

*Project-Team Ondes**Modélisation et Simulation de Phénomènes  
de Propagation d'Ondes**Rocquencourt*

THEME 4B

Activity  
Report

2003



# Table of contents

<b>1. Team</b>	<b>1</b>
<b>2. Overall Objectives</b>	<b>2</b>
<b>3. Scientific Foundations</b>	<b>3</b>
3.1. Introduction	3
3.2. Simulation précise et rapide pour la propagation d'ondes	4
3.3. Problèmes en géométrie complexe	5
3.4. Résolution de Problèmes en milieux non bornés	5
3.5. Modèles asymptotiques ou approchés	6
3.6. Milieux complexes	6
3.7. Le guidage des ondes	6
3.8. Résonances	7
<b>4. Application Domains</b>	<b>7</b>
4.1. Ondes acoustiques	7
4.1.1. Acoustique musicale	7
4.1.2. Acoustique sous-marine	8
4.2. Ondes élastiques	8
4.2.1. Géophysique	8
4.2.2. Contrôle non destructif	8
4.3. Ondes électromagnétiques	8
4.3.1. Furtivité radar	8
4.3.2. Antennes	8
4.3.3. Optique	8
4.4. Ondes de gravité	9
<b>5. Software</b>	<b>9</b>
5.1. Le Code de calcul MELINA	9
<b>6. New Results</b>	<b>9</b>
6.1. Présentation par domaines d'application	9
6.1.1. Ondes acoustiques et couplage fluide-structure	10
6.1.2. Ondes électromagnétiques	11
6.1.3. Ondes élastiques	11
6.2. Méthodes numériques performantes pour le régime transitoire	12
6.2.1. Méthodes d'éléments finis spectraux	13
6.2.2. Méthodes de Galerkin discontinues	13
6.2.2.1. Motivation.	13
6.2.2.2. Equations de Maxwell.	14
6.2.2.3. Equations de l'aéroacoustique.	14
6.2.3. Méthodes de domaines fictifs	14
6.2.3.1. Modélisation numérique de la propagation d'ondes en milieu élastique fissuré avec condition de contact unilatéral	15
6.2.4. Décomposition de domaine et méthodes hybrides.	17
6.2.4.1. Raffinement de maillage spatio-temporel pour l'élastodynamique.	17
6.2.4.2. Modélisation numérique en couplage fluide-structure.	18
6.2.4.3. Méthodes de couplage éléments finis - potentiels retardés	22
6.2.5. Développement en modes résonants	22
6.2.6. Singularités en électromagnétisme	23
6.2.7. Modélisation de milieux complexes.	23
6.2.7.1. Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires	23

6.2.7.2.	Propagation d'ondes dans les milieux poreux	24
6.2.7.3.	Le modèle de Galbrun en aéroacoustique	25
6.3.	Approches variationnelles pour le régime harmonique.	25
6.3.1.	Diffraction acoustique par des plaques	26
6.3.2.	Méthodes de régularisation pour l'aéroacoustique	27
6.3.3.	Méthodes d'ordre élevé	28
6.3.3.1.	Eléments finis courbes	33
6.3.4.	Couplage Equations intégrales - Eléments finis volumiques	33
6.4.	Conditions aux limites transparentes	34
6.4.1.	Conditions transparentes en régime transitoire	35
6.4.2.	Conditions transparentes en régime harmonique	37
6.4.2.1.	PML dans un guide d'ondes en régime fréquentiel	37
6.5.	Méthodes asymptotiques	39
6.5.1.	Conditions d'impédance généralisées et obstacles fortement conducteurs	40
6.5.2.	Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les domaines contenant des fentes	41
6.5.3.	Application de l'homogénéisation et des développements asymptotiques raccordés à la simulation des pots d'échappement	42
6.6.	Guides d'ondes, Résonances	43
6.6.1.	Résonances d'une plaque élastique dans un écoulement confiné	43
6.6.2.	Méthodes modales	45
6.6.3.	Factorisation de l'équation de Helmholtz dans un guide d'ondes	46
6.6.4.	Etude de la propagation des ondes acoustiques dans un instrument à vent	47
6.7.	Problèmes inverses et imagerie	47
6.7.1.	Sampling Methods	48
6.7.1.1.	La Linear Sampling Method (LSM)	48
6.7.1.2.	Méthode adjointe de la LSM	48
6.7.2.	Utilisation de la fonctionnelle écart à la réciprocité pour la recherche de fissure plane en diffraction.	48
6.7.3.	Imagerie via les applications conformes	49
6.7.4.	Méthodes de retournement temporel	51
6.8.	Programmation dynamique et factorisation de problèmes aux limites	52
6.8.1.	Généralisation des géométries	52
6.8.2.	Etude de l'effet de différentes conditions aux limites sur la factorisation	52
6.8.3.	Utilisation de la méthode de factorisation pour le problème inverse en EEG-MEG.	53
6.8.4.	Simulation du CHFR	53
6.9.	Développements récents du code MELINA	53
<b>7.</b>	<b>Contracts and Grants with Industry</b>	<b>54</b>
7.1.	Contrat INRIA-IFP	54
7.2.	Contrat INRIA-IFP	54
7.3.	Contrat INRIA-ONERA	54
7.4.	Contrat INRIA-ONERA	54
7.5.	Contrat INRIA-EADS	54
7.6.	Contrat INRIA-ONERA-IEA-CEG	54
7.7.	Contrat INRIA-EDF	54
7.8.	Contrat INRIA-EDF	54
7.9.	Contrat INRIA-IFREMER	55
7.10.	Contrat INRIA-Schlumberger	55
7.11.	Contrat INRIA-SHELL	55
<b>8.</b>	<b>Other Grants and Activities</b>	<b>55</b>

---

8.1. Actions nationales	55
8.2. Relations bilatérales internationales	55
8.3. Accueils de chercheurs étrangers	55
<b>9. Dissemination</b>	<b>56</b>
9.1. Animation de la communauté scientifique	56
9.2. Enseignement universitaire	56
9.3. Participation à des séminaires, colloques, invitations	58
<b>10. Bibliography</b>	<b>60</b>



# 1. Team

## **Responsables scientifiques**

Patrick Joly [DR]

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia [DR-CNRS]

## **Responsable permanent**

Eliane Bécache [CR]

## **Assistantes de projet (avec le projet Estime)**

Sandrine Boute [TR]

Annie Marchal [Secrétaire ENSTA]

## **Personnel INRIA**

Gary Cohen [CR]

Houssein Haddar [CR]

Jacques Henry [DR (INRIA FUTURs BORDEAUX depuis août 2003)]

Jing-Rebecca Li [CR depuis le 01 novembre 2003]

## **Collaborateurs extérieurs**

Francis Collino [CERFACS]

Denis Matignon [ENST]

Daniel Martin [MC de l'Université de Rennes]

Christine Poirier [MC de l'Université de Versailles-Saint Quentin]

## **Personnel CNRS**

Marc Lenoir [DR]

Christophe Hazard [CR]

Jean-François Mercier [CR]

Colin Chambeyron [Ingénieur d'Etudes]

## **Personnel ENSTA**

Patrick Ciarlet [Enseignant-Chercheur ENSTA]

Eric Lunéville [Enseignant-Chercheur ENSTA]

## **Chercheurs invités**

Andrei Kiselev [Université de St-Pétersbourg]

Alexandre Komech [Université de Vienne]

Peter Monk [University of Delaware]

Angel Ramos [Université Complutense Madrid]

## **Chercheurs Post-Doctorants**

Grégoire Derveaux [post doct ENSTA]

Stéphane Job [post doct ENSTA]

Steven Kusiak [post doct CNRS]

Beate Jung [post doct ENSTA]

## **Chercheurs Doctorants**

Choukri Ben Amar [cotutelle, Ecole Polytechnique]

Kamel Berriri [boursier tunisien, Université Paris 9]

Nicolas Castel [boursier MENRT, Université Paris IX]

Isabelle Champagne [Personnel DGA, Ecole Polytechnique]

Fabrice Delbary [boursier MENRT, Paris 6]

Julien Diaz [boursier MENRT, Paris 6]

Dorra Drissi [ENIT, Tunisie]

Eve-Marie Duclairoir [bourse BDI CNRS/EADS]

Marc Duruflé [boursier Inria, Université Paris IX]

Abdelaâziz Ezziani [boursier MENRT, Université Paris IX ]  
Sandrine Fauqueux [thèse soutenue le 6 Février, boursière INRIA]  
Pascal Grob [boursier CIFRE EADS]  
Erell Jamelot [boursier DGA, Ecole Polytechnique]  
Samir Kaddouri [boursier MENRT, Orsay]  
Guillaume Legendre [boursier ONERA, ATER Université UVSQ depuis le 01/09/03]  
François Loret [boursier MENRT, Ecole Centrale de Paris]  
Sébastien Pernet [boursier ONERA]  
Jerónimo Rodríguez Garcéa [boursier Inria, Université Paris 9]  
Gilles Scarella [boursier Inria, Université Paris IX]  
Maria do Céu Soares [Université nouvelle de Lisbonne (co-tutelle)]  
Sébastien Tordeux [boursier DGA, Université Paris IX]

### Stagiaires

Nicolas Castel [DEA Paris IX]  
Eve-Marie Duclairoir [DEA ENS Cachan]  
Frédéric Etienne [DESS Rennes]  
Latifa El Khati [DESS Evry]  
Samir Kaddouri [DEA Orsay]  
Hassene Kout [DESS Chambéry]  
Saïd Mohammed [DEA Paris VI]  
Xavier Mourillon [DEA UVSQ]  
Hoai Minh N'Guyen [Ecole Polytechnique]  
Tariq Ouahbi [DEA Paris VI]

## 2. Overall Objectives

La propagation d'ondes de toutes natures est l'un des phénomènes physiques les plus simples et les plus usuels auquel nous soyons confrontés. Depuis la vie courante (sons, vibrations, vagues, télécommunications, radar) jusqu'à l'échelle de l'univers (ondes électromagnétiques, de gravité) et à celle de l'atome (émission spontanée ou stimulée, interférences entre particules), ce sont l'émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen privilégié de connaissance du monde qui nous entoure.

L'étude et la simulation numérique des phénomènes de propagation constituent donc une activité très répandue dans les divers domaines de la physique et de l'art de l'ingénieur.

La variété et la complexité des problèmes posés, leur intérêt scientifique et industriel, la prise de conscience d'une structure mathématique commune à des problèmes issus de domaines différents justifient qu'un projet de recherche en Calcul Scientifique soit entièrement dédié à ce thème. Ce projet est un projet commun INRIA-CNRS-ENSTA.

De façon générale, l'activité du projet est orientée vers la conception, l'analyse, l'approximation numérique et le contrôle de modèles mathématiques pour la description des phénomènes de propagation d'ondes intervenant en mécanique et en physique et dans les sciences de l'ingénieur.

Au-delà de l'objectif général de progression de la connaissance scientifique, trois buts peuvent être assignés au projet:

- Le développement d'une expertise des problèmes relatifs aux quatre types d'ondes étudiées: acoustique, ondes de gravité, élastodynamique et électromagnétique, ainsi que des diverses méthodes de résolution numérique.
- Le traitement des problèmes complexes, c'est-à-dire dont la modélisation soit suffisamment proche des situations concrètes.
- Le développement des méthodes numériques originales.



L'étude de tels problèmes conduit naturellement à des applications importantes sur le plan industriel. Pour s'attaquer à ces problèmes, notre démarche scientifique repose sur une approche selon les trois angles suivants :

- La modélisation des problèmes physiques, leur mise en équations et la conception de modèles approchés à l'aide de méthodes asymptotiques.
- L'étude théorique des modèles mathématiques relativement à l'existence, l'unicité et aux propriétés qualitatives essentielles des modèles.
- La conception, l'analyse et la mise en oeuvre de méthodes numériques, l'étude de la précision et de la stabilité des méthodes, la mise au point d'algorithmes, leur parallélisation et leur vectorisation.

## 3. Scientific Foundations

### 3.1. Introduction

Notre activité repose avant tout sur l'existence de modèles mathématiques issus de la physique. Il s'agit d'équations ou de systèmes d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique (pour reprendre la terminologie mathématique). Les modèles de base, qui s'appuient sur une physique simplifiée, sont linéaires. Le prototype en est l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

qui s'applique directement aux ondes acoustiques mais constitue un modèle scalaire simplifié pour les autres types d'onde. C'est pourquoi le développement de nouvelles méthodes numériques passe souvent par son application à l'équation des ondes. Une physique plus réaliste vient en général enrichir ces modèles de base et en accroître la complexité : conditions aux limites, termes non linéaires, termes intégral-différentiels, couplages de modèles, ...

Il est commun de distinguer deux types de problèmes associés à ces modèles: les problèmes en temps (ou problèmes transitoires) et les problèmes en fréquence (ou problèmes harmoniques). Dans le premier cas, le temps fait explicitement partie des variables de l'inconnue du problème et on s'intéresse alors à un problème d'évolution. Dans le second cas, la dépendance en temps est imposée *a priori*, par l'intermédiaire de la source par exemple. Elle est supposée périodique en temps, et même harmonique : on cherche une solution proportionnelle à  $e^{i\omega t}$ , où  $\omega > 0$  désigne la pulsation (on parle aussi de fréquence). Le temps n'intervient alors plus que par l'intermédiaire de cette fréquence, qui joue le rôle de paramètre, et l'inconnue recherchée est une fonction des seules variables spatiales. Ainsi, l'équation des ondes donne naissance à l'équation de Helmholtz :

$$-c^2 \Delta u - \omega^2 u = 0.$$

Il convient de souligner que ces deux types de problèmes, bien qu'issus d'une même modélisation physique, ont des propriétés mathématiques radicalement différentes et nécessitent le développement de méthodes numériques adaptées. En outre, la justification mathématique précise du passage de l'un à l'autre s'avère souvent délicate. Enfin, signalons que les problèmes harmoniques n'ont, du moins en toute rigueur, plus d'objet dès que le modèle mathématique devient non linéaire.

Toutefois, il est un point commun entre ces problèmes : l'existence d'une dimension caractéristique qu'on appelle la longueur d'onde. Très intuitivement, cette dimension est la longueur sur laquelle la solution recherchée varie substantiellement (typiquement la période d'une solution périodique). Dans le cas d'une propagation en milieu hétérogène, il conviendra de parler de plusieurs longueurs d'onde, celle-ci pouvant

varier d'une région de l'espace à l'autre. Sa connaissance a bien entendu une influence fondamentale sur les propriétés de la solution et donc sur le choix d'une méthode numérique. Un problème sera considéré comme de grande taille si le rapport entre la taille de ce problème (à savoir la taille du domaine de calcul dans le cas d'un problème harmonique ou la distance parcourue par l'onde pendant le temps d'intégration dans le cas d'un problème transitoire) et la longueur d'onde est grand.

Actuellement, on maîtrise bien les méthodes numériques pour résoudre les problèmes académiques ou industriels de base. Beaucoup de compagnies possèdent des codes de calcul s'appuyant sur des méthodes de nature diverse et de précision peu élevée (typiquement du second ordre par rapport aux paramètres de discrétisation). Ces méthodes sont fiables et leurs limites en général bien cernées. En revanche les problèmes plus complexes et plus proches des applications restent largement ouverts et constituent un champ d'investigation très fertile pour les mathématiques appliquées. Les recherches en Mathématiques Appliquées s'orientent maintenant dans les directions suivantes :

- La conception de nouvelles méthodes plus précises et plus performantes
- Le traitement des modélisations de plus en plus complexes : modèles non locaux, modèles non linéaires, systèmes couplés,...
- L'étude de phénomènes spécifiques : ondes guidées, résonances, singularités de solutions
- Le développement de modèles approchés.

C'est dans ce cadre que s'inscrivent les problématiques abordées par le projet Ondes.

### 3.2. Simulation précise et rapide pour la propagation d'ondes

Les problèmes auxquels on est souvent confronté sont de grande taille au sens où le rapport entre la taille du domaine de calcul (ou la distance parcourue par l'onde pendant la durée de la simulation en régime transitoire) et la longueur d'onde peut être grande. Dans ce cas, les méthodes évoquées plus haut tombent en défaut et des phénomènes parasites, tels que la dispersion numérique pour n'en citer qu'un, viennent gravement entacher la fiabilité des résultats. Par ailleurs, la grande taille des problèmes conduit à des calculs sur ordinateur à la fois longs et gourmands en place mémoire. Il est alors naturel de chercher à améliorer les méthodes numériques en termes de précision et d'efficacité, les deux allant d'ailleurs parfois de paire.

C'est dans cette perspective que se situent les travaux que nous menons sur les méthodes d'ordre élevé en régime transitoire, tant en ce qui concerne les différences finies que les éléments finis. L'utilisation de cette deuxième classe de méthodes pose le problème pratique de la condensation de masse, opération préliminaire indispensable pour aboutir à des schémas numériques explicites, propriété essentielle pour préserver l'efficacité de la méthode résultante. Le fondement mathématique de cette opération de condensation repose sur l'utilisation de formules de quadrature numérique. Celle-ci doit bien sûr se faire sans nuire à la précision et à la stabilité des calculs, ce qui pose des problèmes théoriques intéressants (dont la nature varie avec le modèle de propagation étudié) et conduit à des méthodes originales.

Des questions analogues se posent en régime fréquentiel, le problème étant alors de diminuer la taille ou d'améliorer le conditionnement des problèmes à traiter. C'est dans cet esprit que se situent nos travaux sur les méthodes de décomposition de domaine, évoqués plus en détail dans le paragraphe Calcul parallèle.

Enfin, on peut être dans une situation où on ne s'intéresse qu'à une partie de la solution d'un problème, auquel cas on doit s'attacher à concevoir des méthodes adaptées à ce cas de figure, plus efficaces qu'une méthode générale. C'est le cas des équations paraxiales qui ont été conçues pour calculer de façon approchée la propagation d'une onde dans une direction privilégiée. De tels modèles sont abondamment utilisés en géophysique (la direction privilégiée est la verticale) ou en acoustique sous-marine (la direction privilégiée est horizontale). L'analyse et l'approximation numérique de ces modèles correspondent à une problématique proche de celle du traitement des conditions aux limites absorbantes (voir paragraphe 3.3).

### 3.3. Problèmes en géométrie complexe

Les géométries des domaines de calcul rencontrés dans les applications réalistes sont souvent complexes et ne peuvent se contenter de l'usage de maillages réguliers de type différences finies. Les méthodes d'éléments finis sont en principe conçues pour pallier ce genre d'inconvénient mais ne constituent pas nécessairement la panacée pour toutes les applications, notamment à cause de leur relative complexité en ce qui concerne l'implémentation et la gestion informatique. C'est pourquoi nous nous sommes lancés dans la recherche et l'étude de méthodes alternatives.

- **Les méthodes de domaines fictifs** : Ces méthodes ont été popularisées en France par R. Glowinski initialement pour la résolution de problèmes statiques de type elliptique. Leur adaptation aux modèles d'évolution de nature hyperbolique se révèle particulièrement fructueuse. La philosophie de ces méthodes consiste, dans un premier temps, à plonger la géométrie complexe à traiter dans une géométrie simple (typiquement un carré ou un cube), puis à oublier la présence de la frontière réelle. Dans un second temps, on introduit une inconnue de calcul auxiliaire définie uniquement sur cette frontière afin de tenir compte si possible de la condition aux limites qui y est imposée. Ceci permet alors de travailler avec deux maillages de calcul quasiment indépendant, un maillage régulier pour le volume et un maillage conforme pour la frontière. Ceci permet en particulier de s'affranchir de la majeure partie des difficultés pratiques liées aux méthodes d'éléments finis. D'un point de vue théorique, l'analyse de ces méthodes pose des questions délicates liées à la théorie des problèmes de point selle. Signalons que ces méthodes semblent particulièrement bien adaptées pour le traitement de fissures, pour les problèmes de diffraction par des obstacles mobiles ou encore pour les problèmes d'optimisation ou d'identification de formes.
- **Les méthodes de raffinement de maillages** : Ces méthodes présentent surtout un intérêt dans le contexte de l'utilisation de méthodes de différences finies. La question majeure qui se pose est la suivante : comment raccorder deux maillages de tailles différentes de façon stable et précise ? Dans le cas des problèmes elliptiques statiques (ou pour les problèmes dans le domaine fréquentiel), les méthodes dites d'éléments joints, notamment développées en France par Y. Maday, apportent une solution élégante à cette question. Cette solution n'est pas suffisante pour les problèmes de propagation d'ondes où l'utilisation d'un pas de temps local est souhaitable : on diminue le pas de discrétisation en temps là où on raffine le maillage en espace. Dans ce cas, le problème reste largement ouvert et les solutions heuristiques développées par les ingénieurs manquent de fondements scientifiques. Leur étude requiert des techniques d'analyse relativement peu standard et pose des questions de stabilité qui sont nouvelles.

### 3.4. Résolution de Problèmes en milieux non bornés

De nombreux problèmes de propagation d'onde se posent en milieu non borné ou du moins très grand par rapport à la zone d'intérêt: nous pensons par exemple au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un avion ou à la propagation d'une onde élastique dans le sous-sol. Pour des raisons pratiques évidentes, on est amené à réduire les calculs effectifs à un domaine borné en espace. Se pose alors le problème du traitement de la frontière artificielle ainsi introduite afin de simuler le fait que le milieu de propagation réel est infini. C'est ce qui amène à introduire les notions de conditions aux limites transparentes ( i.e., qui n'ont pas d'influence sur la solution), de conditions aux limites absorbantes (conditions aux limites qui sont censées « laisser sortir » les ondes du domaine de calcul en minimisant les réflexions parasites) ou de couches absorbantes (des petites bandes qui sont rajoutées autour du domaine de calcul dans lesquelles on travaille avec un modèle mathématique qui permet de laisser rentrer les ondes dans la couche puis les absorber).

Il s'agit d'un thème à la fois important et délicat qui passionne les mathématiciens appliqués depuis près de vingt ans, et auquel les chercheurs du projet contribuent de façon substantielle. Ce sujet est étroitement lié sur le plan théorique aux notions d'opérateurs pseudo différentiels et de leur approximation ainsi qu'à la théorie des problèmes hyperboliques mixtes.

### 3.5. Modèles asymptotiques ou approchés

Dans de nombreux problèmes, on doit faire face à un ou à plusieurs petits paramètres, souvent de nature géométrique : nous pensons par exemple à l'épaisseur du revêtement absorbant d'un obstacle réfléchissant que l'on cherche à rendre furtif, à celle d'une couche de colle entre deux solides, au rayon d'une structure filaire intervenant comme élément d'une antenne ou à la période de variation d'un milieu hétérogène. Cette dimension caractéristique liée au problème considéré peut être petite devant la longueur d'onde, auquel cas sa prise en compte par des techniques de discrétisation classique est déraisonnable et coûteuse, mais néanmoins avoir une grande influence sur la solution du problème, ce qui rend nécessaire d'en tenir compte. Une idée relativement naturelle consiste alors à développer des modèles approchés fondés sur un développement asymptotique de la solution par rapport au petit paramètre: on aboutira alors selon les cas à une condition aux limites dite équivalente ou effective pour le revêtement absorbant, à une condition de transmission équivalente pour la couche mince, à une équation intégrale filaire dans le cas de l'antenne ou à un modèle homogénéisé dans le dernier cas. Dans chaque cas, la résolution numérique du nouveau problème se révèle plus simple (gain d'une ou plusieurs dimensions d'espace, coefficients localement constants, ...). La justification mathématique de ces modèles approchés passe par l'attirail classique en analyse numérique : caractère bien posé des problèmes approchés, stabilité par rapport au petit paramètre, estimations d'erreur. Dans le cas des couches minces, on est confronté à des difficultés proches de celles rencontrées avec les conditions aux limites absorbantes.

Signalons que des techniques analogues peuvent être développées dans des cas où le petit paramètre n'est pas nécessairement de nature géométrique. Nous pensons aux problèmes basse fréquence, ou aux problèmes non linéaires avec données petites.

### 3.6. Milieux complexes

Pour traiter des milieux réels, on est inévitablement amené à traiter ce que nous appellerons des milieux complexes. Par ce terme, nous entendons des milieux qui se révéleront être hétérogènes (coefficients variables, éventuellement discontinus - présence de fissures) ou obéir à une loi de comportement (mécanique ou électromagnétique) complexe : loi non locale en temps ou en espace, loi non linéaire. De telles propriétés induisent des phénomènes spécifiques de nature variée (singularités, absorption intrinsèque, dispersion intrinsèque...) qui correspondent à des difficultés nouvelles sur un plan mathématique ou numérique. Dans ce cas de figure, il est difficile de dégager une méthode générale. On a affaire à des problèmes dont la théorie est inexistante ou mal connue, pour lesquels les méthodes numériques sont balbutiantes. Il faut alors trouver la solution *ad hoc* pour chaque cas de figure.

### 3.7. Le guidage des ondes

Les ondes guidées sont des solutions très particulières des modèles de propagation d'ondes : ce sont des ondes qui se propagent dans une direction privilégiée et dont l'énergie reste confinée dans une région bornée dans les directions orthogonales à cette direction privilégiée (directions transverses). Ceci n'est en général rigoureusement possible que si le milieu de propagation a une structure cylindrique (on parle alors de guide d'ondes). Toutefois, les ondes guidées décrivent bien les phénomènes que l'on observe dans des structures « presque cylindriques », situation qui se rencontre fréquemment dans les applications. Une des caractéristiques de ces ondes est d'être généralement dispersives (la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde) et ce même lorsque le modèle de propagation ne l'est pas intrinsèquement. On a l'habitude de distinguer les guides d'ondes fermés qui correspondent au cas où le confinement de l'énergie transverse est simplement dû au fait que le milieu de propagation est borné dans les directions transverses, des guides d'ondes ouverts qui correspondent au cas où, le milieu de propagation étant non borné dans les directions transverses, le confinement de l'énergie est dû à un mécanisme physique qui dépend des propriétés du modèle de propagation. Ce sont bien entendu les guides ouverts qui posent les questions les plus intéressantes (mais aussi les plus difficiles) d'un point de vue scientifique, tant au plan physique que mathématique et numérique.

L'analyse de ces phénomènes revêt une importance fondamentale soit parce qu'il y a dans la nature des ondes guidées auxquelles l'homme se trouve directement confronté (ondes de surface lors des tremblement de terre, ondes de gravité captées par la côte, ...) soit parce que l'homme va chercher à maîtriser et exploiter de telles ondes, notamment dans le domaine des télécommunications (fibres optiques, ...). Mathématiquement, l'étude des guides d'ondes nécessite une parfaite maîtrise de la théorie spectrale des opérateurs auto adjoints et numériquement elle fait appel à beaucoup d'ingrédients utilisés par ailleurs (conditions aux limites artificielles, équations intégrales, éléments finis, ...) mais aussi à des outils plus spécifiques (algorithmes de calcul de valeurs propres, résolution d'équations non linéaires, ...), autant d'aspects sur lesquels le projet a acquis une expertise internationalement reconnue.

Enfin, au delà de l'étude intrinsèque des guides d'ondes, il est fondamental, notamment pour les applications technologiques, d'être capable d'étudier leur interaction avec d'autres milieux de propagation (guides d'ondes débouchant sur des milieux ouverts, couplage de guides...), voire d'optimiser ces guides.

### 3.8. Résonances

Les fréquences de résonance constituent une notion qui est facilement accessible à l'intuition, mais délicate à définir proprement sur le plan mathématique surtout lorsqu'elles sont associées à des problèmes de propagation en milieu non borné (ce qui constitue le cas intéressant scientifiquement). Ces fréquences sont intimement liées au développement de la théorie du « scattering » (travaux de Lax et Phillips) : ce sont des nombres complexes qui apparaissent comme les pôles du prolongement méromorphe d'une famille d'opérateurs dépendant de la fréquence réelle  $\omega$  (ces opérateurs sont encore appelés matrices de Scattering).

Physiquement, on appelle souvent fréquences de résonance, les fréquences pour lesquelles la réponse d'un milieu ou d'un objet soumis à une excitation périodique en temps présente brutalement un maximum : on dit alors que le milieu (ou l'objet) rentre en résonance, phénomène auquel chacun est un jour ou l'autre confronté dans la vie courante. Le lien avec les pôles de résonance introduits plus haut est le suivant: ces fréquences physiques correspondent aux parties réelles des pôles, l'amplitude de la réponse étant, elle, directement reliée à la partie imaginaire des pôles (plus grande est celle-ci, plus faible est la réponse). On comprend alors l'importance pour les applications de la connaissance de ces pôles (détection radar, stabilité d'un navire soumis à la houle, instruments de musique, ...). En outre, les fréquences de résonance complexes permettent de décrire (à l'aide d'exponentielles complexes) le comportement aux temps longs de problèmes de propagation en milieu ouvert : elles sont donc potentiellement exploitables pour un calcul en transitoire.

Méthodologiquement, l'approche numérique des problèmes de résonances n'est pas sans point commun avec celle des problèmes d'ondes guidées mais présente des aspects très spécifiques, qui demandent de bien connaître la théorie des fonctions de la variable complexe, et des difficultés nouvelles (opérateurs non auto-adjoints, recherche de zéros dans le plan complexe, ...)

## 4. Application Domains

### 4.1. Ondes acoustiques

Ces ondes se propagent en milieu fluide et sont le support de la propagation du son. On cherche à calculer une distribution de pression.

#### 4.1.1. Acoustique musicale

Une application particulièrement séduisante des modèles numériques de propagation d'ondes est la simulation sur ordinateur d'instruments de musique. Le but poursuivi est alors double : aider à une meilleure compréhension du fonctionnement de ces instruments mais aussi aider à la facture d'instruments nouveaux. Dans la pratique, une modélisation réaliste de ces instruments conduit à étudier en fait des problèmes d'interaction fluide-structure, c'est-à-dire l'interaction entre une onde acoustique et une structure vibrante telle une membrane, une plaque ou une coque.

#### 4.1.2. Acoustique sous-marine

L'acoustique sous-marine a pour objet l'étude et l'utilisation de modèles mathématiques décrivant la propagation des ondes acoustiques dans la mer. La propagation des ondes dépend des caractéristiques physiques locales du milieu pouvant évoluer au cours du temps. Les résultats des recherches dans ce domaine ont des applications directes en océanographie, biologie marine, géophysique.

### 4.2. Ondes élastiques

Ces ondes se propagent dans les solides. L'inconnue est la distribution du champ des déplacements dans le solide.

#### 4.2.1. Géophysique

La géophysique s'intéresse à la propagation des ondes dans le sous-sol (éventuellement en milieu marin). Ces ondes interviennent bien sûr dans des phénomènes naturels comme les séismes mais elles sont aussi utilisées à des fins industrielles essentiellement par l'industrie du pétrole qui a développé les méthodes de prospection pétrolière par la sismique. Ces méthodes constituent un vaste champ d'application pour les méthodes numériques. Se posent également des problèmes de modélisation fine destinée à prendre en compte l'influence d'éléments tels que la présence de puits, d'outils d'acquisition des données, modélisation des sources, ...

Bien entendu, les outils de modélisation sont surtout dans ce contexte un outil nécessaire pour mener à bien l'identification du sous-sol (problème inverse), raison pour laquelle la géophysique est notre principal thème de collaboration avec le projet Estime.

#### 4.2.2. Contrôle non destructif

Une autre application très répandue des ondes élastiques est le contrôle non destructif : le but est par exemple de détecter la présence d'un défaut dans une pièce métallique (typiquement une fissure) sans avoir à casser celle-ci. On utilise alors des ondes ultra-sonores dont on mesure l'écho à la surface de la pièce. Un champ d'applications privilégié de telles méthodes est le contrôle des centrales nucléaires.

### 4.3. Ondes électromagnétiques

Ces ondes n'ont pas besoin de support matériel pour se propager. Les inconnues du problème sont essentiellement le champ électrique et le champ magnétique.

#### 4.3.1. Furtivité radar

Les ondes électromagnétiques sont très utilisées pour la détection d'objets volants, le plus souvent pour des applications militaires. Les problèmes de calcul numérique qui se posent sont de deux natures :

- Comment calculer la réponse d'un objet à une onde incidente ?
- Comment rendre cet objet furtif ?

Le thème furtivité fait notamment appel à la modélisation de nouveaux matériaux absorbants (anisotropes, chiraux, non linéaires, ...)

#### 4.3.2. Antennes

Les antennes sont une des technologies de base pour la communication à longue distance par ondes électromagnétiques. Elles sont utilisées pour émettre, diriger, réfléchir les ondes. Le calcul des antennes pose notamment des difficultés liées à leur géométrie très complexe (antennes plaquées, éléments filaires, ...)

#### 4.3.3. Optique

Les ondes électromagnétiques sont également largement utilisées en télécommunications pour transmettre de l'information par support optique (fibres optiques, optique intégrée). La technologie pour la conception de guides d'ondes optiques est très pointue et fait très largement appel à des matériaux nouveaux tels que les supraconducteurs. Le besoin en méthodes numériques dans ce domaine est croissant.

## 4.4. Ondes de gravité

Il s'agit des ondes liées à la propagation de la houle. Les modèles utilisés sont dérivés de la mécanique des fluides. Les applications concernent prioritairement l'industrie maritime notamment pour tout ce qui concerne les problèmes de stabilité des navires, de tenue à la mer, de résistance de vagues, ...

# 5. Software

## 5.1. Le Code de calcul MELINA

**Participants:** Marc Lenoir, Daniel Martin, Eric Lunéville, Colin Chambeyron.

**Key words:** *diffraction, élément fini, équation intégrale.*

Le projet développe en collaboration avec Daniel Martin de l'IRMAR (université de Rennes 1) depuis plusieurs années un logiciel d'éléments finis (en Fortran) : MELINA. Ce logiciel est constitué de briques plus ou moins élémentaires relatives à différents aspects classiques d'une méthode d'éléments finis (lecture de maillage, calcul de matrices élémentaires, assemblage, prise en compte de conditions essentielles, résolution de systèmes linéaires, calcul de valeurs propres, génération de fichier de sortie) et de briques spécifiques liées à la résolution de problème en domaine non borné (méthode de représentation intégrale, méthode spectrale). Sa conception est orientée formulation variationnelle, c'est-à-dire qu'il s'appuie explicitement sur des formulations de ce type et non pas sur des équations issues de divers problèmes de physique ou de mécanique. A ce titre, il résout tous les problèmes et aucun en particulier! Il s'agit donc essentiellement d'une "boîte à outil" destiné à prototyper de nouvelles méthodes numériques de type éléments finis mises au point par les chercheurs du laboratoire. Aujourd'hui, il est capable d'intégrer des formulations multi-inconnues scalaires et vectorielles en régime harmonique ou en transitoire, de proposer des approximations par éléments finis de type Lagrange jusqu'à l'ordre 10 avec différents types d'éléments (triangle, quadrangle, tétraèdre, prisme, cube), de prendre en compte des conditions essentielles (en particulier des conditions de transmissions) et de proposer des outils permettant de prendre en compte des conditions aux limites transparentes non locales (représentation intégrale, représentation modale). De par sa conception, il répond assez bien (facilité, temps de développement, capitalisation de l'expérience) aux besoins de prototypage qu'impose notre activité. Le code MELINA est en accès libre (voir <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/www/homepage.html>) et on a accès à une documentation complète en ligne. On trouvera sur ce site de nombreuses applications développées à l'aide de ce logiciel.

# 6. New Results

## 6.1. Présentation par domaines d'application

Il y a deux façons de présenter notre activité: soit par type de problème ou de méthode, soit par type d'application. Afin de permettre au lecteur cette double lecture, nous avons choisi de commencer ce chapitre en présentant notre activité de l'année par leurs domaines d'application. Ce paragraphe (section 6.1) renvoie aux paragraphes qui suivent qui décrivent notre recherche un peu plus en détail, par type de problème. Cela donne au chapitre "Résultats nouveaux" la structure suivante:

- 6.1 Présentation par domaines d'application.
- 6.2 Méthodes numériques performantes pour le régime transitoire.
- 6.3 Approches variationnelles pour le régime transitoire.
- 6.4 Conditions aux limites transparentes.
- 6.5 Méthodes asymptotiques.
- 6.6 Guides d'ondes, Résonances.
- 6.7 Problèmes inverses et imagerie.
- 6.8 Programmation dynamique et factorisation de problèmes aux limites.

## 6.9 Développements récents du code MELINA.

### 6.1.1. Ondes acoustiques et couplage fluide-structure

La propagation des ondes acoustiques dans un fluide (au repos) est décrite par un modèle scalaire : son étude est souvent perçue par les mathématiciens appliqués comme une étape simple, préliminaire à l'étude des problèmes vectoriels de l'élastodynamique et/ou de l'électromagnétisme.

Pourtant, une partie importante de nos activités de recherche actuelles relèvent de l'acoustique et soulèvent des questions nouvelles et souvent difficiles. Ceci s'explique par la volonté, motivée par de nombreuses applications, de résoudre aujourd'hui des problèmes couplés. Nous nous intéressons plus particulièrement aux interactions entre les vibrations d'une structure et d'un fluide, compressible ou incompressible (*couplage fluide-structure*) et à l'influence d'un écoulement sur les vibrations du fluide (*acoustique en écoulement*).

- L'acoustique en écoulement fait depuis quelques années l'objet de nombreux travaux au sein de notre équipe. Motivées au départ par un échange informel avec Vincent Pagneux du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, ces recherches sont aujourd'hui soutenues (à travers le co-financement d'une bourse de thèse à compter du 1er janvier 2004) par le Centre de Recherches d'EADS. L'un des objectifs visés par EADS est la réduction du bruit rayonné par les nacelles des AIRBUS, mais de nombreux autres secteurs industriels (en particulier dans les transports terrestres) posent des questions analogues. Bien que l'enjeu soit important, la problématique de l'acoustique en écoulement est encore mal comprise car elle recèle des difficultés théoriques très importantes. Notre équipe a contribué à la mise en commun des savoirs dans ce domaine par l'organisation d'une école CEA-INRIA-EDF en septembre 2000 et par l'animation d'un groupe de travail qui s'est réuni régulièrement en 2002-2003.

Nos travaux de recherches sur ce thème concernent aussi bien le régime transitoire (cf section 6.2) que le régime fréquentiel (cf section 6.3). Plusieurs voies sont explorées, reposant sur différents modèles (équation d'ondes convectée, équations d'Euler linéarisées, équation de Galbrun). Pour la discrétisation, nous avons privilégié l'utilisation de schémas aux différences finies pour les équations d'Euler linéarisées et la méthode des éléments finis pour l'équation de Galbrun. Une nouvelle voie, reposant sur la méthode de Galerkin discontinue, semble prometteuse. Enfin, le traitement des frontières artificielles par PML a soulevé des questions originales que nous avons en partie résolues (cf section 6.4).
- Les problèmes de couplage fluide-structure auxquels nous nous intéressons sont divers. Ce thème est particulièrement attrayant par ses champs d'application. Ainsi par exemple, une modélisation réaliste des instruments de musique conduit à étudier l'interaction entre une onde acoustique et une structure vibrante telle une membrane, une plaque ou une coque, pouvant être couplés à des cordes. Des travaux consacrés à la modélisation de la timbale puis de la guitare (voir par exemple [16]) ont été effectués en collaboration avec Antoine Chaigne, du Laboratoire de Mécanique de l'ENSTA. Ils ont permis d'accéder à la production de sons synthétiques. Cette année, des travaux concernant la modélisation des pertes visco-thermiques dans les instruments à vent ont été menés en collaboration avec Denis Matignon de l'ENST (cf section 6.6.4). Nous envisageons d'aborder prochainement la modélisation du piano.

Egalement en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique de l'ENSTA pour la partie expérimentale, des travaux théoriques et numériques visent à expliquer les instabilités observées, lorsqu'une plaque élastique est placée dans un fluide compressible en écoulement (cf section 6.6.1). La problématique scientifique du couplage fluide-structure trouve également des applications dans le domaine médical. Ainsi, le développement de techniques ultrasonores pour l'aide au diagnostic de l'ostéoporose repose sur une meilleure compréhension des phénomènes d'interaction de l'onde acoustique avec la structure osseuse. Une collaboration avec le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique portant sur la simulation numérique de ces phénomènes a été mise en place : elle constitue un aspect de notre participation au GDR de Marc Deschamps (cf section 6.2.4).



Enfin, nous nous intéressons au problème de la stabilisation de navires ou plate-formes off-shore, soulevé en particulier par la DGA. Notre objectif est de trouver une méthode rapide de résolution du problème transitoire, incluant les effets de couplage entre la structure et la houle (cf section 6.2.5). La méthode originale qui est mise en oeuvre exploite la décomposition de la solution en modes résonants.

### 6.1.2. Ondes électromagnétiques

Les applications dans le domaine de la furtivité, de la compatibilité électromagnétique et la des composants opto-électroniques ont été au cours de ces 10 dernières années trois des principaux moteurs de la recherche en mathématiques appliquées aux ondes électromagnétiques. Même si cela s'est un peu ralenti ces dernières années, le Projet Ondes a produit un bon nombre de contributions dans ce domaine et l'activité "électromagnétisme" du Projet devrait être particulièrement relancée dans un futur proche au travers de :

- notre participation à l'ARC HEADDEXP sur la modélisation de la propagation d'ondes électromagnétiques dans le cerveau (il s'agit là d'un bon "laboratoire" pour tester nos méthodes d'ordre élevé en régime transitoire).
- notre future participation en partenariat avec l'ONERA, à un futur contrat de recherche sur plusieurs années (nous avons participé à un appel d'offres cette année - voir section ICI - et notre proposition est celle qui a été finalement retenue) pour la mise au point d'un gros code d'électromagnétisme temporel. Ce contrat met notamment l'accent sur le couplage et l'hybridisation de différentes méthodes (voir section 6.2.4).

Cette année nos contributions dans le domaine de l'électromagnétisme ont tourné autour de :

- les méthodes d'ordre élevé. Il s'agit plus particulièrement de la conception de méthodes de Galerkin discontinues tant en régime transitoire (voir section 6.2.2) que fréquentiel (voir section 6.3.3).
- l'analyse asymptotique. Il s'agit plus de la conception de modèles équivalents pour des milieux comportant des fentes minces et de l'étude de conditions d'impédance généralisées pour la diffraction par des obstacles fortement conducteurs (voir section 6.5.1).
- les problèmes inverses. Le prolongement naturel des méthodes numériques pour les problèmes de diffraction est l'étude des problèmes inverses tels que la reconstruction d'un objet diffractant à partir de la mesure de champs diffractés. Il s'agit de l'objectif général des recherches que nous menons sur le thème du scattering inverse (voir section 6.7).

Signalons enfin que certaines de nos recherches à caractère plus transverse ont déjà eu ou devraient avoir bientôt des répercussions en électromagnétisme. Nous pensons bien évidemment à nos travaux sur les conditions aux limites absorbantes et couches PML (voir section 6.4), mais aussi ceux sur le couplage entre éléments finis et potentiels retardés, sur le couplage entre méthodes d'éléments finis ou sur le raffinement de maillage espace-temps, autant de thèmes qui s'inscrivent dans la perspective de l'hybridisation de méthodes numériques (section 6.2.4).

### 6.1.3. Ondes élastiques

La propagation des ondes dans les solides est sans doute parmi les trois domaines fondamentaux que sont l'acoustique, l'électromagnétisme et donc l'élastodynamique, celui qui pose le plus de difficultés d'ordre mathématique et numérique. Après une accalmie au milieu des années 90, accalmie consécutive au relatif désengagement des compagnies pétrolières françaises en matière de recherche, c'est aussi un champ d'application qui s'est particulièrement (re-)développé au sein du Projet Ondes au cours des dernières années, que ce soit par le biais de contacts académiques (je pense notre participation importante au GDR Ultra-sons du CNRS, à nos contacts avec le Laboratoire d'imagerie paramétrique de l'université Paris VI sur l'étude de la propagation des ondes dans les os) ou grâce à nos collaborations industrielles et para-industrielles (contrat avec l'IFREMER sur la propagation d'ondes dans les fonds marins, la collaboration - déjà ancienne - avec l'IFP et celle - plus

récente - avec Shell sur les problèmes de prospection pétrolière, la collaboration de longue date avec EDF sur les problèmes de contrôle non destructif - domaine qui connaît un essor particulier ces dernières années - et enfin la collaboration initiée cette année avec EADS dans le domaine de la vibro-acoustique).

Un pan important de nos travaux actuels en matière de méthodes numériques pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire s'inscrit dans le prolongement de trois thèses marquantes récemment soutenues au sein du Projet Ondes, à savoir les thèses de C. Tsogka, T. Fouquet et S. Fauqueux. Citons en particulier:

- nos travaux sur les méthodes de raffinement de maillage espace-temps (cf section 6.2.4),
- nos travaux sur la modélisation de phénomènes d'interaction fluide-structure (cf section 6.2.4),
- nos travaux sur les méthodes de domaines fictifs pour la prise en compte de fissures (cf section 6.2.3),
- nos travaux sur la modélisation numérique de la propagation des ondes dans les milieux visco-élastiques et poro-élastiques (cf section 6.2.7).

D'autres travaux, je pense notamment à nos premières incursions dans le domaine du contact unilatéral (cf section 6.2.3) ou de la vibro-acoustique (cf section 6.2.4), correspondent à des orientations relativement nouvelles et à des ouvertures vers des thématiques scientifiques telles que les inéquations variationnelles ou les équations intégrales espace-temps.

Les ondes élastiques ont été une des applications phares de nos travaux à caractère fondamental sur la compréhension des méthodes de couches absorbantes parfaitement adaptées (cf section 6.4)). Nos résultats, partiellement négatifs, sur le cas des milieux anisotropes ou celui des ondes de Lamb, soulèvent sans doute plus de questions qu'ils n'en résolvent et constituent une parfaite illustration des difficultés spécifiques que l'on rencontre avec les ondes élastiques.

Une autre partie de nos travaux, à caractère plus résolument fondamental, s'inscrit naturellement dans la thématique du GDR Ultra-sons. Elle concerne l'étude des ondes dans des plaques élastiques en vue de l'application au contrôle non-destructif. C'est dans ce cadre qu'ont été développées les études sur les méthodes multi-modales (cf section 6.6.2), les méthodes dites d'éléments finis localisés (cf section 6.4.2) ou les problèmes de reconstruction de formes de guides d'onde.

## 6.2. Méthodes numériques performantes pour le régime transitoire

Les problèmes de propagation d'ondes se présentent naturellement comme des problèmes d'évolution et il convient de disposer de méthodes performantes pour le calcul de la solution de ces problèmes directement dans le domaine temps. Le développement et l'analyse de telles méthodes constituent une part importante de l'activité du Projet.

Quand on s'intéresse à des méthodes à caractère général, on peut distinguer deux façons de viser "la performance":

- celle qui vise à privilégier la précision du résultat sans trop sacrifier la rapidité du calcul. C'est dans cet esprit que se situent nos travaux, déjà anciens, sur les éléments finis spectraux (cf section 6.2.1) et ceux, plus récents, sur les méthodes de Galerkin discontinues (cf section 6.2.2).
- celle qui vise avant tout à favoriser la rapidité et la robustesse du calcul sans toutefois sacrifier la précision du résultat. C'est dans cette optique que nous développons depuis plusieurs années la méthode des domaines fictifs pour les problèmes de diffraction (cf section 6.2.3).

Il apparaît toutefois de plus en plus clair qu'il n'existe pas de méthode universelle qui permette de résoudre avec la meilleure efficacité n'importe quel type de problème. C'est pourquoi beaucoup de recherches se tournent vers la conception de méthodes hybrides visant à coupler des approches différentes. Nos travaux dans cette direction (cf section 6.2.4) se sont plus spécialement développés selon trois axes:

- les méthodes conservatives pour le raffinement de maillage espace-temps,

- les méthodes de couplage en interaction fluide structure,
- les méthodes de couplage éléments finis de surface - éléments finis volumiques en vibro-acoustique.

Par ailleurs, on peut s'intéresser à développer des méthodes spécifiques pour améliorer le calcul d'une partie de la solution. C'est le cas:

- de la méthode du développement en modes résonants (cf.section 6.2.5), qui permet une meilleure prise en compte du comportement de la solution du problème transitoire aux temps longs,
- des méthodes de prise en compte de solutions singulières (cf.section 6.2.6) qui permettent notamment un calcul plus précis de la solution de problèmes de diffraction au voisinage de singularités géométriques du domaine de calcul.

Enfin, les progrès en matière de méthodes numériques autorisant depuis plusieurs années à se tourner vers la prise en compte de phénomènes de plus en plus complexes, nous nous intéressons, notamment grâce à nos contacts industriels, à (cf. section 6.2.7):

- la modélisation de la propagation d'ondes dans des milieux visco-élastiques,
- la modélisation de la propagation d'ondes dans des milieux poro-élastiques,
- la modélisation de la propagation d'ondes acoustiques dans des fluides en écoulement par le modèle de Galbrun.

### 6.2.1. Méthodes d'éléments finis spectraux

**Participants:** Gary Cohen, Marc Duruflé, Sandrine Fauqueux, Sébastien Pernet.

S. Fauqueux a terminé son travail de thèse intitulé "éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire". Cette thèse a été soutenue le 6 février 2003 à l'université de Paris IX-Dauphine. S. Fauqueux a obtenu, pour ce travail, le Prix de Thèse de l'IFP de cette année. Elle était en concurrence avec sept autres candidats préselectionnés par les différents laboratoires de l'IFP.

Dans le cadre d'un Post-Doc Industriel, S. Fauqueux a travaillé à l'incubation d'une start-up visant à diffuser les méthodes numériques d'ordre élevé développées par G. Cohen pour les différentes équations des ondes. Son travail a consisté en une étude de marché et des contacts industriels, ainsi qu'à la réalisation d'un logiciel de résolution des équations de Maxwell en régime transitoire par une méthode de Galerkin discontinue en dimension 3.

### 6.2.2. Méthodes de Galerkin discontinues

**Participants:** Nicolas Castel, Gary Cohen, Marc Duruflé, Sébastien Pernet.

#### 6.2.2.1. Motivation.

Les éléments finis mixtes spectraux développés pour les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique linéaire par G. Cohen et S. Fauqueux et étendus aux équations de Maxwell par G. Cohen et P. Monk, trouvent leur limite, pour les équations de Maxwell, dans la réalisation de maillages industriels. En effet, les maillages hexaédriques, indispensables à ces méthodes, sont peu répandus dans l'industrie du fait de leur manque de flexibilité. Un palliatif à ce problème est l'utilisation de maillages tétraédriques découpés en hexaèdres. Malheureusement, une telle approche génère des "ondes parasites" qui semblent provenir de la multiplication des degrés de liberté autour des sommets pour ce type de maillages. C'est ce qui nous a conduits à intégrer ce type d'éléments dans des méthodes de type Galerkin discontinues.

D'autre part, l'application des éléments finis mixtes spectraux à l'aéroacoustique est difficile, du fait de la complexité des opérateurs différentiels impliqués dans sa modélisation. Cette difficulté ajoutée au manque de cadre fonctionnel pour les équations de l'aéroacoustique, font des méthodes de Galerkin discontinues, dont les solutions sont dans des sous-espaces de  $L^2$ , des bons candidats pour ces équations.

### 6.2.2.2. Equations de Maxwell.

Une étude préalable, réalisée par N. Castel et S. Pernet, a montré que l'utilisation de points de Gauss au lieu de ceux de Gauss-Lobatto conduisaient, pour un surcoût minime, à une amélioration spectaculaire de la dispersion numérique des méthodes. Cette remarque, confirmée par des essais numériques, nous a fait utiliser les points de Gauss pour les différentes applications.

La première d'entre elles a été réalisée par S. Pernet, dans le cadre de sa thèse, pour les équations de Maxwell en régime transitoire. L'amélioration de la précision, à coût égal, par rapport aux éléments finis d'arêtes utilisés précédemment, a largement confirmé le bien-fondé de notre choix. S. Pernet a écrit et testé un logiciel de résolution de ces équations en dimension 3 et a mené un certain nombre d'analyses par ondes planes et d'estimations d'erreur pour cette approche. L'analyse par ondes planes a entre autres montré que cette approximation pouvait être utilisée dans une formulation non-dissipative, sans perte significative de précision ni de stabilité.

### 6.2.2.3. Equations de l'aéroacoustique.

Dans le cadre de sa thèse, commencée en septembre 2003, N. Castel a écrit une formulation bien posée de l'approximation des équations d'Euler linéarisées par des méthodes de Galerkin discontinues. Cette formulation est une extension de celle utilisée pour les équations de Maxwell.

### 6.2.3. Méthodes de domaines fictifs

Dans plusieurs travaux développés au sein du projet, la méthode des domaines fictifs a été utilisée pour prendre en compte des géométries complexes dans les problèmes de diffraction d'ondes. Rappelons que notre motivation pour utiliser la méthode des domaines fictifs est:

- D'une part d'utiliser un maillage régulier pour pouvoir économiser de la mémoire.
- D'autre part d'éviter les oscillations parasites produites par l'approximation de la géométrie en marches d'escalier.

Le principe de cette méthode est d'étendre la solution à un domaine de géométrie simple et d'imposer les conditions aux limites de façon faible à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  introduit sur la frontière. Ceci nous permet de construire un maillage régulier de pas  $h$  pour les inconnues principales du problème et un maillage de surface de pas  $H$  pour le multiplicateur.

#### Analyse de la convergence de la méthode

**Participants:** Patrick Joly, Tariq Ouahbi, Jerónimo Rodríguez.

Les résultats de convergence qui existent dans la littérature reposent sur une condition de compatibilité entre les pas des deux maillages du type

$$R = \frac{H}{h} > \mathcal{C} \quad (1)$$

Cependant cette condition n'est pas toujours suffisante pour garantir la convergence vers la bonne solution. En effet, pour certains choix d'espaces d'approximation la méthode ne converge pas même pour un rapport entre  $H$  et  $h$  très élevé (voir rapport d'activité 2002). Pour cette raison, on s'est proposé d'étudier ce phénomène à l'aide des techniques de Fourier pour différentes conditions aux limites et pour différentes choix d'éléments finis. Ce travail a été développé dans le cadre du stage de DEA du Tariq Ouahbi. Les idées générales de la méthode sont les suivantes. D'abord on se place dans le cas d'une fissure droite infinie où il y a une certaine périodicité entre les maillage surfacique et volumique (comme dans la figure 1 où la fissure est en diagonale et  $H/h = \sqrt{2}$ ). On peut alors utiliser une transformation de Fourier discrète dans la direction parallèle à la frontière qui ramène l'étude à l'analyse de phénomènes de réflexion transmission à travers la frontière (qui n'est plus parfaitement réfléchissante d'un point de vue numérique).

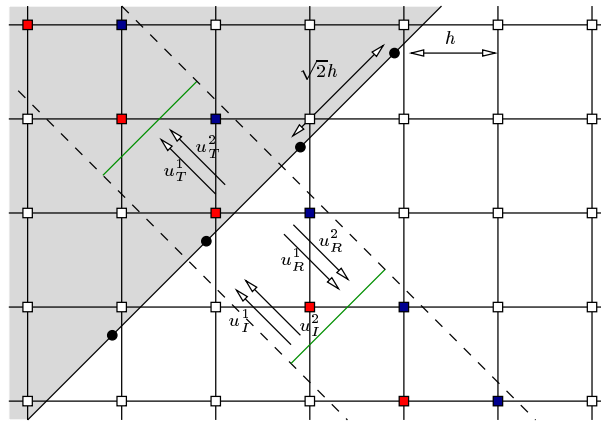


Figure 1. Configuration périodique des maillages.

On s'est intéressé dans un premier temps à l'équation des ondes scalaire avec condition aux limites de pression nulle sur l'interface avec des éléments finis  $H^1$  classiques pour la variable volumique et des fonctions constants par morceaux pour le multiplicateur de Lagrange. En effet, les résultats obtenues par l'analyse de Fourier sont cohérentes avec les autres analyses déjà existantes, la méthode est d'ordre 1. Le deuxième cas abordé est celui de l'équation des ondes en formulation mixte avec une condition aux limites de vitesse normale nulle et avec deux types d'éléments finis, un qui semble pas converger et un autre qui a été montré convergent. L'analyse est en cours de finalisation et les résultats devraient nous aider à comprendre la différence entre les deux types d'éléments finis.

### 6.2.3.1. Modélisation numérique de la propagation d'ondes en milieu élastique fissuré avec condition de contact unilatéral

**Participants:** Eliane Bécache, Patrick Joly, Gilles Scarella.

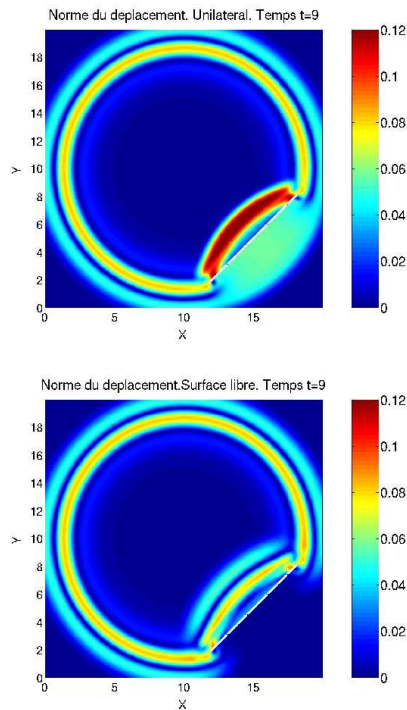
On s'intéresse à la diffraction d'ondes élastiques par des milieux fissurés pour lesquels on considère une condition de contact unilatéral sans frottement sur la fissure. Pour la résolution numérique de ce problème, on utilise la méthode des domaines fictifs et on veut étendre cette méthode, employée par E. Bécache, P. Joly et C. Tsogka dans [1] pour le cas de la surface libre, à la condition de contact unilatéral sans frottement. On adopte une formulation mixte (déplacements, contraintes) pour les équations de l'élastodynamique auxquelles on ajoute les conditions aux limites de contact unilatéral sur la fissure, définies de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= 0, \quad 0 \leq [u_N], \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N [u_N] = 0, \\ \sigma_N &= \sigma n \cdot n, \quad \sigma_T = \sigma n - \sigma_N n, \quad u_N = u \cdot n, \quad [u] = u^+ - u^-. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont prises en compte par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange définis sur la fissure qui correspondent aux parties normale et tangentielle du saut de déplacement à travers la fissure. On obtient alors une inéquation variationnelle portant sur la composante normale du multiplicateur. La non-linéarité est donc reportée sur le calcul des multiplicateurs. D'autre part, pour améliorer la prise en compte de la fissure, les éléments  $\mathcal{P}_1^{disc}$  implémentés par J. Rodríguez (projet ONDES) ont été utilisés pour le déplacement et assurent la convergence de la méthode des domaines fictifs. Pour les contraintes, on conserve l'espace d'approximation  $Q_1^{div}$  introduit par E. Bécache, P. Joly, C. Tsogka dans [2]. Pour le problème de contact unilatéral, deux schémas numériques de résolution pour le calcul des multiplicateurs au niveau de la fissure ont été particulièrement étudiés: un schéma implicite décentré et un schéma implicite centré. La stabilité du schéma implicite décentré est démontrée en prouvant la décroissance d'une énergie discrète. Cependant,

on constate numériquement des oscillations parasites des contraintes pour certaines expériences. Le schéma implicite centré, dont on ne sait pas démontrer la stabilité, provoque moins d'oscillations. On a constaté également qu'introduire de l'amortissement sur les modes parasites de l'élément  $\mathcal{P}_1^{disc}$  éliminait une partie de ces oscillations.

Numériquement, la prise en compte de contact unilatéral conduit à résoudre un problème d'optimisation quadratique avec contraintes de bornes, à chaque itération en temps. Une collaboration avec Jean-Charles Gilbert (projet ESTIME) entamée fin 2000 a permis la création d'un code résolvant ce type de problèmes (N2QP1 de la librairie MODULOPT), lequel a été intégré à notre code de simulation. Nous avons mené diverses expériences de validation de ce code, dans des cas académiques. Les résultats obtenus sont satisfaisants. A titre d'illustration, sur les figures 2, 2, on présente une comparaison de la norme du déplacement entre la condition aux limites de contact unilatéral et celle de surface libre, pour une fissure droite inclinée à 45 degrés par rapport au maillage de calcul.



Norme du déplacement. Surface libre  
 Figure 2. Norme du déplacement. Unilatéral

La prise en compte du contact unilatéral est intégrée dans le logiciel Athena, d'E.D.F. Clamart, pour le cas bidimensionnel.

Enfin, la rédaction du document de thèse de G. Scarella est commencée depuis Septembre et le code de calcul issu de la thèse a été livré à EDF.

## 6.2.4. Décomposition de domaine et méthodes hybrides.

### 6.2.4.1. Raffinement de maillage spatio-temporel pour l'élastodynamique.

**Participants:** Eliane Bécache, Jerónimo Rodríguez, Patrick Joly.

On s'intéresse à la résolution numérique des équations de l'élastodynamique en régime temporel à l'aide d'une méthode explicite de type éléments finis qui s'appuie sur un maillage régulier (Voir les travaux de C. Tsogka).

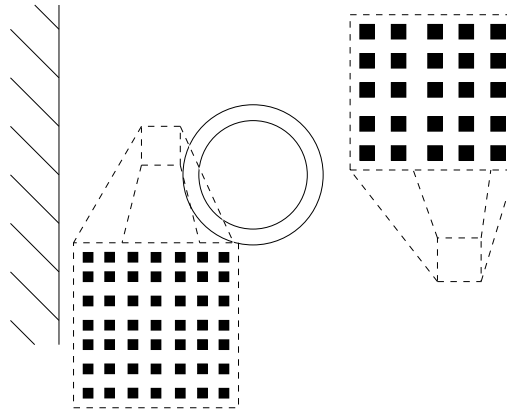


Figure 3. Diffraction par deux réseaux d'obstacles

Dans une configuration comme celle de la figure 3, où on s'intéresse à la diffraction d'une onde par un réseau de petits obstacles dont la taille est très petite par rapport à la longueur d'onde, il peut être intéressant de raffiner localement dans une certaine région. Si on prend le même pas de temps sur tout le domaine de calcul, il sera contraint par le plus petit pas d'espace. On aura alors un schéma coûteux et dispersif. Pour cette raison, on a choisi de raffiner également en temps en gardant toujours la stabilité de la méthode sous la condition CFL habituelle. Sur la figure 4, on montre la diffraction d'une onde élastique dans le domaine évoqué précédemment en utilisant une de ces méthodes (voir le paragraphe sur les méthodes avec multiplicateur de Lagrange). Ce travail est développé dans le cadre de la thèse de Jerónimo Rodríguez. Les méthodes utilisées, qui se basent dans la conservation d'une énergie discrète peuvent se diviser en deux familles:

- *Méthodes avec multiplicateur de Lagrange:* Ces méthodes se basent sur les techniques introduites par T. Fouquet pour les équations de Maxwell. Elles s'appuient sur l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange sur l'interface entre les deux grilles qui nous permet de faire le couplage entre des maillages non conformes en espace et en temps d'une façon stable. Dans le cas où le rapport entre la grille fine et grossière est deux, nous rappelons qu'il a été montré un taux de convergence en  $h^{\frac{3}{2}}$  en norme  $L^2$  global et en  $h^2$  en norme  $L^2$  en enlevant un voisinage de l'interface (c'est à dire, l'ordre du schéma intérieur utilisé). La méthode se montre aussi très efficace. Cependant, lorsque le rapport est supérieur à deux et on se sert de la CFL habituelle, la méthode se dégrade à cause des ondes parasites haute fréquence (elle devient une méthode d'ordre un).

Une amélioration basée sur un post-traitement de la solution sur la grille fine a été proposée. On a constaté numériquement qu'elle donne une précision à l'ordre deux (en norme  $L^2$  même pour un rapport élevé entre la grille fine et grossière et une valeur de CFL proche de la valeur limite qui garantit la stabilité (sur la figure 5, un raffinement 1 – 10). La nouvelle méthode a été réinterprétée en termes des nouvelles inconnues et son analyse est en cours. Les premiers résultats confirment le taux de convergence observé numériquement.

- *Méthodes sans multiplicateur de Lagrange:* Ce groupe de méthodes repose sur l'utilisation de formulations variationnelles différentes selon qu'on est sur la grille raffiné ou sur la grille grossière. Ceci nous permet de faire le couplage sans avoir besoin d'introduire un multiplicateur de Lagrange. Des résultats de convergence similaires à ceux obtenus pour la méthode avec multiplicateur ont été obtenus en 2001 pour le cas 1-D. Des résultats de convergence pour le cas multidimensionnel ont aussi été obtenus en utilisant la théorie des éléments finis mixtes et des techniques d'énergie.

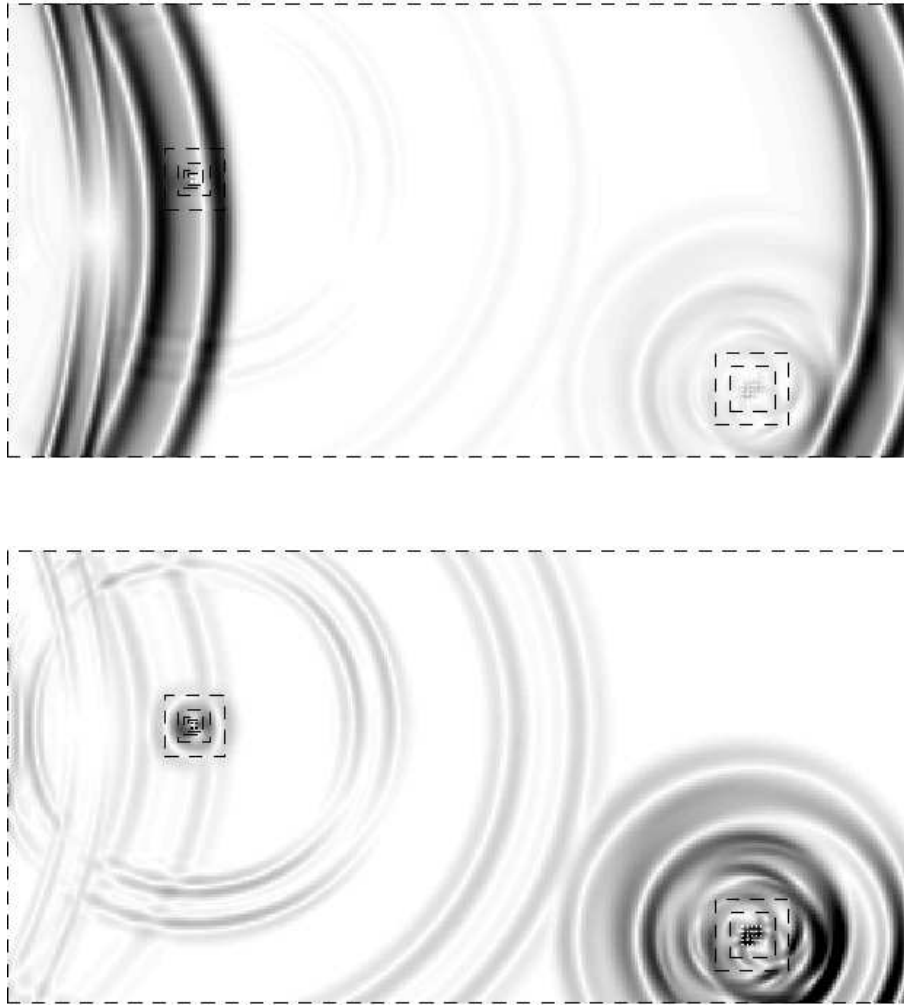


Figure 4. Diffraction par 74 petits obstacles

Une des perspectives du travail en cours est de coupler ces méthodes de raffinement de maillage spatio-temporel avec la méthode de domaines fictifs pour prendre en compte des géométries complexes (voir section 6.2.3). Un algorithme qui conserve une énergie discrète a été proposé, mais il n'a pas été encore codé et analysé (travail en cours).

#### 6.2.4.2. Modélisation numérique en couplage fluide-structure.



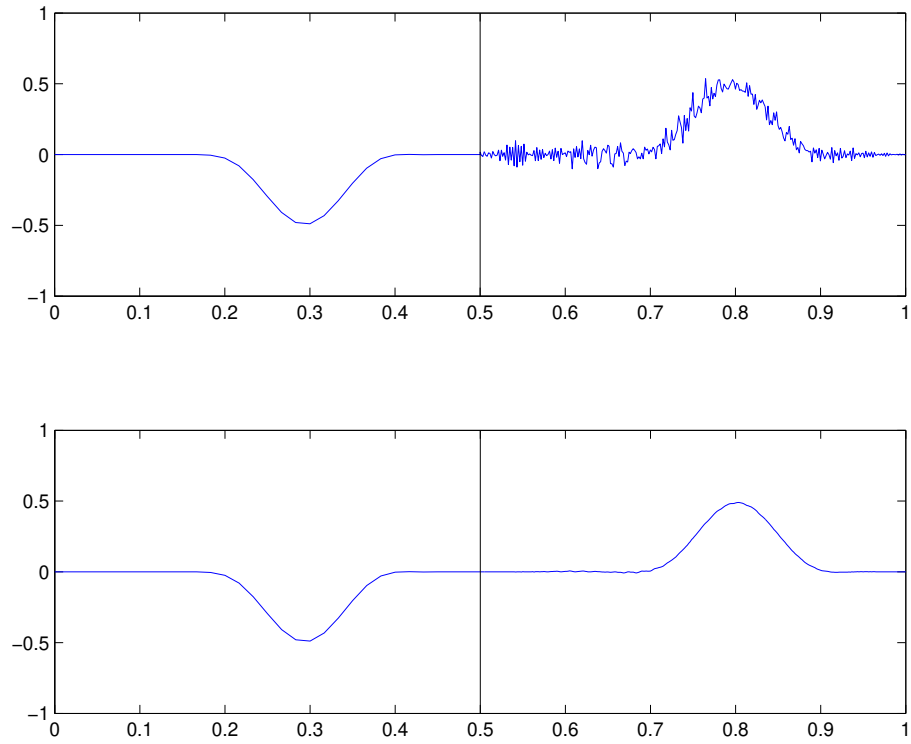


Figure 5. Raffinement de maillage 1-10

**Participants:** Eliane Bécache, Julien Diaz, Patrick Joly.

Nous nous intéressons depuis 2 ans à la modélisation numérique de la propagation d'une onde en interaction fluide-structure. Ce type de problème a notamment des applications en imagerie médicale (simulation de propagation d'une onde acoustique dans l'os, en collaboration avec le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de Paris VI) et en sismique haute-résolution (détermination de la structure des fonds sous-marins, contrat avec l'IFREMER).

Il est bien connu que la technique qui consiste à faire dégénérer les équations de l'élasticité discrétisées en un modèle acoustique n'est pas satisfaisante (présence d'ondes de cisaillement parasites dans le fluide, absence de coercivité  $H^1$  dans le fluide ...).

Il est alors souhaitable de travailler avec la pression dans le fluide (et non plus le champ de déplacement). Toute la difficulté réside dans le traitement de l'interface fluide-structure (interface os/muscle ou mer/sous-sol pour les applications qui nous intéressent).

Nous avons étudié l'année dernière une première méthode s'appuyant sur:

- un calcul en vitesses  $L^2$  - contraintes  $H_{div}$  (afin d'utiliser les éléments finis mixtes développés par C. Tsogka) dans le solide.
- un calcul en vitesses  $H_{div}$  - pression  $L^2$  (on utilise les éléments de Raviart-Thomas) dans le fluide.

Un premier code a été développé, dans le cadre d'un contrat avec l'IFREMER, en dimension 2 avec une interface plane inclinée. Cette méthode, utilisant des éléments finis carrés, n'est pas adaptée à la modélisation d'interfaces courbes, et nous avons donc étudié une deuxième méthode, duale de la première : on cherche la pression et le champ des vitesses du solide dans un espace de fonctions régulières. Cette méthode utilise, dans le milieu acoustique comme dans le milieu élastique, les éléments finis de S. Fauqueux et s'appuie sur :

- un calcul en vitesses  $H^1$  - contraintes  $L^2$  dans le solide.
- un calcul en vitesses  $L^2$  - pression  $H^1$  dans le fluide.

Nous avons implémenté, sur un code  $2D$  utilisant des éléments finis d'ordre 5 mis au point par S. Fauqueux au cours de sa thèse, la possibilité d'utiliser des pas de temps différents (1 pas dans le fluide pour 2 pas dans le solide). Pour une précision égale, les éléments finis d'ordre élevé requièrent un nombre de points par longueur d'onde beaucoup plus faible que les éléments finis  $Q1$  : les mailles sont beaucoup plus larges, l'inconvénient est que l'approximation des frontières courbes n'est pas très précise. Nous avons donc utilisé les éléments finis courbes de Marc Duruflé (voir section 6.3.3) qui permettent une meilleure prise en compte des surfaces courbes.

Nous avons également également mis au point un code de simulation  $3D$  à partir du code élastodynamique  $3D$  de S. Fauqueux. Sur la figure 6, nous illustrons l'utilisation de ce code par la propagation d'une onde dans un tronçon d'os.

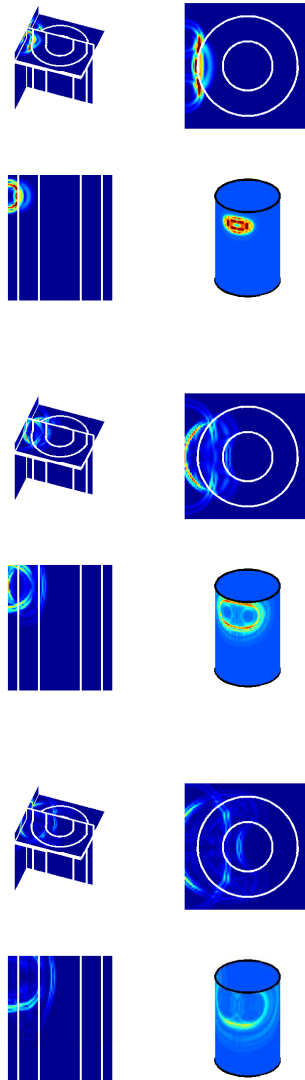


Figure 6. Propagation des ondes dans un os (3 instantanés consécutifs)

### 6.2.4.3. Méthodes de couplage éléments finis - potentiels retardés

**Participants:** Pascal Grob, Patrick Joly.

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la thèse de Pascal Grob, laquelle est financée par une bourse CIFRE avec le Centre Commun de Recherche d'EADS à Suresnes (équipe d'E. Duceau et I. Terrasse). Le sujet est la simulation numérique temporelle en vibro-acoustique: il s'agit d'étudier les vibrations et le rayonnement acoustique d'une coque, fermée ou non, immergée dans un fluide externe et contenant un fluide interne. L'objectif que nous poursuivons consiste à ramener tous les calculs sur la coque en :

- résolvant les équations de la mécanique (équations de coque) par éléments finis "classiques" en espace et différences finies en temps,
- résolvant les équations de l'acoustique par équations intégrales espace-temps et éléments finis de surface (méthode dite des potentiels retardés).

Dans cette optique, notre but étant avant tout de garantir la stabilité, la souplesse et la robustesse de l'algorithme final, l'idée consiste à s'appuyer sur les compétences développées au Projet Ondes en matière de "méthodes volumiques" et sur les méthodes variationnelles développés au CMAP (Ecole Polytechnique) pour la résolution des équations intégrales temporelles (travaux de T. Ha Duong, T. Abboud entre autres), lesquelles sont réputées (contrairement aux méthodes de collocation par exemple) conduire à des schémas inconditionnellement stables en temps. L'essentiel de la difficulté est alors reportée dans l'algorithme de couplage et notamment dans le processus de discrétisation en temps. En effet, s'il y a beaucoup de travaux dans le domaine fréquentiel (Costabel, De la Bourdonnaye, Levillain, Stephan, ...) le cas des problèmes transitoires n'a été que très peu abordé dans la littérature mathématique.

Nous avons pu démontrer qu'une stratégie mathématiquement saine (et pas si évidente a priori) consiste à utiliser un pas de temps double pour les fluides et s'appuyer sur des schémas centrés pour les équations de couplage. On peut alors établir des estimations a priori de type énergie qui garantissent la stabilité du schéma couplé sous des conditions qui ne sont pas affectées par le couplage fluide-structure : le schéma est inconditionnellement stable si on utilise un schéma implicite (approprié) pour la mécanique. Dans le cas contraire, il est seulement soumis à la condition CFL usuelle pour l'équation de coque.

Signalons pour terminer que ces idées peuvent s'étendre à la conception de méthodes de couplage éléments finis - équations intégrales pour la conception de conditions aux limites transparentes pour des problèmes de propagation en milieu non borné. Cette seconde orientation fera l'objet de développements futurs dès l'an prochain.

### 6.2.5. Développement en modes résonants

**Participants:** Christophe Hazard, François Loret.

Les travaux engagés dans le cadre de la thèse de François Loret (débutée en novembre 2000) sur l'utilisation de résonances pour le calcul numérique des mouvements d'une structure flottante se poursuivent (soutenance prévue d'ici juin 2004). Cette année a été l'occasion d'un renforcement de la collaboration avec Mike Meylan, enseignant chercheur dans une université d'Auckland (Nouvelle Zélande). Un article commun est sur le point d'être soumis au Journal of Fluid Mechanics. Il détaille deux formulations possibles du problème bidimensionnel de couplage entre l'océan et une structure élastique mince flottante: la difficulté essentielle consiste à trouver un cadre fonctionnel adéquat dans lequel la dynamique du système est décrite par un opérateur auto-adjoint, cette propriété étant la clef de voûte de la démarche. Par ailleurs François Loret vient de passer un mois à Auckland afin de comparer (et donc valider) les résultats de nos codes respectifs.

Les travaux que nous avons menés au cours de l'année ont été essentiellement consacrés à la mise en oeuvre numérique de la méthode, notamment à une technique de calcul en deux temps des résonances: un premier calcul reposant sur l'estimation d'intégrales de contour dans le plan complexe permet d'obtenir des valeurs approchées de toutes les résonances figurant à l'intérieur du contour; par un algorithme de Newton,

on peut alors affiner le calcul de chacune de ces résonances, et déterminer les modes associés (par puissance inverse). Les premiers résultats concernant la comparaison entre une onde transitoire et son développement en modes résonants arrivent enfin. Il semblent prometteurs, dans la mesure où l'asymptotique décrite par ce développement semble être atteinte en un temps très court, et l'intégrale sur la coupure issue de la fréquence nulle (qui reste un des points durs de la méthode) ne semble représenter qu'une faible contribution de l'onde transitoire. Mais ces résultats sont tout à fait partiels: il reste à "faire parler" les résultats numériques, autrement dit à tenter de cerner les limites de la méthode pour l'application qui nous intéresse ici.

### 6.2.6. Singularités en électromagnétisme

**Participants:** Patrick Ciarlet, Erell Jamelot, Beate Jung, Samir Kaddouri.

Outre les participants internes énumérés ci-dessus, les travaux présentés font l'objet d'une collaboration avec *Franck Assous* (Université de Bar-Ilan, Israël), *Jiwen He* (Université de Houston, USA), *Simon Labrunie* (Université de Nancy), *Jacques Segré* (CEA/Saclay), et *Jun Zou* de la Chinese University of Hong Kong (Chine).

Il s'agit de simuler numériquement le champ électromagnétique, lorsque le domaine de calcul présente des coins ou des arêtes rentrants. Deux voies de recherche sont actuellement explorées.

La première reprend les travaux antérieurs, présentés par exemple dans le Compte-Rendu d'Activités 2002, et est basée sur les techniques de *Compléments Singuliers*. Il s'agit, à la suite des travaux bidimensionnels sur le sujet, de passer à la simulation de champs électromagnétiques tridimensionnels. Cette activité regroupe tous les participants, et a fait l'objet des publications [10][9][23][24] cette année. Les travaux en cours portent d'une part sur le passage à des domaines de calcul prismatiques, et d'autre part à des domaines de calcul axisymétriques, avec des données quelconques.

La seconde consiste en une approximation directe du champ par Eléments Finis, sans recourir à un Complément Singulier. Pour cela, on utilise des résultats de densité *ad hoc*, décrits dans [22]. Cette activité est le sujet principal de la thèse (en cours) d'Erell Jamelot.

### 6.2.7. Modélisation de milieux complexes.

#### 6.2.7.1. Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires

**Participants:** Eliane Bécache, Abdelaaziz Ezziani, Patrick Joly.

Dans cette étude nous nous intéressons à la modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux absorbants. Ces milieux dissipent de l'énergie lorsqu'ils sont soumis à des déformations. Les origines de cette dissipation sont nombreuses et complexes et une modélisation physique qui tient compte de la totalité des causes serait très compliquée.

Nous considérons les modèles viscoélastiques linéaires. Ces modèles sont bien adaptés à la description d'une large classe de phénomènes dissipatifs (sous-sol, fond marins, os, polymères, ...). Cette année, nous avons généralisé les modèles étudiés précédemment en utilisant une superposition discrète de modèles élémentaires (modèle de Zener généralisé) :

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} - \sum_{i=1}^L \operatorname{div} \sigma_i = f, \\ \sigma_i + \tau_{0,i} \dot{\sigma}_i = C \varepsilon(u) + D_i \varepsilon(\dot{u}) \quad \forall i = 1, \dots, L, \\ + C.I. \end{cases} \quad (2)$$

Pour que le modèle des équations (2) garantisse la dissipation d'énergie (absorption des ondes), on suppose que les tenseurs  $D_i - \tau_{0,i}C$  sont définis positifs pour tout  $i = 1, \dots, L$ . Ces modèles permettent de fabriquer des matériaux à "facteur de qualité" (notion qui caractérise l'absorption des milieux) quasi-constant sur une large bande de fréquences, ainsi qu'on les rencontre en géophysique.

Du point de vue théorique nous avons établi des résultats mathématiques et numériques nouveaux pour le problème (2) en généralisant nos travaux concernant le problème élémentaire (voir RA'2002). Du point de vue pratique, nous avons adapté notre code de calcul à la prise en compte de ces nouveaux modèles problèmes. Ainsi, le calcul de la figure 7 a utilisé 3 lois élémentaires ( $L = 3$ ). Ces résultats ont fait l'objet d'une présentation à Waves 2003 Conférence (The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation) et d'un article soumis à Computational Geosciences.

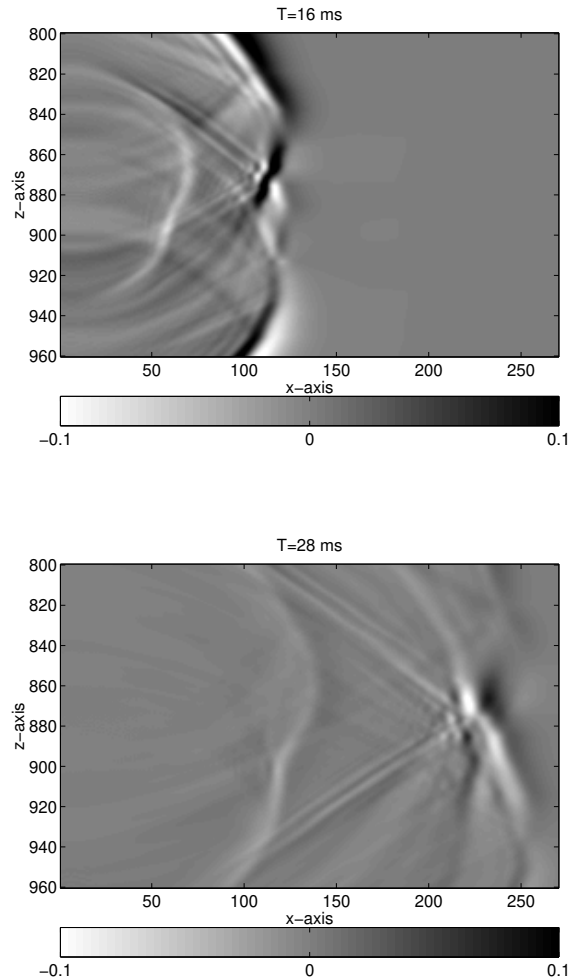


Figure 7. Propagation d'ondes dans un milieu viscoélastique hétérogène

#### 6.2.7.2. Propagation d'ondes dans les milieux poreux

**Participants:** Eliane Bécache, Abdelaaziz Ezziani, Patrick Joly.

Il s'agit un sujet de recherche nouveau qui va constituer la deuxième partie de la thèse de Abdelaâziz Ezziani. Ce travail est développé dans le cadre d'une collaboration avec la compagnie pétrolière SHELL (voir Contrat INRIA-SHELL).

De nombreux sous-sols ne peuvent être considérés comme des matériaux exclusivement solides. Ce sont souvent des milieux poreux, c'est à dire constitués de solides perforés par une multitude de petits trous (appelés pores) occupés par un fluide. C'est notamment souvent le cas des réservoirs pétroliers. Nous nous intéressons

à la modélisation de la propagation des ondes dans ces milieux par l'introduction de la loi de Biot (M. A. Biot *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid*. I. Low-frequency range. J. Acoust. Soc., 28:168-178, 1956) qui fait intervenir comme inconnues non seulement le champ de déplacement dans le solide mais aussi la pression dans le fluide. La principale caractéristique de ce modèle est qu'ils sont dissipatifs (dissipation d'énergie) et que aux (habituelles) ondes P et S dans un solide se rajoute une deuxième onde P "lente" (onde P de seconde espèce qu'on pourrait aussi qualifier de "fluide").

Pour traiter ce sujet, nous nous fixons les objectifs suivants :

- Mener une analyse mathématique du problème, en particulier étudier les phénomènes nouveaux liés à la présence de la porosité. Généraliser les formulations variationnelles utilisées dans le cas purement élastique à ces nouveaux modèles. Cette partie est maintenant bien avancée.
- Développer une méthode numérique (en adaptant celles déjà étudiées au sein du Projet lorsque il n'y a pas de porosité). Étudier les principales propriétés de la méthode numérique, en priorité la stabilité de la méthode, tant en milieu homogène qu'en milieu hétérogène.
- Adapter la méthode PML à la réalisation de frontières transparentes pour ces modèles et faire des simulations et des validations du code en dimension 2.

### 6.2.7.3. Le modèle de Galbrun en aéroacoustique

**Participants:** Kamel Berriri, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Patrick Joly.

L'équation de Galbrun, dont quelques propriétés sont rappelées dans le paragraphe 6.3.2, modélise la propagation de petites perturbations dans un fluide en mouvement. Sa résolution en régime fréquentiel a fait l'objet de plusieurs études (au sein du projet Ondes et dans d'autres équipes). En revanche, il n'existe pas, à notre connaissance, de résultats théoriques ou numériques, concernant l'équation de Galbrun transitoire. Nous avons abordé cette étude dans le cadre de la thèse de K. Berriri.

Nous avons pu montrer le caractère bien posé du problème transitoire lorsque l'écoulement est uniforme, par une utilisation combinée de la méthode de régularisation introduite au paragraphe 6.3.2 et du théorème de Hille-Yosida. En revanche, nous ne savons pas pour l'instant traiter le cas d'un écoulement plus général. Des simulations numériques ont confirmé dans le cas de l'écoulement uniforme le rôle essentiel joué par la régularisation lorsque le maillage n'est pas structuré. La résolution directe du problème sur maillage structuré semble également donner de bons résultats pour un écoulement parallèle, mais ceci n'est pas justifié théoriquement.

Les derniers résultats que nous avons obtenus concerne le calcul analytique, par la méthode de Cagniard-de-Hoop évoquée au paragraphe 6.4.1, de la fonction de Green transitoire du problème, en écoulement uniforme. La généralisation à un écoulement constant de part et d'autre d'une ligne de cisaillement est en cours.

## 6.3. Approches variationnelles pour le régime harmonique.

Pour les problèmes de propagation d'ondes linéarisés, on distingue classiquement l'approche fréquentielle de l'approche temporelle. Celle-ci consiste à calculer la solution du régime périodique établi (s'il existe). L'intérêt évident est que la solution recherchée ne dépend alors que des variables d'espace, car la dépendance en temps peut être factorisée. De plus, les résultats obtenus sont facilement interprétables et utilisables par l'ingénieur ou le physicien, s'il connaît la (ou les) fréquence de la source utilisée.

Bien que d'apparence simple (à première vue, les problèmes à résoudre ressemblent aux problèmes statiques), les équations harmoniques, dont l'exemple type est l'équation de Helmholtz, soulèvent de nombreuses difficultés. Il faut tout d'abord établir la condition de rayonnement à l'infini qui caractérise la solution physique *sortante* du problème puis écrire une formulation variationnelle du problème en domaine borné, que l'on peut finalement approcher par éléments finis. Cette formulation est généralement non coercive et non symétrique, et comprend des termes de bord non locaux, issus de représentations intégrales ou spectrales de la solution.

Nous apportons dans ce domaine deux types de contributions.

Nous avons d'une part étudié un problème physique original, qui pose des difficultés théoriques nouvelles : il s'agit de la propagation acoustique dans un fluide en écoulement. C'est l'objet des deux premiers paragraphes. En particulier, le couplage entre des phénomènes d'ondes et de transport rend difficile l'application directe des concepts développés pour les ondes.

Nous nous intéressons d'autre part au développement de méthodes numériques d'ordre élevé (méthode de Galerkin discontinue, éléments finis courbes, couplage éléments finis et représentations intégrales) et d'algorithmes de résolution performants pour résoudre les problèmes harmoniques classiques. C'est l'objet des trois derniers paragraphes.

### 6.3.1. Diffraction acoustique par des plaques

**Participants:** Stéphane Job, Eric Lunéville, Jean-François Mercier.

Nous nous sommes intéressés à la diffraction acoustique par une plaque en présence d'un écoulement de nombre de Mach  $M$  dans un conduit. Le cas avec écoulement n'est pas une simple extension du cas d'un fluide au repos : lorsque  $M \neq 0$ , l'interaction entre l'onde acoustique incidente et l'écoulement porteur donne naissance à un sillage d'amplitude  $F$  derrière la plaque. Le comportement du sillage lorsque la vitesse de l'écoulement diminue devient singulier : oscillations horizontales de très petites longueurs d'onde et extension verticale très fine. Ce comportement pose des problèmes numériques (nécessité d'un maillage très fin près du sillage) et pose des questions théoriques délicates sur la convergence du problème de diffraction pour  $M \rightarrow 0$ . En effet ce comportement est surprenant car il n'existe pas de sillage lorsque  $M = 0$ .

- Amplitude du sillage pour  $M \rightarrow 0$   
Nous avons développé dans le code MELINA une méthode numérique fondée sur une approximation par éléments finis permettant d'accéder aux variations de  $F$  pour les petites valeurs de  $M$  sans raffiner excessivement le maillage. L'amplitude du sillage est obtenue en appliquant la condition de Kutta-Joukowski au bord de fuite de la plaque (vitesse des perturbations acoustiques finie), et nous avons prouvé que  $F$  varie comme  $\sqrt{M}$  lorsque la vitesse de l'écoulement est faible. Ce résultat avait été obtenu semi-analytiquement dans le cas d'une plaque semi-infinie, par une méthode de Wiener-Hopf. Nous avons donc montré que ce résultat se généralise à une plaque de longueur finie.
- Interaction entre deux plaques alignées  
Cette configuration fait apparaître un nouveau phénomène : l'incidence d'un sillage sur le bord d'attaque d'une plaque. Cette interaction pose des problèmes de modélisation délicats, car le sillage ne se contente pas de "glisser" sur la plaque. Il existe différents modèles pour la condition aux limites sur la plaque aval :
  - i. une condition de type paroi rigide (Neumann homogène).
  - ii. une condition prenant en compte l'instabilité de Tollmien-Schlichting qui se développe dans la couche limite visqueuse de Blasius présente autour de la plaque (Neumann non homogène).

Nous avons résolu numériquement ces modèles:

- Cas Neumann homogène:  
La figure 8 représente le cas d'une condition de plaque rigide utilisée sur la plaque aval. Les deux sillages sont obtenus avec des amplitudes équivalentes.
- Cas Neumann non homogène:  
Pour les mêmes paramètres que le paragraphe précédent, la figure 9 considère une condition de couche limite instable sur la plaque aval.  
On voit que dans ce cas le potentiel des vitesses est intense sur  $\Gamma_2$ , les amplitudes des deux sillages restant du même ordre de grandeur. En l'absence de résultat expérimental il est difficile de trancher entre les deux modélisations.



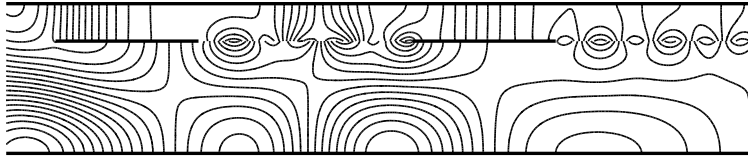


Figure 8. Isolignes de la partie réelle du potentiel des vitesses en présence de deux plaques alignées de longueur  $L = 4$ , pour  $M = 0.3$ , un conduit de hauteur  $h = 4$  et une fréquence de l'onde incidente  $k = \omega/c = 1$  : cas Neumann homogène sur  $\Gamma_2$

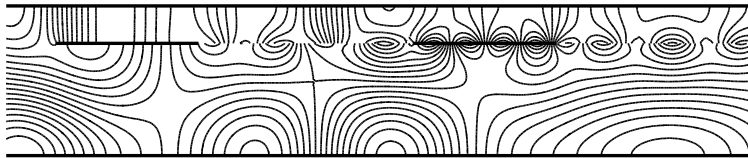


Figure 9. Cas Neumann non homogène sur  $\Gamma_2$

### 6.3.2. Méthodes de régularisation pour l'aéroacoustique

**Participants:** Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet- Ben Dhia, Eve-Marie Duclairoir, Guillaume Legendre, Jean-François Mercier.

Guillaume Legendre (qui a soutenu sa thèse le 29 septembre 2003) et Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia ont poursuivi leurs travaux sur la modélisation du rayonnement d'ondes acoustiques harmoniques en temps dans un milieu en écoulement.

Rappelons que nous travaillons sur l'équation dite de Galbrun et non sur les équations d'Euler linéarisées. Cette équation linéaire décrit la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement quelconque. Elle utilise comme variable la perturbation de déplacement lagrangien, qui représente le déplacement d'une particule fluide dans un écoulement perturbé par rapport à sa position dans l'écoulement non perturbé, et s'exprime en fonctions des coordonnées Eulériennes. Cette équation constitue une alternative séduisante aux équations d'Euler linéarisées qui sont utilisées classiquement car elle présente de nombreuses analogies avec d'autres modèles de propagation d'ondes (en particulier avec les équations de Maxwell).

Les tentatives de résolution de cette équation par des éléments finis usuels de Lagrange ayant mis en évidence des instabilités numériques analogues à celles que l'on observe pour les équations de Maxwell, nous avons proposé ces dernières années, en collaboration avec Eric Lunéville, d'appliquer à l'équation de Galbrun la méthode dite de régularisation. Il s'agit en quelque sorte de rétablir le caractère elliptique de l'équation en exploitant une relation vérifiée par le rotationnel du champ de déplacement.

Sur un problème académique posé dans un domaine rectangulaire borné (une portion de conduit) et pour un écoulement cisailé, nous avons montré que la formulation régularisée est bien posée (sauf pour des fréquences exceptionnelles) et que l'on peut l'approcher par des éléments finis nodaux usuels. La méthode avait déjà été mise en oeuvre dans le code MELINA pour un écoulement uniforme ou constant par morceaux dans un conduit bi-dimensionnel.

L'extension au cas d'un écoulement cisailé de profil variable a fait cette année l'objet du stage de DEA d'Eve-Marie Duclairoir en 2003, encadré par Jean-François Mercier.

Les résultats ci-dessus concernaient un problème académique où l'on supposait connue la solution sur les frontières artificielles bornant la portion de conduit. Nous nous sommes ensuite intéressés à la résolution d'un problème plus "physique", à savoir le calcul du champ rayonné par une source dans un conduit infini contenant un fluide en écoulement uniforme. La difficulté est alors d'écrire les conditions que doit satisfaire à l'infini la solution  $u$  de l'équation de Galbrun, puis de trouver une méthode numérique pour approcher cette solution.

En utilisant un procédé mathématique dit “d’absorption limite” (consistant à faire tendre vers 0 la partie imaginaire d’une fréquence supposée complexe), nous avons exhibé ces conditions à l’infini : on montre que l’onde acoustique (la divergence du déplacement) doit satisfaire une condition de rayonnement qui s’exprime à l’aide de sa décomposition modale, alors que la partie tourbillonnaire (le rotationnel du déplacement) doit simplement être supposée nulle en amont de la source.

Nous avons finalement montré que l’utilisation conjointe de la méthode des PML, dont il est question dans le paragraphe 6.4.2, et de la technique de régularisation, permettait d’approcher numériquement cette solution. Nous présentons les premiers résultats de simulation avec une source. Celle-ci est placée au centre du domaine. La figure 10 correspond au cas d’une source irrotationnelle et la figure 11 au cas d’une source rotationnelle. Dans ce second cas, on observe le sillage hydrodynamique produit par la source.

### 6.3.3. Méthodes d’ordre élevé

#### Méthodes d’éléments mixtes et Galerkin discontinues

**Participants:** Gary Cohen, Marc Duruflé.

Les travaux sur les méthodes d’ordre élevé pour la résolution des équations de Maxwell se sont développés dans deux directions.

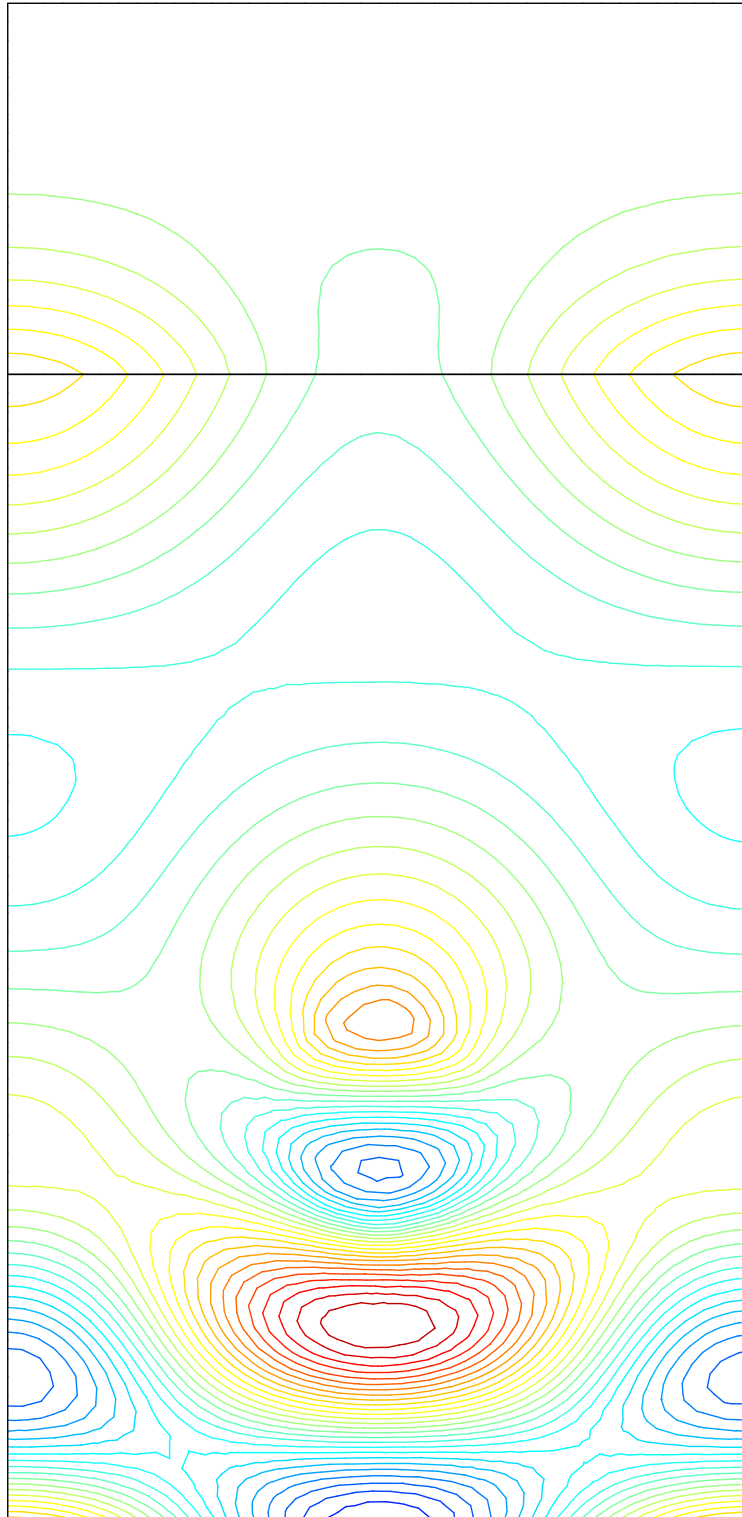
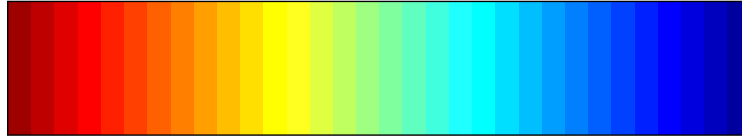
Un choix “classique” pour la résolution des équations de Maxwell consiste à considérer la formulation du second ordre en  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$  et de chercher l’inconnue dans l’espace  $H(\text{rot})$ . L’approximation de cet espace se fait classiquement par des éléments finis d’arête.

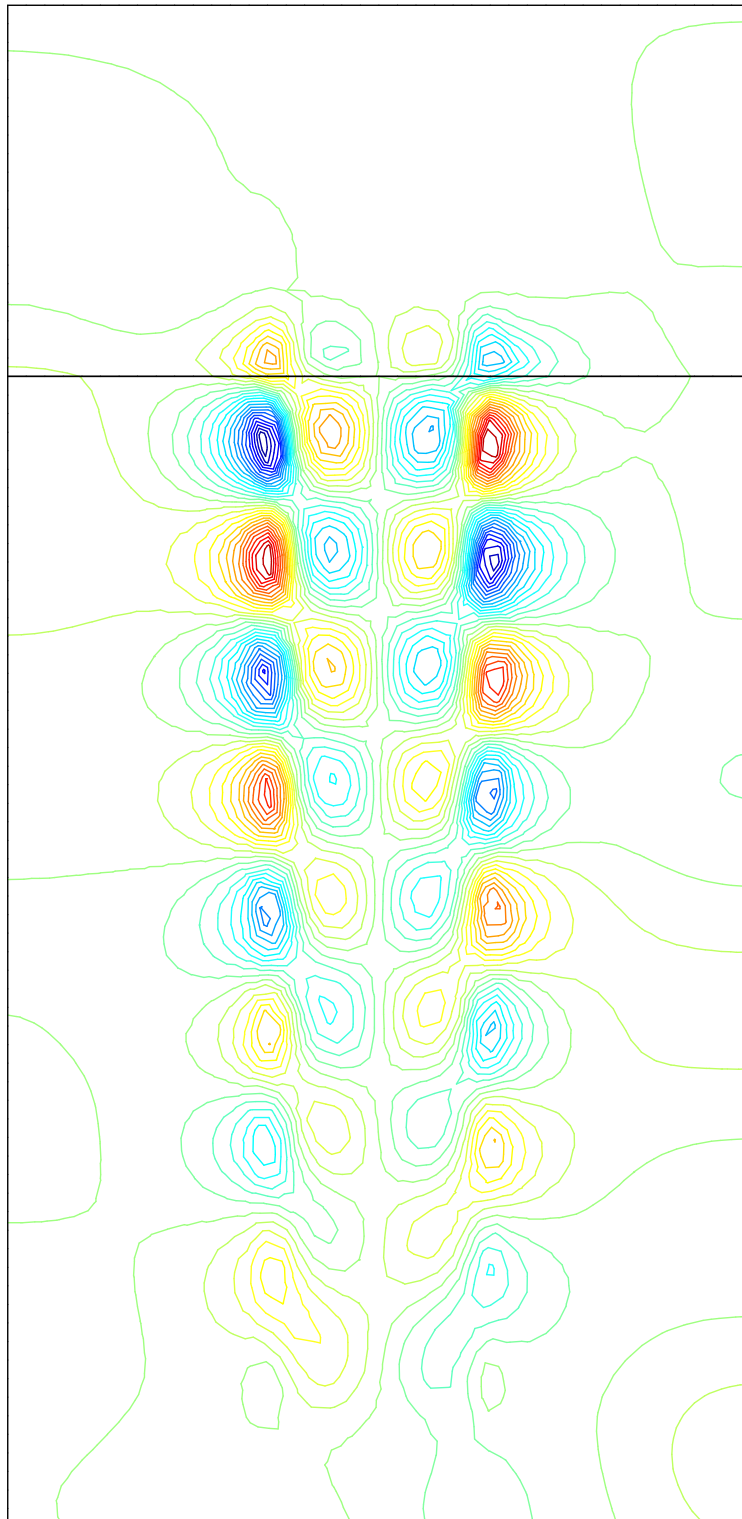
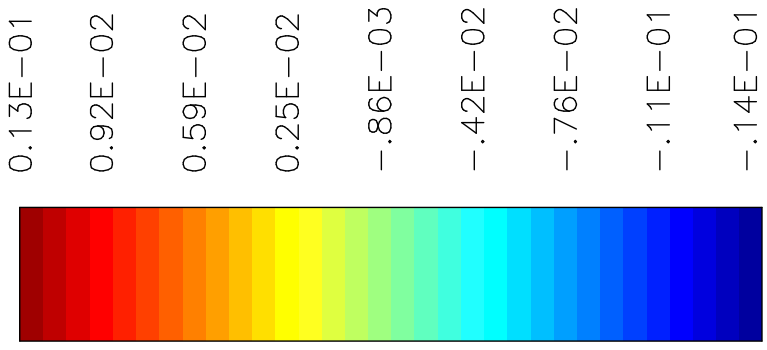
Nous avons d’abord opté pour une approche alternative qui a fait ses preuves en régime transitoire et s’appuie sur la formulation du premier ordre du système de Maxwell. Cette approche consiste à utiliser des éléments finis mixtes quadrilatéraux ou hexaédriques pour l’approximation de l’espace  $H(\text{rot}) \times L^2$  apparaissant dans cette formulation. Ces éléments, qui font notamment appel à la seconde famille d’éléments finis  $H(\text{rot})$  de Nédélec, ont été introduits par G. Cohen et P. Monk pour les équations de Maxwell transitoires. Ils permettent en particulier une condensation de masse si on utilise des formules de quadrature numériques de Gauss-Lobatto. En régime harmonique, on peut espérer exploiter cette propriété lorsqu’on utilise des algorithmes itératifs pour la résolution du système linéaire. Cette approche conduit en outre à une factorisation de la matrice de rigidité, ce qui permet de réaliser un important gain de stockage ainsi qu’un substantiel gain de temps pour le calcul d’un produit matrice vecteur, toujours à condition d’utiliser une méthode itérative.

Toutefois, à la lumière de nombreuses expériences numériques, il s’est avéré que l’utilisation de ces méthodes n’était intéressante qu’en maillage structuré. Dans le cas de maillages quelconques, on observe sur la solution numérique, l’apparition d’oscillations indésirables que nous avons appelées modes “parasites”. Ce phénomène, dont nous n’avons pas encore de justification théorique, est clairement illustré par la figure 13 où on cherche à calculer la diffraction d’une onde plane par une hétérogénéité locale de forme carrée. Heuristiquement, nous pensons que ce phénomène est dû au fait qu’à certains noeuds du maillage, il y a trop de degrés de liberté pour représenter un seul champ.

Pour pallier ce défaut, nous nous sommes tournés vers les méthodes de Galerkin discontinues. L’idée est de garder les mêmes représentations locales (typiquement  $Q_k$ ) des champs, mais de relaxer les conditions de continuité aux interfaces entre les éléments. Les conditions de continuité des quantités physiques sont réintroduites au niveau de la formulation Galerkin discontinue (apparition de termes de saut à travers les interfaces). On garde les bonnes propriétés structurelles des matrices de masse et de rigidité mais on est amené à augmenter le nombre de degrés de liberté par rapport aux éléments finis présentés plus haut. Par ailleurs, on perd le caractère symétrique du système linéaire, ce qui exclut l’utilisation de méthodes itératives, type COCG (Conjugate Orthogonal Conjugate Gradient) ou du BICGCR (BiConjugate Gradient Conjugate Residual). Pour l’instant, cette discrétisation a été testée sur des cas où l’utilisation de méthodes directes pour la résolution du système linéaire était possible. Le point le plus positif est que les modes parasites observés avec les éléments finis mixtes disparaissent comme on le voit sur la figure 13.

0.73E-03  
0.54E-03  
0.35E-03  
0.16E-03  
-.34E-04  
-.23E-03  
-.42E-03  
-.61E-03  
-.80E-03





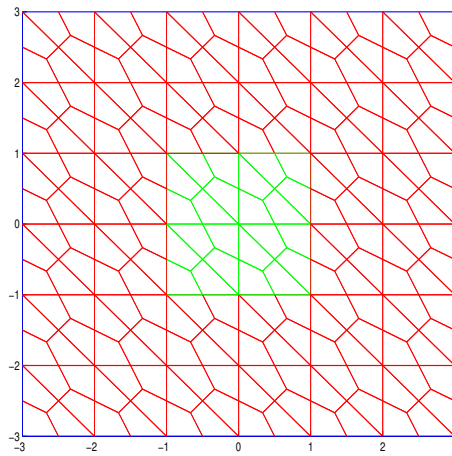
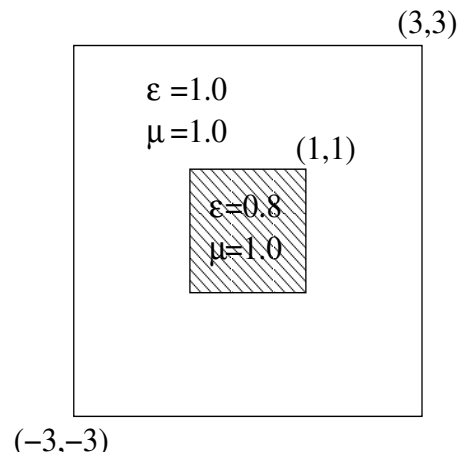


Figure 12. Etude de la diffraction d'un carré diélectrique. A droite, maillage utilisé pour les simulations.

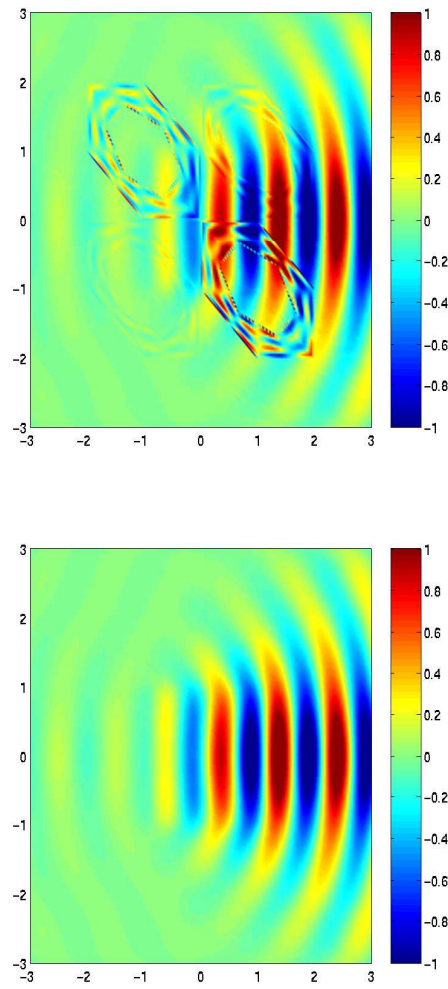


Figure 13. A gauche, solution numérique avec des éléments finis d'arête  $Q_5$  avec condensation de masse. A droite, solution numérique avec une méthode Galerkin discontinue  $Q_5$  avec condensation de masse.

L'un des intérêts potentiels de ces types de méthode est de permettre d'augmenter "localement" l'ordre des éléments finis, sans se préoccuper des problèmes de raccord entre les mailles. L'exploitation de cette propriété fera l'objet de travaux futurs.

#### 6.3.3.1. *Eléments finis courbes*

**Participants:** Marc Duruflé, Marc Lenoir.

La recherche de l'efficacité dans la mise en œuvre des éléments finis nécessite de prendre en considération des questions pratiques telle l'implémentation d'éléments finis courbes d'ordre élevé réalisant divers types de conformité.

Un travail récent de Marc Lenoir a permis de décrire une structure autorisant l'implémentation de n'importe quel élément fini et de générer de façon systématique des éléments finis courbes conformes à partir d'un élément de référence. La difficulté consiste en fait à exhiber dans un cadre général (faisant appel à l'algèbre tensorielle) un mécanisme systématique réalisant automatiquement les conditions de conformité lors d'un maillage par des éléments finis courbes, à partir d'hypothèses relatives uniquement à l'élément de référence. Lors de l'utilisation d'éléments finis d'ordre élevé pour la résolution de l'équation de Helmholtz tels ceux utilisés par Marc Duruflé dans le cadre de sa thèse, il apparaît nécessaire de prendre en compte de manière fine la géométrie du domaine où est résolu le problème physique. En effet, quand l'ordre est élevé, on a peu de mailles (une maille par longueur d'onde pour Q7). Dans le cas simple de la diffraction par un disque diélectrique, le gain de précision apporté par l'ordre élevé est annulé par une mauvaise approximation de la géométrie. On a donc développé une méthodologie pour construire des éléments finis courbes sur des quadrangles/hexaèdres, qu'on a appliquée à l'équation de Helmholtz et aux équations de Maxwell en régime harmonique en 2-D. Dans le cas du disque, on note la convergence vers la solution quand on augmente l'ordre à maillage sous-jacent fixé ; les résultats sont globalement très probants. Des études numériques et théoriques supplémentaires sont en projet.

#### 6.3.4. *Couplage Equations intégrales - Eléments finis volumiques*

**Participants:** Francis Collino, Marc Duruflé.

Lorsqu'on étudie la diffraction d'ondes électromagnétiques, par des obstacles par exemple, on est naturellement amené à travailler dans un domaine non borné. Afin de résoudre numériquement les équations de Maxwell en régime harmonique par éléments finis volumiques, nous avons besoin de borner le domaine de manière artificielle. Les techniques d'équations intégrales permettent d'écrire des conditions transparentes explicites (mais non locales). Une classe de méthodes consiste à écrire une telle condition sur la frontière extérieure du domaine de calcul. Une autre catégorie de méthode, qui a fait l'objet de nos travaux cette année, fait appel à deux frontières, une frontière "intérieure" et une frontière "extérieure", délimitant une région homogène du domaine de propagation. Pour écrire une condition transparente, l'idée consiste à écrire que le champ électrique sur la frontière extérieure coïncide avec sa représentation intégrale à partir des champs électriques et magnétiques sur la frontière intérieure. Cette méthode a été proposée par C. Hazard et M. Lenoir et analysée par G. Hsiao et P. Monk. Elle présente l'avantage d'éviter le traitement numérique des singularités du noyau de Green.

La condition aux limites obtenue étant non-locale, pour éviter d'inverser une matrice comportant un bloc plein, il est naturel de faire appel à une méthode itérative de type point fixe, qui rejette la partie non-locale au second membre des itérations de point fixe. Cette idée est en particulier développée par N. Gmati du LAMSIN (Tunis), qui fait appel à l'algorithme de Jacobi. On observe, et cela peut être démontré dans certains cas simples, que cet algorithme ne converge que si les frontières extérieure et intérieure sont suffisamment éloignées l'une de l'autre.

Notre apport a consisté d'une part à inclure des éléments finis d'ordre élevé dans ce type d'approche, d'autre part à utiliser des algorithmes itératifs plus sophistiqués que l'algorithme de Jacobi pour la résolution du point fixe. Les conclusions de nos résultats numériques sont les suivantes :

- Les algorithmes itératifs GMRES(10) ou COCG convergent même lorsque l’algorithme de Jacobi ne converge pas (i.e. même si les frontières sont proches l’une de l’autre), et convergent environ deux fois plus rapidement lorsque Jacobi converge.
- La comparaison avec des méthodes directes nous a permis d’une part de valider nos résultats en termes de précision et d’autre part d’illustrer l’intérêt pratique de l’utilisation de méthodes itératives notamment en termes de stockage informatique.
- Le passage aux éléments finis d’ordre élevé n’affecte pas la vitesse de convergence de l’algorithme et il permet de diminuer le coût lié aux formules de représentation intégrale.

## 6.4. Conditions aux limites transparentes

Les problèmes de propagation d’ondes sont souvent posés en domaine non borné et une des questions cruciales pour leur résolution numérique, que ce soit pour des problèmes posés en régime transitoire ou en régime fréquentiel, est de savoir borner artificiellement le domaine de calcul. Les travaux développés pour répondre à cette question suivent essentiellement deux approches.

La première consiste à borner le domaine de calcul par des frontières artificielles sur lesquelles on écrit une condition aux limites dite transparente, c’est à dire une condition exacte qui prend en compte le comportement à l’infini de l’onde et qui la laisse passer sans réflexion. Cette condition peut en général s’exprimer à l’aide de l’opérateur de Dirichlet-Neumann. En régime harmonique il s’agit d’une condition qui, bien que non locale sur la frontière absorbante, est souvent utilisée en pratique pour un calcul par éléments finis. Par contre en régime transitoire cette condition devient également non locale en temps et il est alors souvent utile d’en définir des approximations locales, (voir néanmoins les travaux sur le couplage avec les méthodes de potentiels retardés, cf section 6.2.4) appelées conditions aux limites absorbantes (CLA).

La deuxième approche consiste à entourer le domaine de calcul d’un milieu artificiel dans lequel les ondes sont atténuées, appelé couches absorbantes. Cette technique est en fait antérieure à celle des CLA et consistait avant 1994 à définir dans ces couches un modèle absorbant physique, ce qui donnait naissance à une réflexion parasite entre le domaine physique et la couche. Depuis 1994, Bérenger a introduit, pour les équations de Maxwell en régime transitoire, un nouveau modèle de couches dites parfaitement adaptées (en anglais Perfectly Matched Layers, PML) car aucune réflexion n’est créée à l’entrée dans la couche. Depuis les PML ont été largement utilisées, étendues à d’autres équations, étudiées etc... surtout en régime transitoire et un peu en régime harmonique.

Nos travaux concernent ces deux approches, et sont essentiellement de deux natures:

- le développement et l’analyse de nouveaux types de conditions aux limites, par exemple pour des problèmes pour lesquels il n’existait pas d’alternative (PML en fréquentiel pour Galbrun, PML et éléments finis localisés pour les guides d’ondes élastiques) ou pour lesquels les alternatives n’étaient pas complètement satisfaisantes (PML pour l’acoustique en écoulement transitoire).
- Un deuxième type de contributions est plus de nature à apporter un éclairage nouveau sur des méthodes classiques ou déjà existantes (études des CLA et des PML par la méthode de Cagniard de Hoop).

Notons que, même si la problématique de départ est la même pour les problèmes en régime harmonique ou transitoire, les questions soulevées ne sont pas identiques. Cette différence est bien illustrée par nos travaux sur l’acoustique en écoulement en régimes transitoire et harmonique. Dans le premier cas, les PML “classiques” conduisent à des instabilités, ce qui nous a conduits à introduire un nouveau modèle de couches. Alors que dans le deuxième cas, le modèle classique permet d’obtenir une bonne approximation de la solution.



### 6.4.1. Conditions transparentes en régime transitoire

#### Analyse des conditions de frontière artificielle et des couches absorbantes PML par la méthode de Cagniard-de Hoop.

**Participants:** Julien Diaz, Patrick Joly.

A l'occasion de notre participation au GDR Ultrasons (cf. chapitre 8.1) nous avons eu l'occasion d'apprendre la méthode de Cagniard-de Hoop. Il s'agit d'une méthode qui permet de calculer la solution analytique, en régime transitoire, de problèmes de propagation d'ondes dans des domaines invariants par translation dans une ou deux directions de l'espace. Cette méthode, basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier-Laplace établit de façon élégante un lien direct entre la représentation en ondes planes et la solution en temps. Nous avons assez vite réalisé que cette méthode fournissait un nouvel outil pour l'analyse théorique des Conditions Limites Absorbantes et des Couches Absorbantes PML. Nous avons traité en détail le cas de l'équation des ondes 2D et du problème de la réduction à un demi-espace. Nous avons, tant pour les conditions d'ordre élevé d'Engquist-Majda que pour les couches PML de Bérenger, établi une expression explicite de la fonction de Green du problème du demi-espace. Cela nous a permis d'obtenir des estimations d'erreur dans le cas d'une onde cylindrique émise par une source ponctuelle. Les résultats de l'analyse asymptotique sont les suivants :

- pour les conditions d'Engquist-Majda, le paramètre d'approximation est l'ordre  $N$  (entier positif destiné à tendre vers l'infini) de la condition au bord. On démontre, en particulier, que l'erreur (l'onde réfléchi) converge exponentiellement vite vers 0 sur tout intervalle de temps fini et ce en norme  $L_\infty$  en espace et en temps. L'estimation permet également d'évaluer l'influence de la distance de la source à la frontière absorbante. Ce résultat est nouveau et constitue une amélioration substantielle de ceux initialement obtenus par Engquist-Majda, il démontre en particulier qu'il n'est pas nécessaire de jouer sur la distance source-bord absorbant pour obtenir un résultat de convergence.
- pour les couches PML de Bérenger on peut considérer qu'il y a 2 paramètres d'approximation, tous 2 réels positifs et destinés à tendre vers l'infini : le coefficient d'absorption  $\sigma$  (plus précisément sa valeur moyenne) dans la couche absorbante, et la longueur  $L$  de celle-ci. Notre résultat montre que l'erreur (toujours mesurée en norme  $L_\infty$  espace temps sur un intervalle de temps borné) converge exponentiellement vers 0 quand  $\sigma$  et  $L$  tendent vers l'infini. L'influence de la distance de la source à la couche absorbante peut aussi être analysée avec précision.

Ces résultats ont été présentés au workshop sur la méthode de Cagniard-de Hoop à Lille et aux journées du GDR à Aussois.

#### Analyse de stabilité des modèles PML.

**Participants:** Eliane Bécache, Sandrine Fauqueux, Patrick Joly.

Nous avons poursuivi nos travaux sur l'étude mathématique des modèles PML et plus précisément sur la stabilité des problèmes d'évolution associés. Ce thème a constitué une des parties principale de l'habilitation d'E. Bécache [5], soutenue en Mai 2003. En ce qui concerne les équations de Maxwell, beaucoup d'idées fausses ou imprécises circulent sur la stabilité de tel ou tel "nouveau" modèle de PML et le mémoire d'HDR d'E. Bécache fait le point sur quelques uns d'entre eux. Une des conclusions est que tous les modèles PML existants sont stables au sens où ils ne peuvent pas générer de solutions exponentiellement croissantes en temps. Par contre, les modèles "standard" de PML "non-splittés" peuvent générer non pas de "vraies instabilités" mais des comportements linéairement croissants en temps, ce qui finit aux temps longs par polluer la solution dans le domaine de calcul, comme cela a été mis en évidence dans un article de Abarbanel & Gottlieb & Hesthaven (surtout sensible dans des guides allongés par exemple). C'est ce qui nous a conduit avec P. Petropoulos et S. Gedney à proposer un modèle un peu plus coûteux mais pour lequel la solution est uniformément bornée en temps [32]. Notons que le modèle initial de Bérenger a l'inconvénient d'être basé sur une décomposition des opérateurs, mais l'avantage de ne pas permettre non plus de croissance linéaire (en

tous cas dans un milieu PML avec un facteur d'amortissement donné et constant). Les instabilités qui ont pu être observées dans ce cas doivent donc sans doute être plutôt attribuées au schéma utilisé.

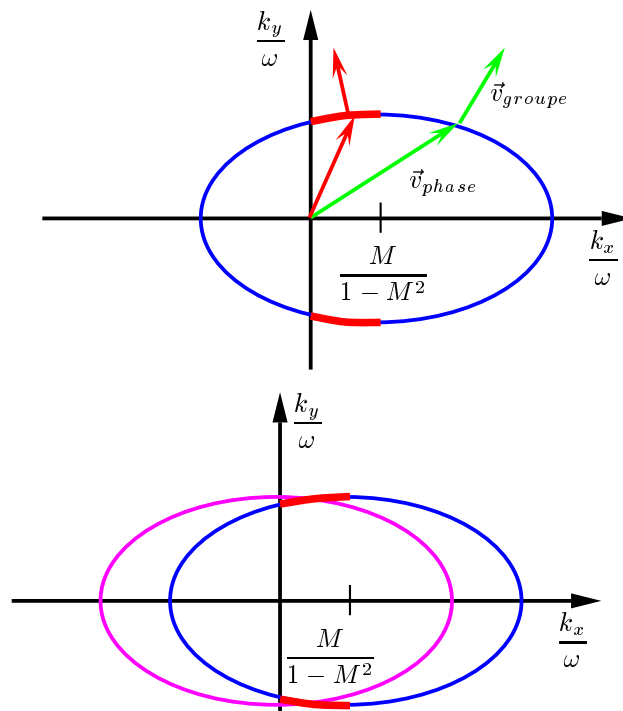
Pour des modèles plus généraux, rappelons ici que les PML standard ne donnent jamais naissance à des problèmes d'évolution mal posés mais peuvent générer des instabilités de type exponentiel, comme c'est effectivement le cas pour certains milieux élastiques anisotropes ou pour les équations d'Euler linéarisées (voir paragraphe suivant).

### Étude des PML pour l'acoustique en écoulement

**Participants:** Julien Diaz, Patrick Joly.

Nous étudions depuis 2 ans les PML pour l'acoustique en écoulement. Il est maintenant bien connu que les PML classiques sont instables pour ce problème et que ces instabilités peuvent être caractérisées géométriquement à partir des courbes de lenteur : la figure 14 représente la courbe de lenteur des ondes advectives dans un écoulement subsonique (nombre de Mach  $M < 1$ ), c'est une ellipse centrée en  $\frac{M}{1-M^2}$ . Les ondes qui génèrent des instabilités dans une PML verticale sont celles dont la première composante du vecteur vitesse de phase a un signe opposé à la première composante du vecteur vitesse de groupe. Nous avons représenté en rouge sur la figure 14 la partie de la courbe de lenteur associée à ces instabilités. Dans cette zone les solutions  $\omega$  de l'équation de dispersion sont à partie imaginaire négative, ce qui entraîne une explosion exponentielle en temps.

Nous avons étudié l'année dernière un nouveau modèle PML basé sur l'utilisation d'un changement de variable de type  $\tilde{p}(t) = p(t - \frac{M}{1-M^2} x)$ , ( $M$  étant le nombre de Mach) dans la PML qui transforme la courbe de lenteur du problème initial en une ellipse centrée en 0 (en magenta sur la figure 14).



Courbe de lenteur, avant (en bleu) et après (en magenta) le changement de variable  
 Figure 14. Courbe de lenteur, acoustique avec écoulement

Ce nouveau modèle est stable et parfaitement adapté (pas de réflexion à l'interface Domaine de Calcul/PML) pour les écoulements subsoniques uniformes orthogonaux à la couche absorbante. Nous l'avons étendu cette année au cas des écoulements non-uniformes mais la couche absorbante perd alors son caractère parfaitement adaptée, néanmoins les expériences numériques réalisées montre que la réflexion est faible.

Nous avons également adapté ce modèle au cas des écoulements obliques. La courbe de lenteur est alors une ellipse dont les axes ne sont pas parallèles aux axes de coordonnées (voir figure 15).

Pour stabiliser la PML, l'idée est d'utiliser successivement 2 changements de variables, le premier,

$$p^*(t) = p\left(t - \frac{M_x}{1 - M_x^2} x - \frac{M_y}{1 - M_y^2} y\right)$$

(avec  $M_x$  et  $M_y$  les composantes en  $x$  et en  $y$  de l'écoulement) permet de translater le centre de l'ellipse en 0 (voir figure 15) et le deuxième

$$\tilde{p}(x, y, t) = p^*\left(x, y + \frac{M_x M_y}{1 - M_x^2} x, t\right)$$

permet de faire coïncider les axes de l'ellipse avec les axes de coordonnées  $\frac{k_x}{\omega}$  et  $\frac{k_y}{\omega}$  (voir figure 15). Contrairement au cas de l'écoulement parallèle à un des axes, ce modèle est instable pour les ondes convectives et ne peut donc être appliquée à la formulation en vitesse-pression, ce cas restant un problème ouvert.

## 6.4.2. Conditions transparentes en régime harmonique

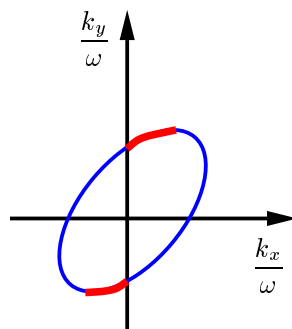
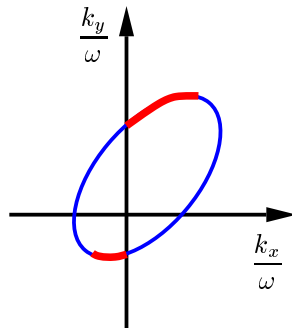
### 6.4.2.1. PML dans un guide d'ondes en régime fréquentiel

**Participants:** Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet Ben-Dhia, Guillaume Legendre, Saïd Mohammed.

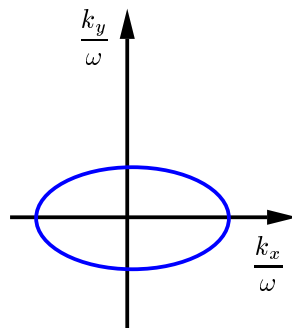
Les travaux que nous avons menés concernent l'utilisation des PML pour résoudre des problèmes de diffraction ou de rayonnement posés dans un guide d'ondes en régime périodique établi. La technique habituellement mise en oeuvre à cet effet repose sur le développement modal de la solution à l'extérieur du domaine de calcul. Or il est apparu que cette technique présentait des difficultés techniques (de mise en oeuvre) et théoriques importantes dans le cas de problèmes vectoriels tels que l'acoustique en écoulement (équation de Galbrun), l'élastodynamique et l'électromagnétisme. Ceci nous a conduit à nous tourner vers la méthode des PML qui est d'une grande simplicité de mise en oeuvre. Cette méthode consiste à prolonger le domaine de calcul par un domaine fictif dans lequel l'équation du problème est modifiée; la modification, qui consiste simplement en un changement de variables complexe du type  $X = \alpha x$  avec  $\alpha$  complexe, permet (généralement) de rendre le milieu fictif à la fois absorbant et parfaitement adapté au milieu physique, au sens où aucune réflexion ne se produit à l'interface.

- **PML pour l'acoustique en écoulement.** La première étude que nous avons menée concerne le problème scalaire de la propagation acoustique dans un conduit contenant un fluide en écoulement uniforme. Il est bien connu qu'il peut alors exister des ondes dite "inverses" dont les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés. Ces ondes ont le mauvais goût de devenir instables (exponentiellement croissantes) dans les couches PML au lieu d'y être absorbées. Le résultat inattendu que nous avons observé numériquement et expliqué théoriquement est que ce comportement ne nuit aucunement à l'efficacité des PML pour le problème fréquentiel (contrairement au problème transitoire). Une analyse détaillée des performances de la méthode en fonction du paramètre  $\alpha$  a été menée.

Nous avons ensuite étendu la méthode au cas vectoriel de l'équation de Galbrun, qui prend en compte à la fois les ondes acoustiques et la convection des tourbillons. On a ainsi pu observer que la différence de longueurs d'onde des deux phénomènes (surtout à faible Mach) peut réduire considérablement la plage des coefficients  $\alpha$  satisfaisants.



Courbe de lenteur, après le premier changement de variable



Courbe de lenteur après le deuxième changement de variable

Figure 15. Courbe de lenteur, écoulement oblique

Dans les deux cas, scalaires et vectoriels, la convergence de la méthode a été démontrée et des estimations d'erreurs ont été établies.

- **PML pour un guide d'ondes élastique.** L'étude la plus récente concerne l'application de la méthode au calcul bidimensionnel de la diffraction d'une onde de Lamb par un défaut localisé dans une plaque élastique homogène et isotrope. Une formulation originale a été implémentée, avec pour inconnue le champ total au voisinage du défaut et le champ diffracté dans les couches absorbantes. Contrairement au cas de l'acoustique en écoulement, la présence de modes inverses à certaines fréquences pose cette fois problème : en effet, la méthode converge alors vers une solution des équations qui n'est pas la solution physique (l'onde diffractée n'étant pas "sortante"). Le traitement de ces modes est une question ouverte.

#### Éléments finis localisés.

**Participants:** Eric Lunéville, Xavier Mourillon.

La simulation des phénomènes de propagation d'ondes dans des guides d'ondes fermés, assimilés à des structures infinies dans leur direction de propagation, requiert l'introduction de conditions particulières sur des frontières artificielles destinées à borner le domaine de calcul. La faculté de ces conditions à laisser "sortir" exactement les ondes est fondamentale et ce, d'autant plus, en régime harmonique. Il existe plusieurs possibilités : couche absorbante, couche PML, condition locale et condition parfaitement transparente (non locale). On s'intéresse à cette dernière catégorie de conditions, qui dans une certaine mesure, sont exactes. En effet, elles s'appuient sur un opérateur prenant en compte la résolution du problème à l'infini via une représentation intégrale ou une représentation spectrale. Dans le cas des guides fermés, les techniques à base de représentation spectrale reliées aux modes du guide sont assez séduisantes du point de vue de l'efficacité. Elles ont été développées depuis longtemps dans le cas de l'acoustique car l'opérateur utilisé (Dirichlet to Neumann) est facilement diagonalisable. Leur utilisation conduit alors à des méthodes numériques dont on contrôle bien la qualité.

La situation est nettement plus complexe pour le cas des équations de Maxwell ou celles de l'élasticité. En effet, il est plus difficile de trouver un opérateur que l'on peut explicitement diagonaliser. Les opérateurs naturels de type Dirichlet to Neumann (champ donne dérivées du champ) ne sont pas explicitement diagonalisables et il apparaît que le bon choix est un opérateur couplant des inconnues mixtes (certaines composantes du champ et certaines dérivées du champ). L'étude du spectre de cet opérateur se révèle, en outre, plus délicate (problème d'orthogonalité et de complétude). Enfin, dans le contexte d'une approche variationnelle en vue de développer des méthodes d'éléments finis, on est conduit à des formulations mixtes non standard. Aujourd'hui, on dispose de conditions aux limites transparentes ainsi que d'une formulation mixte dans le cas des équations de Maxwell et de celle de l'élasticité en 2D. Ces conditions ont été expérimentées dans le cas des équations de Maxwell et on observe de bons résultats de convergence. Leur justification théorique (caractère bien posé des problèmes, estimations d'erreur) est en cours d'étude. Signalons pour terminer que ces études sont reliées, d'une part, aux méthodes modales alternative aux méthodes d'éléments finis, et d'autre part, aux couches PML dont l'étude théorique requiert la connaissance de tels opérateurs.

## 6.5. Méthodes asymptotiques

La prise en compte de l'effet de petites perturbations sur un modèle physique peut s'avérer très coûteuse en temps calcul, car elle nécessite le plus souvent une discrétisation assez fine (d'autant plus fine que la perturbation est petite !) du modèle continu. L'exemple typique dans les problèmes de propagation des ondes, est la prise en compte de détails géométriques dont les dimensions sont petites devant la longueur d'onde.

Le développement de modèles approchés moins gourmands en temps de calcul et assez riche pour pouvoir rendre compte de l'effet des petites perturbations est possible dans certains cas : milieux périodiques, milieux dont une ou plusieurs dimensions sont très petites relativement aux autres, contraste élevé entre deux milieux, etc ... ; et offre donc une alternative très intéressante (voire nécessaire) pour la simulation numérique. La démarche adoptée pour l'établissement de ces modèles comprend le plus souvent trois phases :

- obtention d'un ou de plusieurs modèles approchés via une technique heuristique adaptée (développement asymptotique, raccordement modal, etc ...),
- justification théorique du fait que le modèle approché est asymptotiquement proche du modèle initial, et étude de l'ordre d'approximation,
- établissement de schémas numériques adaptés (efficaces) et cas pratiques d'applications.

Notre projet possède une solide expérience dans cette discipline, dont les points phares sont les modèles filaires et plus récemment les modèles asymptotiques pour des revêtements ferromagnétiques. Trois autres modélisations approchées sont actuellement à l'étude :

- dérivation de conditions d'impédances généralisées permettant de mieux prendre en compte la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets non parfaitement conducteurs,
- prise en compte de l'effet des fentes sur la propagation des ondes via un raccordement modal,
- simulation de la propagation des ondes dans un milieu bi-couches dont l'interface est périodiquement perforée avec application à l'étude de l'atténuation acoustique dans un pot d'échappement.

### 6.5.1. Conditions d'impédance généralisées et obstacles fortement conducteurs

**Participants:** Marc Duruflé, Houssein Haddar, Patrick Joly, Hoai Minh N'Guyen.

La notion de condition d'impédance généralisée est maintenant une notion assez classique ainsi qu'en témoigne par exemple le livre de Senior-Volakis "Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics" qui est entièrement consacré à ce sujet. L'utilisation de cet outil est maintenant assez largement répandue, notamment en électromagnétisme pour des problèmes de diffraction en régime harmonique. L'idée est, lorsque cela est possible et même souhaitable, de remplacer l'utilisation d'un modèle exact par l'utilisation d'une condition aux limites approchée pour "remplacer" l'obstacle. Ceci se révèle pertinent si la condition aux limites est "facile" à traiter numériquement, ce qui est le cas lorsqu'elle s'exprime à l'aide d'opérateurs différentiels. Avec un objectif différent, c'est ce type d'idée qui a mené par exemple à la construction des conditions aux limites absorbantes locales pour l'équation des ondes. La diffraction d'ondes électromagnétiques par des obstacles parfaitement conducteurs revêtus par une fine couche de matériau diélectrique est l'exemple prototype pour l'utilisation de conditions d'impédance: du fait de sa petite épaisseur, l'effet de la couche sur le milieu extérieur est, en première approximation, local (voir notamment les travaux de Engquist-Nédélec, Bendali-Lemrabet, Artola-Cessenat, ...). Un autre cas d'application est la diffraction par des obstacles fortement absorbants, typiquement fortement conducteurs en électromagnétisme: cette fois, c'est un phénomène physique bien connu, l'effet de peau, qui crée un effet "couche mince" via le développement d'une couche limite d'épaisseur inversement proportionnelle à la racine de la conductivité. A nouveau, l'effet de l'obstacle sur le milieu extérieur est, en première approximation, local. Ainsi, dès le début du siècle, Léontovitch a proposé une condition d'ordre 0 qui porte son nom et qui ne voit "localement" que le plan tangent à la frontière. Au cours des années 50, Rytov a généralisé cette condition et récemment, X. Antoine et H. Barucq ont proposé une nouvelle dérivation de conditions d'impédance généralisées par des techniques d'opérateurs pseudo-différentiels. C'est cette problématique des conditions d'impédance généralisées pour des obstacles fortement conducteurs que nous avons revisité avec un double objectif:

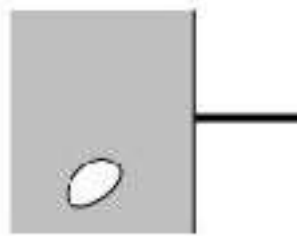
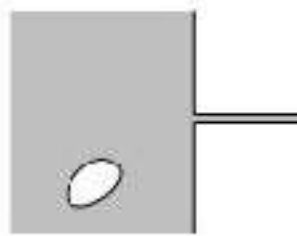
- proposer un nouvel outil de construction de ces conditions via une technique de scaling et de développement asymptotique et confronter nos conditions approchées à celles de la littérature.
- développer une analyse mathématique rigoureuse des conditions ainsi construites (stabilité, estimations d'erreur), analyse qui semble faire défaut jusqu'à présent.

Ce programme a été mené à son terme sur le plan théorique tant pour le problème scalaire (équation des ondes acoustiques) que vectoriel (équations de Maxwell) en dimension 3 d'espace. Des travaux de validation numérique ont été initiés et restent à finaliser.

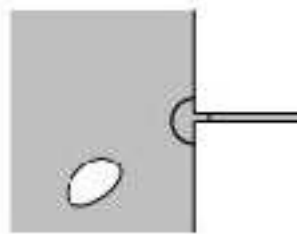
Nous travaillons actuellement sur l'extension de l'utilisation de ces conditions d'impédance au cas de problèmes de diffraction en régime transitoire. Il semble que cela constitue un champ d'application nouveau (et néanmoins important en pratique) des conditions d'impédance généralisées. Dans ce cas, les conditions aux limites approchées sont locales en espace mais font apparaître de façon naturelle des opérateurs de dérivation fractionnaire à mémoire longue (dérivées d'ordre  $1/2$ ) en temps. La théorie étant déjà essentiellement en place, la prochaine étape de ce travail concernera l'approximation numérique de telles conditions.

### 6.5.2. Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les domaines contenant des fentes

**Participants:** Patrick Joly, Sébastien Tordeux.



Première approche



Deuxième approche

Figure 16. Le domaine d'étude

Rappelons que nous nous intéressons ici à la propagation d'une onde dans un milieu comportant des fentes minces (Figure 16). Dans nos travaux initiaux nous avons cherché à développer un modèle approché consistant à coupler un modèle 2D avec un problème 1D dans la fente (Figure 16). Nous renvoyons aux rapports d'activité

2001 et 2002 pour plus de détails. L'approche a été validée par le code élément fini volumique MELINA puis à l'aide d'une méthode d'équations intégrales.

La présentation du modèle approché ainsi que son analyse asymptotique (estimations d'erreurs) ont donc été soumises à publication au journal SIAM Mathematical Analysis. Elles ont aussi fait l'objet d'une présentation à WAVES 2003.

Cette étude nous a montré que la recherche de modèles de fente de meilleure précision nécessite la prise en compte des singularités de la solution (ce que ne fait pas la première approche). C'est pourquoi nous nous intéressons maintenant aux méthodes de développements asymptotiques raccordés pour lever cette difficulté. Cette approche se base sur une philosophie différente: nous ne calculons plus la solution par un calcul unique mais par la résolution d'une hiérarchie de problèmes contribuant à la construction d'une solution approchée.

Cette méthode considère trois zones géométriques (figure 16):

- un domaine de champs lointain, siège d'un phénomène de propagation bidimensionnel,
- un domaine "fente", siège d'un phénomène de propagation unidimensionnel,
- un domaine champ proche, faisant la transition entre les deux précédents domaines et prenant en compte les singularités de la solution exacte.

La méthode consiste à postuler, sur chaque domaine, un développement asymptotique ou "ansatz", puis à relier ces développements à l'aide du principe de raccordement des développements asymptotiques<sup>1</sup> Notre approche a cela d'original que nous ne nous contentons pas de traiter des cas où l'approche analytique est possible mais nous souhaitons utiliser ces solutions analytiques "partielles" pour concevoir des méthodes numériques pour traiter le cas général. La programmation de ces méthodes est en cours. Ces méthodes restant à notre connaissance le plus souvent formelles, nous développons actuellement des techniques de preuve générales donnant une justification mathématique aux développements asymptotiques raccordés.

### 6.5.3. *Application de l'homogénéisation et des développements asymptotiques raccordés à la simulation des pots d'échappement*

**Participants:** Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Dora Drissi.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec une équipe du LAMSIN, laboratoire de mathématiques appliquées de l'Ecole d'Ingénieurs de Tunis. Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia a en particulier co-encadré avec Nabil Gmati la thèse de Dorra Drissi dont la soutenance a eu lieu en avril 2003. Cette année a été consacrée à la rédaction de deux articles dont l'un a été accepté pour publication dans le Journal of Computational Acoustics et le second est en voie d'achèvement. Le travail, effectué pendant les deux années précédentes, est résumé dans ce qui suit.

L'objectif était de calculer par éléments finis l'atténuation acoustique d'un pot d'échappement. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la difficulté résultant de la présence dans le pot de tubes perforés qu'il n'est pas envisageable de mailler, la période et la taille des perforations étant très petites devant la longueur de l'onde et les dimensions du pot. Nous avons donc écrit pour le problème bidimensionnel un modèle homogénéisé qui permet de tenir compte des perforations par l'intermédiaire d'une condition d'impédance appropriée. Pour valider le modèle homogénéisé, nous avons calculé une solution "exacte" en maillant finement les perforations et nous avons comparé les courbes d'atténuation du modèle homogénéisé et du modèle exact. Ce travail numérique, effectué dans le code MELINA, montre en particulier que le modèle homogénéisé rend bien compte de pics d'atténuation que les approximations classiques ignorent. Une analyse théorique a également été menée dans le cas tridimensionnel.

<sup>1</sup>D.G. Crighton, Matched Asymptotic Expansions applied to acoustics, Modern methods in analytical acoustics, Springer-Verlag, Lectures Notes, 1992.



## 6.6. Guides d'ondes, Résonances

Un guide d'ondes est une structure cylindrique dans laquelle peuvent se propager des ondes d'énergie finie dans la section transverse du guide. Le propagation de l'onde se fait suivant la direction d'invariance du guide, sans déformation ou atténuation. En revanche une onde guidée est en général dispersive (vitesse de propagation dépendant de la fréquence). Le guide est dit fermé lorsque le milieu de propagation est borné transversalement. Dans le cas contraire, le guide est dit ouvert, et le confinement de l'énergie est alors dû à un mécanisme physique (en particulier une vitesse de propagation plus faible dans le guide).

L'étude d'un guide fermé, a priori plus simple que celle d'un guide ouvert, se complexifie lorsque le guide n'est plus droit : il peut être de section variable, coudé, et/ou avec des conditions aux limites sur les parois de guide plus complexes qu'une condition de surface rigide (pertes visqueuses, thermiques ou par radiation). De plus les problématiques en présence d'un guide fermé peuvent être de plusieurs natures: on peut chercher l'onde guidée pour une forme de conduit donnée, ou au contraire identifier la forme du guide à partir de la mesure de l'onde guidée ou optimiser cette forme pour obtenir un champ rayonné particulier. Dans ces différents cas, une technique multimodale (utilisation de la base spectrale de l'opérateur transverse) ou une détermination de l'impédance généralisée associée à chaque section du guide (grâce à la méthode de factorisation de l'équation d'Helmholtz) peuvent être employées.

Les ondes guidées suscitent l'intérêt car ce sont des phénomènes que l'on rencontre dans la nature (guidage de la houle par le relief sous-marin, ondes de surface lors de tremblements de terre,...) ou qui interviennent dans de nombreuses applications technologiques (fibres optiques, microguides opto-électroniques, rubans supra-conducteurs,...).

Les résonances, bien que physiquement distinctes des ondes guidées, ont en commun avec elles l'emploi d'outils pour leur traitement mathématique (théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints) et numérique (éléments finis, algorithmes de calcul de valeurs propres, résolution d'équations non linéaires).

Physiquement les fréquences de résonance sont les fréquences pour lesquelles la réponse d'un milieu ou d'un objet soumis à une excitation périodique en temps présente un maximum. Mathématiquement ces fréquences sont les valeurs propres réelles d'un opérateur auto-adjoint dépendant de la fréquence réelle (cas des résonances d'une plaque dans un guide) ou les pôles complexes du prolongement aux fréquences complexes du même opérateur (cas des résonances d'un navire dans un champ de vagues quelconque). Dans ce dernier cas, les fréquences physiques sont les parties réelles des pôles, la partie imaginaire étant proportionnelle à l'amplitude de la réponse (voir section "Méthodes numériques performantes pour le régime transitoire").

L'étude des résonances présente de nombreuses applications : stabilité d'un navire soumis à la houle, détection radar, instruments de musique,... Bien que l'approche numérique des problèmes de résonances soit proche de celle des problèmes d'ondes guidées, la recherche de pôles complexes nécessite l'utilisation d'outils spécifiques : théorie des fonctions de la variable complexe, opérateurs non auto-adjoints, recherche de zéros dans le plan complexe.

### 6.6.1. Résonances d'une plaque élastique dans un écoulement confiné

**Participants:** Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Jean-François Mercier.

Ce travail concerne la détermination des fréquences de résonances  $k$  d'une plaque élastique placée dans un conduit droit. La plaque est au contact d'un fluide compressible en écoulement uniforme. Le problème est en deux dimensions et la plaque est encastrée en son bord d'attaque et libre en son bord de fuite. Cette configuration modélise entre autres un dispositif expérimental utilisé au Laboratoire de Mécanique de l'ENSTA, dans lequel une plaque métallique est placée dans un écoulement d'air. Rechercher les fréquences de résonances revient à résoudre un problème généralisé (en raison du couplage fluide-structure) aux valeurs propres : il faut

1. rechercher les valeurs propres  $\lambda_n(k)$  d'un opérateur  $A_M(k)$  combinant l'équation de Helmholtz (généralisée à la présence d'un écoulement de nombre de Mach  $M$ ), l'équation des faibles déformations des plaques minces et le couplage entre le fluide et la plaque,

2. résoudre les équations aux points fixes  $\lambda_n(k) = k^2$ .

- Résonances réelles

Pour des fréquences réelles,  $A_M(k)$  est auto adjoint et des outils de théorie spectrale peuvent être employés.

D'un point de vue théorique, lorsque la plaque est située au centre du conduit, en se restreignant aux modes résonnants antisymétriques par rapport au plan median du conduit et aux fréquences inférieures à la fréquence de coupure du premier mode antisymétrique du guide, le principe du Min-Max permet, à l'aide de calculs analytiques simples, de déterminer l'existence ou la non existence de valeurs propres pour l'opérateur  $A_M$ .

- Cas d'une plaque rigide

On montre dans ce cas qu'il y a d'autant plus de résonances que la plaque est longue ou que le fluide est accéléré. Un exemple de mode résonnant est donné en Fig.17.

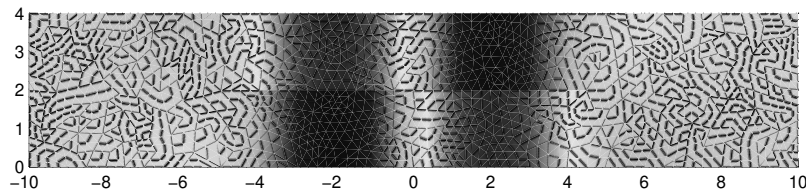


Figure 17. Partie réelle du potentiel des vitesses associé au second mode résonnant pour une plaque de longueur  $L = 10$  dans un conduit de hauteur  $h = 4$  et un écoulement  $M = 0.6$ .

- Cas d'une plaque élastique

Lorsque les déformations de la plaque sont prises en compte et que le fluide est au repos, on montre que le nombre de fréquences de résonance augmente lorsqu'on passe d'une plaque rigide à une plaque élastique ou lorsqu'on passe d'une plaque élastique placée dans le vide à la même plaque placée dans un fluide.

Lorsque le fluide est en mouvement, seule une étude numérique a permis de déterminer le nombre de fréquences de résonance.

D'un point de vue numérique, le problème est résolu grâce à une discrétisation par éléments finis dans le fluide couplée à une méthode modale sur la plaque, en utilisant le code MELINA.

Pour une vitesse fixée de l'écoulement, on mesure pour chaque fréquence  $k$  d'une onde incidente l'énergie  $E$  diffractée dans le fluide (Fig.18). Une résonance correspond à un pic d'énergie.

Nous avons montré que lorsque le fluide est léger comparé à la plaque, cas présenté ici, les résonances pour une plaque rigide (au nombre de  $\mathcal{N}_{rigid} = 3$ ) ou les résonances pour une plaque élastique seule dans le vide (au nombre de  $\mathcal{N}_{plaque} = 5$ , représentées en pointillés) sont aussi des résonances du système couplé ( $\mathcal{N}_{elas} = \mathcal{N}_{rigid} + \mathcal{N}_{plaque}$ ).

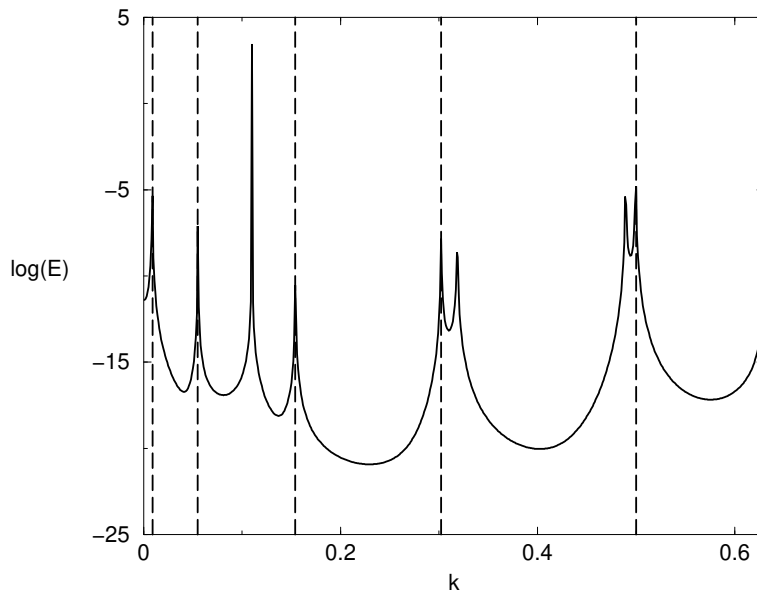


Figure 18. Pics d'énergie pour une plaque élastique  $L = 10$  et  $M = 0.6$

- Résonances complexes

Les fréquences complexes ne correspondent plus à des résonances mais à des instabilités car le comportement du système couplé plaque-fluide est divergent en temps (en  $e^{-ikt}$ ). Dans ce cas  $A_M$  n'est plus auto-adjoint et l'outil Min-Max ne peut plus être utilisé. Nous avons cependant montré théoriquement que :

- si la plaque est rigide ou si le fluide est au repos (terme de couplage fluide-structure nul), il ne peut pas exister d'instabilité.
- si la plaque est élastique et le fluide en écoulement, il ne peut exister de fréquence instable que lorsque l'écoulement est suffisamment rapide.

Ce dernier point donne une interprétation aux résultats expérimentaux obtenus au LME : la plaque métallique se met à osciller fortement seulement lorsque la vitesse de l'écoulement dépasse un seuil critique.

### 6.6.2. Méthodes modales

**Participants:** Grégoire Derveaux, Frédéric Etienne, Christophe Hazard, Eric Lunéville.

Les techniques multimodales dans les guides d'ondes s'appuient sur la connaissance explicite d'une base de fonctions dans les sections transverses du guide. En général, on choisit la base de fonctions propres de l'opérateur transverse qui sont également les restrictions sur la section transverse des modes du guides. Ces méthodes modales présentent un intérêt du point de vue du physicien car elles mettent en jeu des quantités facilement interprétables, plus proches de leurs analyses et un intérêt d'un point de vue pratique car elles ne nécessitent pas de maillage complet du guide.

Dans le cas d'un guide droit, cette méthode conduit évidemment à un système diagonal dont la résolution est triviale. Elle prend tout son intérêt dans le cas de guides à section variable ou de guides stratifiés suivant la direction de propagation. Dans ce cas, les bases dépendent de la section transverse considérée et on cherche alors la solution du problème sous la forme d'une décomposition sur cette base, chaque coefficient de la décomposition dépendant de l'abscisse (éventuellement curviligne) suivant l'axe de propagation. Ces

coefficients sont les solutions d'un système différentiel d'ordre 2 dont la résolution par des techniques classiques (Runge-Kutta ou multipas) est instable à cause de la présence de modes à croissance exponentielle. Deux méthodes peuvent être employées pour contourner cette difficulté. La première consiste à chercher non pas les coefficients eux même mais les matrices d'impédance solution d'une équation de Riccati (voir V. Pagneux). La seconde consiste à utiliser une approche variationnelle (méthode d'éléments finis 1D). Ces deux méthodes présentent une complexité de calcul similaire. Notons que l'approche modale est compatible avec les conditions de rayonnement dans un guide puisque ces dernières s'appuient sur la même décomposition modale. Signalons également que les méthodes multimodales peuvent être particulièrement efficaces dans le cas de guides à section faiblement variable car alors on peut se contenter de ne considérer qu'un nombre faible de modes.

Nous avons expérimenté cette méthode dans le cas de l'acoustique 2D. Lorsqu'on est en présence d'une condition de Neumann sur les parois du guide (réflexion totale) et que le guide n'est pas rectiligne, l'approximation est de faible qualité (mauvaise convergence des séries). Ce phénomène est dû au fait que la condition de Neumann n'est pas une condition adaptée à l'opérateur transverse local. Nous avons montré que l'adjonction de fonctions supplémentaires permettait d'accélérer la convergence des séries et nous avons quantifié théoriquement et expérimentalement ce gain.

Cette année nous avons cherché à étendre ces méthodes au cas de l'élasticité dans le cadre d'une collaboration avec le L.A.U.E de l'université du Havre qui mène des activités expérimentales sur des plaques élastiques de section variable. L'opérateur de l'élasticité fait apparaître de nouvelles difficultés. En particulier, il n'y a plus de découplage transverse/longitudinal de l'opérateur pour la formulation en déplacement usuellement utilisée dans les approches variationnelles. On est contraint à reformuler le problème, comme un problème du premier ordre en déplacement/contrainte dont la théorie spectrale n'est pas simple à faire (en particulier la complétude des modes). Cette difficulté a plusieurs conséquences pratiques. Tout d'abord, si l'on souhaite disposer d'une approximation par éléments finis "classiques" prenant en compte correctement les conditions de rayonnement il faut introduire une variable auxiliaire (contrainte) sur les frontières artificielles du domaine de calcul. Ensuite, les bases naturelles qu'il faut considérer dans les sections transverses sont les traces des modes de Lamb. Contrairement au cas de l'acoustique, les modes de Lamb ne sont pas homothétiques aux modes de Lamb d'une section unitaire (la constante de propagation des modes n'est plus une fonction de  $1/h$ ). Par conséquent, il est nécessaire de calculer les modes de Lamb dans chaque section; activité coûteuse puisqu'il s'agit de résoudre une équation de dispersion (non linéaire) dans le plan complexe. Cela remet en question la pertinence de l'utilisation de cette méthode dans le contexte de l'élasticité. En effet, on peut de façon alternative, considérer d'autres bases de fonctions : des bases de type Fourier (sinus ou cosinus) n'ayant aucun lien avec l'opérateur transverse ou bien des approximations des modes de Lamb, transformation homothétique des modes de Lamb d'une section unitaire par exemple. Dans le cas d'un guide de section faiblement variable ou faiblement stratifié cette approche devrait donner de bons résultats pour un coût modeste. Par contre, l'utilisation de base Fourier ne procure pas d'avantage significatif dans ce cas (nécessité d'utiliser un grand nombre de fonctions pour approcher correctement un mode de Lamb). Néanmoins, dans le cas d'un guide à section fortement variable dans lequel il y a de nombreux couplages entre modes, de par sa simplicité, elle devient compétitive par rapport à l'utilisation des modes de Lamb. Nous sommes actuellement en train de mener des études comparatives de ces différentes approches. Cette étude devrait s'achever au cours de l'année 2004.

### 6.6.3. Factorisation de l'équation de Helmholtz dans un guide d'ondes

**Participants:** Isabelle Champagne, Jacques Henry.

Cette année, le cadre des travaux sur la factorisation de l'équation de Helmholtz pour un guide d'ondes borné a été élargi : nous avons mis en œuvre la méthode de factorisation pour un guide présentant un coude, ainsi que pour un guide droit admettant une condition de radiation sur une face. La technique du plongement invariant permet encore de définir un opérateur  $P(s)$  reliant les conditions de Dirichlet et de Neumann sur une section  $\Gamma(s)$  mobile, qui s'interprète comme une impédance généralisée. Dans les deux cas, cet opérateur est solution d'une équation de Riccati et on montre qu'il est semblable à un semi-groupe linéaire par une transformation

homographique. L'homographie permet de déterminer les singularités de l'impédance pour le coude et de vérifier rapidement que la condition de radiation permet d'éviter les phénomènes de résonance.

Nous nous sommes également intéressés aux guides de section variable, en particulier à ceux dont les sections sont homothétiques, et nous avons commencé à étudier différentes approches de la factorisation : par changement de variables ou en décomposant l'opérateur  $P$  dans une base de fonctions propres. L'équation de Riccati porte alors sur un opérateur "intrinsèque" ou sur une matrice de taille infinie correspondant à la décomposition modale de  $P$ .

Enfin, nous nous efforçons de donner un cadre fonctionnel à cette étude et à cette fin, nous essayons de démontrer que l'équation de Riccati vérifiée par  $P$  a une solution unique dans ce cadre fonctionnel en utilisant une méthode de point fixe. Cette méthode de factorisation présente l'avantage de donner des méthodes de calcul de l'impédance généralisée sans passer par une décomposition modale, donc d'obtenir des résultats indépendants de la base de fonctions propres choisie.

#### 6.6.4. Etude de la propagation des ondes acoustiques dans un instrument à vent

**Participants:** Housseem Haddar, Denis Matignon.

La propagation des ondes acoustiques dans un instrument à vent est modélisée par l'équation de Lokshin. Cette propagation s'accompagne de phénomènes de pertes de nature visqueuse et thermique aux parois du tube, perturbation non négligeable en pratique. La prise en compte de cette dissipation se traduit par l'introduction de termes supplémentaires dans les équations du modèle sous forme de dérivées fractionnaires en temps de la solution. L'interaction de l'onde sortante du tube avec le reste de l'espace est modélisée par une impédance de rayonnement dissipative.

Nous avons mené l'étude théorique du système global pour le cas général des pavillons de forme quelconque, sachant que l'on possède des solutions analytiques dans le cas de tubes cylindriques uniquement ; la formulation forte de ce problème couplé a été obtenue, ainsi que la formulation faible.

De plus, nous avons fait une étude numérique de ces modèles dans un cadre acoustique réaliste. Cette étude a permis de définir des schémas aux différences finies couplés, dont la stabilité est garantie par des méthodes d'énergie : cela a donné lieu à des simulations numériques pour diverses géométries (cylindre, cône, pavillon), lesquelles devront être comparées avec des résultats expérimentaux.

En perspective de ce travail, pour la famille des cuivres, une équation aux dérivées partielles non-linéaire de type Burgers-Webster-Lokshin semble pouvoir rendre compte des effets de cuivrage de ces instruments à vent aux fortes intensités : nos efforts vont se porter sur ce modèle non-linéaire, tant du point de vue théorique que numérique.

### 6.7. Problèmes inverses et imagerie

L'intérêt de l'équipe pour les problèmes inverses dans les phénomènes de propagation d'onde est récent. La question générale sous-jacente à tous ces problèmes est la suivante: si on dispose de mesures du champ diffracté par un obstacle inconnu lorsque celui-ci est soumis à une onde incidente connue, comment peut-on en extraire des informations sur l'obstacle lui-même?

Ces dernières années se sont développées des techniques dont le but est de retrouver la géométrie de l'obstacle, indépendamment de la nature de cet obstacle (perméable, parfaitement rigide ou mou...). Ces méthodes reposent sur le choix d'un critère destiné à vérifier si tel point ou telle région de l'espace est situé à l'intérieur de l'obstacle diffractant. Qu'il s'agisse de la Linear Sampling Method ou de sa version adjointe, l'avantage essentiel du critère retenu est qu'il ne nécessite aucune connaissance préalable sur les caractéristiques physique de l'obstacle. Ces méthodes soulèvent aujourd'hui de nombreuses questions, tant sur le plan théorique que numérique (en particulier en ce qui concerne la stabilité de l'inversion numérique).

D'autres études sont menées dans le cas où l'on dispose *a priori* d'informations partielles sur la nature de l'obstacle diffractant. Dans le cas de fissures planes, c'est par l'utilisation d'une fonctionnelle écart à la réciprocité que l'on cherche à retrouver la position de ces fissures. Dans une situation bidimensionnelle, pour

un obstacle simplement connexe parfaitement mou (condition de Dirichlet), c'est à l'aide de transformations conformes que l'on tente de reconstituer la géométrie de celui-ci.

Enfin, par une technique de retournement temporel, on cherche à résoudre un problème inverse de nature différente des précédents: comment peut-on créer des ondes incidentes permettant de focaliser, si possible de façon sélective, sur une famille d'obstacles inconnus ?

### 6.7.1. *Sampling Methods*

**Participants:** Housseem Haddar, Steven Kusiak.

#### 6.7.1.1. *La Linear Sampling Method (LSM)*

Les travaux de validations de cette méthode pour les problèmes de diffraction en électromagnétisme (en collaboration avec F. Collino et M'B Fares) ont été publiés dans le journal *Inverse Problems* [25]. Ils sont aussi à la base de l'article de synthèse (survey paper) sur la LSM [15].

La poursuite de nos recherches sur le développement de cette méthode vise maintenant à la rendre plus adaptée aux applications pratiques. Une voie possible consiste à utiliser la LSM comme un point initial à une méthode non linéaire plus classique de type Newton afin d'améliorer les résultats dans le cas où les données ne sont pas fournies tout autour de l'objet à déterminer. Un premier pas théorique a été fait dans cette direction en caractérisant la différentielle de l'application qui à une géométrie d'un obstacle (absorbant) fait correspondre l'onde électromagnétique diffractée [19]. Bien entendu le gros du travail reste à faire, à savoir l'implémentation numérique d'un solveur de type Newton.

Par ailleurs l'investigation de l'application de cette méthode à la détection de défauts surfaciques dans des guides d'ondes est en cours, en collaboration avec E. Lunéville.

#### 6.7.1.2. *Méthode adjointe de la LSM*

L'arrivée de S. Kusiak (Post-doc) nous a fait découvrir une nouvelle méthode d'inversion, qu'il a développée pendant sa thèse avec J. Sylvester (Université de Washington), et qui possède des caractéristiques très semblables à la LSM. C'est une méthode d'inversion qui ne requiert pas la résolution du problème direct et s'appuie sur la caractérisation du domaine (à reconstruire) par le rang d'un opérateur linéaire compact. Elle peut être vue comme l'adjointe de la LSM dans le sens où pour la LSM, les données servent à construire le dit opérateur alors qu'elles servent comme second membre pour cette méthode. Elle admet ainsi l'avantage de n'utiliser qu'une seule mesure mais l'inconvénient de ne retrouver que le support convexe de diffraction (convex scattering support CSS). Le CSS peut cependant constituer une très bonne approximation de l'enveloppe convexe de l'objet diffractant (par exemple les deux coïncident si l'objet diffractant est polygonal). Mais cette affirmation est encore une question ouverte dans le cas général.

Une des difficultés majeure de cette méthode est son implémentation numérique. Le critère théorique de sélection est difficile à tester numériquement. C'est tout simplement l'héritage du caractère mal posé du problème. La recherche d'une méthode adéquate de régularisation s'impose.

Ce problème a été contourné par S. Kusiak en remplaçant le critère théorique par un autre critère qui lui est proche portant sur la décroissance des coefficients de Fourier de la donnée, plus accessible numériquement. La méthodologie proposée requiert cependant que l'objet se trouve dans l'espace libre, ce qui limite son champ d'application. Par exemple on ne peut pas l'exploiter directement pour la reconstruction d'inclusions dans un guide d'onde. Ce sera le projet de nos recherches futures sur ce sujet.

### 6.7.2. *Utilisation de la fonctionnelle écart à la réciprocité pour la recherche de fissure plane en diffraction.*

**Participants:** Fabrice Delbary, Housseem Haddar.

La méthode d'inversion basée sur l'utilisation de la fonctionnelle écart à la réciprocité pour l'équation de Helmholtz ayant été exploitée numériquement dans le cas 2D pour une condition de type Neumann sur les fissures, celle-ci a été testée dans le cas 3D, toujours dans le cas Neumann. Comme pour le cas 2D, les

données synthétiques utilisées pour la validation numérique correspondent aux valeurs du champ acoustique obtenu par diffraction d'une onde plane. Les résultats numériques obtenus sont alors analogues à ceux que l'on avait dans le cas 2D.

Considérant une fissure plane, connaissant la normale et la position du plan, on arrive d'autant mieux à reconstruire la forme de la fissure que la longueur d'onde utilisée est courte, cela est dû au fait que, numériquement, on arrive à calculer la transformée de Fourier du saut de pression sur la fissure seulement sur un disque de rayon  $k$ ,  $k$  étant le nombre d'onde utilisé pour la reconstruction. Cette reconstruction se faisant par un calcul de Fourier, les résultats obtenus en introduisant un bruit blanc sur les données utilisées influent assez peu sur la qualité de la reconstruction.

Concernant maintenant la recherche du plan d'une fissure, celle-ci utilise une condition particulière sur la transformée de Fourier du saut de pression, dans notre cas de diffraction par une onde plane, cette condition s'exprime simplement par le fait que le champ lointain de l'onde diffractée ne doit pas être identiquement nul sur les grands cercles de la sphère unité, excepté pour celui contenu dans la direction du plan recherché. A partir d'observations numériques, il semble que cette condition soit vérifiée pour de grandes longueurs d'onde. Utilisant cette observation pour l'implémentation, la méthode s'avère satisfaisante, néanmoins contrairement au cas de la recherche de la forme de la fissure, les erreurs introduites sur les données utilisées pour la reconstruction du plan jouent un rôle beaucoup moins négligeable et cela se répercute sur la reconstruction du saut de pression sur la fissure.

La méthode de reconstruction de fissures planes à l'aide de la fonctionnelle écart à la réciprocité ayant fourni des résultats satisfaisants dans le cas d'une condition de type Neumann sur les fissures, celle-ci sera testée dans le cas d'une condition de type Dirichlet et de type Robin. Dans le cas de la condition de Robin, nous espérons grâce à la méthode pouvoir reconstruire la forme des fissures planes mais aussi retrouver l'impédance sur la fissure.

Considérons pour illustrer la validité de la méthode dans le cas Neumann l'exemple suivant. La fissure est contenue dans le plan  $(Oxy)$  d'un repère orthonormé  $(Oxyz)$ . La normale au plan de fissure est donc  $(0, 0, 1)^t$ . Les données synthétiques sont générées sur une sphère de centre  $O$  et de rayon 1. On utilise  $k = 3$  comme nombre d'onde pour la recherche du plan et  $k = 40$  pour la recherche de la forme de la fissure. Les incidences sont normales à la fissure.

Pour une erreur de 10% sur les données synthétiques utilisées pour la recherche du plan ( $k = 3$ ), on trouve  $(-2.1755705 \cdot 10^{-2}, -6.6957176 \cdot 10^{-2}, 0.9975187)^t$  comme normale et  $-9.0805575 \cdot 10^{-4}$  comme position. A partir de ces caractéristiques, on cherche la forme de la fissure en introduisant une erreur de 10% sur les données synthétiques utilisées pour la recherche de la forme de la fissure ( $k = 40$ ), le résultat est présenté en Figure 19.

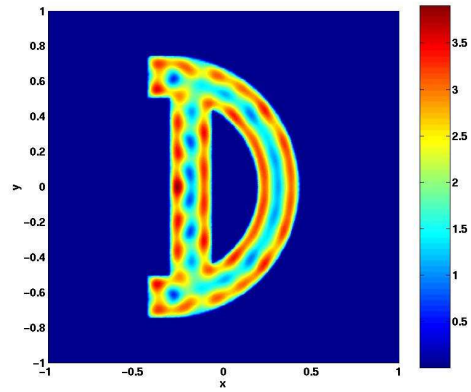
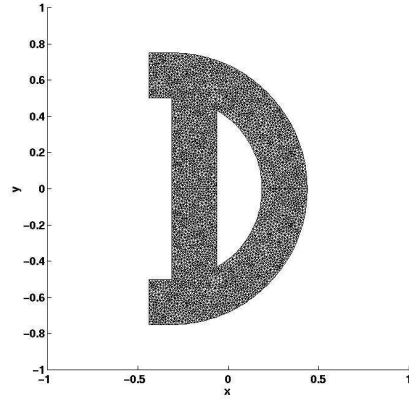
Pour une erreur de 25% sur les données synthétiques utilisées pour la recherche du plan ( $k = 3$ ), on trouve  $(0.1147550, -0.1596070, 0.9804881)^t$  comme normale et  $-2.4270285 \cdot 10^{-2}$  pour la position. A partir de ces caractéristiques, on cherche la forme de la fissure en introduisant une erreur de 25% sur les données synthétiques utilisées pour la recherche de la forme de la fissure ( $k = 40$ ), le résultat est présenté en Figure 19.

### 6.7.3. Imagerie via les applications conformes

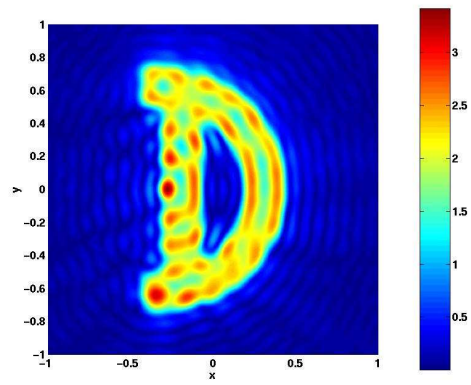
**Participant:** Houssein Haddar.

Il s'agit d'une méthode assez originale permettant de reconstituer la géométrie d'une inclusion simplement connexe à partir de mesures électrostatiques sur le bord d'un domaine bidimensionnel. L'idée est de ramener la géométrie du problème, via une transformation conforme  $\varphi$ , à celle de deux cercles concentriques dont le rayon du plus grand est fixé à 1 par exemple. Chercher la géométrie de l'inclusion revient ainsi à déterminer l'application conforme et le rayon  $\rho$  du cercle intérieur, ensuite prendre l'image inverse de ce cercle.

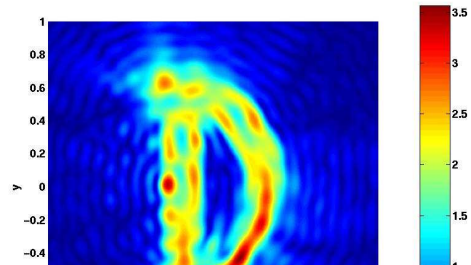
En réécrivant la donnée de Neumann sur le grand cercle à l'aide de l'opérateur Dirichlet-Neumann il est possible de dériver une équation différentielle non linéaire du premier ordre vérifiée par  $\varphi$ . Cependant, la détermination de l'opérateur Dirichlet-Neumann nécessite la connaissance du rayon intérieur  $\rho$ . C'est là qu'on exploite la géométrie simple pour construire des fonctions test harmoniques orthogonale à la solution sur le cercle intérieur, permettant de dériver une expression de  $\rho$  à l'aide des données sur le grand cercle.



Module du saut de pression exact



Module du saut de pression reconstruit avec une erreur de 10% sur toutes les données





Cette expression fait intervenir l'inconnue  $\varphi$ . Ainsi numériquement, les deux inconnues sont déterminées simultanément via un schéma itératif.

Ce procédé fait partie de la famille des méthodes qui traitent séparément la non linéarité et le caractère mal posé du problème inverse. Ainsi la non linéarité se trouve dans l'équation différentielle vérifiée par l'application conforme. Le caractère mal posé se révèle en prenant l'image inverse du cercle intérieur.

Cette méthode a été originalement appliquée par Idemen-Akduman pour des inclusions avec une condition de Dirichlet sur leur bord en supposant que la donnée de Dirichlet est constante sur le bord extérieur. Dans ce cas, nous avons une expression explicite  $\rho$  et l'équation portant sur  $\varphi$  est grandement simplifiée puisque l'on peut calculer explicitement l'action de l'opérateur Dirichlet-Neumann sur une donnée constante. Elle a été ensuite étendue au cas d'une donnée variable mais proche d'une constante par Akduman-Kress. Cependant le schéma d'inversion s'avère divergent lorsque la donnée de Neumann s'annule sur bord extérieur. Nous envisageons, en collaboration avec R. Kress de

- stabiliser le schéma d'inversion pour une donnée quelconque, correspondant à des problèmes plus réalistes ;
- étendre la méthode (théoriquement et numériquement) à des inclusions avec une donnée de Neumann homogène sur leur bord (dans ce cas la donnée de Neumann s'annule toujours sur le bord extérieur) ;
- traiter le cas des fissures.

#### 6.7.4. Méthodes de retournement temporel

**Participants:** Chokri Ben Amar, Christophe Hazard.

Le retournement temporel d'ondes acoustiques a connu ces dernières années un regain d'intérêt considérable dans des domaines d'application très variés, qui vont de l'imagerie médicale ultrasonique au contrôle non destructif, en passant par l'acoustique sous-marine. L'idée centrale de ce phénomène est d'utiliser la *réversibilité* de l'équation des ondes dans un milieu non dissipatif pour ré-émettre "à l'envers" un signal acoustique émis par une source : on parle alors de "miroir à retournement temporel".

En itérant le processus de retournement temporel, on assiste à un phénomène de focalisation qu'on sait expliquer pour un modèle simpliste où les obstacles diffractant sont supposés ponctuels, et leurs interactions sont négligées : lorsque leurs coefficients de réflectivité sont tous différents, l'opérateur de retournement temporel possède autant de valeurs propres non nulles qu'il y a d'obstacles, et les vecteurs propres associés permettent de focaliser sur chacun d'eux. Il semble qu'aucune étude théorique n'ait été réalisée pour un modèle plus réaliste. C'est la question que nous creusons conjointement avec Karim RAMDANI (IECN, INRIA, Nancy) dans le cadre d'une collaboration récente. Le point de départ de cette étude concerne le cas où le miroir à retournement temporel est repoussé à l'infini, c'est-à-dire qu'il mesure le champ lointain d'une onde diffractée, sans perturber cette onde. Les résultats obtenus dans ce cadre confirment ceux de l'approche simpliste. Par une étude du comportement asymptotique de l'amplitude de diffusion associées à une famille (finie) d'obstacles sphériques, nous avons montré que lorsque leurs rayons sont petits devant la longueur d'onde ainsi que devant les distances qui les séparent, les éléments propres de l'opérateur de retournement temporel permettent de focaliser de façon sélective sur chacun d'eux. Un article commun qui détaille cette étude vient d'être accepté. La question est plus délicate pour un miroir réel qui mesure un champ acoustique à distance finie des obstacles. Chokri BEN AMAR a débuté en octobre 2002 une thèse sur ce sujet dans le cadre d'une cotutelle entre l'ENSTA et le LAMSIN (Tunis). En dehors de l'aspect qui vient d'être décrit, les objectifs visés concernent d'une part la compréhension des liens entre les points de vue transitoire et périodique du retournement temporel, d'autre part la simulation numérique du phénomène. Nos travaux récents ont porté sur la modélisation du phénomène de retournement temporel, et en particulier la prise en compte du caractère intrusif du miroir (la présence du miroir perturbe le champ diffracté par les cibles). Dans le cas de miroirs non intrusifs, les modèles utilisés permettent de faire apparaître l'opérateur de retournement temporel comme un opérateur auto-adjoint, dont les vecteurs propres fournissent les conditions optimales d'éclairage acoustique des cibles. Par un choix adapté

des variables décrivant le phénomène, nous venons de montrer comment prolonger ces idées au cas intrusif. Notre objectif est aujourd'hui de mettre en oeuvre numériquement ces idées.

## 6.8. Programmation dynamique et factorisation de problèmes aux limites

La méthode de factorisation de problèmes aux limites linéaires vise à transformer un problème aux limites où la solution dépend en chaque point de l'ensemble des données au bord, en le produit de deux problèmes aux valeurs initiales de type Cauchy découplés et reliés par un opérateur de couplage. Cet opérateur vérifie lui-même un problème de Cauchy pour une équation de Riccati. Cette technique repose sur la programmation dynamique et le plongement invariant de R. Bellman. Elle est couramment utilisée par rapport au temps en contrôle optimal pour obtenir le feedback optimal. Ici elle est transposée dans le domaine spatial : le problème aux limites initial est plongé dans une famille de problèmes de même nature sur des sous-domaines limités par une frontière variable. On a ainsi mis en évidence, pour des ouverts cylindriques qu'un problème aux limites pour le Laplacien peut se factoriser en un produit de deux problèmes du premier ordre non couplés : les sous-domaines sont des sous-cylindres limités par une section variable et l'opérateur de découplage vérifie une équation de Riccati. Cet opérateur relie des conditions aux limites sur la frontière mobile, ce peut être par exemple l'opérateur Dirichlet-Neumann. Sur le problème discrétisé, cette factorisation s'interprète exactement comme la factorisation de Gauss par blocs de la matrice du système linéaire. Cette méthode a été étudiée et justifiée dans le cas d'un domaine cylindrique et de l'opérateur de Laplace. Les travaux menés en 2003 portent sur des généralisations sur le domaine ou l'opérateur et sur des applications de la méthode (cf. aussi le paragraphe 6.6.3).

### 6.8.1. Généralisation des géométries

**Participants:** Jacques Henry, Maria Soares.

Pour aborder des situations géométriques plus générales, on a étudié le cas où le domaine est un disque ou une sphère. Les sous-domaines peuvent être des couronnes limitées par le bord du disque initial ou bien des disques concentriques. La principale difficulté est alors de définir la condition initiale à l'origine qui n'est pas une donnée du problème comme dans le cas cylindrique. Dans le premier cas (couronnes), on a montré que cette valeur initiale pour l'état pour la phase de "remontée" est fournie par la limite à l'origine du résidu  $r$  dans la phase "descente". Dans le second cas la condition initiale pour l'équation de Riccati pour la "descente" est donnée par l'opérateur de moyenne. On étudie actuellement la généralisation de ces résultats à un domaine étoilé, les sous-domaines étant définis par homothétie. Ce travail fait partie de la thèse de M. C. Soares de l'universidade nova de Lisbonne, sous la co-direction de Bento Louro.

### 6.8.2. Etude de l'effet de différentes conditions aux limites sur la factorisation

**Participant:** Jacques Henry.

Dans le cas du cylindre les conditions aux limites les plus simples sont les conditions de Dirichlet et Neumann sur les faces opposées, permettant des conditions initiales naturelles pour les phases de descente et remontée. On a procédé à une étude systématique de ces conditions aux limites. Si les conditions sur la surface latérale du cylindre ne jouent pas un rôle crucial, certains jeux de conditions sur les faces opposées (Dirichlet-Dirichlet ou Neumann-Neumann) peuvent créer des singularités dans les conditions initiales de l'équation de Riccati en fonction de la façon dont on définit l'opérateur vérifiant cette équation. Ces singularités peuvent être supprimées par une transformation homographique (cf section précédente). On montre aussi que la discrétisation de cette factorisation conduisant à une forme factorisée  $LU$  supprime aussi ces singularités.

On a aussi étudié la factorisation obtenue par un plongement invariant à l'aide d'une famille de problèmes de Cauchy pour le Laplacien. On sait que ces problèmes sont mal posés, mais l'intérêt de cette étude est de montrer que l'on peut exhiber ainsi l'analogue en continu de la méthode de permutation de lignes (par blocs) pour la méthode de Gauss en discret. De façon plus générale un des intérêts de la méthode de factorisation des problèmes aux limites est de fournir un cadre pour l'étude de la stabilité des méthodes directes uniformément par rapport à la discrétisation.

Pour les équations d'ordre 4 on a étudié quelques cas de conditions aux limites pour le bilaplacien. Certaines situations peuvent conduire à des factorisations triviales mais instables (produit de problèmes de Cauchy pour le Laplacien). La permutation de lignes permet alors de fournir une alternative stable.

### 6.8.3. Utilisation de la méthode de factorisation pour le problème inverse en EEG-MEG.

**Participant:** Jacques Henry.

Le projet ODYSSEE a réuni différentes équipes autour du problème de la reconstruction et de la visualisation de l'activité électrique cérébrale à partir de données EEG et MEG. On s'intéresse à la définition et à la résolution du problème inverse. Dans un premier temps, on pose le problème de façon classique sous forme de problème de contrôle, la densité de sources à estimer étant la variable de contrôle. Ce problème étant linéaire, la méthode de factorisation exposée plus haut permet à la fois de factoriser l'équation d'état et l'équation d'état adjoint, mais aussi de découpler ce système d'optimalité. Ainsi, l'estimée des sources est donnée grâce à l'intégration d'un problème de Cauchy sur une famille de surfaces partant des capteurs et se déplaçant vers la surface de localisation des sources. Le calcul des opérateurs de découplage ne doit être effectué qu'une fois et pour chaque ensemble de données, l'estimation ne nécessite ensuite que l'intégration d'une équation différentielle.

D'autre part, le problème inverse peut être vu comme un problème de Cauchy pour le problème elliptique si on suppose les mesures connues en tout point de la surface. La méthode de factorisation permet de voir ce problème comme un problème parabolique retrograde. L'idée naturelle est alors de le régulariser par quasi-réversibilité. Cette méthode est numériquement plus instable que la précédente, mais elle permet de minimiser l'effet régularisant de la méthode précédente. On a essayé de plus de combiner cette méthode avec des méthodes de traitement d'image par EDP. L'idée est de rechercher la distribution de dipôles comme une image "régulière" présentant des zones actives et non actives. Les résultats numériques ne sont que préliminaires et la méthode doit encore être validée.

### 6.8.4. Simulation du CHFR

**Participants:** Hassene Kout, Jacques Henry, Patrick Joly.

Le procédé CHFR mis au point par la société Schlumberger permet la mesure de résistivité dans les puits de pétrole en exploitation malgré la présence d'un tube en acier "le casing". La collaboration avec cette société a été poursuivie sur ce thème par le stage de DESS de Hassene Kout. L'objectif de ce stage visait à limiter les calculs à faire pour simuler un "log", c'est-à-dire l'expérience permettant de reconstituer le profil de résistivité le long du puits. Il faut en effet pour cela reprendre un grand nombre de simulations correspondant à des variations de position de la sonde dans la région d'intérêt. On limite donc le domaine de la simulation à un domaine proche de la région d'intérêt, mais il faut trouver des conditions aux limites qui résument la région négligée. Au cours de ce stage on s'est restreint à définir un domaine contenant la zone des positions de la sonde et limité par un plan parallèle à la surface du sol. Les conditions aux limites transparentes sont définies grâce à un opérateur Dirichlet-Neumann calculé par la méthode de factorisation (cf. section 6.8). Au cours du stage une maquette logicielle reprenant la discrétisation par éléments finis  $Q1$  utilisée par Schlumberger a permis de valider la méthode : les résultats du calcul sur le domaine réduit reproduisent avec une bonne précision la restriction du résultat du calcul sur le domaine entier.

## 6.9. Développements récents du code MELINA

**Participants:** Daniel Martin, Marc Lenoir, Eric Lunéville, Colin Chambeyron, Christophe Hazard.

Cette année il a été décidé de réaliser une refonte intégrale du code afin d'une part, de le "passer" en C++ afin de bénéficier d'un vrai concept objet (la version Fortran émulant ce concept) et d'autre part, de généraliser les concepts fondamentaux de l'approche variationnelle afin de pouvoir intégrer facilement de nouvelles possibilités telles que des conditions de périodicité, l'extension aux cas 3D et aux cas vectoriels des conditions transparentes de type modale, la prise en compte de plusieurs maillages (avec des outils de remaillage, d'interpolation de maillage), l'introduction d'éléments finis plus généraux (Hdiv, Hrot, Hermite,

...), la prise en compte de formulations variationnelles d'équations intégrales, des approximations éléments finis tensorielles.... Ce travail de refonte a déjà débuté et devrait déboucher l'année prochaine sur une nouvelle version en C++ de MELINA.

## 7. Contracts and Grants with Industry

### 7.1. Contrat INRIA-IFP

**Participants:** Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Grégoire Derveaux, Eric Lunéville.

Ce contrat porte sur les méthodes numériques pour la propagation d'ondes dans des guides.

### 7.2. Contrat INRIA-IFP

**Participants:** Gary Cohen, Sandrine Fauqueux.

Ce contrat porte sur la modélisation numérique de la propagation d'ondes élastiques par éléments finis spectraux.

### 7.3. Contrat INRIA-ONERA

**Participants:** Gary Cohen, Sébastien Pernet.

Ce contrat porte sur l'étude de méthodes d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell en régime transitoire.

### 7.4. Contrat INRIA-ONERA

**Participants:** Gary Cohen, Marc Duruflé.

Ce contrat porte sur l'étude de méthodes d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell en régime fréquentiel.

### 7.5. Contrat INRIA-EADS

**Participants:** Gary Cohen, Pascal Grob, Patrick Joly.

Ce contrat porte sur la modélisation en domaine transitoire de problèmes de vibro-acoustique, avec application à l'acoustique dans les vaisseaux spatiaux.

### 7.6. Contrat INRIA-ONERA-IEA-CEG

**Participants:** Gary Cohen, Patrick Joly, Sébastien Pernet.

Réponse à un appel d'offre lancé par le Centre d'Etudes de Gramat en vue de l'amélioration de son code d'électromagnétisme (GORF).

### 7.7. Contrat INRIA-EDF

**Participants:** Eliane Bécache, Patrick Joly, Gilles Scarella.

Ce contrat porte sur la modélisation de conditions de contact unilatéral pour la modélisation de la propagation d'ondes élastiques en présence de fissures. L'application est le contrôle non destructif.

### 7.8. Contrat INRIA-EDF

**Participants:** Eliane Bécache, Patrick Joly, Jerónimo Rodríguez Garcéa.

Le contrat finançant la thèse de J. Rodríguez se poursuit (voir paragraphe 6.2.4). L'objectif est d'étendre la méthode de raffinement spatio-temporel développée par T. Fouquet en électromagnétisme à un problème d'élastodynamique.

## 7.9. Contrat INRIA-IFREMER

**Participants:** Eliane Bécache, Julien Diaz, Patrick Joly.

Ce contrat porte sur la modélisation de l'interface mer-fond marin en sismique sous-marine.

## 7.10. Contrat INRIA-Schlumberger

**Participants:** Jacques Henry, Hassene Kout.

Ce contrat porte sur la modélisation numérique du CHFR (procédé d'identification électromagnétique du sous-sol à l'aide de courants basse fréquence).

## 7.11. Contrat INRIA-SHELL

**Participants:** Eliane Bécache, Abdelaaziz Ezziani, Patrick Joly.

Ce contrat porte sur la modélisation numérique de la propagation d'ondes dans des milieux poro-élastiques.

# 8. Other Grants and Activities

## 8.1. Actions nationales

- Participation à l'action concertée incitative Télémédecine dans le projet « Problèmes directs et inverses en EEG et MEG » consacrée à l'imagerie cérébrale, avec les projets Robotvis et Estime (Jacques Henry).
- Membre du bureau du GDR sur *l'Etude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif* (Anne-Sophie Bonnet-ben Dhia)
- Participation au GDR Ultra-Sons (Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Julien Diaz, Abdelaaziz Ezziani, Eric Lunéville, Gilles Scarella, Jeronimo Rodriguez).
- Participation au GDR Ondes (Eliane Bécache, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia).
- Participation à l'ARC Headexp (Gary Cohen, Patrick Joly, Christine Poirier).

## 8.2. Relations bilatérales internationales

- Participation à la collaboration INRIA/NSF sur "Collaborative Effort on Approximate Boundary Conditions For Computational Wave Problems" (Eliane Bécache, Housseem Haddar, Patrick Joly).
- Le Projet est membre d'une équipe de recherche associée (EDidon) avec le LAMSIN de l'ENIT à Tunis.
- L'accord bilatéral INRIA - ICCTI avec l'université nouvelle de Lisbonne a été renouvelé. Cet accord permet d'organiser l'encadrement de la thèse de Maria do Céu Soares en co-tutelle avec Bento Louro de cette université. Il a aussi permis de démarrer le co-encadrement de la thèse de Maria Orey (Jacques Henry).
- La collaboration avec J.I. Diaz et A. Ramos de l'université Complutense de Madrid a continué malgré l'absence de financement pour 2003 (Jacques Henry).

## 8.3. Accueils de chercheurs étrangers

Les chercheurs suivants ont séjourné au sein du projet :

- A. Kiselev (Steklov Math Institute, Université de St-Petersbourg) dix jours en janvier et dix jours en septembre 2003.
- A. Komech (Université de Vienne) en Janvier-Février 2003.
- P. Monk (University of Delaware) Février 2003.
- A. Ramos (Université Complutense de Madrid) en mars 2003.
- Duarte Santamarina, post-doctorant de l'Université de Saint-Jacques de Compostelle, du 15 mai au 15 juillet à l'ENSTA.

## 9. Dissemination

### 9.1. Animation de la communauté scientifique

- Le projet est coorganisateur, avec l'ENSTA, du séminaire mensuel CRESPO qui donne l'occasion d'accueillir de nombreux chercheurs, professeurs et industriels.
- E. Bécache est membre de la commission d'évaluation de l'INRIA.
- A. S. Bonnet-Ben Dhia est membre du Comité National du CNRS (sections 09 et 41).
- P. Joly est membre du Comité éditorial de la Revue M2AN (Modélisation Mathématique et Analyse Numérique).
- P. Joly est membre du Comité National des Universités (26<sup>e</sup> section).
- Le Projet a participé activement à l'organisation et au comité Scientifique de la Conférence Internationale Waves 2003 (Jyväskylä, Finlande, Juillet 2003)
- J. Henry est vice président du Technical Committee 7 de l'IFIP et membre du comité de programme de la conférence System Modeling and Optimization (Sophia Antipolis juillet 2003)
- G. Cohen, H. Haddar et P. Joly ont co-organisé le cours CEA-EDF-INRIA "Introduction aux problèmes directs en théorie de la diffraction : analyse mathématique" (Ecole des Ondes, Rocquencourt, 27-31 Janvier 2003.
- P. Joly a organisé un mini-symposium "Mathematical Methods in Imaging" au World Congress on Ultra-Sonics, Paris, 7-10 Septembre 2003.
- P. Joly a organisé la journée ILIAtech "Propagation des Ondes", Rocquencourt, 29 Septembre 2003.

### 9.2. Enseignement universitaire

- Eliane Bécache et Patrick Joly  
Cours sur les méthodes numériques en propagation d'ondes, troisième année à l'ENSTA.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia  
Propagation d'ondes, cours commun au DEA de Dynamique des Structures et des Systèmes Couplés et à l'Option Mécanique /VO de l'Ecole Centrale de Paris.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Vincent Pagneux  
Guides acoustiques, cours commun au DEA de Dynamique des Structures et des Systèmes Couplés et à l'Option Mécanique /VO de l'Ecole Centrale de Paris.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Jean-François Mercier  
Ondes dans les milieux continus, cours de 3<sup>ème</sup> année à l'ENSTA.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Marc Lenoir  
Outils élémentaires d'analyse pour les équations aux dérivées partielles, cours de Tronc Commun de 1<sup>ère</sup> Année à l'ENSTA.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Christophe Hazard  
Méthodes numériques, cours du DEA de Mécanique de l'Université Pierre et Marie.  
Modélisation mathématique et numérique en propagation d'ondes, cours du DEA de Mathématiques Appliquées de l'Université Tunis II et de l'ENIT.
- Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Christophe Hazard, Marc Lenoir et Eric Lunéville  
Applications de la théorie spectrale, cours de 2<sup>ème</sup> année à l'ENSTA

- Kamel Berriri  
Travaux dirigés de mathématiques appliquées à l'économie en DEUG éco 2 : Algèbre linéaire et optimisation à l'université Paris 12  
Travaux dirigés de probabilité en DEUG MASS 1 à l'université Paris 12
- Nicolas Castel  
Travaux Dirigés en MIAS première année à l'université de Versailles-Saint Quentin (vacation).
- Patrick Ciarlet et Pascal Joly (Univ. Paris 6, Laboratoire Jacques-Louis Lions)  
Cours de l'ENSTA, 1ère année, intitulé "Optimisation et Algèbre Linéaire"
- Patrick Ciarlet  
Cours du DEA M2SAΦ de l'Université de Versailles-St Quentin, intitulé "Modèles et méthodes en électromagnétisme"
- Gary Cohen  
« Méthodes mathématiques en propagation d'ondes », DEA à l'Université Paris IX Dauphine.
- Abdelâaziz Ezziani  
Travaux dirigés du cours ENSTA de 2ème année : " Résolution numérique des équations aux dérivées partielles".
- Houssein Haddar  
Cours sur les problèmes inverses à l'ESILV.  
Cours au Collège Polytechnique. Introduction aux méthodes numériques pour la propagation d'ondes en régime transitoire.  
Travaux dirigés du cours de 1ère année de l'ENSTA: " Outils élémentaires d'analyse pour les EDP "  
Travaux dirigés du cours de 2ème année de Calcul scientifique à l'École des Mines.
- Jacques Henry  
« Analyse numérique », deuxième année à l'école des Mines de Paris et participation à l'enseignement pour le MIG du département de mathématiques-informatique pour les élèves de première année.
- Christophe Hazard et Eric Lunéville  
Cours sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, 2ème année à l'ENSTA
- P. Joly  
Cours sur les méthodes mathématiques et numériques en propagation d'ondes en troisième année à l'Ecole Polytechnique.  
Travaux dirigés du Grand Cours d'Analyse numérique à l'Ecole Polytechnique (deuxième année).  
Encadrement de travaux personnels en Majeure 3ème année à l'Ecole Polytechnique.
- Guillaume Legendre  
Cours et travaux dirigés de mathématiques, DEUG MIAS premier niveau, université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines.
- Marc Lenoir  
Ondes et Mécanique, cours à l'ENS Cachan, préparation à l'agrégation de Mathématiques.  
Equations intégrales, cours de 3ème année à l'ENSTA  
Participation aux jurys de TIPE
- Marc Lenoir et Eric Lunéville  
Introduction aux méthodes numériques, cours pour la formation permanente de l'Ensta
- François LORET  
Chargé de cours et de TD pour le cours d'analyse en DEUG SCM première année (sciences de la matière), à l'université Pierre et Marie CURIE.

- Jean-François Mercier  
Travaux dirigés du cours ENSTA de première année : “Outils élémentaires d’analyse pour les EDP”.
- Jerónimo Rodríguez Garcéa  
Travaux dirigés du cours de 1ère année de l’ENSTA: “ Outils élémentaires d’analyse pour les EDP “.
- Sébastien Tordeux  
Travaux dirigés du cours intitulé “Algèbre et optimisation” en première année à l’ENSTA.  
Travaux dirigés du cours intitulé “Introduction à Matlab” en première année à l’ENSTA.  
Formation continue pour ingénieurs intitulé “Introduction à l’analyse numérique” à la SAE (Société des Amis de l’ENSTA)

### 9.3. Participation à des séminaires, colloques, invitations

- E. Bécache
  - Séminaire D’Analyse Numérique, Université de Rennes 1: *Sur la stabilité des modèles de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)* , Janvier 2003
  - Séminaire EDP de l’IRMA, Strasbourg : *Méthode des domaines fictifs pour des problèmes de diffraction d’ondes élastiques en régime transitoire*, Mars 2003.
  - Séminaire d’analyse numérique du CMAP, École Polytechnique: *Conditions de rayonnement et PML pour l’équation de Galbrun fréquentielle en présence d’un écoulement uniforme*, Décembre 2003.
  - Invitée aux journées du GDR ONDES 2451, groupe GT2, *Couches absorbantes parfaitement adaptées pour des problèmes hyperboliques linéaires*, 12-13 Juin 2003.
  - Mathematics of Finite Elements and Applications (MAFELAP), Brunel University. Invitée à participer au minisymposium sur “Computational Methods for Wave Propagation”, *Mixed finite elements for elastic wave propagation problems, fictitious domain methods and space-time mesh refinement methods*, [21-24 Juin 2003] :
  - Journées scientifiques du GDR Ultrasons 2501 sur l’étude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif. *Couches absorbantes de type PML dans les guides d’ondes en régime fréquentiel*, 8-12 Décembre 2003.
- P. Ciarlet
  - Séminaire à l’Université de Houston (Dept. de Mathématiques), USA, Mai 2003.
  - Séminaire Ecole Centrale de Lyon, Juin 2003.
  - Colloque MAFELAP’2003, Juin 2003
  - 5èmes Journées EDP Littoral-Valenciennes, Septembre 2003.
- J. Diaz
  - The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä. Finlande. *Stabilized Perfectly Matched Layer for Advective Acoustics*, Juillet 2003.
  - GDR Ultrasons, Etude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif. Aussois : *Éléments Finis d’Ordre Elevé pour le Couplage Fluide-Structure* , Décembre 2003]



- A. Ezziani
  - The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finlande. *Mathematical and numerical modeling of wave propagation in linear viscoelastic media*, Juillet 2003.
  - GDR Ultrasons, Etude de la propagation ultrasonore en milieux inhomogènes en vue du contrôle non destructif. Aussois, France. *Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires*, Décembre 2003.
- H. Haddar
  - Ecole des ondes "Direct and Inverse Scattering Problems", 27-31 Janvier 2003.
  - Invité au LAMSIN. Mini-cours sur:it The inverse medium problem in acoustics, 14-28 Février 2003.
  - Invité au département de Math. Appl. de l'Université de Göttingen. Séminaire:*On the use of the Reciprocity Gap Functional in inverse scattering from planar cracks*, 1-12 Mai 2003.
  - The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Jyväskylä, Finlande, 30 Juin - 4 Juillet 2003.
- J. Henry
  - J. Henry, B. Louro, M. C. Soares : *Factorization by invariant embedding of elliptic problems in a circular domain*, 21st IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization Sophia Antipolis, France, July 21-25, 2003
- P. Joly
  - *Introduction au problèmes directs en théorie de la diffraction : analyse mathématique*, Rocquencourt, Ecole des ondes, 27-31 Janvier 2003.
  - *Introduction au problèmes directs en théorie de la diffraction : méthodes numériques*, Rocquencourt, Ecole des ondes, 27-31 Janvier 2003.
  - *Modélisation numérique de la guitare*, Séminaire au Laboratoire d'Acoustique Musicale de l'Université Paris VI, 10 Mars 2003
  - *Une introduction aux méthodes de couches absorbantes*, conférence au groupe de Travail Méthodes Numériques au Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI, Mai 2003
  - *Couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes linéaires*, colloque National d'Analyse Numérique, La Grande Motte, conférence plénière invitée, 2-6 Juin 2003.
  - *Perfectly Matched Layers in Wave Propagation*, Spring Meeting of tyhe Swiss Mathematical Society, Bâle, conférence plénière invitée, 12-14 Juin 2003.
  - Futures directions in Applied Mathematics, Conférence en l'honneur de J. C. Nédélec *Sur la stabilité des modèles PML*, 18-20 Juin 2003
  - *Numerical simulation of an acoustic guitar*, The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Jyväskylä, Finlande , 30 Juin-4 Juillet 2003.

- *Conservative Space-Time mesh refinement method for wave propagation*, DDM15 15th International Conference on Domain Decomposition Methods, Berlin Conférence plénière invitée, 21-25 Juillet 2003.
  - *Développements récents en méthodes numériques pour la propagation d'ondes en régime transitoire*, Journée ILIAtech sur la propagation des ondes, Rocquencourt, 29 Septembre 2003.
  - *An Analysis of Absorbing Boundary Conditions with the Cagniard-De Hoop Method*, Workshop, The Cagniard-de Hoop's method, a powerful tool for various physical problems, Lille, 13 Novembre 2003.
  - *Conditions aux limites absorbantes en propagation d'ondes*, Premières Journées du GDR Ultra-sons, Aussois, 8-12 Décembre 2003
- J. Rodríguez
    - 35ème Congrès National d'Analyse Numérique. La Grande Motte, France: *Raffinement de maillage local spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique*, Juin 2003.
    - The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Waves 2003). Jyväskylä, Finland. *Space-time mesh refinement for the elastodynamic equations*", Juillet 2003.
  - G. Scarella
    - *Analyse mathématique et numérique de problèmes dynamiques de contact unilatéral dans un milieu fissuré*, Présentation d'un poster, Congrès National d'Analyse Numérique, La Grande Motte, France, Juin 2003.
    - *A fictitious domain method for a unilateral contact problem*, The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyväskylä, Finland, Juillet 2003.
  - S. Tordeux
    - *Asymptotical models for wave propagation in media including slots*, The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyväskylä, Finlande, Juillet 2003.

## 10. Bibliography

### Major publications by the team in recent years

- [1] M. AINSWORTH, P. DAVIES, D. DUNCAN, P. MARTIN, B. RYNNE, editors, *Topics in Computational Wave Propagation: Direct and Inverse Problems..* series Lecture notes in computational science and engineering, number 31, Springer, 2003.
- [2] G. C. COHEN. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Springer, 2001.
- [3] C. HAZARD, M. LENOIR. *Surface Water Waves*. E.R. Pike and P.C. Sabatier, Academic Press, 2001, chapter 2.

- [4] A. S. BONNET-BEN DHIA, P. JOLY. *Optical Waveguides*. Gang Bao and Lawrence Cowsar and Wen Masters, SIAM Frontiers book series in Applied Mathematics, 2001, pages 273-324.

### Doctoral dissertations and “Habilitation” theses

- [5] E. BÉCACHE. *Mémoire d’Habilitation à Diriger les Recherches: Méthodes variationnelles, domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Applications aux ondes dans les solides*. Ph. D. Thesis, Université Paris-Dauphine, 6 mai, 2003.
- [6] D. DRISSI. *Homogénéisation de parois et application à la simulation des silencieux..* Ph. D. Thesis, ENIT, Tunis, 28 Avril, 2003.
- [7] S. FAUQUEUX. *Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d’ondes élastiques en régime transitoire*. Ph. D. Thesis, Université Paris-Dauphine, 6 Février, 2003.
- [8] G. LEGENDRE. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement. Analyse mathématique et numérique de l’équation de Galbrun*. Ph. D. Thesis, Université Paris VI, 29 Septembre, 2003.

### Articles in referred journals and book chapters

- [9] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR, S. LABRUNIE, J. SEGRÉ. *Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains: The Singular Complement Method*. in « J. Comput. Phys. », volume 191, 2003, pages 147-176.
- [10] F. ASSOUS, P. CIARLET JR., S. LABRUNIE. *Solution of axisymmetric Maxwell equations*. in « Math. Meth. Appl. Sci. », volume 26, pages 861-896, 2003.
- [11] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE. *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*. in « SIAM J. Numer. Anal. », to appear.
- [12] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, P. JOLY. *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*. in « J. Comput. Phys. », number 2, volume 188, 2003, pages 399–433.
- [13] F. COLLINO, T. FOUQUET, P. JOLY. *A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. II. Analysis*. in « Numer. Math. », number 2, volume 95, 2003, pages 223–251.
- [14] F. COLLINO, T. FOUQUET, P. JOLY. *A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. I. Construction*. in « Numer. Math. », number 2, volume 95, 2003, pages 197–221.
- [15] D. COLTON, H. HADDAR, M. PIANA. *The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering theory*. in « Inverse Problems », to appear.
- [16] G. DERVEAUX, A. CHAIGNE, P. JOLY, E. BÉCACHE. *Time-domain simulation of a guitar : model and method*. in « J. Acoust. Soc. Am. », number 6, volume 114, 2003, pages 3368 - 3383.
- [17] H. HADDAR. *The interior transmission problem for anisotropic Maxwell’s equations and its applications to the inverse problem*. in « Math. Meth. Appl. Sci. », to appear.

- [18] H. HADDAR, P. JOLY. *Homogenized model for a laminar ferromagnetic medium.* in « Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A », number 3, volume 133, 2003, pages 567–598.
- [19] H. HADDAR, R. KRESS. *On the Fréchet derivative for Obstacle Scattering with an Impedance Boundary Condition.* in « Siam J. Appl. Math. », to appear.
- [20] P. JOLY. *Topics in Computational Wave Propagation: Direct and Inverse Problems.* series Lecture notes in computational science and engineering, number 31, Springer, 2003, chapter Variational methods for time-dependent wave propagation problems., pages 201–264.
- [21] A. S. BONNET-BEN DHIA, D. DRISSI, N. GMATI. *Simulation of muffler's transmission losses by a homogenized finite element method.* in « Journal of Computational Acoustics », to appear.
- [22] P. CIARLET, JR. *Système de Stokes avec flux de vitesse et pression imposés.* in « C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I », volume 337, 2003, pages 119-124.
- [23] P. CIARLET, JR, J. HE. *The Singular Complement Method for 2d problems.* in « C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I », volume 336, 2003, pages 353-358.
- [24] P. CIARLET, JR, J. HUANG, J. ZOU. *Some observations on generalized saddle-point problems.* in « SIAM J. Matrix Anal. Appl. », volume 25, 2003, pages 224-236.
- [25] F. COLLINO, M. B. FARES, H. HADDAR. *Numerical and analytical studies of the linear sampling method in electromagnetic inverse scattering problems.* in « Inverse Problems », volume 19, 2003, pages 1279-1298.

## Publications in Conferences and Workshops

- [26] E. BÉCACHE, A. EZZIANI, P. JOLY. *Mathematical and numerical modeling of wave propagation in linear viscoelastic media.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation », Springer, pages 916-921, 2003.
- [27] E. BÉCACHE, A. EZZIANI, P. JOLY. *Modeling of wave propagation in linear viscoelastic media.* in « Mathematical Modelling of Wave Phenomena », volume 7, Mathematical modelling in physics, engineering and cognitive sciences, 2003.
- [28] E. BÉCACHE, P. JOLY, G. SCARELLA. *A fictitious domain method for a unilateral contact problem.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation », Springer-Verlag, pages 431-436, 2003.
- [29] E. BÉCACHE, A. S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE. *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. », Springer, pages 142–147, 2003.
- [30] E. BÉCACHE, P. JOLY, J. RODRÍGUEZ. *Space-time mesh refinement for the elastodynamic equations.* in « Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland. », Springer-Verlag, 2003.

- [31] E. BÉCACHE, A. KISELEV. *Detailed study of non-stationary elastic wavefields produced by an apodized normal transducer. Comparisons between asymptotics and numerical results.* in « Proceedings of the World Congress on Ultrasonics, Paris », pages 1027-1030, 2003, <http://www.sfa.asso.fr/wcu2003/>.
- [32] E. BÉCACHE, P. G. PETROPOULOS, S. GEDNEY. *Long-Time Behavior of the Unsplit PML.* in « Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland. », Springer-Verlag, pages 120-124, 2003.
- [33] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET BEN DHIA. *PMLs for the numerical simulation of harmonic diffracted waves in an elastic plate.* in « Proceedings of the World Congress on Ultrasonics, Paris », pages 1019-1022, 2003, <http://www.sfa.asso.fr/wcu2003/>.
- [34] F. CAKONI, H. HADDAR. *Interior transmission problem for anisotropic media The singular complement method.* in « Mathematical and numerical aspects of wave propagation », Springer, pages 613-618, 2003.
- [35] G. COHEN, M. DURUFLÉ. *Mixed Spectral Elements for the Helmholtz Equation.* in « Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland. », Springer-Verlag, 2003.
- [36] G. COHEN, S. FAUQUEUX. *Mixed Spectral Elements for the Linear Elasticity System in Unbounded Domains.* in « Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland. », Springer-Verlag, 2003.
- [37] G. COHEN, X. FERRIERES, P. MONK, S. PERNET. *Mass-Lumped Edge Elements for the Lossy Maxwell's Equations.* in « Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Jyväskylä, Finland. », Springer-Verlag, 2003.
- [38] F. COLLINO, M. B. FARES, H. HADDAR. *On the validation of the linear sampling method in electromagnetic inverse scattering problems.* in « Mathematical and numerical aspects of wave propagation », Springer, pages 649-655, 2003.
- [39] J. DIAZ, P. JOLY. *Stabilized Perfectly Matched Layer for Advective Acoustics.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation », Springer, pages 115-119, 2003.
- [40] H. HADDAR, T. HÉLIE, D. MATIGNON. *A Webster-Lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions: strong solutions.* in « Mathematical and numerical aspects of wave propagation », Springer, pages 66-71, to appear.
- [41] J. HENRY, B. LOURO, M. C. SOARES. *Factorization by invariant embedding of elliptic problems in a circular domain.* in « 21st IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization », Kluwer Academic Press, to appear.
- [42] P. JOLY, M. LENOIR, S. TORDEUX. *Asymptotical Models for Wave Propagation in Media Including Slots.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation », Springer, pages 169-173, 2003.
- [43] A. S. BONNET-BEN DHIA, G. LEGENDRE, E. LUNÉVILLE. *Regularization of the Time-Harmonic Galbrun's Equations.* in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. », Springer, pages 78–83, 2003.

- [44] A. S. BONNET-BEN DHIA, J. F. MERCIER. *Resonances of an Elastic Plate in a Confined Flow*. in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. », Springer, pages 836–841, 2003.
- [45] A. S. BONNET-BEN DHIA, K. RAMDANI. *Diffraction by a locally perturbed acoustic grating*. in « Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. », Springer, pages 221 – 226, 2003.

### **Internal Reports**

- [46] E. BÉCACHE, A. EZZIANI, P. JOLY. *Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. I. Analyse mathématique*. Technical report, number RR-4785, INRIA, 2003, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4785.html>.
- [47] J. DIAZ, P. JOLY. *An Analysis of Higher Order Boundary Conditions for the Wave Equation..* Technical report, number RR-4962, INRIA, 2003, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4962.html>.