INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

Paris - Rocquencourt

THEME NUM

Activity Report

2007

Table of contents

1. Team

Responsable scientifique/Head of project-team
Stéphane Gaubert [DR, Inria]

Responsable permanent/Vice-head of the project-team
Marianne Akian [CR, Inria, HdR]

Assistante de projet/Administrative assistant
Martine Verneuille [AI, Inria]

Chercheurs permanents/Research scientist
Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus/*Metalau project, part time member of Maxplus project*, HdR]
Cormac Walsh [CR, Inria]

Collaborateurs extérieurs/External collaborators
Guy Cohen [Professeur ENPC, HdR]
Michel Gondran [HdR]

Chercheurs invités/Visiting scientists
Ricardo Katz [Conicet, sept.-déc/*Sept.-Dec.*]

Doctorants/Ph.D. Students
Asma Lakhoua [ATER Paris 6, Cotutelle Paris 6 - École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (Université de Tunis El Manar)]
Benoît David [AMN Paris 6, jusqu'au 31 Août 07/*until Aug. 31, 07*]
Assale Adje [Bourse de la Région Île-de-France, École Polytechnique, à partir d'oct./*since Oct.*]
Meisam Sharify [CORDI-S, École Polytechnique, à partir de déc./*since Dec.*]
Guillaume Sagnol [CRE-INRIA-France-Telecom, École des Mines de Paris, à partir d'oct./*since Oct.*]

Stagiaires/Interns
Emilio Seijo [stagiaire international INRIA commun au projet BANG, ITAM, Mexico, jusqu'au 28 fév./*INRIA International internship, also with BANG projet, ITAM, Mexico, until Feb. 28*]
Guillaume Sagnol [École des Mines de Paris, de janv. à juin/*Jan.–Jun.*]
Assale Adje [financement par l'INRIA et le CEA, Master Paris 6, Mars–Juin/*Mar.–Jun.*]
Prakhar Goyal [stagiaire international INRIA, IIT Bombay, mai-juil./*INRIA International internship, IIT Mombay, May-Jul.*]
Shantanu Gangal [stagiaire international INRIA, IIT Bombay, mai-juil./*INRIA International internship, IIT Mombay, May-Jul.*]
Adrien Brandejsky [ENS Cachan et Master Paris 6, mars-sept./*Mar.-Sept.*]
Jean-Paul Poveda [ENSTA, mai–août/*May–Aug.*]

Personnel imaginaire/Imaginary research scientist
Max Plus [Nom collectif pour le groupe de travail de Rocquencourt[1]/*Collective name for the Rocquencourt team*[2]]

[1] Réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2] *Comprising or having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

2. Overall Objectives

2.1. Mots-clés/Keywords

Mots-clés : Algèbre max-plus, algèbre tropicale, systèmes à événements discrets, programmation dynamique, décision markovienne, contrôle optimal déterministe et stochastique, théorie des jeux, théorie des perturbations, théorie de Perron-Frobenius non linéaire, applications contractantes, analyse numérique, mathématiques discrètes, recherche opérationnelle.

Keywords: *Max-plus algebra, Tropical algebra, Discrete event dynamic systems, Dynamic programming, Markov decision, Deterministic and Stochastic optimal control, Game theory, Perturbation theory, Nonlinear Perron-Frobenius theory, Nonexpansive maps, Numerical analysis, Discrete mathematics, Operations Research.*

2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes dijunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a,b) \mapsto a \oplus b = \max(a,b)$ et de la multiplication $(a,b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a,b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement "l'algèbre max-plus".

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [71]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [68], [83], [122], [124], [125]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [57]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [113], [111], [102], [89], [80], [116], [97], [81], [73], [46]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [101], [102], [89], grandes déviations [110], asymptotiques à température nulle en physique statistique [59]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [90], [106], [99], [50], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [105], et la théorie des jeux [114], [38]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [58], [93], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [117], [86], [118], [91], [108]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [79], [121], [103], [120] et en théorie des représentations [75], [52], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a,b) \mapsto a \oplus b = \max(a,b)$ and the multiplication $(a,b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a,b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [71]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [68], [83], [122], [124], [125]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [57]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [113], [111], [102], [89], [80], [116], [97], [81], [73], [46]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [101], [102], [89], large deviation asymptotics [110], or zero temperature asymptotics in statistical physics [59]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [90], [106], [99], [50], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [105] and game theory [114], [38]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [58], [93] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [117], [86], [118], [91], [108]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [79], [121], [103], [120] and in representation theory [75], [52], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0=i,\ \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \quad , \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \le s \le n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \quad . \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \quad , \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \quad , \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \le t \le T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot,0)=\phi,\quad \frac{\partial v}{\partial T}+H(x,\frac{\partial v}{\partial x})=0,\qquad H(x,p)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(-p\cdot y-L(x,y)\right)\ , \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\inf(\lambda+v,\mu+w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [102], [89], [97]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [113], [122], [68], [82], [64], [49], [6] pour la dimension finie, et [102], [89] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [73].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1,...,n$, and let $M_{ij}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell=(\ell_0,...,\ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0=i$ and final node $\ell_k=j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t)\in\mathbb{R}^n$, for $0\le t\le T$, and $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, then $\inf(\lambda+v,\mu+w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [102], [89], [97]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [113], [122], [82], [64], [68], [49], [6] for the finite dimension case, and [102], [89] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the "Aubry-Mather" theory [73].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lccc}\text{monotonie}/\mathit{monotonicity} & x\le y & \Rightarrow & f(x)\le f(y)\ ,\\ \text{contraction}/\mathit{nonexpansiveness} & \|f(x)-f(y)\|_\infty & \le & \|x-y\|_\infty\ .\end{array} \tag{6}$$

Ici, l'opérateur f est une application d'un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\leq$ désigne l'ordre partiel usuel, et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l'ensemble des états est $\{1,...,n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l'addition d'une constante [67] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d'opérateurs : l'équation de la programmation dynamique d'un problème de commande optimale à horizon fini s'écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d'un problème à horizon infini (y compris le cas d'un problème d'arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d'un problème avec facteur d'actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [38]. Il permet d'inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l'extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d'homogénéité. Les problèmes auxquels on s'intéresse typiquement sont la structure de l'ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l'existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l'infini (afin d'obtenir le coût ergodique d'un problème de contrôle optimal ou de jeux), l'asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [106] pour un panorama. Signalons que dans [77],[7], des algorithmes inspirés de l'algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir le §6.7 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1,...,n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [67] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [38]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [106] for more background. In [77],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see

§3.5 below, and we shall see in §6.7 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [111], [104], [69], [46],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [101]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi, voir le §6.6.2 ci-dessous.

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [111], [104], [69], [46], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [101]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations, see §6.6.2 below.

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [60], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [64] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [107], [85], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [48]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [76], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [78], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [117], [86], [96], [118], [91], [108]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [95].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [60], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [64] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [107], [85], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [48]. Max-plus automata models [76], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [78], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [117], [86], [96], [118], [91], [108]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [95].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [71], [53], [122], [124],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [119], [115], [42] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [84], [109],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [70].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [71], [53], [122], [124],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [119], [115], [42] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyedra, determinants, symmetrisation [84], [109],[6]). The subject has attracted recently a new attention [70].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon} \asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon} \quad , \qquad e^{-a/\epsilon} \times e^{-b/\epsilon} = e^{-(a+b)/\epsilon} \quad , \tag{7}$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [101], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [110] pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [41], [40], [39] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [121].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [101], motivated by the study of WKB-type asymptotics of Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [110] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [41], [40], [39] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [121].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [55], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [87], pour des réseaux ferroviaires [54] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [48]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [51], [94]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [100], [98], [72].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [55], or computing the throughput of a workshop [87] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [54] and [48]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [51], [94]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [100], [98], [72].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [56]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [62]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [123]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [78] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [95] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [95]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [92].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [56]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [62]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [123]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [78] for the jobshop case, a simpler representation was given in [95] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [95]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [92].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

Les techniques d'analyse statique de programme par interprétation abstraite permettent de déterminer automatiquement des invariants en résolvant de "gros" problèmes de points fixes dans des treillis, comme par exemple des treillis d'intervalles. Ces problèmes sont justiciables de la théorie des opérateurs monotones et des algorithmes déjà évoqués dans la section 3.3. Voir la section 6.7 ci-dessous.

English version

Static analysis techniques via abstract interpretation allow to compute invariants of programs by solving large fixed points problems for monotone self-maps of lattices. The theory of monotone operators already reviewed in § 3.3, and the related algorithms, can be applied to such problems, see § 6.7 below.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [65].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [65].

5. Software

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab, et qui est intégrée par défaut dans scilab gtk. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [47], [94]. Il faut aussi noter que le groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site, and which is included by default in scilab gtk. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [47], [94]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations

Dans son travail de thèse, Asma Lakhoua a développé des programmes en Scilab et C, exploitant la boîte à outils Maxplus de Scilab, implémentant de nouvelles discrétisations des équations d'Hamilton-Jacobi correspondant aux problèmes de contrôle optimal déterministe, voir le §6.6.2 ci-dessous.

English version

Asma Lakhoua has developed, as part of her PhD thesis work, programs in Scilab and C, exploiting the Max-plus toolbox, allowing to test max-plus discretisation schemes for Hamilton-Jacobi equations corresponding to deterministic optimal control problems, see §6.6.2 below.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus/Max-plus spectral theory

6.1.1. Introduction

On s'intéresse au problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x,y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{8}$$

dans lequel le noyau $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est donné. On cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. En programmation dynamique, l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x, y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Comme nous l'avons rappelé dans le §3.2 et le §3.3, le problème spectral (8) intervient en contrôle ergodique. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité. Le cas d'un ensemble S non compact n'a pas été beaucoup étudié jusqu'ici.

English version

We study the max-plus spectral equation (8), where the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is given, and the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. In dynamic programming applications, the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. As we recalled in §3.2 and §3.3, this spectral problem arises in ergodic optimal control. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties. The case where S is non-compact has not been much studied.

6.1.2. La frontière de Martin de problèmes de contrôle optimal déterministe/The Martin boundary of deterministic optimal control problems

Participants: M. Akian, S. Gaubert, C. Walsh.

Lorsque $\lambda = 0$, l'équation (8) a une analogie évidente avec l'équation définissant les fonctions harmoniques en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. Dans [15], nous avons introduit l'analogue max-plus de la frontière de Martin, et obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (8) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) \ , \tag{9}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u est une fonction semi-continue supérieurement (pour la topologie de la convergence simple) à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, jouant le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de quasi-géodésiques (il s'agit là d'une légére relaxation de la notion de géodésique, pour fixer les idées, dans le cas particulier des espaces métriques, un chemin infini est une quasi-géodésique si pour tous points x et y de celui ci, la différence entre la longueur du sous-chemin de x à y et la distance de x à y peut être bornée indépendamment du choix de x et y). La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des horofonctions (fonctions de Busemann généralisées).

On a étudié par la suite les modèles à temps continu. Dans ce cadre, on cherche les points fixes, à constante additive près, des semi-groupes de Lax-Oleinik. Ceux-ci sont aussi les solutions “weak-KAM” de Fathi ou, de manière équivalente, les solutions de viscosité de l’équation d’Hamilton-Jacobi ergodique. Dans [45],[36], [21] nous développons une version temps continu de la théorie de frontières de Martin max-plus. Celle-ci inclue des résultats de représentation, la notion de quasi-géodésique, et l’extrémalité des points de la frontière minimale (points de Busemann). Ces résultats s’appliquent aussi au cas de Lagrangiens non réguliers.

English version

When $\lambda = 0$, the equation (8) has an obvious analogy with the equation defining harmonic functions in classical or probabilistic potential theory. We have introduced in [15] a max-plus analogue of the classical Martin boundary, and obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (8) may be represented as in (9) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u is an upper semi-continuous map (with respect to the pointwise convergence topology) with values in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ playing the role of the spectral measure. We showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain (quasi) geodesics. The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions).

We also established continuous times analogues of these result. In the continuous time setting, one wishes to find the fixed points, up to a constant, of Lax-Oleinik semigroups. These are also the weak-KAM solutions of Fathi or, equivalently, the viscosity solutions of the ergodic Hamilton-Jacobi equation. In [45],[36],[21] we develop a continuous-time version of the boundary theory, including representation results, the notion of “almost–geodesic”, and the extremal property of the points in the minimal boundary (Busemann points). These results can be applied to nonsmooth Lagrangians.

6.1.3. La frontière d’espaces normés/The boundary of normed spaces

Participant: C. Walsh.

Dans le contexte plus restrictif des espaces métriques, on recontre un cas particulier essentiel de la frontière de Martin max-plus : la frontière définie par les horofonctions ou horo-frontière. Néanmoins, il existe peu d’exemples de calcul explicite de cette frontière. Dans [19], on étudie l’horo-frontière d’espace vectoriels normés de dimension finie. En particulier, on caractérise les points de Busemann, qui sont définis comme les limites de quasi-géodésiques. Comme cela a été montré dans [15], ces calculs permettent de déterminer explicitement les vecteurs propres des semi-groupes de Lax-Oleinik pour des lagrangiens de la forme $\|x\|^p/p$, où $\|\cdot\|$ est une norme arbitraire et $p > 1$.

English version

A boundary similar to the max-plus Martin boundary has already been constructed for entirely different reasons in the more restrictive setting of metric spaces (the horofunction boundary). However, so far, there are few examples where this boundary has been explicitly computed. In [19], we investigate the horofunction boundary for finite-dimensional normed spaces. In particular, we determine the Busemann points, which are those points that are the limits of ‘almost-geodesics’. As was shown in [15], these are relevant to finding the eigenvectors of Lax–Oleinik semigroups with Lagrangians such as $\|x\|^p/p$ with $\|\cdot\|$ an arbitrary norm and $p > 1$.

6.1.4. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry

Participants: C. Walsh, B. Lemmens (Warwick University, UK).

L’un des intérêts de l’horo-frontière est de renseigner sur le groupe des isométries d’un espace métrique. En effet, ce groupe agit naturellement sur l’horofrontière, et cette action peut parfois être mieux comprise que l’action du groupe sur l’espace d’origine.

Nous avons étudié le groupe des isométries pour la métrique de Hilbert. De La Harpe [126] a donné plusieurs conjectures relatives à ce groupe. Nous conjecturons que le groupe des isométries est exactement le groupe des transformations linéaires projectives à moins que le domaine ne soit une coupe d'un cône symmétrique non-Lorentzien. Nous avons démontré cette conjecture lorsque le domaine est un polytope.

Notre méthode utilise les résultats de [20]. Dans cet article, on a étudié en détail l'horo-frontière de la géométrie de Hilbert On a déterminé ses points de Busemann et donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les horofonctions soient des points de Busemann. De plus, on a montré que toute suite qui converge vers un point de l'horo-frontière, converge aussi au sens usuel vers un point de la frontière euclidienne du domaine sur lequel la métrique est définie.

English version

One use for the horofunction boundary is to study the group of isometries of a metric space. This is because this group has a well defined action on the horoboundary and it is likely that in many cases this action will be easier to understand than the action on the space itself.

We have been investigating the isometries of the Hilbert geometry. De La Harpe [126] has previously made several conjectures about the isometry group of this space. We conjecture that the isometry group is exactly the group of projective linear transformations unless the domain on which the geometry is defined is a cross section of a non-Lorentzian symmetric cone. We have managed to prove this conjecture in the case of a polytope domain.

Our method uses the knowledge of the horoboundary in [20]. In this paper, we worked out in detail the horofunction boundary of the Hilbert geometry. We determined its set of Busemann points and gave necessary and sufficient conditions for all horofunctions to be Busemann points. In addition we showed that any sequence of points converging to a point in the horofunction boundary also converges in the usual sense to a point in the Euclidean boundary of the domain on which the metric is defined.

6.1.5. Horo-frontières de groupes/The horoboundaries of groups

Participant: C. Walsh.

Les graphes de Cayley de groupes infinis finiment engendrés forment une classe intéressante d'espaces métriques, et l'étude de leur frontière est motivée par la théorie géométrique des groupes. Dans ce contexte, il est souvent possible de trouver une description combinatoire de la frontière définie par les horofonctions. Dans [37], on détermine l'horo-frontière de groupes d'Artin à deux générateurs, une classe qui contient le groupe de tresses sur 3 brins.

Dans [112], Rieffel a employé l'horo-frontière pour étudier la géométrie non-commutative associée à $\mathbb{Z}^n$. Ses résultats utilisent le fait que l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur son horo-frontière a suffisamment d'orbites finies. Nous tentons d'étendre ce résultat au cas des groupes nilpotents, en commençant par montrer que l'action d'un groupe nilpotent sur son horo-frontière a toujours une orbite finie.

English version

The Cayley graphs of finitely-generated infinite groups form a very interesting class of metric spaces, and the study of their boundaries is motivated by geometric group theory. In this setting, there is often the possibility of finding a combinatorial description of the horoboundary. In [37], we determine the horoboundary of Artin groups with two generators, a class that includes the braid group on three strands.

In [112], Rieffel used the horoboundary to prove results about the non-commutative geometry associated to $\mathbb{Z}^n$. His results rely on the fact that the action of $\mathbb{Z}^n$ on its horoboundary has sufficiently many finite orbits. We have been attempting to extend these results to nilpotent groups, starting by showing that the action of a nilpotent group on its horoboundary always has a finite orbit.

6.2. Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et application au contrôle optimal et aux jeux/Non-linear Perron-Frobenius theory, with application to optimal control and games

6.2.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.3, les applications qui sont contractantes pour certaines métriques, ou qui vérifient certaines propriétés de monotonie ou d'homogénéité, jouent un rôle central en programmation dynamique. Nous étudions plusieurs problèmes concernant la description de l'ensemble des points fixes et le comportement itératif de ces applications, motivés par des questions de contrôle optimal ou de théorie des jeux.

English version

As detailed in §3.3, nonlinear maps that are nonexpansive in some metrics, or that satisfy monotonicity or homogeneity conditions, play a central role in dynamic programming. We have studied several problems concerning the description of the fixed points and of the dynamical behaviour of these maps, motivated by questions arising from optimal control or game theory.

6.2.2. Points fixes d'applications monotones/Fixed points of order preserving maps

Participants: M. Akian, S. Gaubert, B. Lemmens (Warwick, UK), R. Nussbaum (Rutgers University, USA).

On développe des méthodes générales pour étudier l'existence et l'unicité des points fixes d'applications f vérifiant des propriétés de monotonie et des propriétés auxiliaires: homogénéité, contraction au sens large pour des métriques telles que la métrique de Hilbert, convexité, ... On s'intéresse aussi au comportement asymptotique des itérées de telles applications. Dans ce but, on a poursuivi notamment l'étude des rayons spectraux non-linéaires d'applications monotones homogènes [35], [24], ainsi que l'étude des applications monotones convexes y compris dans le cas "expansif" [33].

English version

We are interested in general techniques to show the existence and uniqueness of fixed points of order preserving maps satisfying some auxiliary properties, like homogeneity, nonexpansiveness in Hilbert type metric, convexity, ... We also study the asymptotic behavior of the iterates of such maps. To this end, we pursue the study of non-linear spectral radii of order preserving homogeneous maps [35], [24] and the study of order preserving convex possibly expansive maps [33].

6.2.3. Solutions de viscosité stationnaires d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman dégénérées/Stationary viscosity solutions of degenerated Hamilton-Jacobi-Bellman equations

Participants: M. Akian, S. Gaubert, B. David.

Les vecteurs propres additifs non linéaires du semi-groupe associé à un problème de contrôle de diffusion coïncident, sous certaines hypothèses, avec les solutions de viscosité stationnaires des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman correspondantes. Dans le cas particulier déterministe, ces solutions sont étudiés dans le cadre de la théorie KAM faible et de la théorie spectrale max-plus (caractérisations au moyen de l'ensemble d'Aubry ou de la frontière de Martin), voir § 6.1.2. Dans [3], nous avons obtenu des caractérisations similaires pour des problèmes de contrôle stochastique à espace d'etat fini et temps discret.

En s'inspirant de [3], on a étudie dans [13] des problèmes de contrôle de diffusion sur un tore dans le cas dégénéré où il existe un nombre fini, k, de points "critiques" en lesquels la dynamique s'annule et le Lagrangien est minimal. On montre qu'une solution stationnaire de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante est uniquement déterminée par sa restriction à ce points critiques, et que l'ensemble des solutions stationnaires est isométrique au sens de la norme sup à un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^k$. L'ensemble de ces points critiques joue ainsi le rôle de l'ensemble d'Aubry.

English version

The nonlinear additive eigenvectors of the semigroup associated to a diffusion control problem coincide, under some assumptions, with the stationary viscosity solutions of the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation. In the particular deterministic case, these solutions can be characterised by means of the weak KAM theory or max-plus spectral theory (see §6.1.2). In [3], we obtained similar characterisations for stochastic control problems with finite state space and discrete time.

In [13], we study optimal control problem for diffusions on the torus, in the degenerate case in which there is a finite number, k, of "critical" points where the dynamics vanishes and the Lagrangian is minimal. We show that a stationnary solution of the associated Hamilton-Jacobi-Bellman equation is uniquely determined by its restriction to the critical points, and that the set of stationnary solutions is sup-norm isometric to a convex subset of $\mathbb{R}^k$. Hence, the set of critical points plays precisely the role of the Aubry set.

6.3. Autres applications de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire/Other applications of non-linear Perron-Frobenius theory

6.3.1. Un modèle de parcours auto-validant du web/A model of self-validating effects of web surfing

Participants: M. Akian, S. Gaubert, L. Ninove (UCL, Belgique), J.P Poveda.

Le "PageRank" le plus couramment utilisé est un ordre des pages web calculé à partir du graphe du web, lequel a pour noeuds les pages web et pour arcs les hyperliens : on suppose qu'un visiteur d'une page web choisit la page suivante qu'il va visiter de manière uniforme parmi les pages pointées par la page qu'il est en train de visiter. Ainsi, le parcours d'un visiteur du web est une marche aléatoire sur le graphe du web et on ordonne les pages web par la valeur de la mesure invariante de cette marche aléatoire. On a proposé dans [34] un modèle tenant compte du fait qu'un visiteur du web peut avoir une idée a priori de la valeur des pages, et ainsi favoriser, dans ses choix de page suivante, les pages "réputées". Notre modèle suppose que la réputation est liée au PageRank, lequel est encore défini comme la fréquence de viste des pages. On définit ainsi un "T-pagerank", où l'inverse de la "température" T mesure l'influence de la réputation des pages sur la visite du web. Lorsque T tend vers l'infini, on retrouve le PageRank standard. Notre étude a permis de mettre en évidence des effets auto-validants. Ceux-ci se traduisent par des phénomènes d'instabilité du T-PageRank en deça d'une température critique, mesurant le degré de confiance en le classement au dela duquel celui-ci cesse d'être fiable. Les preuves des résultats font appel à la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire. Le projet personnel en laboratoire de J.P. Poveda [30] a permis d'expérimenter sur des fragments du graphe du web le calcul du T-PageRank en évaluant notamment la température critique.

English version

The "PageRank" is a well known ranking of the webpages which uses the graph of the web, the nodes of which are the webpages and the arcs of which are hyperlinks. One assumes that a websurfer chooses randomly the next webpage she will visit, among the pages pointed from the page she is visiting, with a uniform distribution. Hence the trajectory of the websurfer is a random walk on the web graph, and one ranks webpages by the value of the invariant measure of this random walk. We have proposed in [34] a model taking into account the fact that a websurfer may have an a priori idea of the value of pages, favouring, in his choice of next pages, pages from "reputed" sites. Our model assumes that the reputation is related to the PageRank, which is still defined as the frequency of visit of pages. This justifies the definition of a T-PageRank, for which the inverse of the temperature T measures the influence of the reputation of pages on the visit of the web. When T tends to infinity, we recover the classical PageRank. Our study brought to light self-validating effects, which are reflected by an instability of the T-PageRank, when T is inferior to a critical temperature which measures the degree of confidence in the ranking above which the ranking is no longer reliable. The proofs of these results rely on non-linear Perron-Frobenius theory. The internship of J.P. Poveda [30] allowed us to compute the T-PageRank for some parts of the webgraph, and to estimate in particular the critical temperature.

6.3.2. Calcul de la valeur propre de Perron et application en chronothérapeutique/Computation of the Perron eigenvalue with an application to chronotherapeutics

Participants: J. Clairambault (Projet BANG, INRIA), S. Gaubert, T. Lepoutre (ENS Lyon puis Projet BANG, INRIA), B. Perthame (Projet BANG, INRIA et ENS), E. Seijo.

On s'intéresse à des modèles de systèmes dynamiques monotones structurés en age représentant la croissance de populations de cellules (saines ou tumorales) à la suite de travaux de Clairambault et Perthame. Il s'agit de comprendre l'influence du contrôle circardien sur la croissance des cellules. On donne dans [16] des inégalités reliant le multiplicateur de Floquet, qui fournit le taux de croissance dans le cas périodique, et la valeur propre de Perron d'un système stationnaire dont les coefficients sont donnés par certaines moyennes arithmético-géométriques des coefficients périodiques du système initial (ces résultats sont établis plus généralement pour des systèmes linéaires monotones). Un autre point de vue consiste à étudier la dépendance du multiplicateur de Floquet en fonction de paramètres du modèle, tels que l'âge auquel les cellules commencent à se reproduire. Les simulations numériques menées pendant le stage d'Emilio Seijo complétées par le travail effectué par Thomas Lepoutre dans son M2 puis depuis le début de sa thèse, on permis de démontrer un certain nombre de propriétés théoriques du multiplicateur de Floquet de ce modèle.

English version

We study monotone dynamical systems representing the growth of cells (healthy or tumoral), following an earlier work of Clairambault and Perthame. The goal is to understand how the circadian control influences the growth of cells. In the case of stationnary monotone systems, this growth is measured by the Perron root. In the time periodic case, this Perron root is replaced by a Floquet multiplier. We gave in [16] some inequalities comparing the Floquet multiplier of a monotone time periodic system with the Perron-root of a stationnary system the coefficients of which are obtained by arithmetico-geometric means from the coefficients of the initial system. In fact, we established these results for a general class of monotone linear systems. Another point of view consists in stuyding the dependence of the Floquet multiplier as a function of certain parameters of the model, like the age at which the cells begin to multiply. Some numerical simulation performed during the internship of Emilio Seijo, confirmed by the work done by Thomas Lepoutre during his M2 internship and since the beginning of his thesis, allowed us to show several theoretical properties of the Floquet multiplier of this model.

6.3.3. Identification dynamique du trafic dans les réseaux IP/Dynamic traffic identification in IP networks

Participants: M. Bouhtou (France-Télécom R & D), S. Gaubert, G. Sagnol, C. Walsh.

Le stage de l'ENSMP de Guillaume Sagnol [31] a porté sur l'identification du trafic dans les réseaux IP. Ce problème classique, consistant à déterminer le trafic en origine-destination à partir des mesures sur les liens (mesures SNMP), a été renouvelé en raison de la complexité croissante des réseaux et de la possibilité de déployer des outils de mesure comme netflow. L'une des approche repose sur des problèmes de maximisation d'entropie, qui peuvent s'analyser à l'aide de techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire. Le stage a permis de mettre en œuvre diverses approches et de les tester sur des données de France Télécom. Il se poursuit par un travail de thèse. Nous avons en particulier commencé à étudier l'optimisation du placement de netflow, à l'aide de techniques d'optimisation d'expériences, conduisant à la résolution de programmes semi-définis.

English version

The internship of Guillaume Sagnol [31] addressed the identification of traffic in IP networks. The interest in this classical problem, which consists in determining the traffic between each origin and each destination, from the trafic measured on the links (SNMP measures), has been renewed due to the increasing complexity of networks and to the possibility of using measure tools such as netflow. One of the approaches relies on entropy minimisation problems, which can be analysed by means of non-linear Perron-Frobenius theory. The internship allowed us to compare several approaches, and to test them with data of France-Télécom. Guillaume Sagnol is pursuing this work in his PhD-thesis. We began to investigate the optimal placement problem for a limited number of netflow resources, by applying an “experimental design” approach, leading to solve some semidefinite programs.

6.4. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.4.1. Convexité max-plus/Max-plus convexity

Participants: G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, R. Katz, F. Meunier (ENPC), S. Sergeev (State University of Moscow).

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d’états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, à la suite de Sturmfels et Develin [70]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d’analogues des résultats fondamentaux d’analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8]. On a donné dans [17] un analogue du théorème de Minkowski, montrant qu’un convexe fermé de dimension finie est enveloppe convexe de l’ensemble de ses points extrémaux. Dans [18], on montre que les analogues des opérateurs de projection cyclique ont la propriété de minimiser une métrique de type Hilbert. Ce faisant, on a obtenu des théorèmes de séparation pour plusieurs convexes, ainsi qu’un analogue du théorème de Helly. Ce dernier montre en particulier que si un système d’inégalités max-plus affines faisant intervenir d variables est inconsistant, il existe un sous-système d’au plus $d+1$ inégalités qui est encore inconsistant. Dans un travail récent de S. Gaubert et F. Meunier, on établit des analogues d’autres résultats de convexité discrète.

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectivelty the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [70]. Max-plus polyedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following in particular the work in [8]. We showed in [17] an analogue of the Minkowski theorem, showing that a finite dimensional closed convex set is the convex hull of the set of its extreme points. In [18], we studied the analogues of cylic projection operators. These turn out to minimize a Hilbert-type metric. We deduced along these lines some separation theorems concerning several convex sets, and also an analogue of Helly’s theorem, showing in particular that any system of max-plus affine inequalities in d variables which is inconsistent admits a subsystem of at most $d+1$ inequalities which is still inconsistent. In a recent work of S. Gaubert and F. Meunier, we established analogues of other results of discrete convexity.

6.4.2. Le problème d’affectation pour un ensemble dénombrable/The assignment problem for a countable state space

Participants: M. Akian, S. Gaubert, V. Kolokoltsov (Warwick University).

Les conjugaisons de Moreau sont les transformations $f \mapsto Bf$ de la forme

$$Bf(x) = \sup_{y \in Y} b(x,y) - f(y) \quad , \forall x \in X \quad , \tag{10}$$

pour lesquelles le noyau $b : (x,y) \mapsto b(x,y)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est donné. Lorsque $b(x,y) = \langle x,y \rangle$, on retrouve la transformée de Legendre-Fenchel. Les conjugaisons de Moreau sont des cas particuliers de correspondances de Galois. Rappelons que dans [42], nous avons étudié le problème de l'existence et de l'unicité de la solution f à l'équation $Bf = g$, et obtenu des caractérisations faisant intervenir des sous-différentiels généralisés. Ces propriétés sont intimement reliées à l'unicité de la solution du problème d'affectation optimale (problème de transport de masse avec mesures uniformes). Lorsque X et Y sont finis, un résultat précis de ce type a été obtenu par Butkovič [56]. Dans [22], nous étendons ce résultat au cas où X est dénombrable, à l'aide des propriétés de [42].

English version

Moreau conjugacies are transformations $f \mapsto Bf$ of the form (10) where the kernel $b : (x,y) \mapsto b(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is given. When $b(x,y) = \langle x,y \rangle$, we recover the Legendre-Fenchel transform. In [42], we studied the problem of the existence and uniqueness of the solution f of the equation $Bf = g$. We characterised the solvability in terms of generalised subdifferentials, with respect to the kernel b. When X and Y are finite, a result of Butkovič [56] shows that the existence and uniqueness conditions for the solution f are intimately related to the unique solvability of the optimal assignment problem for the kernel (or matrix) b. In [22], we extend this result to the case of a countable state space X, using the results of [42].

6.4.3. Rangs de matrices max-plus/Ranks of max-plus matrices

Participants: M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman (Moscow State University).

Différentes notions de rang de matrices max-plus ont été introduites dans la littérature, voir [2] pour un survol. On a poursuivi le travail sur ce thème [32].

English version

Several notions of rank of max-plus matrices have been introduced in the litterature, see [2] for a survey. We pursued the work on this topic [32].

6.5. Perturbation et calcul de valeurs propres /Perturbation and computation of eigenvalues

6.5.1. Introduction

L'étude des valeurs propres d'une matrice perturbée de la forme $a + \epsilon b$, où a et b sont des matrices complexes et ϵ est un paramètre, est un problème classique de théorie des perturbations. Une théorie initiée par Višik et Ljusternik, et complétée par Lidskiĭ, permet de déterminer, pour des valeurs génériques de la perturbation b, les asymptotiques au premier ordre $\mathcal{L}_\epsilon \sim \lambda\epsilon^\Lambda$ de toutes les valeurs propres $\mathcal{L}_\epsilon$ de la matrice perturbée. Certaines situations non génériques donnent lieu à des cas singuliers, qui ont motivé beaucoup de travaux, notamment de Najman, Ma et Edelman, Moro, Burke et Overton. De tels cas singuliers peuvent être abordés à l'aide de techniques max-plus, qui révèlent des problèmes d'optimisation discrète sous-jacents. Dans [40] et [39], nous avons ainsi considéré le problème plus général d'une matrice $\mathcal{A}_\epsilon$ dont les coordonnées ont des asymptotiques au premier ordre de la forme

$$(\mathcal{A}_\epsilon)_{ij} = a_{ij}\epsilon^{A_{ij}} + o(\epsilon^{A_{ij}}) \tag{11}$$

lorsque ϵ tend vers 0, pour certains $a_{ij} \in \mathbb{C}$ et $A_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a montré que la suite des exposants dominants des valeurs propres de $\mathcal{A}_\epsilon$ peut, pour des valeurs génériques des paramètres a_{ij}, être calculée au moyen de problèmes d'optimisation discrète, qui sont des variations autour du problème d'affectation optimale [39] et du problème du plus court chemin [40]. Ceci permet de généraliser le théorème de Višik, Ljusternik, et Lidskiĭ, et de résoudre des cas qui sont singuliers pour les approches classiques.

English version

A basic problem in perturbation theory consists in studying the eigenvalues of a perturbed matrix of the form $a + \epsilon b$, where a and b are given complex matrices, and ϵ is a parameter. A theory initiated by Višik and Ljusternik, and completed by Lidskiĭ, allows one to determine, for generic values of the perturbation b, the first order asymptotics $\mathcal{L}_\epsilon \sim \lambda \epsilon^\Lambda$ of all the eigenvalues $\mathcal{L}_\epsilon$ of the perturbed matrix. Some nongeneric situations lead to singular cases, which have attracted much attention (see in particular works by Najman; Ma and Edelman; Moro, Burke and Overton). Such singular cases can be approached with max-plus techniques, which bring to light underlying discrete optimisation problems. In [40] and [39], we considered the more general problem of a matrix $\mathcal{A}_\epsilon$ whose entries have first order asymptotics of the form (11) as ϵ tends to 0, for some $a_{ij} \in \mathbb{C}$ and $A_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. We showed that, for generic values of the parameters a_{ij}, the sequence of leading exponents of the eigenvalues of the matrix $\mathcal{A}_\epsilon$ can be determined from discrete optimisation problems, which are variations on the optimal assignment problem [39] and shortest path problem [40]. This allowed us to generalise the theorem Višik, Ljusternik, and Lidskiĭ, and to solve cases which were singular in previous approaches.

6.5.2. *Calcul numérique robuste de valeurs propres de matrices/Robust numerical computation of matrix eigenvalues*

Participants: M. Akian, A. Brandjesky, S. Gaubert.

Dans ce travail, nous exploitons les problèmes d'optimisation discrète sous-jacents aux problèmes de détermination de valeur propre (cf. la section précédente), afin de développer des algorithmes de calcul numérique robuste de valeurs propres et vecteurs propres de matrices. On rencontre en effet de nombreuses situations pratiques dans lesquelles les coefficients d'une matrice sont d'ordre de grandeur variables, rendant peu efficaces les méthodes existantes. La preuve des résultats de [40] et [39] suggère des renormalisations, permettant de rendre plus précis le calcul de valeurs propres. Ce problème est important en analyse numérique : les valeurs propres peuvent déterminer la stabilité d'une structure mécanique [88] ou la sensibilité d'un portefeuille (maximisant une fonction d'utilité). Le stage de M2 d'Adrien Brandjesky [29] a porté sur la preuve d'inégalités générales devant permettre d'obtenir des bornes d'erreur d'approximation de valeurs propres. On a montré en particulier que la suite des modules des valeurs propres d'une matrice est majorée (au sens de l'ordre partiel de dominance faible) par une suite de valeurs propres max-plus ou tropicales, à une constante multiplicative près dépendant seulement de la dimension. Dans le cas particulier des matrices compagnon, cette approche fournit des améliorations de bornes classiques à la Cauchy pour les racines de polynômes.

English version

We exploit the relations between optimisation problems and matrix eigenvalues, described in the preceding section, to develop robust numerical algorithms to compute eigenvalues. Indeed, in many practical situations, the entries of a matrix may be of different order of magnitude, which make the existing methods less efficient. The proof of the results of [40] and [39] suggests diagonal scalings, allowing one to make more precise numerical eigenvalue computations. This problem is important in numerical analysis : eigenvalues may determine the stability of a mechanical structure [88] or the sensitivity of a portfolio (maximising some utility function). The goal of the "M2" internship of Adrien Brandjesky [29] was to establish general inequalities which are needed to obtain error bounds. We showed in particular that the sequence of modulus of the eigenvalues of a matrix is weakly majorised by a sequence of max-plus or tropical eigenvalues, up to a constant factor depending only on the dimension. In the special case of companion matrices, this approach yields some improvements of the classical bounds à la Cauchy of polynomial roots.

6.6. Algorithmes/Algorithms

6.6.1. *Algorithme d'itération sur les politiques pour les jeux répétés avec gain moyen/Policy iteration algorithm for repeated games with mean payoff*

Participants: M. Akian, S. Gangal, P. Goyal, S. Gaubert.

On développe des algorithmes d'itération sur les politiques pour les jeux à somme nulle. Ce travail fait suite à [63], qui traitait des jeux stochastiques avec paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), dans des cas dégénérés de type "multi-chaîne".

Le stage de Shantanu Gangal a permis de commencer à coupler les algorithmes de type [63] avec des résolutions de systèmes linéaires par des méthodes multi-grilles algébriques, ce qui permettrait à terme de gagner un ordre de grandeur dans la taille des instances résolubles. Une partie théorique de son stage a porté sur l'étude de classes de jeux qui généralisent les jeux de Richman (Laplacien-infini discret).

Le stage de Prakhar Goyal a porté sur l'extension de de l'algorithme de [63] au cas semi-Markov.

English version

We develop policy iteration algorithms for zero sum repeated games. This works follows [63], in which we treated stochastic games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), in degenerate "multichain" cases.

During the internship of Shantanu Gangal, we began to combine the algorithms of [63] with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods, which should allow us ultimately to increase by one order of magnitude the size of solvable instances. A theoretical part of the internship was on a generalisation of Richman games (discrete infinity Laplacian).

The internship of Prakhar Goyal was on the extension of the algorithm of [63] to the semi-Markov case.

6.6.2. Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de commande optimale déterministe/The max-plus finite element method for deterministic optimal control problem

Participants: M. Akian, S. Gaubert, A. Lakhoua, H. El Fekih (ENIT, Tunis).

La thèse d'A. Lakhoua [12] a porté sur le développement de méthodes de discrétisation des équations d'Hamilton-Jacobi exploitant la linéarité max-plus. Nous avons commencé par étudier un analogue max-plus de la méthode des éléments finis de Petrov-Galerkin dans le cas de l'équation d'évolution

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \quad (x,t) \in X \times (0,T] \ , \qquad v(x,0) = \phi(x), \quad x \in X \ , \tag{12}$$

où l'hamiltonien $H(x,p)$ est supposé convexe par rapport à p. Comme rappelé dans la §3.2, le semi-groupe d'évolution S^t associé est max-plus linéaire. Ainsi, on peut remplacer l'équation (12) par la formulation variationnelle suivante, définie récursivement par :

$$v^{t+\Delta t} \in \mathcal{W}_h, \qquad \langle z, v^{t+\Delta t}\rangle = \langle z, S^{\Delta t} v^t \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{Z}_h \ , \tag{13}$$

pour $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire max-plus et $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont respectivement des semi-modules max-plus finiment engendrés d'éléments finis et de fonctions test. Cette formulation approxime la formulation variationnelle max-plus introduite par Kolokoltsov et Maslov. Comme (13) peut ne pas avoir de solution $v^{t+\Delta t}$, on définit $v^{t+\Delta t}$ comme étant la sous-solution maximale de (13), qui est obtenue en remplaçant l'égalité par une inégalité, et en maximisant $v^{t+\Delta t}$. Le système dynamique ainsi obtenu s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'un problème de jeux à somme nulle déterministe, contrairement au cas de la méthode proposée initialement par Fleming et McEneaney [74], qui elle est purement max-plus linéaire. Sous des hypothèses standard de régularité, nous avons obtenu des estimations d'erreur similaires au cas de la méthode des éléments finis classique : les projecteurs pour la norme d'énergie sont remplacés par des projecteurs sur des semi-modules max-plus, et l'erreur de projection est mesurée dans la norme du sup. Ces résultats utilisent la théorie développée dans [8], voir §6.4 : l'interprétation géométrique fournie par ces travaux permet de comprendre pourquoi les espaces $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ doivent être différents. La méthode nécessite le calcul de $\langle z, S^{\Delta t} w\rangle$ pour toute fonction test z et tout élément fini w. Plusieurs approximations ont été proposées et étudiées tant théoriquement que numériquement. Une partie de ces travaux a fait l'objet des articles [43], [44], et [14], la thèse contenant plusieurs améliorations ou extensions de ceux-ci (estimations d'erreurs quadratiques, version semi-creuse de la méthode, cas stationnaire) qui conduiront à d'autres articles. On a aussi commencé à étudier une méthode hybride, combinant la méthode des éléments finis max-plus avec un calcul des produits scalaires $\langle z, S^{\Delta t} w\rangle$ par des méthodes de type Pontryagine, afin de bénéficier de la rapidité de ces dernières tout en continuant à parvenir à l'optimum global.

English version

In her PhD-thesis [12], A. Lakhoua developed methods of discretisation of Hamilton-Jacobi equations exploiting the max-plus linearity. We began by proposing a max-plus analogue of the classical Petrov-Galerkin finite element method, in the case of the evolution equation (12) where the Hamiltonian $H(x, p)$ is convex in the variable p. As we recalled in §3.2, the associated evolution semigroup S^t is max-plus linear. Therefore, we replace Equation (12) by the max-plus variational approximation, defined recursively by (13) for $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Here, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denotes the max-plus scalar product, and $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ are finitely generated max-plus semimodules of finite elements and test functions, respectively. This formulation approximates the max-plus variational formulation due to Kolokoltsov and Maslov. Since Equation (13) need not have a solution $v^{t+\Delta t}$, we define $v^{t+\Delta t}$ to be the maximal subsolution of (13). This yields a discretised scheme which can be interpreted as the dynamic programming equation of a zero-sum two player repeated game, unlike a max-plus discretisation scheme proposed previously by Fleming and McEneaney [74] which is purely max-plus linear. We obtained, under standard assumptions, error estimates which are similar to the case of the classical finite element method: projectors in the energy norm are replaced here by projectors on max-plus semimodules, and the projection error is measured in the sup norm. These results rely on the theory developed in [8], see §6.4: in particular, the geometrical interpretation given there allows one to understand why the spaces $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ must differ. The method requires the evaluation of $\langle z, S^{\Delta t} w\rangle$ for each test function z and each finite element w. Various approximations have been proposed and studied theoretically and numerically. Part of these studies appeared in [43], [44] and [14]. The thesis contains several improvements or extensions of these results (quadratic error estimates, semi-sparse version of the method, stationnary case), which will lead to other articles. We also began to study a hybrid method, combining the max-plus finite element method with an evaluation of the scalars products $\langle z, S^{\Delta t} w\rangle$ by Pontryagin type methods, in order to exploit the speed of the latter methods while keeping guarantees of global optimality for the solution.

6.7. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration

Participants: A. Adje, S. Gaubert, E. Goubault (CEA), S. Zennou (CEA).

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par Cousot, qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. Une difficulté répertoriée est que les algorithmes de point fixe naïfs effectuent parfois un nombre d'itérations considérable. Cette pathologie a donné lieu à de nombreux travaux.

Dans des travaux précédents [66], [25], nous avons montré que les algorithmes d'itérations sur les politiques pour les jeux répétés, tels que ceux développés dans [77], [61], [63],[7], peuvent être étendus au cadre de l'analyse statique. Cette approche fonctionne pour des classes importantes de treillis: produits cartésiens d'intervalles, ensembles définis par des inégalités de type potentiel, et plus généralement, trellis dits de "templates" introduits par Manna et ses collaborateurs. Ces derniers peuvent être vus comme des treillis de polyèdres spéciaux, codés par des fonctions d'appui discrétisées, ce qui permet de garder le pouvoir expressif des polyèdres tout en ayant des codages de taille bornée. On se ramène alors à des problèmes de point fixe qui sont équivalents à des problèmes de jeux stochastique. L'algorithme d'itération sur les politiques pour les "templates" est décrit dans [25]. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. L'algorithme repose sur une identification des stratégies aux points extrêmes de certains polyèdres issus de formulations duales. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec un gain en précision par rapport aux approches classiques.

Une difficulté qui demeure est que le point fixe ainsi obtenu n'est pas toujours minimal. La stage de M2 d'Assale Adje [27] a conduit à un algorithme, permettant, sous certaines hypothèses, de vérifier la minimalité du point fixe obtenu, en utilisant des techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire (nos travaux présentés en 6.2.2). Ce stage se prolonge par une thèse.

English version

Cousot's abstract interpretation allows one to determine invariants of programs by computing the smallest fixed point of certain monotone maps, defined on some complete lattices. A well known difficulty, which has motivated much work in the field, is that the convergence of naive fixed point iterations can be slow.

In previous works [66], [25], we showed that the policy iteration techniques for repeated games of [77], [61], [63],[7] can be generalised to compute such fixed points. This works for standard classes of lattices: cartesian products of intervals, sets defined by potential constraints, and more generally, for the lattices of "templates" used by Manna and his collaborators. The elements of these lattices are special polyhedra, parametrised by suitably discretised support functions. These lattices are well adapted to the analysis of large size programs (the approach using general polyhedra does not scale so easily). The policy iteration algorithm for templates is described in [25]. Every iteration combines linear programming techniques with graph algorithms. A key theoretical point, on which our algorithm is based, is the identification between the strategies and the extreme points of polyhedra arising from certain dual programs. Experimental results have shown the effectiveness of the method, with an improved precision by comparison with other approaches.

A remaining difficulty is that the fixed point which is obtained may not be minimal. In his M2 internship [27], Assale Adje gave an algorithm which allows one, under some assumptions, to check the minimality of the fixed point which is obtained, by using non-linear Perron-Frobenius techniques (our works presented in 6.2.2). This work is pursued by a PhD Thesis.

7. Contracts and Grants with Industry

7.1. Identification dynamique du trafic

Un CRE avec France Télécom R & D (M. Bouhtou), portant sur l'identification dynamique du trafic dans les grands réseaux IP, impliquant S. Gaubert, et C. Walsh, commencé en Novembre 2006, s'est poursuivi en 2007, avec l'arrivée de G. Sagnol. Le sujet est abordé notamment à l'aide de techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui interviennent dans l'étude des questions de maximisation d'entropie. On étudie également l'optimisation du placement d'outils de mesure de type netflow. Voir §6.3.3.

8. Other Grants and Activities

8.1. Actions internationales

- Coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet, soutenue par le RFBR (3 ans, démarrée en juillet 2006) : coopération entre les membres du projet MAXPLUS, le groupe de Maslov à Moscou, comprenant entre autres G. Litvinov, et A. Sobolevskii, et un groupe à Strasbourg (CNRS) comprenant I. Itenberg et V. Kharlamov, autour de questions d'algèbre max-plus. Cette coopération a donné lieu à un mini-workshop organisé par Litvinov, Maslov, Sobolevskiy, et Sergeev, "Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics", Moscow, Aug. 25-30, 2007, à l'Université Indépendente de Moscou.

8.2. Accueils de chercheurs étrangers

- Andrei Sobolevskiy de Moscow State University, 1 semaine en mai (dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet).

- Grigory Shpiz de Moscow State University, 1 semaine en mai (dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet).
- Peter Butkovič de Birmingham, 2 jours en mai.
- Ricardo Katz du Conicet (Instituto Beppo Levi, Universidad Nacional de Rosario, Argentina), 3 mois de septembre à décembre.
- William McEneaney de l'Université de Californie à San Diego, 2 jours en mai et 3 jours en décembre.
- Ivan Singer de l'Institut de Mathématiques, Bucarest, 1 semaine en novembre.
- Henda El Fekhi de l'ENIT (Tunis), 2 jours en décembre.
- Nabil Gmati de l'ENIT (Tunis), 2 jours en décembre.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique

- M . Akian :
  - Co-responsable du séminaire <<Probabilités, Optimisation, Contrôle>> de l'INRIA Rocquencourt.
  - Membre élue de la Commission d'évaluation de l'INRIA (de septembre 2005 à juin 2008).
  - Membre du Comité de Programme de Valuetools'07 (International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools).
- S. Gaubert :
  - Membre du Conseil de la formation à l'ENSTA.
  - Membre du CSD5 "Mathématiques et interactions" de l'ANR.
  - Membre de la Commission de spécialistes de l'Université d'Orsay, section 61.
  - Membre du comité éditorial de J. Discrete Event Dynamic Systems.
- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

9.2. Enseignement universitaire

- A. Lakhoua
  - TD de Mathématiques en Licence 1 (première année d'université) à Paris 6, jusqu'à juin 2007 dans le cadre d'un poste d'ATER à temps plein.
- S. Gaubert
  - Cours (Systèmes à Événements Discrets) de la spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images (ATSI) du M2 IST de l'Université d'Orsay. Ce cours est commun à l'Option Automatique de l'ENSMP.
  - Cours (Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux) du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l'Université de Paris 6.
  - Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [28].

  - Participation au cours d'Optimisation Combinatoire en troisième année à l'ENSTA.

9.3. Encadrement de thèse

- Asma Lakhoua, inscrite en cotutelle à Paris VI et à l'ENIT. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur pour Paris VI), M. Akian et Henda El Fekih (directrice pour l'ENIT, Tunis). Thèse soutenue le 17 décembre 2007.
- Benoît David, inscrit à Paris VI pour l'année scolaire 2006/2007. Encadrement assuré par M. Akian et S. Gaubert (directeur de thèse).
- Assale Adje, inscrit à l'École Polytechnique à partir d'octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse), Sarah Zennou (CEA) et Eric Goubault (CEA).
- Meisam Sharify, inscrit à l'École Polytechnique à partir de décembre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse) et M. Akian.
- Guillaume Sagnol, inscrit à l'École des Mines de Paris à partir d'octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert, M. Bouhtou (France Télécom R&D), et C. Walsh.
- Paul Poncet (Ingénieur de Recherche statisticien chez Gaz de France), inscrit à l'École Polytechnique à partir de décembre 2007, sous la direction de M. Akian.
- Thomas Lepoutre (projet BANG), inscrit à Paris VI à partir d'octobre 2007. Encadrement assuré par Benoît Perthame (ENS et INRIA, projet BANG, directeur de thèse), Jean Clairambault (projet BANG) et S. Gaubert.

9.4. Membre de jury

- M. Akian
  - Concours de recrutement de chercheurs INRIA : CR2 et CR1 Nancy.
  - Membre du jury de la thèse d'Asma Lakhoua (Paris VI) en tant que co-directeur de thèse (décembre 07).
- S. Gaubert
  - Rapporteur sur la thèse de Morad Ahmadnasab (Toulouse 1, octobre 07)
  - Membre du jury de la thèse de Laure Ninove (UCL, Belgique, soutenance privée en décembre 07).
  - Membre du jury de la thèse d'Asma Lakhoua (Paris VI) en tant que directeur de thèse (décembre 07).

9.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- M. Akian
  - Invitation d'une semaine à Moscou (Laboratoire Poncelet) dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet. Participation à l'International Workshop "Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics", Moscow, Aug. 25-30, 2007. Titre de l'exposé : "Representation of stationnary solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations: a max-plus point of view".
- S. Gaubert
  - Code 2007, IHP, 18-20 avril 2007 conférence de la SMAI sur l'optimisation et la décision. Conférence plenière invitée. Titre de l'exposé : "From max-plus algebra to non-linear Perron-Frobenius theory".

- 2nd international conference on matrix methods and operator equations, July 23 - 27, 2007, Moscow, Russia. Titre de l'exposé: "Linear projectors on tropical spaces" (joint work with G. Cohen and J.P. Quadrat).
- Invitation d'une semaine à Moscou (Laboratoire Poncelet) dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet. Participation à l'International Workshop "Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics", Moscow, Aug. 25-30, 2007. Titre de l'exposé : "From max-plus algebra to non-linear Perron-Frobenius theory: an approach to zero-sum repeated games".
- Invitation à Obervolfach, 9-15 Dec, Workshop on tropical geometry, Titre de l'exposé : "Tropical linear algebra - old and new results".

- A. Lakhoua
  - Code 2007, IHP, 18-20 avril 2007 conférence de la SMAI sur l'optimisation et la décision. Titre de l'exposé : "La méthode des éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de contrôle optimal déterministe".
  - Neuvième Atelier sur le Contrôle Optimal, les Jeux Dynamiques et la Dynamique Non-linéaire, 7 - 9 mai 2007, HEC Montréal, titre de l'exposé : "The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems".
- J.-P. Quadrat
  - Invitation d'une semaine à Moscou (Laboratoire Poncelet) dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet. Participation à l'International Workshop "Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics", Moscow, Aug. 25-30, 2007. Titre de l'exposé : "Degree one homogeneous minplus dynamic systems and traffic applications".
- C. Walsh
  - Invitation d'une semaine à Moscou (Laboratoire Poncelet) dans le cadre de la coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet. Participation à l'International Workshop "Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics", Moscow, Aug. 25-30, 2007. Titre de l'exposé : "The horofunction boundary".
  - Séjour à l'Université de Warwick pour collaborer avec Bas Lemmens, 1 semaine.

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", vol. 351, n^{o} 11, 1999, p. 4515–4543.

[2] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. HOGBEN (editor), Chapter 25, vol. 39, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", vol. 52, n^{o} 2, 2003, p. 637-679, http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/.

[4] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", vol. 140, n^{o} 1, 2006, p. 157–176, http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084.

[5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", vol. 11, n^o 2, 2001, p. 153–188.

[6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992.

[7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", vol. 14, n^o 4, 1999.

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 379, 2004, p. 395–422, http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294.

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", vol. 23, 1999, p. 207–219.

[10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", PII: S 0002-9947(04)03470-1, vol. 356, n^o 12, 2004, p. 4931-4950, http://arxiv.org/abs/math.FA/0105091.

Year Publications

Doctoral dissertations and Habilitation theses

[11] M. AKIAN. *Algèbre max-plus, applications monotones contractantes et équations aux dérivées partielles : trois approches du contrôle optimal*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2007, http://www-rocq.inria.fr/who/Marianne.Akian/publis/hdr-akian.pdf.

[12] A. LAKHOUA. *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007.

Articles in refereed journals and book chapters

[13] M. AKIAN, B. DAVID, S. GAUBERT. *Un théorème de représentation des solutions de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique dégénérée sur le tore*, in "C. R. Acad. Sci. - Mathématique", Accepté pour publication, 2007.

[14] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control and Opt.", to appear, 2007, http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0603619.

[15] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Documenta Mathematica", Accepté pour publication, 2007, http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0412408.

[16] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, B. PERTHAME. *An inequality for the Perron and Floquet eigenvalues of monotone differential systems and age structured equations*, in "Comptes Rendus Mathematique", vol. 345, n^o 10, November 2007, p. 549-554, http://arxiv.org/pdf/0704.3820.

[17] S. GAUBERT, R. KATZ. *The Minkowski Theorem for Max-plus Convex Sets*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 421, 2007, p. 356–369, http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0605078.

[18] S. GAUBERT, S. SERGEEV. *Cyclic projectors and separation theorems in idempotent convex geometry*, in "Fundamentalnaya i prikladnaya matematika", vol. 13, n^{o} 4, 2007, p. 33-52, http://arxiv.org/pdf/0706.3347.

[19] C. WALSH. *The horofunction boundary of finite-dimensional normed spaces*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", vol. 142, n^{o} 3, 2007, p. 497–507.

[20] C. WALSH. *The horofunction boundary of the Hilbert geometry*, in "Adv. Geom.", to appear, 2007, http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0611920.

Publications in Conferences and Workshops

[21] M. AKIAN. *Representation of stationnary solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations: a max-plus point of view*, in "Proc. of the International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics”, Moscow, Aug. 25-30, 2007", G. . LITVINOV, V. P. MASLOV, S. N. SERGEEV (editors), vol. 1, The Independent University of Moscow, 2007, p. 6-11, http://arxiv.org/pdf/0710.0377.

[22] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *On the assignment problem for a countable state space*, in "Proc. of the International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics”, Moscow, Aug. 25-30, 2007", G. . LITVINOV, V. P. MASLOV, S. N. SERGEEV (editors), vol. 1, The Independent University of Moscow, 2007, p. 12-20, http://arxiv.org/pdf/0710.0377.

[23] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Degree one homogeneous minplus dynamic systems and traffic applications*, in "Proc. of the International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics”, Moscow, Aug. 25-30, 2007", G. . LITVINOV, V. P. MASLOV, S. N. SERGEEV (editors), vol. 1, The Independent University of Moscow, 2007, p. 33–49, http://arxiv.org/pdf/0710.0377.

[24] S. GAUBERT. *From max-plus algebra to non-linear Perron-Frobenius theory: an approach to zero-sum repeated games*, in "Proc. of the International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics”, Moscow, Aug. 25-30, 2007", G. . LITVINOV, V. P. MASLOV, S. N. SERGEEV (editors), vol. 1, The Independent University of Moscow, 2007, p. 60–65, http://arxiv.org/pdf/0710.0377.

[25] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07), Braga (Portugal), 24 March - 1 April 2007", Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4421, Springer, 2007, p. 237–252.

[26] C. WALSH. *The horofunction boundary*, in "Proc. of the International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and problems of Mathematical Physics”, Moscow, Aug. 25-30, 2007", G. . LITVINOV, V. P. MASLOV, S. N. SERGEEV (editors), vol. 2, The Independent University of Moscow, 2007, p. 71–77, http://arxiv.org/pdf/0709.4119.

Internal Reports

[27] A. ADJE. *Méthode d'itération sur les politiques et minimalité d'invariant en analyse statique de programme par interprétation abstraite*, Rapport de stage de M2, parcours Optimisation, Jeux, et Modélisation Économique, Université Pierre et Marie Curie, Août 2007.

[28] F. BONNANS, S. GAUBERT. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, Troisième édition, 162 p., Polycopié de cours, École Polytechnique, 2007.

[29] A. BRANDJESKY. *Estimation de valeurs propres à l'aide de l'algèbre max-plus*, Rapport de stage de M2, parcours Analyse Numérique & Équations aux Dérivées Partielles, Université Pierre et Marie Curie, Août 2007.

[30] J.-P. POVEDA. *Calcul du T-PageRank d'un graphe du Web*, Rapport de Projet Personnel en Laboratoire, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées, Août 2007.

[31] G. SAGNOL. *Entropy Minimization Algorithms and their application to Internet Traffic Matrices*, Rapport de stage, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Juin 2007.

Miscellaneous

[32] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Rank functions for matrices over max-algebras*, Preprint, 2007.

[33] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS. *Stable fixed points in discrete convex monotone dynamical systems*, Preprint, 2007.

[34] M. AKIAN, S. GAUBERT, L. NINOVE. *Multiple equilibria of nonhomogeneous Markov chains and self-validating Web rankings*, submitted, 2007, http://www.arxiv.org/pdf/0712.0469.

[35] M. AKIAN, S. GAUBERT, R. NUSSBAUM. *The Collatz-Wielandt theorem for order-preserving homogeneous maps on cones*, Preprint, 2007.

[36] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The horoboundary of an optimal control problem*, Preprint, 2007.

[37] C. WALSH. *Busemann points of Artin groups of dihedral type*, 2007, http://www.arxiv.org/pdf/0705.1485.

References in notes

[38] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, x+473.

[39] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", vol. 339, 2004, p. 103–108, http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438.

[40] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090.

[41] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 327, Série I, 1998, p. 927–932, http://hal.inria.fr/inria-00073240.

[42] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, p. 19-51, http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441.

[43] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *A max-plus finite element method for solving finite horizon deterministic optimal control problems*, in "Proceedings of MTNS'04, Louvain, Belgique", Also arXiv:math.OC/0404184, 2004, http://hal.inria.fr/inria-00071426.

[44] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for optimal control problems: further approximation results*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", Also arXiv:math.OC/0509250, 2005, http://hal.inria.fr/inria-00000965/en/.

[45] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *How to find horizon-independent optimal strategies leading off to infinity: a max-plus approach*, in "Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'06), San Diego", 2006, http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0609243.

[46] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[47] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, January 2002.

[48] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, p. 219-230.

[49] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", vol. 275/276, 1998, p. 3–18.

[50] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, n^{o} 64, Cambridge university press, 1997.

[51] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98), Cagliari, Italy", IEE, 1998.

[52] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001.

[53] T. BLYTH, M. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972.

[54] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Ph. D. Thesis, Delft University of Technology, Dec 1993.

[55] S. M. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, PhD Thesis, Caltech, 1990.

[56] P. BUTKOVIC. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 367, 2003, p. 313-335.

[57] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984.

[58] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000.

[59] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", vol. 34, 1986, p. 6219–34.

[60] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[61] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, Thèse, spécialité Mathématiques et Automatique, École des Mines, Dec. 2001.

[62] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. M. GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes", July 1998.

[63] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", vol. 343, n^o 5, 2006, p. 377–382.

[64] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport de recherche, n^o 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, http://hal.inria.fr/inria-00076367.

[65] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", vol. 293, 2003, p. 189–217.

[66] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05), Edinburgh", LNCS, Springer, July 2005, p. 462–475.

[67] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", vol. 78, n^o 3, 1980, p. 385–390.

[68] R. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, n^o 166, Springer, 1979.

[69] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge", Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 354–382.

[70] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", vol. 9, 2004, p. 1–27 (electronic).

[71] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, vol. XXI, Gauthier Villars, Paris, 1953.

[72] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", 2005.

[73] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", vol. 324, n^o 9, 1997, p. 1043–1046.

[74] W. FLEMING, W. MCENEANEY. *A max-plus based algorithm for an HJB equation of non-linear filtering*, in "SIAM J. Control and Opt.", 2000, p. 683–710.

[75] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", vol. 15, n^o 2, 2002, p. 497–529 (electronic), http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151.

[76] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 40, n^o 12, Dec 1995, p. 2014–2025.

[77] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 326, Série I, 1998, p. 43–48.

[78] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", vol. 44, n^o 4, 1999, p. 683–697.

[79] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

[80] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", vol. 323, n^o 4, 1996, p. 371–375.

[81] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOC, Paris, 2002.

[82] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", vol. 2, 1977, p. 25-41.

[83] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984, Eyrolles, Paris, 1979.

[84] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Annals of Discrete Mathematics", vol. 19, 1984, p. 147-164.

[85] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", vol. 293, 2003, p. 141–167.

[86] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", vol. 72, 1990, p. 27–38.

[87] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 34, n^o 1, Jan 1989, p. 3-9.

[88] I. C. IPSEN. *Accurate Eigenvalues for fast trains*, in "SIAM News", vol. 37, n^o 9, 2004.

[89] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[90] M. KREĬN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", vol. 1950, n^o 26, 1950, 128.

[91] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", vol. 3, 1993.

[92] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, p. 167–187.

[93] J.-Y. LE BOUDEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, n^o 2050, Springer, 2001.

[94] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Thèse de doctorat, Université Rennes 1, September 2002.

[95] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Thèse, Université de Tours, November 2001.

[96] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", vol. 81, 1991, p. 137–145.

[97] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", vol. 69, n^o 5, 2001, p. 696–729, http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128.

[98] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J. P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", vol. 50, n^o 5, 2005, p. 699-705, http://hal.inria.fr/inria-00072263.

[99] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", vol. 8, n^o 3, July 2002, p. 519–562.

[100] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", vol. XLIII, 2005, p. 51-62, http://hal.inria.fr/inria-00072311.

[101] V. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, Edition Mir, Moscou, 1987.

[102] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[103] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300, http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015.

[104] P. D. MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, Rapport de recherche, LAAS, 1990.

[105] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[106] R. D. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", vol. 75, n^o 391, 1988.

[107] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", vol. 1, n° 2, 1991, p. 177-207.

[108] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[109] M. PLUS. *Linear systems in $(\max,+)$-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu", Dec. 1990.

[110] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, n° 119, Chapman & Hall, 2001.

[111] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", n° 311, 1990, p. 745-748.

[112] M. A. RIEFFEL. *Group C^*-algebras as compact quantum metric spaces*, in "Doc. Math.", vol. 7, 2002, p. 605–651 (electronic).

[113] I. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", vol. 3, n° 2, 1967, p. 66-78.

[114] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", vol. 121, 2001, p. 221–246.

[115] A. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000.

[116] S. N. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", n° 3, 2002, p. 163–180, 192.

[117] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, p. 143–150.

[118] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", vol. 28, n° 3-4, 1994, p. 277–294.

[119] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997.

[120] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", vol. 4, n° 3, 2004, p. 389–411.

[121] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Basel", Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, p. 135–146, http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163.

[122] N. N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", in russian, vol. 3, 1967, p. 39–71.

[123] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", Max-plus algebras, vol. 293, n^{o} 1, 2003, p. 45–54.

[124] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, (in Czech), Ekonomický ùstav C ˇSAV, Praha, 1976.

[125] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981.

[126] P. DE LA HARPE. *On Hilbert's metric for simplices*, in "Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991), Cambridge", London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 181, Cambridge Univ. Press, 1993, p. 97–119.