INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

Rocquencourt

THEME NUM

Activity Report

2004

Table of contents

1. Team **1**
2. Overall Objectives **1**
2.1. Mots-clés/Keywords 1
2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives 1
3. Scientific Foundations **3**
3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra 3
3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control 5
3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games 6
3.4. Processus de Bellman/Bellman processes 7
3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems 8
3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra 8
3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis 9
4. Application Domains **10**
4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks) 10
4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games 10
4.3. Recherche opérationnelle/Operations research 10
4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs 11
4.5. Autres applications/Other applications 11
5. Software **12**
5.1. Boîte à outil max-plus de SCILAB/Max-plus toolbox of Scilab 12
5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations 12
6. New Results **12**
6.1. Théorie spectrale max-plus/Max-plus spectral theory 12
6.1.1. Introduction 12
6.1.2. Théorie spectrale max-plus dénombrable/Denumerable max-plus spectral theory 13
6.1.3. La frontière de Martin max-plus/The max-plus Martin boundary 13
6.2. L'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Operator approach to optimal control and games 14
6.2.1. Introduction 14
6.2.2. Itérées d'applications monotones homogènes/Iterates of monotone homogeneous maps 14
6.2.3. Applications semi-differentiables contractantes au sens large/Semidifferentiable nonexpansive maps 14
6.2.4. Problème du temps de cycle pour les applications monotones homogènes/The cycle time problem for monotone nonexpansive maps 15
6.2.5. Géométrie des métriques de Hilbert et de Thompson/Geometry of Hilbert's and of Thompson's metric 15
6.3. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis 16
6.3.1. Théorème de séparation max-plus/Max-plus separation theorem 16
6.3.2. Fonctions convexes max-plus/Max-plus convex functions 16
6.3.3. Semi-modules projectifs max-plus/Projective max-plus semimodules 16

6.3.4. L'équation $Bf = g$, quand B est une conjugaison de Moreau/The equation $Bf = g$, where B is a Moreau conjugacy 16
6.4. Théorie des perturbations/Perturbation theory 17
6.4.1. Introduction 17
6.4.2. Généralisation du théorème de Višik, Ljusternik, Lidskiĭ / The generalised Višik, Ljusternik, Lidskiĭ theorem 17
6.4.3. Perturbation de valeurs propres et problème d'affectation optimal/Peturbation of matrix eigenvalues and optimal assignment problem 18
6.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems 18
6.5.1. Le problème de l'(A, B)-invariance max-plus/The max-plus (A, B)-invariance problem 18
6.5.2. Semi-modules rationnels max-plus/Max-plus rational semimodules 19
6.6. Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de commande optimale déterministe/The max-plus finite element method for deterministic optimal control problem 19
6.7. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration 20
7. Other Grants and Activities **21**
7.1. Actions internationales 21
7.2. Accueils de chercheurs étrangers 21
8. Dissemination **21**
8.1. Animation de la communauté scientifique 21
8.2. Enseignement universitaire 22
8.3. Encadrement de thèse 22
8.4. Membre de jury 22
8.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations 23
9. Bibliography **24**

1. Team

Responsable scientifique/Head of team
Stéphane Gaubert [DR, Inria]

Responsable permanent/Co-head of the team
Marianne Akian [CR, Inria]

Assistante de projet/Administrative assistant
Martine Verneuille [AI, Inria]

Personnel Inria/Inria staff
Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus/*Metalau project, part time member of Maxplus project*]
Cormac Walsh [CR]

Collaborateurs extérieurs/External collaborators
Guy Cohen [Professeur ENPC]
Michel Gondran

Doctorants/PhD Students
Asma Lakhoua [Cotutelle Paris 6 - École Nationale d'Ingénieurs de Tunis]

Post-Doctorants/Post-Docs
Ricardo Katz

Personnel imaginaire/Imaginary research scientist
Max Plus [Nom collectif pour le groupe de travail de Rocquencourt[1]/*Collective name for the Rocquencourt team*[2]]

2. Overall Objectives

2.1. Mots-clés/Keywords

Mots-clés : Algèbre max-plus, systèmes à événements discrets, programmation dynamique, décision markovienne, contrôle optimal déterministe et stochastique, théorie des jeux, théorie des perturbations, théorie de Perron-Frobenius non linéaire, applications contractantes, analyse numérique, mathématiques discrètes, recherche opérationelle.

Keywords: *Max-plus algebra, Discrete event dynamic systems, Dynamic programming, Markov decision, Deterministic and Stochastic optimal control, Game theory, Perturbation theory, Nonlinear Perron-Frobenius theory, Nonexpansive maps, Numerical analysis, Discrete mathematics, Operations Research.*

2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

---

[1]Réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2]*Comprising or having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes disjunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyhèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, muni de l'addition $(a,b)\mapsto a\oplus b=\max(a,b)$ et de la multiplication $(a,b)\mapsto a\otimes b=a+b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a\oplus a=a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ muni des lois $a\oplus b=\min(a,b)$ et $a\otimes b=a+b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement “l'algèbre max-plus”.

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est comptemporain de la naissance de la théorie des treillis [58]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [55][68][106][108][109]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [46]. L'agèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [97][96][87][75][65][100][82][66][59],[5]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [86][87][75], grandes déviations [95], asymptotiques à température nulle en physique statistique [48]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [76][91][84][38], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [90], et la théorie des jeux [98][33]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [7]. Parmis les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [47][42], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'agèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [101][72][102][77][93]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algèbrique [64][105][88][104] et en théorie des représentations [61][40].

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [58]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [55][68][106][108][109]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [46]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [97][96][87][75][65][100][82][66][59],[5]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [86][87][75], large deviation asymptotics [95], or zero temperature asymptotics in statistical physics [48]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [76][91][84][38], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [90] and game theory [98][33]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [7]. Recent developments include the network calculus of [47][42] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [101][72][102][77][93]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [64][105][88][104] and in representation theory [61][40].

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0 = i,\ \ell_k = j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \,, \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \le s \le n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \,. \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \,, \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ \ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \varphi(X(T)) \,, \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \le t \le T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot, 0) = \varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad H(x,p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x,y)) \,, \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [87][75][82]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [97][106][55][67][52][37], [7] pour la dimension finie, et [87][75] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [59].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, ..., n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \le t \le T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [87][75][82]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [97][106][67][52][55][37], [7] for the finite dimension case, and [87][75] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the "Aubry-Mather" theory [59].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} \text{monotonie}/\mathit{monotonicity} & x \le y & \Rightarrow & f(x) \le f(y)\,, \\ \text{contraction}/\mathit{nonexpansiveness} & \|f(x)-f(y)\|_\infty & \le & \|x-y\|_\infty\,. \end{array} \tag{6}$$

Ici, l'opérateur f est une application d'un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\le$ désigne l'ordre partiel usuel, et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l'ensemble des états est $\{1, ..., n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l'addition d'une constante [54] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d'opérateurs : l'équation de la programmation dynamique d'un problème de commande optimale à horizon fini s'écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d'un problème à horizon infini (y compris le cas d'un problème d'arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d'un problème avec facteur d'actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [33]. Il permet d'inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l'extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d'homogénéité. Les problèmes auxquels on s'intéresse typiquement sont la structure de l'ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l'existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l'infini (afin d'obtenir le coût ergodique d'un problème de contrôle optimal ou de jeux), l'asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [91] pour un panorama. Signalons que dans [63],[8], des algorithmes inspirés de l'algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des sytèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir le §6.7 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two players) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1,...,n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [54] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [33]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [91] for more background. In [63],[8], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §6.7 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [96][89][56], [5][1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [86]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi, voir le §6.6 ci-dessous.

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [96][89][56],[5][1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [86]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations, see §6.6 below.

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [49], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [52] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [7], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [92][70], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [36]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [10], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [12], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [101][72][81][102][77][93]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [80].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [49], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [52] of the max-plus approach of discrete event systems [7], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [92][70], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [36]. Max-plus automata models [10], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [12], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have much studied in theoretical computer science [101][72][81][102][77][93]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [80].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [58][41][106][108],[7]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [103][99],[16] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [69][94],[7]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [57].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [58][41][106][108],[7]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [103][99],[16] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyedra, determinants, symmetrisation [69][94],[7]). The subject has attracted recently a new attention [57].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$\epsilon^a + \epsilon^b \approx \epsilon^{\min(a,b)} , \qquad \epsilon^a \times \epsilon^b = \epsilon^{a+b} , \tag{7}$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. L'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a,b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a,b) \mapsto a+b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [86], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

La même déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [95] pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations. Voir aussi [2], [34] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres.

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a,b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a,b) \mapsto a+b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [86], motivated by the study of WKB-type asymptotics of Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

The same deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [95] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [2], [34] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues.

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [7]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [44], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [73], pour des réseaux ferroviaires [43] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [36]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [39][79]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du traffic routier [85][83];

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [7]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [44], or computing the throughput of a workshop [73] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [43] and [36]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [39][79]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [85][83];

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [6] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [6] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [45]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [51]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [107]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [12] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [80] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [80]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [78].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [45]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [51]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [107]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [12] for the jobshop case, a simpler representation was given in [80] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [80]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [78].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

Les techniques d'analyse statique de programme par intreprétation abstraite permettent de déterminer automatiquement des invariants en résolvant de "gros" problèmes de points fixes dans des treillis, comme par exemple des treillis d'intervalles. Ces problèmes sont justiciables de la théorie des opérateurs monotones et des algorithmes déjà évoqués dans la section 3.3. Voir la section 6.7 ci-dessous.

English version

Static analysis techniques via abstract interpretation allow to compute invariants of programs by solving large fixed points problems for monotone self-maps of lattices. The theory of monotone operators already reviewed in § 3.3, and the related algorithms, can be applied to such problems, see § 6.7 below.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [53].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [53].

5. Software

5.1. Boîte à outil max-plus de SCILAB/Max-plus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisé par plusieurs chercheurs extérieurs au groupe, en particulier dans [35][79]. Il faut aussi noter que le groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *max-plus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [35][79]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library allowing to compute transfer series of timed event graphs.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations

Dans son travail de thèse, Asma Lakhoua développe des programmes en Scilab et C, exploitant la boîte à outils max-plus de Scilab, implémentant de nouvelles discrétisations des équations d'Hamilton-Jacobi correspondant aux problèmes de contrôle optimal déterministe, voir le §6.6 ci-dessous.

English version

Asma Lakhoua is developing, as part of her PhD thesis work, programs in Scilab and C, exploiting the max-plus toolbox, allowing to test max-plus discretisation schemes for Hamilton-Jacobi equations corresponding to deterministic optimal control problems, see §6.6 below.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus/Max-plus spectral theory

6.1.1. Introduction

On s'intéresse au problème spectral max-plus

$$\sup_{y\in S} a(x,y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{8}$$

dans lequel le noyau $a : S\times S \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ est donné et où l'on cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. En programmation dynamique, l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x,y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Comme nous l'avons rappelé dans le §3.2 et le §3.3, le problème spectral (8) intervient en contrôle ergodique. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité ou certaines conditions géométriques. Le cas d'un ensemble S non compact n'a pas été beaucoup étudié jusqu'ici.

English version

We study the max-plus spectral equation (8), where the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is given, and the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. In dynamic programming applications, the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. As we recalled in §3.2 and §3.3, this spectral problem arises in ergodic optimal control. The case where S is non-compact has not been much studied.

6.1.2. Théorie spectrale max-plus dénombrable/Denumerable max-plus spectral theory

Participants: M. Akian, S. Gaubert, C. Walsh.

Dans [18], nous avons obtenu des résultats généraux de théorie spectrale dans le cas où S est dénombrable. Les outils que nous introduisons s'inspirent de la théorie des chaînes de Markov dénombrables: les classes critiques sont remplacées par les classes de récurrence. Nous montrons aussi un résultat de représentation de l'espace propre et un résultat de cyclicité semblables au cas où S est fini, sous une hypothèse de tension, qui traduit le fait que les trajectoires optimales ne partent pas à l'infini.

English version

We develop in [18] general results of spectral theory when S is denumerable. In particular, we introduce a notion of recurrence, similar to the case of Markov chains. We show that under a tightness conditions, many of the results of the finite dimensional theory (representation of the eigenspace, ultimate periodicity of orbits) carry over.

6.1.3. La frontière de Martin max-plus/The max-plus Martin boundary

Participants: M. Akian, S. Gaubert, C. Walsh.

Lorsque $\lambda = 0$, l'équation (8) a une analogie évidente avec l'équation définissant les fonctions harmoniques en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. Dans [28], nous introduisons l'analogue max-plus de la frontière de Martin, et obtenons un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (8) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) , \tag{9}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u est une fonction semi-continue supérieurement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, jouant le rôle de la mesure spectrale. Nous montrons que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de certaines (quasi) géodésiques. La frontière de Martin max-plus generalise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des fonctions de Busemann généralisées.

English version

When $\lambda = 0$, the equation (8) has an obvious analogy with the equation defining harmonic functions in classical or probabilistic potential theory. We introduce in [28] a max-plus analogue of the classical Martin boundary, and obtain an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (8) may be represented as in (9) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u is an upper semi-continuous map with values in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ playing the role of the spectral measure. We show that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain (quasi) geodesics. We note that the max-plus Martin boundary generalizes to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of generalised Busemann functions.

6.2. L'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Operator approach to optimal control and games

6.2.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.3, les applications qui sont contractantes pour certaines métriques, ou qui vérifient certaines propriétés de monotonie ou d'homogénéité, jouent un rôle central en programmation dynamique. Nous étudions plusieurs problèmes concernant la description de l'ensemble des points fixes et le comportement itératif de ces applications.

English version

As detailed in §3.3, nonlinear maps that are nonexpansive in some metrics, or that satisfy monotonicity or homogeneity conditions, play a central role in dynamic programming. We have studied several problems concerning the description of the fixed points and of the dynamical behaviour of these maps.

6.2.2. Itérées d'applications monotones homogènes/Iterates of monotone homogeneous maps

Participants: M. Akian, S. Gaubert, B. Lemmens (TU-Berlin, and Warwick University), R. Nussbaum (Rutgers University).

Il est connu que toute orbite bornée d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, contractante (au sens large) pour une norme polyhédrale, converge vers une orbite périodique, et que la longueur de celle-ci peut être bornée par une constante ne dépendant que de la géométrie de la boule unité. Dans [17], nous obtenons un résultat similaire pour une application monotone homogène d'un cône polyhédral dans lui-même. Dans le cas du cône positif standard de $\mathbb{R}^n$, on montre que la longueur d'une orbite périodique est bornée par

$$\frac{n!}{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor!\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor!\lfloor\frac{n+2}{3}\rfloor!} . \tag{10}$$

Cette borne est (au moins asymptotiquement) optimale.

English version

It is known that any bounded orbit of a self-map of $\mathbb{R}^n$ that is nonexpansive in some polyhedral norm converges to a periodic orbit, whose length can be bounded by a function depending only on the geometry of the unit ball. In [17], we obtain a similar result for a monotone homogeneous self-map of a polyhedral cone. In the case of the standard positive cone of $\mathbb{R}^n$, we show that the length of a periodic orbit is bounded above by (10). This bound is (at least asymptotically) tight.

6.2.3. Applications semi-differentiables contractantes au sens large/Semidifferentiable nonexpansive maps

Participants: M. Akian, S. Gaubert, R. Nussbaum (Rutgers University, USA).

Dans [30], nous étudions l'unicité du vecteur propre ou du point fixe d'applications f monotones homogènes ou plus généralement contractantes au sens large sur un cône, dans le cas où f est semidifférentiable : une application f, d'un espace normé E dans un autre, est *semidifférentiable* si l'on peut écrire $f(x+h) = f(x) + f'_x(h) + o(\|h\|)$, où $f'_x(h)$ est une application continue multiplicativement homogène. Cette notion est bien adaptée aux opérateurs de programmation dynamique associés à des problèmes de contrôle optimal ou de jeux: lorsque les espaces d'actions sont finis, f, qui est affine par morceaux, est non-différentiable, mais elle est semidifférentiable, au moins lorsque l'espace d'état est lui même fini. Dans le cas différentiable, des résultats antérieurs de R. Nussbaum montrent que l'unicité du vecteur propre de f, à une normalisation près, peut être contrôlée à l'aide de résultats d'unicité pour la dérivée f'_v, évaluée en un vecteur propre quelconque v. Nous montrons qu'il en est de même lorsque f est semi-differentiable, et obtenons par exemple comme application des résultats d'unicité pour la solution d'équations de programmation dynamique stationnaires, ou ergodiques, associées à certains problèmes de jeux répétés, ainsi que des résultats de convergence géométrique pour l'itération sur les valeurs, avec un contrôle explicite du taux de convergence.

English version

A natural idea to study the uniqueness of a fixed point u of a map f is to use the derivative of f at point u, but if f is the dynamic programming operator of a game or of a control problem, this derivative need not exist since f may be piecewise affine. However, f turns out, at least in the finite dimension case, to be semidifferentiable, meaning that f has one-sided directional derivatives and that the limits defining these derivatives are uniform in the direction. We show in [30] that, under rather general circumstances, the uniqueness of the fixed point of the semiderivative of a nonexpansive map, taken at any fixed point u, implies that the map itself has a unique fixed point. We obtain similar results for nonlinear eigenproblems. We also show that the orbits converge to the fixed point at a rate given by the non-linear spectral radius of the semiderivative. This yields new geometrical convergence results for value iteration.

6.2.4. Problème du temps de cycle pour les applications monotones homogènes/The cycle time problem for monotone nonexpansive maps

Participants: J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, J. Gunarwardena (Harvard Medical School, USA).

On s'intéresse à l'existence et au calcul du temps de cycle, $\chi(f) = \lim_k f^k(x)/k$, où f est une application monotone contractante de $\mathbb{R}^n$. Des résultats partiels d'existence et aussi des résultats d'approximation du temps de cycle ont été obtenus dans [62]. On travaille aussi à généraliser les résultats de [8] et [50], qui exploitent des techniques d'itération sur les politiques, pour calculer effectivement $\chi(f)$ pour certaines sous-classes d'applications.

English version

We consider the problem of the existence and computation of the cycle time, $\chi(f) = \lim_k f^k(x)/k$, where f is a monotone nonexpansive map of $\mathbb{R}^n$. Partial existence results for the cycle time are collected in [62], where approximation results are also given. We have also pursued our previous work on the generalisations of policy iteration algorithms (see [8] and [50]), to compute the cycle time.

6.2.5. Géométrie des métriques de Hilbert et de Thompson/Geometry of Hilbert's and of Thompson's metric

Participants: R. Nussbaum (Rutgers University, USA), C. Walsh.

Les applications monotones homogènes sur un cône, et en particulier les applications max-plus linéaires, sont contractantes au sens large pour deux métriques particulières, celle de Hilbert et celle de Thompson. Le comportement des applications monotones homogènes est donc profondément influencé par les propriétés géométriques de ces deux métriques justifiant ainsi une étude approfondie de celles-ci (voir par exemple [71] pour une application au problème du temps de cycle). Dans [24], on a montré une inégalité, qui peut être interprétée de la façon suivante: regardés à grosse échelle, les espaces métriques considérés plus haut sont (en un certain sens) de courbure négative.

English version

Monotone homogeneous maps acting on cones, which include max-plus linear maps, are nonexpansive in two particular metrics, Hilbert's projective metric and Thompson's metric. Hence, the behaviour of monotone homogeneous maps is influenced by the geometrical properties of these two metrics (see for instance [71] for an application to the cycle time problem). We show in [24] an inequality which may be intrepreted as follows: at a large scale, the above mentioned metric spaces have (in a certain sense) a nonpositive curvature.

6.3. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.3.1. Théorème de séparation max-plus/Max-plus separation theorem

Participants: G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat.

Nous avons établi dans [19] un théorème de séparation général pour les ensembles convexes max-plus, au moyen de projecteurs. Nous en déduisons des résultats de dualité pour les semimodules idempotents.

English version

We prove in [19] a general separation theorem for max-plus convex sets, which extends or refines earlier results, like [82], and provides a geometrical interpretation of the separation property, in terms of projectors. We also develop a duality theory for idempotent semimodules.

6.3.2. Fonctions convexes max-plus/Max-plus convex functions

Participants: G. Cohen, S. Gaubert, J.P. Quadrat, I. Singer (Institute of Mathematics, Bucharest).

On montre dans [20] qu'une fonction convexe max-plus définie sur un espace de dimension finie est enveloppe supérieure des fonctions "affines" qui la minorent. Nous obtenons ce résultat comme conséquence d'un théorème de séparation, qui raffine le résultat général de [19].

English version

We show in [20] that a lower-semicontinuous max-plus convex function is the supremum of its "affine" minorants, by refining some results of [19].

6.3.3. Semi-modules projectifs max-plus/Projective max-plus semimodules

Participants: G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat.

On étudie dans [26] les analogues max-plus des modules injectifs et projectifs. Nous obtenons notamment des résultats de dualité.

English version

We study in [26] the max-plus analogues of projective and injective modules, and obtain duality results based on residuation.

6.3.4. L'équation $Bf = g$, quand B est une conjugaison de Moreau/The equation $Bf = g$, where B is a Moreau conjugacy

Participants: M. Akian, S. Gaubert, V. Kolokoltsov (Nottingham Trent University).

Les conjugaisons de Moreau sont les transformations $f \mapsto Bf$ de la forme

$$Bf(x) = \sup_{y\in Y} b(x,y) - f(y)\,, \forall x \in X\,, \tag{11}$$

pour lesquelles le noyau $b(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est donné. Lorsque $b(x,y) = \langle x,y\rangle$, on retrouve la transformée de Legendre-Fenchel. Les conjugaisons de Moreau sont des cas particuliers de correspondances de Galois. Nous étudions le problème de l'existence et de l'unicité de la solution f à l'équation $Bf = g$. Dans [16], nous traitons ce problème à partir de la notion de sous-différentiel généralisé, relativement au noyau b. Les résultats obtenus généralisent d'anciens résultats de N. Vorobyev et K. Zimmerman sur les opérateurs de dimension finie. Dans le cas de la transformée de Legendre-Fenchel, l'unicité est obtenue par exemple pour les fonctions g convexes essentiellement régulières. Dans [29], nous étudions l'application des résultats de [16] à la caractérisation de taux de grandes déviations.

English version

Moreau conjugacies are transformations $f \mapsto Bf$ of the form (11) where $b(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is given. When $b(x,y) = \langle x, y\rangle$, we recover the Legendre-Fenchel transform. We study the problem of the existence and uniqueness of the solution f of the equation $Bf = g$. We characterise in [16] the solvability in terms of generalised subdifferentials, with respect to the kernel b. In the case of the Legendre-Fenchel transform, the uniqueness result applies for instance to an essentially smooth convex function g. In [29], we apply these results to the characterisation of large deviation rates.

6.4. Théorie des perturbations/Perturbation theory

6.4.1. Introduction

L'étude des valeurs propres d'une matrice perturbée de la forme $a+\epsilon b$, où a et b sont des matrices complexes et ϵ est un paramètre, est un problème classique de théorie des perturbations. Une théorie initiée par Višik et Ljusternik, et complétée par Lidskiĭ, permet de déterminer, pour des valeurs génériques de la perturbation b, les asymptotiques au premier ordre $\mathcal{L}_\epsilon \sim \lambda\epsilon^\Lambda$ de toutes les valeurs propres $\mathcal{L}_\epsilon$ de la matrice perturbée. Certaines situations non génériques donnent lieu à des cas singuliers, qui ont motivé beaucoup de travaux, notamment de Najman, Ma et Edelman, Moro, Burke et Overton. Afin de résoudre ces cas singuliers, nous considérons le problème plus général d'une matrice $\mathcal{A}_\epsilon$ dont les coordonnées ont des asymptotiques au premier ordre de la forme

$$(\mathcal{A}_\epsilon)_{ij} = a_{ij}\epsilon^{A_{ij}} + o(\epsilon^{A_{ij}}) \tag{12}$$

lorsque ϵ tend vers 0, pour certains $a_{ij} \in \mathbb{C}$ et $A_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

English version

A basic problem in perturbation theory consists in studying the eigenvalues of a perturbed matrix of the form $a + \epsilon b$, where a and b are given complex matrices, and ϵ is a parameter. A theory initiated by Višik and Ljusternik, and completed by Lidskiĭ, allows one to determine, for generic values of the perturbation b, the first order asymptotics $\mathcal{L}_\epsilon \sim \lambda\epsilon^\Lambda$ of all the eigenvalues $\mathcal{L}_\epsilon$ of the perturbed matrix. Some nongeneric situations lead to singular cases, which have attracted much attention (see in particular works by Najman; Ma and Edelman; Moro, Burke and Overton). To solve such singular cases, we considered the more general problem of a matrix $\mathcal{A}_\epsilon$ whose entries have first order asymptotics of the form (12) as ϵ tends to 0, for some $a_{ij} \in \mathbb{C}$ and $A_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

6.4.2. Généralisation du théorème de Višik, Ljusternik, Lidskiĭ / The generalised Višik, Ljusternik, Lidskiĭ theorem

Participants: M. Akian, S. Gaubert, R. Bapat (Indian Statistical Institute, New Delhi).

Dans [27], on compare trois suites : la suite $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ des exposants dominants des valeurs propres de $\mathcal{A}_\epsilon$; la suite $\Gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ des valeurs propres (algébriques) min-plus de la matrice $A = (A_{ij})$, c'est-à-dire, la suite des points de non différentiabilité de son polynôme caractéristique min-plus, et une certaine suite β de valeurs critiques construite à partir des valeurs propres min-plus de compléments de Schur min-plus de A, laquelle généralise les exposants dominants trouvés par Višik, Ljusternik, et Lidskiĭ. On montre que Λ est majorée par Γ, pour l'ordre partiel de dominance faible, et que l'égalité a lieu pour des valeurs génériques des a_{ij} (ainsi les valeurs génériques des exposants peuvent être calculées en temps polynomial). On montre aussi que Γ est majorée par β, pour le même ordre, et on caractérise les cas d'égalité en termes d'existence de couplages parfaits dans certains graphes. Spécialisés au cas $\mathcal{A}_\epsilon = a + \epsilon b$, ces résulats permettent de résoudre baucoup de cas qui étaient singuliers dans les approches précédentes. La condition de couplage parfait montre l'impossibilité d'avoir des formules de compléments de Schur à la Lidskiĭ.

English version

We relate in [27] three sequences: the sequence $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$ of the leading exponents of the eigenvalues of $\mathcal{A}_\epsilon$; the sequence $\Gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ of (algebraic) eigenvalues of the matrix $A = (A_{ij})$ (that is of the points of nondifferentiability of its min-plus characteristic polynomial); and a certain sequence β of critical values defined in terms of min-plus Schur complements of A which generalises the sequence of exponents found by Višik, Ljusternik, and Lidskiĭ. We show that Λ is weakly super-majorized by Γ, and that the equality holds for generic values of the a_{ij} (hence, the generic value of the exponents can be computed in polynomial time). We also show that Γ is weakly super-majorized by β, and characterise the equality case in terms of the existence of perfect matchings in certain graphs. When specialised to the case of affine perturbations, $\mathcal{A}_\epsilon = a + \epsilon b$, this result solves many cases which were singular with previous approaches. The perfect matching condition also allows one to understand the limitation of Lidskiĭ-type formulae.

6.4.3. Perturbation de valeurs propres et problème d'affectation optimal/Peturbation of matrix eigenvalues and optimal assignment problem

Participants: M. Akian, S. Gaubert, R. Bapat (Indian Statistical Institute, New Delhi).

Dans [15], on complète les résultats précédents par une approche différente. On montre que les asymptotiques au premier ordre des valeurs propres de (12) peuvent être obtenues pour des valeurs génériques des coefficients a_{ij} : les coefficients dominants des valeurs propres sont les racines de certains faisceaux de matrices construits après résolution de certains problèmes d'affectation optimale. La preuve repose sur un changement d'échelle lui-même obtenu par la résolution de problèmes d'affectation optimale.

English version

In [15], we adopt a different approach. We show that first order asymptotic expansions of the eigenvalues of (12) can be found for generic values of the a_{ij}: the leading coefficients of the eigenvalues are the roots of certain matrix pencils built by solving certain optimal assignment problems. The proof of the result uses some scalings, obtained by solving certain optimal assignement problems.

6.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

6.5.1. Le problème de l'(A, B)-invariance max-plus/The max-plus (A, B)-invariance problem

Participant: R. Katz.

En théorie du contrôle, un point de vue fructueux est l'approche géométrique de Wonham. La thèse de R. Katz [74] s'est intéressée à la généralisation de cette théorie au cas des systèmes à événements discrets régis par des dynamiques max-plus linéaires. Étant donné un système max-plus linéaire récurrent $x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k)$ et un certain espace K représentant une spécification (par exemple, que certains temps de séjour soient majorés par des bornes données), le problème de l'(A, B)-invariance consiste à déterminer un contrôle en boucle fermée, $u(k) = Fx(k)$, tel que les trajectoires du système contrôlé restent dans l'espace "légal" K. (Ce problème apparaît dans de nombreuses applications, par exemple, les classiques politiques "kanban" peuvent être vues comme des cas particuliers de tels feedbacks, visant à garantir la bornitude des stocks). On montre dans [74] et [32] que ce problème peut être résolu pour une sous-classe d'instances, à l'aide d'un algorithme de point fixe inspiré de celui de Wonham pour les systèmes linéaires classiques.

English version

In classical control theory, a fruitful point of view is Wonham's geometric approach. The thesis of R. Katz [74], considered particularly the extension of this approach to the case of max-plus linear discrete event systems, together with various problems of invariance and accessibility. In particular, given a discrete event system represented by a max-plus dynamics $x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k)$ and a certain space K representing a specification (for instance, that certain sojourn times be bounded by given constants), the (A, B)-invariance problem consists in finding a feedback $u(k) = Fx(k)$ which makes the trajectories of closed loop system stay in the "legal" space K. (This problem arises in many applications, for instance, the celebrated "kanban" policy in manufacturing is a special case of such a feedback, ensuring the boundedness of internal stocks.) It is shown in [74] and [32] that this problem can be solved for a subclass of instances by a fixed point algorithm involving max-plus semimodules, which is analogous to Wonham's method for linear systems over fields.

6.5.2. *Semi-modules rationnels max-plus/Max-plus rational semimodules*

Participants: S. Gaubert, R. Katz.

Une des difficultés de l'étude des systèmes linéaires max-plus est que les exemples les plus simples d'espaces linéaires max-plus ne sont en général pas finiment engendrés. Dans [23], [74], nous avons introduit et étudié une classe d'espaces effectifs, bien que non finiment engendrés.

English version

A difficulty in the study of max-plus linear systems, is that even the simplest spaces, like the accessible semimodules or the observable congruences, are not in general finitely generated. Therefore, we introduced and studied a class of effective, although not finitely generated, spaces in [23], [74].

6.6. Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de commande optimale déterministe/The max-plus finite element method for deterministic optimal control problem

Participants: M. Akian, S. Gaubert, A. Lakhoua, H. El Fekih (ENIT, Tunis).

Le sujet de thèse d'A. Lakhoua est le développement de méthodes de discrétisation des équations d'Hamilton-Jacobi exploitant la linéarité max-plus. Nous avons commencé par étudier un analogue max-plus de la méthode des éléments finis de Petrov-Galerkin dans le cas de l'équation d'évolution

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \quad (x,t) \in X \times (0,T]\,, \qquad v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in X\,, \tag{13}$$

où l'hamiltonien $H(x,p)$ est supposé convexe par rapport à p. Comme rappelé dans la §3.2, le semi-groupe d'évolution S^t associé est max-plus linéaire. Ainsi, on peut remplacer l'équation (13) par la formulation variationnelle suivante, définie récursivement par :

$$v^{t+\Delta t} \in \mathcal{W}_h, \qquad \langle z, v^{t+\Delta t}\rangle = \langle z, S^{\Delta t} v^t\rangle, \quad \forall z \in \mathcal{Z}_h\,, \tag{14}$$

pour $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire max-plus et $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont respectivement des semi-modules max-plus finiment engendrés d'éléments finis et de fonctions test. Cette formulation approxime la formulation variationnelle max-plus introduite par Kolokoltsov. Comme (14) peut ne pas avoir de solution $v^{t+\Delta t}$, on définit $v^{t+\Delta t}$ comme étant la sous-solution maximale de (14), qui est obtenue en remplaçant l'égalité par une inégalité, et en maximisant $v^{t+\Delta t}$. Le système dynamique ainsi obtenu s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'un problème de jeux à somme nulle déterministe, contrairement au cas de la méthode proposée initialement par Flemming et McEneaney [60], qui elle est purement max-plus linéaire. Sous des hypothèses standard de régularité, nous avons obtenu des estimations d'erreur similaire au cas de la méthode des éléments finis classique : les projecteurs pour la norme d'énergie sont remplacés par des projecteurs sur des semi-modules max-plus, et l'erreur de projection est mesurée dans la norme du sup. Ces résultats utilisent la théorie développée dans [19], voir §6.3 : l'interprétion géométrique fournie par ces travaux permet de comprendre pourquoi les espaces $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ doivent être différents. Des versions préliminaires de ces résultats sont publiés dans [25]. Une obstruction à ces méthodes est le caractère non creux des matrices obtenues. Le développement de méthodes creuses est à l'étude.

English version

The goal of the thesis of A. Lakhoua is to develop methods of discretization of Hamilton-Jacobi equations exploiting the max-plus linearity. We began by proposing a max-plus analogue of the classical Petrov-Galerkin finite element method, in the case of the evolution equation (13) where the Hamiltonian $H(x, p)$ is convex in the variable p. As we recalled in §3.2, the associated evolution semigroup S^t is max-plus linear. Therefore, we replace Equation (13) by the max-plus variational approximation, defined recursively by (14) for $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Here, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the max-plus scalar product, and $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ are finitely generated max-plus semimodules of finite elements and test functions, respectively. This formulation approximates the max-plus variational formulation due to Kolokoltsov. Since Equation (14) need not have a solution $v^{t+\Delta t}$, we define $v^{t+\Delta t}$ to be the maximal subsolution of (14). This yields a discretized scheme which can be interpreted as the dynamic programming equation of a zero-sum two players repeated game, unlike a max-plus discretization scheme proposed previously by Fleming and McEneaney [60] which is purely max-plus linear. We obtained, under standard assumptions, error estimates which are similar to the case of the classical finite element method: projectors in the energy norm are replaced here by projectors on max-plus semimodules, and the projection error is measured in the sup norm. These results rely on the theory developed in [19], see §6.3: in particular, the geometrical interpretation given there allows one to understand why the spaces $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ must differ. Preliminary versions of these results appeared in [25]. One goal in developing such methods is to allow the approximation of nondifferentiable or even non-continuous solutions. The main obstruction is that the immediate implementation of the method does not lead to sparse schemes. We are currently trying to develop sparse versions of the method.

6.7. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration

Participants: A. Costan, S. Gaubert, E. Goubault (CEA), M. Martel (CEA), S. Putot (CEA).

L'interprétation abstraite est une technique introduite par Cousot qui permet en particulier de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis, qui peuvent être par exemple des treillis d'intervalles, ou même $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^n$. Une difficulté connue est que les algorithmes de point fixe naïfs effectuent parfois un nombre d'itérations considérable. Cette pathologie a donné lieu à de nombreux travaux. Nous nous sommes intéressés à l'application d'algorithmes généraux d'itérations sur les politiques, tels que ceux développés dans [63][50],[8], à de tels problèmes. Ces algorithmes ont été au moins partiellement généralisés au cas des treillis abstraits qui apparaissent en analyse statique. Une première implémentation, qui, à partir d'un programme écrit dans un langage simplifié proche du C, génère la fonction d'intervalles, a permis de commencer à tester la méthode, et de montrer qu'elle améliore les autres approches, en précision et en vitesse, pour certaines classes de programmes (boucles imbriquées). Des difficultés théoriques subsistent : une particularité de l'application en analyse statique est qu'il est souhaitable de calculer le plus petit point fixe (qui fournit l'information la plus précise), il s'agit donc de raffiner l'algorithme afin de toujours obtenir ce plus petit point fixe. Des résultats allant dans ce sens ont été obtenus pour une sous-classe d'applications. Un premier compte rendu de ces travaux apparaît dans [31].

English version

Cousot's abstract interpretation allows one to determine invariants of programs by computing the smallest fixed point of certain monotone maps, defined on complete lattices, for instance in lattices of intervals, or even in $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^n$. A well known difficulty, which has motivated much work in the field, is that the convergence of naive fixed point iterations can be slow. We developed different algorithms, based on the general policy iteration techniques (for repeated games) of [63][50],[8], to compute such fixed points. A first implementation, which starts from a program written in a simplified sublanguage of C, and generates a function of intervals, allowed us to test the method, which seems to improve other approaches, in speed an in precision, for certain classes of programs (with nested loops). This in turns raises theoretical problems, for which results have been obtained, for subclasses of maps: in static analysis, one looks for the smallest fixed point (which yields the most precise information), so the point is to refine the algorithm so that to always get this smallest fixed point. A first account of these works appears in [31].

7. Other Grants and Activities

7.1. Actions internationales

- Convention NSF-INRIA: le reliquat de la convention NSF-INRIA impliquant M. Akian et P.A. Bliman (projet Sosso) et Roger Nussbaum de Rutgers University permet de financer des visites de Roger Nussbaum à l'INRIA.
- Coopération STIC-INRIA-Universités tunisiennes entre les projets Mathfi, Maxplus, et Sydoco de l'INRIA Rocquencourt et le Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur (LAMSIN) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), depuis janvier 2004. Le titre de la coopération est “Méthodes numériques pour le contrôle optimal et applications en finance”, et les responsables en sont H. El Fekih du coté ENIT et S. Gaubert du coté INRIA.
- Bourse de l'Ambassade de France à Tunis, et de l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) : Asma Lakhoua a obtenu une bourse de l'Ambassade de France de 6 mois en 2004, puis une bourse de l'AUF de 10 mois (renouvelable) à partir du 1er novembre 2004, pour sa thèse en cotutelle (Paris 6-ENIT).

7.2. Accueils de chercheurs étrangers

- Roger Nussbaum de Rutgers University, 1 semaine.
- Bas Lemmens de TU-Berlin (maintenant Warwick University), 1 semaine.
- Colin Sparrow de Warwick University, 1 semaine.
- Henda El Fekih de l'ENIT, 1 semaine.

8. Dissemination

8.1. Animation de la communauté scientifique

- M . Akian :
  - Co-responsable du séminaire <<Probabilités, Optimisation, Contrôle>> de l'INRIA Rocquencourt.
- S. Gaubert :
  - Membre du conseil de la formation à l'ENSTA (à partir de septembre 2004).
- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

8.2. Enseignement universitaire

- M. Akian
  - Petites Classes du cours de Mathématiques 1 (calcul différentiel) et 2 (intégration) en première année à l'École des Mines de Paris.
- S. Gaubert
  - Cours (Optimisation Combinatoire) en troisième année à l'Ensta.
  - Cours (Systèmes à Événements Discrets) au DEA Automatique et Traitement du Signal, commun à l'Option Automatique de l'ENSMP.
  - Petites classes d'analyse numérique et optimisation en seconde année à l'École Polytechnique (et correction du contrôle classant de ce cours).
- A. Lakhoua
  - Cours mathématiques en 2ième année de gestion à Paris IX-Dauphine.

8.3. Encadrement de thèse

- Asma Lakhoua. Encadrement assuré par S. Gaubert, M. Akian et Henda El Fekih (ENIT, Tunis).

8.4. Membre de jury

- S. Gaubert :
  - Thèse de Thomas Boulogne (Paris 6, Décembre 04, “Jeux stratégiques non-atomiques et applications aux réseaux”).

8.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- M. Akian
  - Conférence "Set-Valued Analysis" pour le 65ieme anniversaire de Jean-Pierre Aubin (Juin 2004). Titre de l'exposé: "Iterates of semidifferentiable monotone non-expansive maps and zero-sum repeated games".
  - Visite d'une semaine à l'ENIT dans le cadre de la coopération STIC INRIA-Universités tunisiennes et séminaire (Sept. 2004). Titre de l'exposé: "Itérées d'applications monotones, contractantes au sens large, semi-differentiables et jeux répétés à somme nulle".
- S. Gaubert
  - International Conference of Operations Research (ICOR, Kolkata) et visite à New-Delhi (Ravindra Bapat), Janv. 2004.
  - Journée Algèbre Max-plus et applications contractantes (INRIA, mars 2004). Titre de l'exposé: "Iterates of semidifferentiable monotone homogeneous maps and Markov decision problems".
  - Séminaire Parisien d'Optimisation (IHP, Juin 2004). Titre de l'exposé: "Problème d'affectation optimale et asymptotique de valeurs propres".
  - Visite d'une semaine à la Harvard Medical School (Jeremy Gunawardena), Août 2004.
  - Visite d'une semaine à l'ENIT dans le cadre de la coopération STIC INRIA-Universités tunisiennes et séminaire (Déc. 2004). Titre de l'exposé: Perturbation de valeurs propres de matrices et algèbre min-plus.
- A. Lakhoua
  - Congrés d'Analyse Numérique (CANUM, Juin 2004), Titre du Poster: "Méthode d'éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de commande optimale déterministe en horizon fini".
  - International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS, Juillet 2004). Titre de l'exposé: "A max-plus finite element method for solving finite horizon deterministic optimal control problems".
- J.-P. Quadrat
  - Journée Algèbre Max-plus et applications contractantes (INRIA, mars 2004). Titre de l'exposé: "Max-plus algebra and microscopic modelling of traffic systems".
- C. Walsh
  - Journée Algèbre Max-plus et applications contractantes (INRIA, mars 2004). Titre de l'exposé: "Max-plus Martin boundaries".

9. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", vol. 351, n^o 11, 1999, p. 4515–4543.

[2] M. AKIAN, R. B. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", Also INRIA Research Report RR-3450, vol. 327, Série I, 1998, p. 927–932, http://www.inria.fr/rrrt/rr-3450.html.

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", vol. 52, n^o 2, 2003, p. 637-679.

[4] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Invertibility of functional Galois connections*, in "C. R. Acad. Sci. Paris", vol. Ser. I 335, 2002, p. 1-6.

[5] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor)., Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[6] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", vol. 11, n^o 2, 2001, p. 153–188.

[7] F. BACCELLI, G. COHEN, G. J. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992.

[8] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", vol. 14, n^o 4, 1999.

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J. P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", vol. 23, 1999, p. 207–219.

[10] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 40, n^o 12, Dec 1995, p. 2014–2025.

[11] S. GAUBERT. *On the Burnside Problem for Semigroups of Matrices in the (max,+) Algebra*, in "Semigroup Forum", vol. 52, 1996, p. 271–292.

[12] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", vol. 44, n^o 4, 1999, p. 683–697.

[13] S. GAUBERT, M. PLUS. *Methods and Applications of (max,+) Linear Algebra*, in "STACS'97, Lübeck", R. REISCHUK, M. MORVAN (editors)., LNCS, n^o 1200, Springer, March 1997.

[14] MAX-PLUS WORKING GROUP, PRESENTED BY J.P. QUADRAT. *Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control*, in "Proceedings of the ICM, Zurich", August 1994.

Articles in referred journals and book chapters

[15] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", Also arXiv:math.SP/0402438, vol. 339, 2004, p. 103–108, http://www.inria.fr/rrrt/rr-5120.html.

[16] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. N. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. L. LITVINOV, V. P. MASLOV (editors)., Contemporary Mathematics, To appear. Also ESI Preprint 1447, arXiv:math.FA/0403441, AMS.

[17] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, Accepted for publication in Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. Also arXiv:math.DS/0410084, 2004.

[18] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *Discrete max-plus spectral theory*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. L. LITVINOV, V. P. MASLOV (editors)., Contemporary Mathematics, To appear. Also ESI Preprint 1485, arXiv:math.SP/0405225, AMS.

[19] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", Also arXiv:math.FA/0212294, vol. 379, 2004, p. 395–422.

[20] G. COHEN, S. GAUBERT, J. QUADRAT, I. SINGER. *Max-plus convex sets and functions*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. L. LITVINOV, V. P. MASLOV (editors)., Contemporary Mathematics, To appear. Also ESI Preprint 1341, arXiv:math.FA/0308166, AMS.

[21] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", PII: S 0002-9947(04)03470-1, arXiv:math.FA/0105091, vol. 356, n° 12, 2004, p. 4931-4950.

[22] S. GAUBERT, R. KATZ. *Reachability problems for products of matrices in semirings*, Accepted for publication in Int. J. of Algebra and Comp.,arXiv:math.OC/0310028, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4944.html.

[23] S. GAUBERT, R. KATZ. *Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach of discrete event systems*, in "Kybernetika", Also arXiv:math.OC/0208014, vol. 40, 2004, p. 153–180.

[24] R. D. NUSSBAUM, C. WALSH. *A Metric Inequality for the Thompson and Hilbert Geometries*, in "J. Inequalities Pure Appl. Math.", arXiv:math.MG/0405130, vol. 5, n° 3, 2004.

Publications in Conferences and Workshops

[25] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *A max-plus finite element method for solving finite horizon deterministic optimal control problems*, in "Proceedings of MTNS'04, Louvain, Belgique", Also arXiv:math.OC/0404184, http://www.inria.fr/rrrt/rr-5163.html.

[26] J.-P. Q. G. COHEN. *Projection and Aggregation in Maxplus Algebra*, in "Proceedings of Actra (Workshop on the Applications of advanced Control Theory to Robotics and Automation), Roma", To appear, Birkhauser, June 2004.

Internal Reports

[27] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Generic Asymptotics of Eigenvalues and Min-Plus Algebra*, Also arXiv:math.SP/0402090, Research report, n° RR-5104, INRIA, Feb 04, http://www.inria.fr/rrrt/rr-5104.html.

[28] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, Also arXiv:math.MG/0412408, Research report, n° RR-5429, INRIA, Dec 2004, http://www.inria.fr/rrrt/rr-5429.html.

Miscellaneous

[29] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Invertibility of Moreau conjugacies and large deviations*, En préparation, 2004.

[30] M. AKIAN, S. GAUBERT, R. NUSSBAUM. *Uniqueness of fixed points of nonexpansive semi-differentiable maps*, Preprint, 2004.

[31] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, Preprint, 2004.

[32] R. KATZ. *Max-plus (A, B)-invariant spaces and discrete event systems*, Preprint, 2004.

Bibliography in notes

[33] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, x+473.

[34] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Generic Asymptotics of Eigenvalues using Min-Plus Algebra*, in "Proceedings of the Satellite Workshop on Max-Plus Algebras, IFAC SSSC'01, Praha", Elsevier, 2001.

[35] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, January 2002.

[36] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, p. 219-230.

[37] R. B. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", vol. 275/276, 1998, p. 3–18.

[38] R. B. BAPAT, T. E. S. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, n° 64, Cambridge university press, 1997.

[39] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98), Cagliari, Italy", IEE, 1998.

[40] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001.

[41] T. S. BLYTH, M. F. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972.

[42] J.-Y. L. BOUDEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, n° 2050, Springer, 2001.

[43] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Ph. D. Thesis, Delft University of Technology, Dec 1993.

[44] S. M. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, PhD Thesis, Caltech, 1990.

[45] P. BUTKOVIC. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Lin.Alg. and Appl.", vol. 367, 2003, p. 313-335.

[46] Z. Q. CAO, K. H. KIM, F. W. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984.

[47] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000.

[48] W. CHOU, R. B. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", vol. 34, 1986, p. 6219–34.

[49] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[50] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, Thèse, spécialité Mathématiques et Automatique, École des Mines, Dec. 2001.

[51] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. M. GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes", July 1998.

[52] G. COHEN, D. DUBOIS, J. P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport de recherche, n° 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, http://www.inria.fr/rrrt/rr-0191.html.

[53] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", To appear.

[54] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", vol. 78, n° 3, 1980, p. 385–390.

[55] R. A. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, n° 166, Springer, 1979.

[56] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge", Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 354–382.

[57] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", vol. 9, 2004, p. 1–27 (electronic).

[58] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, vol. XXI, Gauthier Villars, Paris, 1953.

[59] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", vol. 324, n° 9, 1997, p. 1043–1046.

[60] W. FLEMING, W. MCENEANEY. *A max-plus based algorithm for an HJB equation of non-linear filtering*, in "SIAM J. Control and Opt.", 2000, p. 683–710.

[61] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras I: foundations*, arXiv:math.RT/0104151, 2001.

[62] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *Existence of the cycle time for some subtopical functions*, preprint, 2004.

[63] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 326, Série I, 1998, p. 43–48.

[64] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

[65] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", vol. 323, n° 4, 1996, p. 371–375.

[66] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOC, Paris, 2002.

[67] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", vol. 2, 1977, p. 25-41.

[68] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984, Eyrolles, Paris, 1979.

[69] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Annals of Discrete Mathematics", vol. 19, 1984, p. 147-164.

[70] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", vol. 293, 2003, p. 141–167.

[71] J. GUNAWARDENA, C. WALSH. *Iterates of Maps which are Non-expansive in Hilberts's Metric*, in "Kybernetika", vol. 39, n° 2, 2003, p. 193–204.

[72] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", vol. 72, 1990, p. 27–38.

[73] H. P. HILLION, J. M. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 34, n° 1, Jan 1989, p. 3-9.

[74] R. KATZ. *Problemas de alcanzabilidad e invariancia en el álgebra max-plus*, Tesis doctoral, Universidad Nacional de Rosario, Argentina, Noviembre 2003.

[75] V. N. KOLOKOLTSOV, V. P. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[76] M. G. KREĬN, M. A. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", vol. 1950, n° 26, 1950, 128.

[77] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", vol. 3, 1993.

[78] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", To appear.

[79] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Thèse de doctorat, Université Rennes 1, September 2002.

[80] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Thèse, Université de Tours, November 2001.

[81] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", vol. 81, 1991, p. 137–145.

[82] G. L. LITVINOV, V. P. MASLOV, G. B. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", Also arXiv:math.FA/0009128, vol. 69, n° 5, 2001, p. 696–729.

[83] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J. P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car traffic law*, Rapport de Recherche, n° 4324, INRIA, 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html.

[84] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", vol. 8, n° 3, July 2002, p. 519–562.

[85] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control of Regular Towns*, Rapport de Recherche, n° 4276, INRIA, 2001, http://www.inria.fr/rrrt/rr-4276.html.

[86] V. P. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, trad. fr. 1987, Edition Mir, Moscou, 1973.

[87] V. P. MASLOV, S. N. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[88] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties*, Survey for the Real Algebraic and Analytic Conference in Rennes, arXiv:math.AG/0108255, 2001.

[89] P. D. MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, Rapport de recherche, LAAS, 1990.

[90] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[91] R. D. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", vol. 75, n^o 391, 1988.

[92] G. J. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", vol. 1, n^o 2, 1991, p. 177-207.

[93] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor)., Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[94] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu", Dec. 1990.

[95] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, n^o 119, Chapman & Hall, 2001.

[96] J. P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Note C.R.A.S.", n^o 311, 1990, p. 745-748.

[97] I. V. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", vol. 3, n^o 2, 1967, p. 66-78.

[98] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", vol. 121, 2001, p. 221–246.

[99] A. M. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000.

[100] S. N. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", n^o 3, 2002, p. 163–180, 192.

[101] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, p. 143–150.

[102] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", vol. 28, n^o 3-4, 1994, p. 277–294.

[103] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997.

[104] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", vol. 4, n^o 3, 2004, p. 389–411.

[105] O. Y. VIRO. *Real plane algebraic curves*, in "Proceedings of the European Congress of Mathematicians", 2000.

[106] N. N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", in russian, vol. 3, 1967, p. 39–71.

[107] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", Max-plus algebras, vol. 293, n^o 1, 2003, p. 45–54.

[108] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, (in Czech), Ekonomický ùstav C ˇSAV, Praha, 1976.

[109] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981.