'équations d'Hamilton-Jacobi. Ainsi, le générateur de programme, développé par Marianne Akian, générant des programmes FORTRAN de résolution numérique d'équations d'Hamilton-Jacobi au moyen de discrétisations différences finies et de l'algorithme FMGH [36], combinant méthodes multigrilles et itération sur les politiques, représente toujours essentiellement l'état de l'art. Le travail sur les méthodes et les logiciels numériques a repris récemment, voir la section 6.11 ci-dessous.

6. New Results

6.1. Espace propre d'applications max-plus linéaires

Participants: M. Akian, S. Gaubert, C. Walsh, R. Nussbaum (Rutgers University, USA).

On s'intéresse aux opérateurs max-plus linéaires à noyau. De tels opérateurs envoient une fonction u, à valeurs réelles, définie sur un ensemble S, sur la fonction Au, définie par $Au(x) = \sup_{y\in S} a(x,y)+u(y)$ pour tout $x \in S$, où $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est le *noyau* de S. Le cas où S est fini est classique : l'on sait que la dimension de l'espace propre est égale au nombre de composantes connexes d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité ou certaines conditions géométriques.

Dans [26][34], nous avons étudié le cas le plus simple d'espace non compact : nous supposons que S est un ensemble discret infini. Les outils que nous introduisons s'inspirent de la théorie des chaînes de Markov dénombrables : les classes critiques sont remplacées par les classes de récurrence. La notion de frontière de Martin minimale permet de caractériser complètement l'espace propre associé à une valeur propre donnée. Nous montrons aussi un résultat de cyclicité semblable au cas où S est fini, sous une hypothèse de tension.

Par ailleurs, dans un travail commun entre M. Akian, S. Gaubert et R. Nussbaum, on s'intéresse au cas où S est compact et où le noyau $a : S \times S \to \mathbb{R}_{\max}$ est semi-continu supérieurement.

6.2. Unicité des points fixes ou vecteurs propres d'applications contractantes au sens large et jeux avec critère ergodique

Participants: M. Akian, S. Gaubert, B. Lemmens (TU-Berlin), R. Nussbaum (Rutgers University, USA).

[2] http://www-rocq.inria.fr/scilab, section contrib

Motivés par l'étude des problèmes de contrôle optimal avec coût ergodique, nous avons caractérisé dans [15] l'espace propre d'applications monotones additivement homogènes convexes de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, et en particulier nous avons obtenu un résultat d'unicité. Nous étudions les généralisations de ces résultats dans deux directions.

D'une part, dans [33], nous étudions l'unicité du vecteur propre ou du point fixe d'applications f monotones homogènes ou plus généralement contractantes au sens large sur un cône, dans le cas où f est semidifférentiable : une application f, d'un espace normé E dans un autre, est *semidifférentiable* si l'on peut écrire $f(x+h) = f(x) + f'_x(h) + o(\|h\|)$, où $f'_x(h)$ est une application continue multiplicativement homogène. Cette notion est bien adaptée aux opérateurs de programmation dynamique associés à des problèmes de contrôle optimal ou de jeux : lorsque les espaces d'actions sont finis, f, qui est affine par morceaux, est non-différentiable, mais elle est semidifférentiable, au moins lorsque l'espace d'état est lui même fini. Dans le cas différentiable, des résultats antérieurs de R. Nussbaum montrent que l'unicité du vecteur propre de f, à une normalisation près, peut être contrôlée à l'aide de résultats d'unicité pour la dérivée f'_v, évaluée en un vecteur propre quelconque v. Nous montrons qu'il en est de même lorsque f est semi-differentiable, et obtenons par exemple comme application des résultats d'unicité pour la solution d'équations de programmation dynamique stationnaires, ou ergodiques, associées à certains problèmes de jeux répétés.

D'autre part, dans un travail commun entre M. Akian, S. Gaubert et B. Lemmens, nous étudions les généralisations des résultats de [15] au cas d'applications convexes de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, contractantes au sens large pour une norme quelconque.

6.3. Asymptotique de systèmes dynamiques monotones homogènes

Participants: S. Gaubert, J. Gunarwardena (Harvard University, USA).

On s'intéresse a l'existence et au calcul du temps de cycle, $\chi(f) = \lim_k f^k(x)/k$, où f est une application monotone additivement homogène ou fonctions topicale, voir [18]. On travaille d'une part à généraliser les résultats de [7] et [42], qui exploitent des techniques d'itération sur les politiques, pour calculer effectivement $\chi(f)$ pour certaines sous-classes d'applications. D'autre part, on s'intéresse aux conditions générales d'existence du temps de cycle. On a ainsi montré que le temps de cycle existe sous une hypothèse faisant intervenir la fonction de récession de f, qui inclut le cas des fonctions convexes.

6.4. Analyse convexe dans l'algèbre maxplus

Participants: G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, I. Singer (Institute of Mathematics, Bucharest).

On montre dans [27] qu'une fonction convexe max-plus définie sur un espace de dimension finie est enveloppe supérieure des fonctions « affines » qui la minorent. Nous obtenons ce résultat comme conséquence d'un théorème de séparation, qui raffine le résultat général de [17].

6.5. Théorème de séparation de type min-plus dans les groupes réticulés

Participants: M. Akian, I. Singer (Institute of Mathematics, Bucharest).

Les ensembles G décroissants de $\mathbb{R}^n$, i.e. vérifiant $y \in G$ et $x_i \leq y_i \,\forall i = 1, ..., n \Rightarrow x \in G$, sont un cas particulier d'ensembles min-plus convexes de $\mathbb{R}^n$. Ce sont aussi les ensembles de sous-niveau $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$ des fonctions croissantes au sens large. Un résultat de Marténez-Legaz, Rubinov et Singer caractérise les ensembles décroissants fermés de $\mathbb{R}^n$ en termes de séparation par des formes min-plus linéaires. De même, un résultat récent de Singer caractérise les fonctions croissantes semi-continues inférieurement en termes de conjugaisons de type Lau ou de quasi-convexité. Dans [16], on généralise ces résultats dans le cas où $\mathbb{R}$ est remplacé par un groupe réticulé conditionnellement complet ou de manière équivalente, dans le cas où le semi-corps min-plus est remplacé par un semi-corps conditionnellement complet. La topologie utilisée est celle de Scott ou celle de Lawson introduites dans la théorie des treillis continus, ou encore la topologie de l'ordre.

6.6. Géométrie des métriques de Hilbert et de Thompson

Participants: C. Walsh, J. Gunawardena (Harvard University, USA), R. Nussbaum (Rutgers University, USA).

Les applications max-plus linéaires, et, plus généralement, les applications monotones homogènes sur un cône sont contractantes au sens large pour deux métriques particulières, celle de Hilbert et celle de Thompson. Le comportement des applications monotones homogènes est donc profondément influencé par les propriétés géométriques de ces deux métriques, justifiant ainsi une étude approfondie de celles-ci. Dans [22], on s'est intéressé à une classe de cônes fortement « symmétriques », auxquels on peut appliquer des techniques algébriques. On a établi de nouvelles propriétés des métriques de Hilbert et de Thompson, et déduit le comportement en temps long des itérées d'applications contractantes au sens large.

Dans [35], on s'intéresse à des cônes plus généraux. On a montré une inégalité, qui peut être interprétée de la façon suivante : regardés à grosse échelle, les espaces métriques considérés plus haut sont (en un certain sens) de courbure négative.

6.7. Trafic pire des cas dans les réseaux de télécommunications

Participant: C. Walsh.

On considère un utilisateur dont le processus de demandes satisfait certaines contraintes et on voudrait connaître le pire des processus de demandes, c'est-à-dire celui qui maximise la charge pour le réseau. On mesure ici la charge par la « largeur de bande effective » de l'utilisateur, un concept qui se révèle utile quand on fait tendre le nombre de sources multiplexées vers l'infini. Les années précédentes, on a formulé une conjecture caractérisant la source pire des cas. On a prouvé cette conjecture lorsque les paramètres sont dans un certain domaine [23]. On a aussi établi des résultats partiels dans le cas général [24]. On travaille maintenant à parachever ces résultats.

6.8. Transformée de Fenchel généralisée

Participants: M. Akian, S. Gaubert, V. Kolokoltsov (Nottingham Trent University).

Dans ce travail, nous étudions l'image des opérateurs max-plus linéaires de dimension infinie et plus généralement (après changement de signe) les correspondances de Galois. Par exemple, toute correspondance de Galois B opérant sur l'espace des fonctions semi-continues inférieurement de Y dans $\mathbb{R}$, et à valeurs dans l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, s'écrit $Bf(x) = \sup\{b(x, y, f(y))\,,\ y \in Y\}$ pour une fonction b telle que $b(x, y, \cdot)$ est décroissante et continue à droite (pour tous $x \in X$ et $y \in Y$). Si X est le dual de Y et $b(x, y, \lambda) = \langle x, y\rangle - \lambda$, B est exactement la transformée de Fenchel. Nous caractérisons l'image d'une correspondance de Galois B en termes de recouvrement de l'espace X. Nous caractérisons aussi l'injectivité en un point par la minimalité de ce recouvrement. Dans le cas de la transformée de Fenchel, l'injectivité est obtenue par exemple pour les fonctions convexes essentiellement régulières. Ces résultats [3][25] généralisent d'anciens résultats de N. Vorobyev et K. Zimmerman sur les opérateurs de dimension finie. Dans [32], nous étudions l'application de ces résultats à la caractérisation de taux de grandes déviations.

6.9. Perturbation de valeurs propres et vecteurs propres et algèbre max-plus

Participants: M. Akian, S. Gaubert, R. Bapat (Indian Statistical Institute, New Delhi).

A la suite de [37] et de [2], on étudie, les asymptotiques du premier ordre de toutes les valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice $\mathcal{A}_\epsilon$, étant données celles de ses coefficients. Si les coefficients vérifient $(\mathcal{A}_\epsilon)_{ij} \sim a_{ij}\epsilon^{A_{ij}}$ quand ϵ tend vers 0, pour certains $a_{ij} \in \mathbb{C}$ et $A_{ij} \in \mathbb{R}$, on a construit, dans [37], une suite $\alpha_1, ..., \alpha_n$ à partir des valeurs propres min-plus de compléments de Schur min-plus calculés à partir de la matrice $A = (A_{ij})$ des exposants de $\mathcal{A}_\epsilon$. On montre que, sous certaines conditions (sur A), les nombres $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont génériquement égaux aux ordres de grandeurs (exposants) des différentes valeurs propres de $\mathcal{A}_\epsilon$. On obtient aussi, dans le cas général, des inégalités de majorisation faible entre $\alpha_1, ..., \alpha_n$, les racines du polynôme caractéristique min-plus de A et les exposants des valeurs propres de $\mathcal{A}_\epsilon$. Ces résultats fournissent une interprétation en terme de graphe des pentes du polygône de Newton du polynôme caractéristique de $\mathcal{A}_\epsilon$. Ils expliquent aussi les ordres de grandeurs des valeurs propres obtenus par la théorie des perturbations de Lidskiĭ, Višik et Ljusternik, et permettent de résoudre certains des cas qui étaient singuliers dans cette théorie. On étudie maintenant les problèmes de perturbation de faisceaux de matrices.

6.10. Approche géométrique des systèmes max-plus linéaires

Participants: S. Gaubert, R. Katz.

La thèse de R. Katz, qui a été soutenue cette année [14], s'intéresse à des problèmes d'accessibilité et de commande de systèmes dynamiques max-plus linéaires, et contribue à développer une « approche géométrique », c'est-à-dire une approche en terme d'espaces invariants, dans l'esprit de la théorie de Wonham. Une difficulté est que même les espaces les plus simples (comme les semimodules accessibles, ou les congruences observables), ne sont en général pas finiment engendrés. On a développé pour cela dans [14][19] une théorie des semi-modules rationnels sur le semi-anneau max-plus : ce sont des semi-modules ayant un ensemble de générateurs qui est une partie rationnelle d'un monoïde de la forme $((\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^n, +)$. On montre que les semi-modules accessibles, ou que les congruences observables, sont rationnels. L'on montre aussi que les semi-modules rationnels sont fermés pour les opérations algébriques naturelles (union, intersection, image inverse, etc.). On a travaillé également à l'étude des espaces (A, B)-invariants max-plus, qui sont utiles pour résoudre certains problèmes de commande de systèmes à événements discrets. On a montré comment calculer le sous-espace (A, B)-invariant maximal contenu dans un semi-module engendré par un ensemble fini de vecteur à coordonnées finies [14][28]. L'on cherche actuellement à généraliser ce genre de résultats. Enfin, on a étudié des analogues non-commutatifs des problèmes d'accessibilité. Dans le cas de matrices sur l'anneau des entiers relatifs, ces problèmes sont très étudiés, et une série de travaux, qui remontent à Paterson et Manna, montrent que diverses versions de ces problèmes, comme par exemple décider si une matrice est dans un semi-groupe finiment engendré, ou si l'un des coefficients d'une série rationnelle est nul, sont indécidables (à condition d'avoir au moins deux générateurs). On a montré dans [14][30] l'existence de réductions universelles (indépendentes du semi-anneau), qui éclairent les résultats classiques, et donnent surtout de nouveaux résultats dans le cas max-plus : ainsi, l'appartenance à un semi-groupe de matrices max-plus finiment engendré est indécidable.

6.11. Résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe et algèbre max-plus

Participants: M. Akian, S. Gaubert, A. Lakhoua.

Dans son stage de DEA [31] encadré par M. Akian et S. Gaubert, A. Lakhoua a élaboré une nouvelle méthode de discrétisation de l'équation d'Hamilton-Jacobi d'évolution, que l'on peut voir comme l'analogue max-plus de la méthode des éléments finis de Petrov-Galerkin. On obtient ainsi une équation de récurence max-plus linéaire mais implicite, dont on sélectionne la sous-solution maximale : le système dynamique ainsi obtenu s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'un problème de jeux à somme nulle déterministe. Contrairement à la méthode proposée initialement par Flemming et McEneaney [47], l'application du semi-groupe d'évolution aux éléments finis n'est pas supposée connue mais approximée, et le système dynamique discret obtenu n'est pas forcément max-plus linéaire. La méthode a été testée sur plusieurs problèmes types en dimension 1, en utilisant la bibliothèque max-plus de Scilab. Des estimations d'erreur ont déja été obtenues sous certaines hypothèses de régularité. De manière analogue au cas des élements finis classiques les estimations d'erreur de la méthode font intervenir des erreurs de projection, mais ici il s'agit de projections sur des sous-semi-modules max-plus ou min-plus. Ce travail se prolonge dans le cadre d'une thèse coencadrée par H. El Fekih (ENIT, Tunis).

6.12. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques

Participants: A. Costan, S. Gaubert, E. Goubault (CEA).

S. Gaubert a coencadré avec E. Goubault le stage d'Option de l'École Polytechnique d'A. Costan, qui portait sur l'application des algorithmes d'itérations sur les politiques, développés dans [7], [42], aux problèmes de points fixes de fonctions croissantes définies sur des treillis « abstraits », qui interviennent en analyse statique de programme. La motivation vient du fait que les algorithmes de point fixe naïfs effectuent parfois un nombre d'itérations considérable (égal au nombre de boucles effectués par le programme). Cette pathologie a donné lieu à de nombreux travaux. Nous proposons ici un algorithme alternatif, qui a le mérite de résoudre naturellement cette difficulté. On a montré que certains algorithmes développés dans [42] dans le cas de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pouvaient s'étendre aux cas de treillis tels que le treillis des intervalles, qui est utilisé classiquement. A. Costan a écrit un premier prototype d'analyseur, qui, à partir d'un programme écrit dans un langage simplifié proche du C, génère la fonction d'intervalles à laquelle des méthodes de point-fixe sont ensuite appliquées. Des premiers résultats expérimentaux semblent indiquer que le temps de convergence est amélioré.

8. Other Grants and Activities

8.1. Actions internationales

- Convention NSF-INRIA : le reliquat de la convention NSF-INRIA impliquant M. Akian et P.A. Bliman (projet Sosso) et Roger Nussbaum de Rutgers University permet de financer des visites de Roger Nussbaum à l'INRIA.

8.2. Accueils de chercheurs étrangers

- Roger Nussbaum de Rutgers University, 1 semaine.
- Ravindra Bapat, Indian Statistical Institute, 2 semaines.
- Bas Lemmens, TU-Berlin, 1 semaine.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique

- M . Akian :
  - Co-responsable du séminaire « Probabilités, Optimisation, Contrôle » de l'INRIA Rocquencourt.
  - Membre du Comité d'Organisation National de 1 »'IFAC Workshop on Time Delay Systems » (INRIA, 8-10 Sept. 2003).
- S. Gaubert :
  - Membre du Comité Scientifique de »International Workshop on Max-algebra (30 juin–3 juil. 2003, Birmingham, UK) ».
  - Membre du Comité Scientifique de Posta'04 (Positive Systems, Theory and Applications), Août 2004, Roma, Italy.
- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

9.2. Enseignement universitaire

- M. Akian
  - Petites Classes du cours de Mathématiques 1 (calcul différentiel) et 2 (intégration) en première année à l'École des Mines de Paris.
- S. Gaubert
  - Cours (Optimisation Combinatoire) en troisième année à l'Ensta.
  - Cours (Systèmes à Événements Discrets) au DEA Automatique et Traitement du Signal, commun à l'Option Automatique de l'ENSMP.
  - Petites classes d'analyse numérique et optimisation en seconde année à l'École Polytechnique (et correction du contrôle classant de ce cours).

9.3. Encadrement de thèse

- Riccardo Katz. Encadrement assuré par S. Gaubert.
- Asma Lakhoua. Encadrement assuré par S. Gaubert, M. Akian et Henda El Fekih (ENIT, Tunis).

9.4. Membre de jury

- G. Cohen :
  - Thèse de Ricardo Katz (Université de Rosario, Argentine, 27 novembre 2003).
  - Thèse de Mehdi Lhommeau (ISTIA, Université d'Angers, 16 décembre 2003).
- S. Gaubert :
  - Thèse de Gerardo Soto y Koelejmeijer (TU-Delft, Pays Bas, Septembre 03).
- J.-P. Quadrat :
  - Thèse de Ricardo Katz (Université de Rosario, Argentine, 27 Novembre 2003).

9.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- M. Akian
  - »International Workshop on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics » (3–10 fev. 2003) Titre de l'exposé : « Perturbation of eigenvalues and min-plus algebra ».
  - »International Workshop on Max-algebra (30 juin–3 juil. 2003, Birmingham, UK) ». Titre de l'exposé : « Iterates of semidifferentiable monotone homogeneous maps ».
  - Conférence « Méthodes numériques pour les équations HJB en contrôle optimal et applications (ENSTA, 11–12 sept. 2003) ». Titre de l'exposé : « Discretizations of Hamilton-Jacobi equations and max-plus algebra »

- G. Cohen
  - »International Workshop on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics » (3–10 fev. 2003) Titre de l'exposé : Max-plus convex functions
  - »International Workshop on Max-algebra (30 juin–3 juil. 2003, Birmingham, UK) ». Titre de l'exposé : Projective max-plus semimodules.
- S. Gaubert
  - Visite d'une semaine au Bauer Center for Genomic Research, Harvard (Jeremy Gunawardena), Janvier 3003.
  - »International Workshop on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics » (3–10 fev. 2003). Titre de l'exposé : « Eigenvectors of monotone homogeneous maps »
  - « International Workshop on Max-algebra (30 juin–3 juil. 2003, Birmingham, UK) ». Titre de l'exposé : « Perturbation of eigenvalues and min-plus algebra »
  - POSTA'03 (Positive Systems, Theory and Applications), Roma, Août 2003. Titre de l'exposé : « Reachability and invariance problems in max-plus algebra. »
- J.-P. Quadrat
  - « International Workshop on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics » (3–10 fev. 2003). Titre de l'exposé : Gibbs semirings and traffic assignment.
- C. Walsh
  - « International Workshop on Idempotent Mathematics and Mathematical Physics » (3–10 fev. 2003). Titre de l'exposé : « Max-Plus Martin Boundaries ».
  - »International Workshop on Max-algebra (30 juin–3 juil. 2003, Birmingham, UK) ». Titre de l'exposé : « Max-Plus Martin Boundaries »

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations.* in « Transactions of the American Mathematical Society », number 11, volume 351, 1999, pages 4515–4543.

[2] M. AKIAN, R. B. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra.* in « C. R. Acad. Sci. Paris. », volume 327, Série I, 1998, pages 927–932, http://www.inria.fr/rrrt/rr-3450.html, Also INRIA Research Report RR-3450.

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Invertibility of functional Galois connections.* in « C. R. Acad. Sci. Paris », volume Ser. I 335, 2002, pages 1-6.

[4] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization.* J. GUNAWARDENA, editor, in « Idempotency », series Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility.* in « Mathematical Finance », number 2, volume 11, 2001, pages 153–188.

[6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. J. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity.* Wiley, 1992.

[7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions.* in « Dynamics and Stability of Systems », number 4, volume 14, 1999.

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J. P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory : where we are and where to go now.* in « Annual Reviews in Control », volume 23, 1999, pages 207–219.

[9] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata.* in « IEEE Trans. on Automatic Control », number 12, volume 40, Dec, 1995, pages 2014–2025.

[10] S. GAUBERT. *On the Burnside Problem for Semigroups of Matrices in the (max,+) Algebra.* in « Semigroup Forum », volume 52, 1996, pages 271–292.

[11] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces.* in « IEEE Trans. Automat. Control », number 4, volume 44, 1999, pages 683–697.

[12] S. GAUBERT, M. PLUS. *Methods and Applications of (max,+) Linear Algebra.* in « STACS'97 », series LNCS, number 1200, Springer, R. REISCHUK, M. MORVAN, editors, Lübeck, March, 1997.

[13] MAX-PLUS WORKING GROUP, PRESENTED BY J.P. QUADRAT. *Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control.* in « Proceedings of the ICM », Zurich, August, 1994.

Doctoral dissertations and "Habilitation" theses

[14] R. KATZ. *Problemas de alcanzabilidad e invariancia en el álgebra max-plus.* Tesis doctoral, Universidad Nacional de Rosario, Argentina, Noviembre, 2003.

Articles in referred journals and book chapters

[15] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control.* in « Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications », number 2, volume 52, 2003, pages 637-679.

[16] M. AKIAN, I. SINGER. *Topologies on lattice ordered groups, separation from closed downward sets and conjugations of type Lau.* in « Optimization », number 6, volume 52, December, 2003.

[17] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules.* in « Linear Algebra and Appl. », 2003, à paraître, eprint arXiv :math.FA/0212294.

[18] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions.* in « Transactions of A.M.S. », 2003, à paraître, aussi arXiv :math.FA/0105091.

[19] S. GAUBERT, R. KATZ. *Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach of discrete event systems.* in « Kybernetika », 2003, à paraître, eprint arXiv :math.OC/0208014.

[20] S. GAUBERT, J. J. LOISEAU. *Guest editorial : special issue on max-plus algebras.* in « Kybernetika », number 2, volume 39, 2003, pages 121–122.

[21] S. GAUBERT, J. J. LOISEAU, J. MAIRESSE, M. NIVAT, J. E. PIN. *Foreword.* in « Theoretical Computer Science », number 1, volume 293, 2003, pages 1–2, Special issue on Max-Plus Algebras.

[22] J. GUNAWARDENA, C. WALSH. *Iterates of Maps which are Non-expansive in Hilberts's Metric.* in « Kybernetika », number 2, volume 38, April, 2003.

[23] C. WALSH. *Maximal effective bandwidth of constrained traffic.* in « Queueing Syst. Theory Appl. », number 2, volume 44, 2003, pages 161–182.

[24] C. WALSH. *Worst case traffic from regulated sources.* in « Appl. Math. Optim. », number 2, volume 48, 2003, pages 149–167.

Publications in Conferences and Workshops

[25] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of Functional Galois Connections.* in « Proceedings of the International Workshop on Idempotent Analysis », series Contemp. Math., AMS, 2003, Accepted for publication.

[26] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *Discrete max-plus spectral theory.* in « Proceedings of the International Workshop on Idempotent Analysis », series Contemp. Math., AMS, 2003, Accepted for publication.

[27] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, I. SINGER. *Max-plus convex sets and functions.* in « Proceedings of the International Workshop on Idempotent Analysis », series Contemp. Math., AMS, 2003, Accepté pour publication, also Report 1341 of the Erwin Schrödinger institute, Vienna.

[28] S. GAUBERT, R. KATZ. *Reachability and invariance problems in max-plus algebra.* in « Proceedings of POSTA'03 », series Lect. Notes on Control and Inf. Sci., number 294, Springer, L. BENVENUTI, A. DE SANTIS, L. FARINA, editors, Roma, Aug., 2003.

Internal Reports

[29] A. COSTAN. *Analyse statique et itération sur les politiques.* Technical report, number DRT/LIST/DTSI/SLA/LSL, CEA, Service Logiciels et Architecture, 2003, Rapport de stage d'option de l'École Polytechnique.

[30] S. GAUBERT, R. KATZ. *Reachability Problems for Products of Matrices in Semirings.* Rapport de Recherche, number 4944, INRIA, 2003, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4944.html, Also arXiv :math.OC/0310028.

[31] A. LAKHOUA. *Résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe et algèbre max-plus.* Rapport de DEA, Paris VI, 2003.

Miscellaneous

[32] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Invertibility of Moreau conjugacies and large deviations.* 2003, En préparation.

[33] M. AKIAN, S. GAUBERT, R. NUSSBAUM. *Uniqueness of fixed point of nonexpansive semidifferentiable maps.* 2003, En préparation.

[34] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *Discrete max-plus spectral theory and max-plus Martin boundaries.* 2003, preprint.

[35] R. D. NUSSBAUM, C. WALSH. *A Metric Inequality for the Thompson and Hilbert Geometries.* 2003, Preprint.

Bibliography in notes

[36] M. AKIAN. *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique.* Thèse de Doctorat, Université Paris IX-Dauphine, 1990.

[37] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Generic Asymptotics of Eigenvalues using Min-Plus Algebra.* in « Proceedings of the Satellite Workshop on Max-Plus Algebras, IFAC SSSC'01 », Elsevier, Praha, 2001.

[38] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics.* in « Proceedings of FPSAC'01 », 2001.

[39] T. S. BLYTH, M. F. JANOWITZ. *Residuation Theory.* Pergamon press, 1972.

[40] Z. Q. CAO, K. H. KIM, F. W. ROUSH. *Incline algebra and applications.* Ellis Horwood, 1984.

[41] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés.* Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[42] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes.* Thèse, spécialité Mathématiques et Automatique, École des Mines, Dec., 2001.

[43] G. COHEN, D. DUBOIS, J. P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes.* Rapport de recherche, number 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, http://www.inria.fr/rrrt/rr-0191.html.

[44] R. A. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra.* series Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, number 166, Springer, 1979.

[45] A. DEMBO, O. ZEITOUNI. *Large Deviation Techniques and Applications.* Jones and Barlett, 1993.

[46] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques.* series Cahiers Scientifiques, volume XXI, Gauthier Villars, Paris, 1953.

[47] W. FLEMING, W. MCENEANEY. *A max-plus based algorithm for an HJB equation of non-linear filtering.* in « SIAM J. Control and Opt. », 2002, pages 683–710.

[48] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras I : foundations.* 2001, arXiv :math.RT/0104151.

[49] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions.* in « C. R. Acad. Sci. Paris. », volume 326, Série I, 1998, pages 43–48.

[50] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux.* TEC & DOC, Paris, 2002.

[51] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids : a survey of recent results.* in « Annals of Discrete Mathematics », volume 19, 1984, pages 147-164.

[52] J. GUNAWARDENA, editor, *Idempotency.* series Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[53] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions.* in « Theoret. Comput. Sci. », volume 72, 1990, pages 27–38.

[54] V. N. KOLOKOLTSOV, V. P. MASLOV. *Idempotent analysis and applications.* Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[55] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function : an algebraic proof.* in « Theoret. Comput. Sci », volume 81, 1991, pages 137–145.

[56] G. L. LITVINOV, V. P. MASLOV, G. B. SHPIZ. *Idempotent functional analysis : an algebraic approach.* in « Math. Notes », number 5, volume 69, 2001, pages 696–729, Also eprint arXiv :math.FA/0009128.

[57] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J. P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car traffic law.* Rapport de Recherche, number 4324, INRIA, 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html.

[58] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators.* in « Discrete and Continuous Dynamical Systems », number 3, volume 8, July, 2002, pages 519–562.

[59] V. P. MASLOV. *Méthodes Operatorielles.* Edition Mir, Moscou, 1973, trad. fr. 1987.

[60] V. P. MASLOV, S. N. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis.* series Advances In Soviet Mathematics, volume 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[61] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties.* 2001, Survey for the Real Algebraic and Analytic Conference in Rennes, arXiv :math.AG/0108255.

[62] P. D. MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case.* Rapport de recherche, LAAS, 1990.

[63] R. D. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps.* in « Memoirs of the AMS », number 391, volume 75, 1988.

[64] J.-E. PIN. *Tropical Semirings.* J. GUNAWARDENA, editor, in « Idempotency », series Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[65] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra.* in « Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control », Honolulu, Dec., 1990.

[66] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability.* series Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, number 119, Chapman & Hall, 2001.

[67] J. P. QUADRAT, M. PLUS. *Min-plus linearity and statistical mechanics.* in « Markov Processes and Related Fields », number 4, volume 3, 1997, pages 565–587.

[68] J. P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique.* in « Note C.R.A.S. », number 311, 1990, pages 745-748.

[69] A. M. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization.* Kluwer, 2000.

[70] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid.* in « Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science », IEEE, pages 143–150, 1978.

[71] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring.* in « Theor. Infor. and Appl. », number 3-4, volume 28, 1994, pages 277–294.

[72] I. SINGER. *Abstract convex analysis.* Wiley, 1997.

[73] O. Y. VIRO. *Real plane algebraic curves.* in « Proceedings of the European Congress of Mathematicians », 2000.

[74] N. N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices.* in « Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik », volume 3, 1967, pages 39–71.

[75] K. ZIMMERMANN. *Extremálné Algebra.* Ekonomický ùstav ČSAV, Praha, 1976, (in Czech).

[76] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures.* North Holland, 1981.