



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Gamma

*Génération Automatique de Maillages et
Méthodes d'Adaptation*

Paris - Rocquencourt

THEME NUM

Activity
R *eport*

2008

Table of contents

1. Team	1
2. Overall Objectives	1
2.1. Introduction	1
2.2. Highlights	2
3. Scientific Foundations	2
3.1. Introduction	2
3.2. Méthodes de génération maillage	2
3.2.1. Méthode de type Delaunay	2
3.2.2. Méthode frontale	3
3.2.3. Autres méthodes	3
3.2.4. Géométrie algorithmique	3
3.3. Méthodes d'adaptation de maillage	3
3.4. Définition géométrique	4
3.4.1. Surfaces analytiques et discrètes	4
3.4.2. Analyse d'une géométrie	4
3.4.3. Structures de données	4
4. Application Domains	4
4.1. Panorama	4
4.2. E.D.P. et éléments ou volumes finis	4
4.3. E.D.P. et adaptation	5
4.4. Maillage des surfaces	5
5. Software	5
5.1. Introduction	5
5.2. Logiciel BL2D-V2	5
5.3. Logiciel BLSURF-V3	6
5.4. Logiciel BLMOL	7
5.5. Logiciel Medit	7
5.6. Logiciel GAMHIC3D	7
5.7. Logiciel GHS3D-V3	7
5.8. Logiciel YAMS	7
6. New Results	8
6.1. Adaptation de maillages anisotropes multi-échelles	8
6.2. Adaptation de maillage par minimisation de fonctionnelles. Application à la prédiction du bang sonique.	10
6.3. Adaptation de maillage pour des problèmes à géométries mobiles.	10
6.4. Partitionneur de domaine rapide	12
6.5. Modélisation géométrique et maillage des structures granulaires. Application aux matériaux nanostructurés	12
6.6. Reconstruction de la topologie et génération de maillages de surfaces composées de carreaux paramétrés	13
6.7. Support géométrique linéarisé des surfaces CAO	14
6.8. Empreintes de courbes sur une surface CAO	15
6.9. Maillages transcarreaux	15
6.10. Reconstruction de surface à partir d'un nuage de points	15
6.11. Parallélisation de codes : la librairie LP2	17
6.11.1. Introduction	19
6.11.2. API	19
6.11.3. Capacités	20
6.11.4. Applications	20

6.11.4.1.	Le mailleur hexaédrique Hexotic.	20
6.11.4.2.	Le solveur en mécanique des fluides Wolf	20
6.11.4.3.	Utilisation sur un ordinateur SGI Altix à 128 processeurs.	20
6.11.5.	Développements futurs	20
6.12.	Site de données 3D	21
7.	Contracts and Grants with Industry	21
7.1.	Contrat de partenariat Dassault Aviation	21
7.2.	Projet EHPOC : maillage surfacique	21
7.3.	HISAC	22
7.4.	Contrat de partenariat INRIA/EPFL/Dassault Aviation	22
7.5.	Génération de maillages hexaédriques : Hexotic	23
8.	Dissemination	23
8.1.	Participation à des colloques, séminaires, invitations	23
8.2.	Enseignement	24
9.	Bibliography	24

1. Team

Research Scientist

Paul Louis George [Responsable scientifique, DR]
Patrick Laug [Responsable permanent, DR, HdR]
Frédéric Alauzet [CR]
Éric Saltel [DR]

Faculty Member

Houman Borouchaki [Professeur, Université de Technologie de Troyes, HdR]

Technical Staff

Loïc Maréchal [Ingénieur Expert]

PhD Student

Azeddine Benabbou [Université de Technologie de Troyes]
Adrien Loseille [Université Paris 6]
Géraldine Olivier [Université Paris 6]
Erwan Renaut [Université de Technologie de Troyes]

Administrative Assistant

Maryse Desnous [TR (en commun avec Macs, Bang et Reo)]

2. Overall Objectives

2.1. Introduction

Une branche importante des sciences de l'ingénieur s'intéresse aux calculs des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques, ...) par la méthode des éléments ou des volumes finis. Ces méthodes utilisent comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées. Par suite, les algorithmes (de construction) de maillages occupent un rôle important dans toute simulation par la méthode des éléments ou des volumes finis d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé [25].

Le projet GAMMA a été créé en 1996. Les thèmes du projet regroupent un ensemble d'activités concernant les points indiqués ci-dessus, en particulier, l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par les méthodes d'éléments ou de volumes finis. Sont également étudiés les aspects de modélisation géométrique, de post-traitement et de visualisation des résultats issus de tels calculs [26].

L'évolution de la demande en termes de génération automatique de maillages implique une évolution des méthodes classiques de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés. Les maillages doivent donc être soit isotropes, le contrôle portant sur des tailles souhaitées, soit anisotropes, le contrôle portant à la fois sur des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs *a posteriori*, permettent de contrôler la qualité des solutions.

Ces préoccupations amènent à considérer le problème du maillage des domaines de calculs en eux-mêmes tout comme celui du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières de ces domaines.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette problématique conduit également à s'intéresser à l'aspect multi-cœurs au niveau des algorithmes de maillages proprement dits.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

Par ailleurs, de nombreux problèmes partent de saisies *scanner* (ou autre système discret) des géométries à traiter et demandent d'en déduire des maillages de surfaces aptes à être, par la suite, traités par les méthodes classiques (de remaillage, d'optimisation, de calculs).

Enfin, la maturité de certaines méthodes (victimes de leur succès) conduit les utilisateurs à demander plus et à considérer des problèmes de maillage ou des conditions d'utilisations extrêmes induisant des algorithmes *a priori* inattendus.

Les objectifs du projet Gamma consistent à étudier l'ensemble des points mentionnés ci-dessus afin de rendre automatique le calcul de la solution d'un problème donné avec une précision imposée au départ. Par ailleurs, certaines des techniques utilisées dans les problématiques de maillage sont utilisables dans d'autres disciplines (compression d'images pour ne citer qu'un seul exemple).

2.2. Highlights

La deuxième édition du livre "Mesh Generation" a été publiée en début d'année par Wiley et ISTE.

Deux thèses ont été soutenues cette année. Il (nous) semble qu'elles sont particulièrement novatrices, l'une pour la notion originale de "maillage continu" qui donne un cadre théorique fécond en retombées, l'autre pour sa contribution à un modèle permettant de considérer des nanostructures.

3. Scientific Foundations

3.1. Introduction

Keywords: *algorithmes, maillages.*

La construction d'algorithmes de maillages fait appel à un ensemble de disciplines scientifiques incluant notamment la géométrie euclidienne, différentielle, discrète ou, dans une certaine mesure, algorithmique. Par ailleurs, les aspects de complexité d'algorithme, minimisation des ressources mémoire et les problèmes de précision numérique sont pris en compte.

3.2. Méthodes de génération maillage

3.2.1. Méthode de type Delaunay

Une partie de la base théorique des méthodes de maillage de type Delaunay est fournie par l'ensemble des résultats relatifs aux méthodes de triangulation de Delaunay, néanmoins étendues et revues dans le cadre du maillage, l'aspect triangulation (de l'enveloppe convexe d'un nuage de points) ne représentant qu'une faible part de l'algorithmique à mettre en place. De nouveaux problèmes se posent en effet qui concernent les triangulations *contraintes* (bien résolus en deux dimensions, moins clairs en trois dimensions, au moins au niveau du codage), la façon de construire les points internes aux domaines (non convexes) considérés, les méthodes d'optimisation et, plus généralement, la définition de ce qu'est un maillage acceptable pour une application de type éléments ou volumes finis [27].

Par ailleurs, l'approche développée en deux dimensions et en trois dimensions se prête à une extension *anisotrope*. Un maillage de type Delaunay anisotrope en trois dimensions a des applications dans les problèmes où des directions sont à privilégier (mécanique des fluides avec présence de chocs, de couches limites, ...). En deux dimensions, on retrouve le même type d'applications et, de plus, une méthode qui s'applique à la construction de maillages pour les surfaces paramétrées. En effet, par définition, la géométrie d'une surface est intrinsèquement de nature anisotrope (rayons de courbure).

3.2.2. Méthode frontale

En deux dimensions, la méthode frontale est une méthode bien connue et utilisée depuis longtemps [28]. C'est l'une des toutes premières méthodes capables de traiter des géométries arbitraires. Un front initial est formé par les arêtes composant la discrétisation des frontières du domaine considéré. Partant d'une de ces arêtes, un point est choisi ou construit puis connecté avec celle-ci pour former un triangle. Le front est alors mis à jour et le même processus est poursuivi tant que le front n'est pas vide. En trois dimensions [29], cette méthode pose un certain nombre de difficultés liées en particulier au fait qu'il n'existe pas de théorie permettant de définir à coup sûr un algorithme efficace et convergent.

Les problèmes de convergence de l'algorithme, de validité et de qualité des maillages générés sont résolus de manière satisfaisante en se basant sur un maillage de fond et en utilisant des structures de données géométriques adaptées.

3.2.3. Autres méthodes

D'autres méthodes de génération de maillages existent. Une méthode importante est basée sur une utilisation "détournée" des structures de données en arbre, telle que le PR-quadtrees. Le domaine est immergé dans une boîte. Celle-ci est divisée de manière récursive en cellules selon une structure d'arbre de façon à vérifier un critère (ou test d'arrêt). Les cellules terminales servent alors de support à la création des éléments du maillage [31].

3.2.4. Géométrie algorithmique

La géométrie algorithmique est apparue, en tant que discipline, vers le milieu des années 80, [30], puis s'est développée au fil des ans, voir par exemple [24]. Dans certains de ses aspects elle semble traiter de sujets assez voisins de ceux rencontrés en maillage, pensons ici aux triangulations. Avec un peu de recul, force est de nuancer le propos. En effet ses apports ont été, sont et restent sans réel intérêt au sens où les problématiques envisagées sont par trop éloignées des problèmes concrets. Il n'en demeure pas moins vrai que l'on persiste à regarder ce que cette discipline pourrait éventuellement apporter aux méthodes et techniques qui nous préoccupent.

3.3. Méthodes d'adaptation de maillage

Dans une simulation numérique par des méthodes d'éléments ou de volumes finis, la qualité en forme et en taille des éléments du maillage support est importante, en raison de son effet sur la précision des solutions numériques et sur la convergence du schéma numérique utilisé lors du calcul [25], [32]. L'adaptation des maillages au comportement physique du phénomène étudié est un moyen de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques¹. La génération du maillage est alors gouvernée par ces résultats pour obtenir un nouveau maillage mieux adapté au phénomène physique modélisé.

Le principe de base pour gouverner un algorithme de construction de maillage est la notion de *longueur unité*, qui permet de piloter la méthode de façon à construire des arêtes de cette longueur. Cette longueur unité est mesurée dans le champ de métriques correspondant au problème étudié. Ce champ se traduit par une carte de spécifications de tailles ou de directions et de tailles liées, d'une part, à l'analyse des solutions du problème traité via un estimateur d'erreurs approprié et, d'autre part, à des contraintes de nature géométrique.

L'idée pour l'adaptation est alors d'utiliser des algorithmes de maillage gouvernés en les insérant dans une boucle de calculs. Chaque pas de la boucle comprend une phase de génération de maillage, une phase de résolution pour trouver la solution correspondante, une phase d'analyse de cette solution et, si besoin est, le processus complet est répété jusqu'à obtention d'une solution de précision donnée (au sens de l'estimateur d'erreur). Notons que ceci nécessite d'investir dans les solveurs, direction nouvelle dans le projet.

¹Le critère d'adaptation est basé sur un estimateur d'erreurs *a posteriori* et le résultat de l'analyse est traduit en termes de métriques associées aux nœuds du maillage support du calcul.

3.4. Définition géométrique

3.4.1. Surfaces analytiques et discrètes

En trois dimensions, les domaines à mailler sont généralement des volumes définis via leurs frontières (surfaces), elles-mêmes définies de façon analytique ou discrète.

Dans le premier cas (analytique), une équation de la surface est en général disponible sous forme explicite (parfois issue d'une forme implicite). Un premier exemple est fourni par les surfaces moléculaires, composées de portions de sphères et de tores modélisables par des équations explicites. Un autre exemple est fourni par les systèmes de CAO, qui proposent généralement deux types de représentation pour une surface donnée, implicite (CSG) ou explicite (B-Rep).

Dans le second cas (discret), on peut citer les reconstitutions 3D à partir de données volumétriques ou de points, ou encore les maillages dont les déformations géométriques proviennent d'un calcul mettant en œuvre la méthode des éléments finis par exemple.

Un cas intermédiaire est celui des surfaces définies par une grille structurée de points, dont une représentation analytique peut être obtenue par interpolation.

3.4.2. Analyse d'une géométrie

Les problèmes de maillage de surfaces nécessite l'analyse de la qualité, en un sens à préciser, des maillages construits. L'analyse des surfaces paramétrées (définies via un espace paramétrique) ou discrètes (définies via un maillage) conduit à chercher des estimateurs fiables quantifiant les écarts de ces surfaces aux maillages censés les approcher.

3.4.3. Structures de données

Les maillages sont construits en vue d'applications de type éléments ou volumes finis (bien que d'autres applications soient envisageables, visualisation et réalité virtuelle en particulier). Par suite, il est nécessaire de définir des structures de données appropriées permettant la communication entre le mailleur et les autres étapes d'un processus de calcul.

Réaliser une boucle de calculs adaptatifs ou encore mener ce type de travail en parallèle (pour pouvoir traiter des maillages de plusieurs dizaines ou centaines de millions d'éléments) implique que la définition de ces structures de données permette l'accès aux différentes informations utiles (communication entre processeur, transfert de données, liens avec la géométrie, etc.).

4. Application Domains

4.1. Panorama

Keywords: *adaptation et contrôle d'erreurs, réalité virtuelle, résolution d'EDP, volumes finis, éléments finis.*

Tout calcul par éléments ou par volumes finis, dans une certaine mesure, utilise comme support spatial un maillage. Ce dernier sert à discrétiser le domaine où le problème est formulé en l'approchant par l'union des éléments formant son maillage. Par suite, toute simulation numérique via ces méthodes nécessite la construction d'un maillage. Par ailleurs, les maillages de surfaces ont des applications autres, en particulier, en visualisation et en réalité virtuelle (animation, compression d'image, etc.).

4.2. E.D.P. et éléments ou volumes finis

Les applications sont ici les applications classiques indiquées ci-dessus. On trouve donc naturellement des applications en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en modélisation de transferts thermiques, en micro-electronique, en chimie, etc.

4.3. E.D.P. et adaptation

L'adaptation de maillage couplée aux estimateurs d'erreurs permet d'envisager de faire, au niveau industriel, des calculs avec un contrôle automatique d'erreurs. On trouve déjà, en statique pour la mécanique du solide, des produits basés sur ce type de techniques. Le but est évidemment d'étoffer les plages d'utilisation en abordant les cas dynamiques et des problèmes physiques plus compliqués (non-linéaires, en particulier).

4.4. Maillage des surfaces

Mailler les surfaces est un pré-requis fondamental pour aborder le maillage des domaines tridimensionnels. En effet, les maillages automatiques de tels volumes utilisent, en général, le maillage de leur frontière comme donnée. De plus, la qualité de ce maillage de surface conditionne, dans une large mesure, la qualité du maillage tridimensionnel construit.

5. Software

5.1. Introduction

Dans la thématique où nous nous situons, ne pas développer de logiciels serait une aberration. De même, ne pas les diffuser serait choquant.

Par suite, la diffusion des logiciels issus des travaux de recherche du projet Gamma est un point saillant de notre activité. Elle est effectuée, à ce jour, de deux façons, soit via des accords directs avec des partenaires académiques ou industriels soit via des distributeurs. Ainsi, l'Inria et Distene, en collaboration étroite, proposent différentes solutions permettant des mises à disposition, des évaluations, des transferts de technologie ou des ventes (sous des formes adaptées).

Les différents logiciels (ensemble de programmes autonomes) ou modules (ensemble de programmes à intégrer dans un logiciel) sont présentés par ordre alphabétique dans le tableau 1 et dans la description rapide qui suit. Pour plus de détails, voir :

<http://www-c.inria.fr/gamma/cdrom/projs/gamma/logiciel-fra.php>

Table 1. Tableau des logiciels et des modules.

Nom	Dimension	Disponibilité
BL2D-V2	2D	transfert
BLSURF-V3	3D surfacique	transfert
BLMOL	3D surfacique	transfert
Medit	2D/3D	domaine public
GAMANIC3D	3D volumique	transfert
GAMHIC3D	3D volumique	transfert
GHS3D	3D volumique	transfert
YAMS	3D surfacique	transfert

5.2. Logiciel BL2D-V2

Keywords: *adaptation de maillage, anisotrope, géométrie variable, isotrope, maillage, quadrilatère, triangle, élément P 1, élément P 2, élément Q 1, élément Q 2.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

<http://www-rocq.inria.fr/who/Patrick.Laug/logiciels/bl2d-v2/INDEX.html>

Le logiciel BL2D-V2 génère des maillages dans le plan, isotropes ou anisotropes, et peut être intégré dans un schéma adaptatif de calcul (notamment par éléments finis). Par rapport à la version V1, il offre de nombreuses possibilités nouvelles : méthode frontale, triangles quadratiques courbes, quadrilatères de degré 1 ou 2, frontières déformables, allocation dynamique de mémoire, etc.

La méthode de maillage est de type Delaunay ou frontale. Dans ce dernier cas, la génération des points internes suit une logique frontale, tandis que leur connexion est réalisée comme dans une approche Delaunay classique. L'obtention de quadrilatères est faite par appariement. La construction directe d'éléments de degré 2 est rendue possible via le contrôle du maillage des frontières du domaine, de façon à assurer la compatibilité désirée. Les nœuds milieux frontières sont placés en fonction de l'abscisse curviligne. Les nœuds milieux internes sont obtenus par un processus d'optimisation.

5.3. Logiciel BLSURF-V3

Keywords: *adaptation de maillage, anisotrope, isotrope, maillage de surface, quadrilatère, triangle, élément P 1, élément P 2, élément Q 1, élément Q 2.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

<http://www-rocq.inria.fr/who/Patrick.Laug/logiciels/blsurf/INDEX.html>

Le logiciel BLSURF est un générateur de maillages surfaciques. Ces derniers peuvent définir la frontière d'un maillage volumique qui est ensuite généré et transmis à un solveur, ou peuvent être transmis directement au solveur. Pour définir une surface tridimensionnelle, les méthodes les plus répandues consistent à placer des points de contrôle à l'aide d'un système de CAO, ou encore à obtenir automatiquement des points d'interpolation à l'aide d'un « scanner ». Dans ces deux approches, la surface est représentée de manière interne par un assemblage de carreaux paramétrés.

La méthode implémentée dans le logiciel BLSURF permet de générer, pour chaque carreau, un maillage qui respecte certaines spécifications de tailles d'éléments et qui approche fidèlement la « géométrie » de la surface. La méthode utilisée, dite indirecte, consiste à mailler les domaines de paramètres (2D) et à appliquer le maillage résultant dans l'espace réel (3D). Les nœuds du maillage sont générés par une méthode frontale ou algébrique, et leur connexion est réalisée par une méthode de Delaunay généralisée. Un maillage conforme est réalisé grâce à une discrétisation préalable des courbes interfaces constituant les frontières communes des carreaux. La méthodologie appliquée (maillage obtenu par assemblage des maillages des carreaux) préserve les contours de chaque carreau, ce qui est généralement souhaité. Cependant, cela risque de provoquer la création de petites arêtes et d'éléments de qualité médiocre. Grâce à une option du logiciel BLSURF, des maillages transcarreaux peuvent être générés par élimination des petites arêtes tout en conservant la géométrie de la surface.

La version précédente de BLSURF était codée en deux langages différents, à savoir Fortran et C. Par ailleurs, les différents composants de BLSURF communiquaient entre eux par l'intermédiaire de fichiers texte. La nouvelle version V3 est totalement réécrite en langage C afin de faciliter sa portabilité quelle que soit la plateforme utilisée, et comprend les nouvelles fonctionnalités suivantes :

- Transmission des données par mémoire ou par fichier, sur option de l'utilisateur.
- Traitement plus robuste de la récupération de la topologie (soudage des différents carreaux).
- Détermination par continuité d'une dérivée bien définie pour les points singuliers.
- Intégration complète dans BLSURF du module de simplification DECIMESH (sans génération d'un fichier intermédiaire de maillage).
- Projection des sommets du maillage simplifié sur la surface exacte (les sommets du maillage généré par DECIMESH sont proches de cette surface mais généralement n'en font pas partie).
- Construction d'un support géométrique pour une visualisation rapide de la surface (support également utilisé pour la projection de points sur la surface).
- Maillage en quadrilatères (sans décimation).

5.4. Logiciel BLMOL

Keywords: *maillage, surface moléculaire.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

<http://www-rocq.inria.fr/who/Patrick.Laug/logiciels/blmol/INDEX.html>

Une part grandissante de la chimie quantique est consacrée aux surfaces moléculaires. Pour modéliser une telle surface, chaque atome est idéalisé par une simple sphère. Il est alors possible de définir différents types de surfaces moléculaires, notamment la *surface de Van der Waals* (VWS), la *surface accessible au solvant* (SAS) et la *surface exclue au solvant* (SES), encore appelée surface de Connolly. Le but du logiciel BLMOL est de mailler ces surfaces en se conformant à certains critères de qualité. En particulier, des spécifications de tailles doivent être respectées et les éléments doivent être aussi réguliers que possible.

5.5. Logiciel Medit

Keywords: *visualisation de maillages, visualisation scientifique.*

Participants: Pascal Frey [correspondant, UPMC], Eric Saltel.

Medit est un environnement graphique (sous OpenGL) permettant de visualiser de manière interactive des maillages de grandes tailles (2D, 3D et surfaces) et des informations associées (champs de solutions, entités spécifiques). Les développements récents ont principalement concernés la visualisation stéréoscopique des maillages et des solutions ainsi que l'animation de particules sur des champs vectoriels.

5.6. Logiciel GAMHIC3D

Keywords: *maillage isotrope contrôlé, triangulation automatique, tétraèdre.*

Participants: Houman Borouchaki, Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht, Éric Saltel.

GAMHIC3D est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface. Ce module est une extension du module GHS3D au cas d'un problème de maillage contrôlé. On se donne en effet une *carte de métriques isotrope* (des tailles) définie de manière discrète aux sommets d'un *maillage de fond*. Le but est alors, partant d'un maillage de la frontière du domaine réputé conforme vis-à-vis de la carte spécifiée, de construire un maillage volumique correspondant conforme à cette même carte.

GAMANIC3D est le pendant *anisotrope* de GAMHIC3D.

5.7. Logiciel GHS3D-V3

Keywords: *maillage, triangulation automatique, tétraèdre.*

Participants: Paul Louis George [correspondant], Frédéric Hecht, Éric Saltel, Houman Borouchaki.

GHS3D, alias TetMesh-GHS3D, est un module de maillage automatique en tétraèdres d'un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles) de sa surface.

Notons que ce module est déjà intégré dans la plupart des codes commerciaux existants proposés par les éditeurs de logiciels en CFAO.

5.8. Logiciel YAMS

Keywords: *décimation, maillage de surface, optimisation, simplification.*

Participant: Pascal Frey [correspondant, UPMC].

YAMS est un logiciel destiné au remaillage adapté des maillages de surfaces. La donnée est une triangulation de surface, sur laquelle sont appliquées des modifications topologiques (bascules d'arêtes) et géométriques (bougé de points, création/suppression de sommets). Le but est d'obtenir un maillage simplifié (ou enrichi) correspondant à une carte de tailles donnée (de nature géométrique et/ou physique). Ce module a été diffusé, à ce jour, dans plusieurs codes commerciaux. Il est, par ailleurs, accessible en ligne.

6. New Results

6.1. Adaptation de maillages anisotropes multi-échelles

Keywords: *adaptation de maillage, maillage anisotrope, métrique continue.*

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Alain Dervieux [Projet Smash, INRIA-Sophia-Antipolis], Adrien Loseille.

Nos premières expériences sur l'adaptation de maillage anisotropes en trois dimensions ont mis en évidence l'importance de chaque étape du processus d'adaptation afin d'obtenir des maillages "réellement" anisotropes et permettant aux mailleurs adaptatifs d'obtenir des maillages de qualité respectant la carte de tailles prescrite.

La notion de métrique qui permet de contrôler la génération de maillage a ici une importance capitale, ce qui ouvre la voie à plusieurs axes de recherches permettant de mieux construire les cartes de métriques afin que le mailleur adaptatif soit plus efficace. Les axes sont les suivants :

- une adaptation de maillage multi-échelles pour capturer toutes les échelles de la solution en contrôlant des erreurs en norme L^p pour $p \geq 1$ ou $p = \infty$,
- les fondements théoriques basés sur les métriques continues afin de traiter des solutions d'ordre P^k avec $k \geq 1$,
- au niveau numérique, le développement de reconstructions d'ordre élevé des dérivées de solution discrète,
- la mise en place d'une méthode anisotrope de gradation des métriques (*i.e.*, contrôler le choc de prescription de tailles),
- le traitement de manière satisfaisante des singularités de la solution.

L'adaptation de maillage multi-échelles est basée sur la théorie des métriques continues anisotropes. Au cours de cette année, on a poursuivi le développement de cette théorie. L'idée clef a été d'avoir une vision continue de la notion de maillage, c'est-à-dire de considérer une fonction continue représentant le maillage. Cette vision fait sauter beaucoup de verrou relatif à la notion de maillage, notamment le fait que ce soit un objet mathématique discret, et permet de généraliser les études d'estimateur d'erreur pour traiter des problèmes plus complexes en utilisant des outils de géométrie différentielle.

Cette théorie a été développée en toutes dimensions pour toute norme L^p , en utilisant un modèle d'erreur basée sur l'erreur d'interpolation. De cette théorie découle deux résultats fondamentaux :

- la métrique obtenue donne une majoration optimale de l'erreur d'interpolation en norme L^p ,
- une convergence en maillage asymptotique à l'ordre 2 est obtenue pour l'erreur d'interpolation avec cette métrique optimale.

De plus, le choix de la norme L^p revêt une importance cruciale dans les simulations numériques. En effet, dans le cas de simulation avec discontinuités, un contrôle de la norme L^∞ (qui été celle employée précédemment) n'est pas du tout adéquat. Pour contrôler la norme L^∞ de l'erreur d'interpolation, la métrique spécifique de mettre tous les points dans les discontinuités. Les normes L^1 et L^2 sont beaucoup plus appropriées. Par ailleurs, le choix du p permet de contrôler la sensibilité de l'estimateur d'erreur.

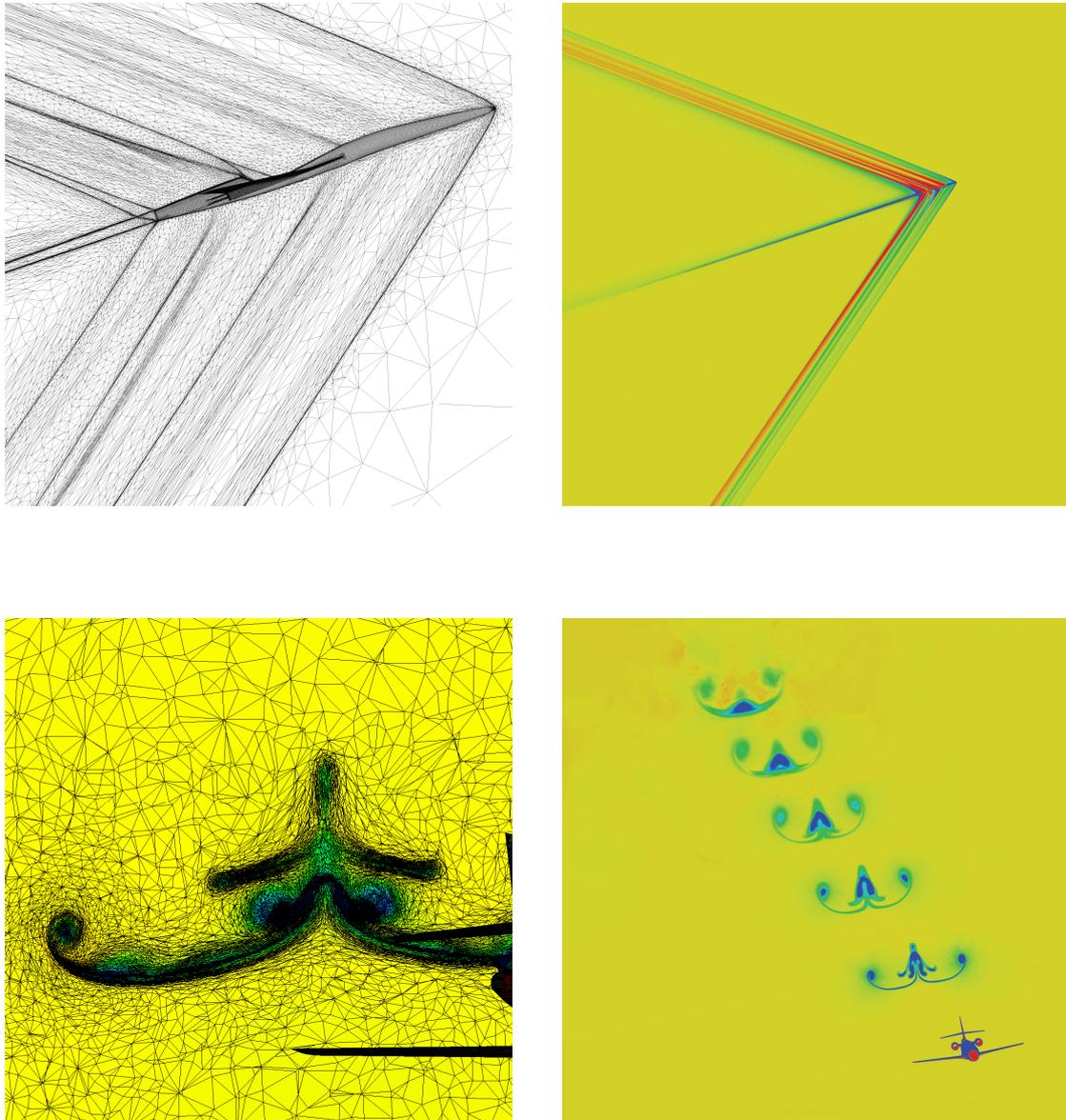


Figure 1. En haut, écoulement supersonique autour d'un avion: une vue du maillage anisotrope adapté (à gauche) et les iso-valeurs du nombre de Mach solution (à droite). L'adaptation multi-échelles a permis de propager très précisément les ondes de chocs émises par le jet. En bas, écoulement transsonique autour d'un avion d'affaire Falcon. On notera la capture des tourbillons de bout d'aile jusqu'à 500 mètres derrière l'avion grâce à l'adaptation multi-échelles.

Les résultats obtenus avec cette nouvelle approche sont très satisfaisants. Elle a été appliquée avec succès pour des écoulements supersoniques autour d'un avion. Elle a permis, entre autre, de propager le signal acoustique (*i.e.*, la signature de pression) sur plusieurs kilomètres alors que la résolution du maillage sur l'avion est de l'ordre du millimètre, Figure 1.

6.2. Adaptation de maillage par minimisation de fonctionnelles. Application à la prédiction du bang sonique.

Keywords: *adaptation de maillage "goal-oriented", bang sonique, maillage anisotrope, minimisation de fonctionnelles.*

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Alain Dervieux [Projet Smash, INRIA-Sophia-Antipolis], Adrien Loseille.

Ce travail (dans le cadre de la thèse d'Adrien Loseille) en collaboration avec le projet Tropics de l'INRIA Sophia-Antipolis est motivé par la mise au point et l'implémentation de nouvelles idées sur l'adaptation de maillage, basées sur une approche par fonctionnelle continue, et leurs applications à la Mécanique des Fluides. Il s'agit de définir une fonctionnelle d'erreur continue à minimiser à l'aide d'un adjoint. À partir de cette minimisation, on est alors capable d'exhiber une métrique en chaque sommet de la discrétisation qui servira à adapter le maillage. Le nouveau maillage adapté ainsi obtenu est tel qu'on évalue au mieux cette fonctionnelle continue. Pour évaluer les adjoints, on utilise le logiciel de Différentiation Automatique TAPENADE développé dans le projet Tropics.

La théorie d'adaptation de maillage anisotrope pour les fonctionnelles a été développée. On a réalisé une analyse d'erreur "goal-oriented" pour le modèle des équations d'Euler en 3D. Cette analyse prend en compte notre méthode de discrétisation de volumes finis. Tout d'abord, une analyse a priori est utilisée pour mettre en évidence l'influence locale de l'erreur d'interpolation. Puis, la spécification de la fonctionnelle, que l'on désire calculer de manière précise, est réalisée par le biais de l'état adjoint. La métrique optimale, qui contient les rapports d'anisotropie, pour contrôler cette fonctionnelle est obtenue par un calcul de variation. La résolution de ce problème permet d'obtenir la sensibilité de chaque sommet du maillage sur la fonction coût.

Des résultats 2D et 3D concluant, utilisant cette approche, ont été obtenus pour diverses simulations et fonctionnelles en mécanique des fluides, cf. Figure 2.

6.3. Adaptation de maillage pour des problèmes à géométries mobiles.

Keywords: *adaptation de maillage, géométrie mobile, méthode ALE.*

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Géraldine Olivier.

Aujourd'hui, de plus en plus de problèmes industriels concernent des simulations instationnaires où la frontière du domaine est mobile. Au vue de la complexité de ces simulations, elles sont en général réalisées sur des maillages grossiers où la précision du calcul est faible. Dans le cadre de la thèse de Géraldine Olivier, on s'intéresse au couplage des méthodes d'adaptation de maillage et des méthodes de calculs pour les problèmes à géométrie mobile pour pallier ce problème de précision. On cherche aussi à traiter efficacement les problèmes de grand déplacement de corps rigide.

Pour combiner efficacement adaptation de maillage et méthodes ALE pour de grands déplacements, on a analysé plusieurs axes de recherche :

1. formulation ALE des schémas pour des maillages à topologie variable,
2. méthode efficace de maillage mobile pour les grands déplacements,
3. méthode de maillage mobile adaptative,
4. méthode d'adaptation de maillage temporelle pour les simulations à frontière mobile.

Tous ces points sont primordiaux lorsqu'on cherche à déplacer un objet dans un maillage adapté fortement anisotrope où les éléments, bien qu'étant de bonne qualité, sont quasiment plats.

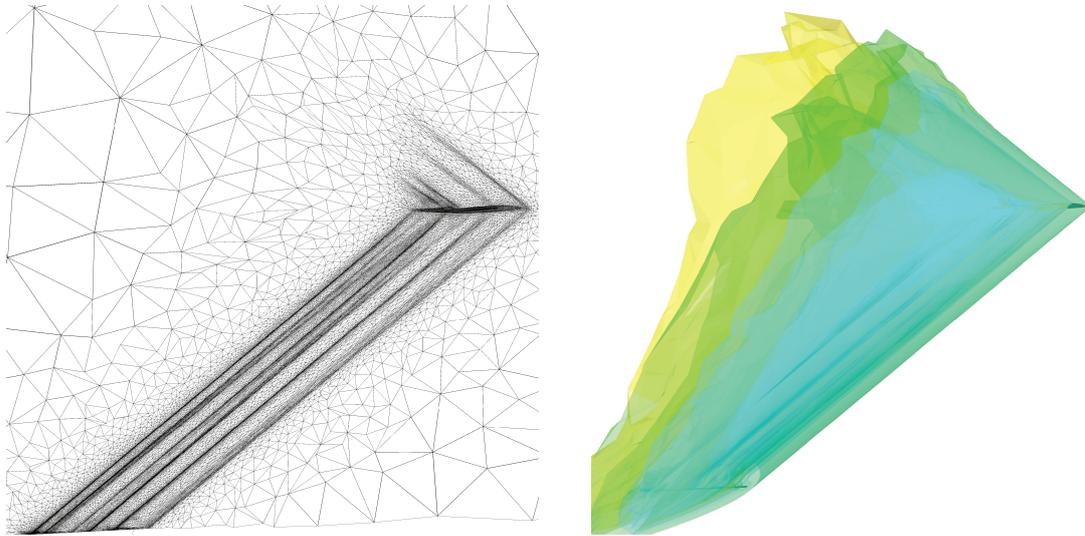


Figure 2. Écoulement supersonique autour d'un avion: une vue du maillage anisotrope adapté (à gauche) et les iso-surfaces du nombre de Mach solution (à droite). Dans cet exemple, on est seulement intéressé par la capture du champ de pression sur une zone d'observation située sous l'avion (et pas ailleurs). On constate alors que le maillage n'est adapté que dans les régions du domaine qui influence le calcul de la solution dans la zone d'observation.

En effet, la plupart des méthodes actuelles de maillage mobile sont basées sur des bougés de points à connectivité constante, mais de telles méthodes s'avèrent peu robustes pour déplacer des géométries complexes. À cet égard, il est intéressant de modifier la topologie du maillage au cours du processus global de déplacement, c'est-à-dire d'introduire des opérateurs de modification de maillage tels que la bascule d'arête. De telles méthodes de maillage mobile nécessitent la mise en œuvre d'une formulation de type ALE (Arbitraire Lagrange Euler) étendue au cas de maillages non iso-topologiques. De plus, le traitement efficace de déplacements quelconques dont l'amplitude est supérieure à quelques mailles, déplacements qui en général mettent en défaut les méthodes classiques comme les analogies avec les ressorts, reposent sur la résolution d'un problème variationnel adéquat du type élasticité linéaire.

Cette année, on a développé en 2D la théorie ALE à topologie variable afin de prendre en compte des bascules d'arêtes au cours du déplacement de l'objet. Ensuite, on s'est attaché à rendre efficace en terme de temps de calcul et d'utilisation mémoire la résolution du problème variationnel. Dans les premières expériences numériques réalisées, le surcoût pour le traitement de la géométrie mobile dans le solveur est de 10%.

D'autre part, on a aussi étendu l'algorithme d'adaptation de maillage instationnaire qui permet de contrôler l'erreur des simulations en espace et en temps aux simulations à géométrie mobile. La méthode consiste à regarder chaque sommet du maillage comme une particule et à y attacher une métrique temporelle.

Les perspectives de ce travail sont de considérer le déplacement d'objet rigide dans un maillage adapté. A ce moment là, il est primordial de préserver le maillage adapté lors du déplacement de la géométrie pour ne pas perdre le bénéfice de l'adaptation. Ceci devient une nouvelle contrainte dans le problème de maillage mobile. Dans le cas où le maillage serait associé à un champ de métrique anisotrope (i.e., le maillage est adapté), les techniques utilisées actuellement ne permettent pas de corréler le déplacement des sommets au champ de métriques prescrit. En d'autres termes, après le déplacement du corps rigide, le nouveau maillage n'est pas forcément adapté à la physique induite par l'objet. Pour pallier cet inconvénient, on s'attachera à définir un analogue du problème d'élasticité pour le déplacement dans un champ de métrique.

6.4. Partitionneur de domaine rapide

Keywords: *courbes de Péano Hilbert, partitionneur de domaine.*

Participants: Frédéric Alauzet [correspondant], Adrien Loseille, Éric Saltel.

Le partitionnement de domaine est une étape cruciale dans tout algorithme parallèle car il conditionne souvent la performance (le facteur d'accélération) de l'application envisagée. Dans le cas particulier du partitionnement d'un maillage de calcul, de nombreuses méthodes de partitionnement reposent sur le partitionnement du graphe du maillage (méthode algébrique). Le but de ces approches est de minimiser les communications et la taille de stockage de la matrice inverse approchée (étape de factorisation symbolique dans les algorithmes de résolution directe de système linéaire). Dans le cas particulier de l'adaptation de maillage anisotrope en parallèle, minimiser ce critère devient inutile. Il en résulte que le temps de partitionnement peut-être inutilement long et que les partitions fournies ne sont plus adaptées au but applicatif visé. En ce sens, on propose des méthodes de partitionnement rapides basées sur les courbes de Péano Hilbert.

Ces courbes ont été historiquement introduites pour prouver que la cardinalité d'un carré est égale à la cardinalité d'un de ses côtés. Elles proposent des algorithmes de parcours de l'espace très compact. Elles permettent donc de construire une bijection entre un domaine en trois dimensions (le domaine de calcul) et le stockage effectif de ce domaine en mémoire (RAM, ligne de cache).

L'algorithme de partitionnement 3D consiste simplement à partitionner la ligne pour finalement obtenir des partitions spatiales. On utilise alors les propriétés de compacité de ces courbes. Toutefois, dans le cadre de maillages adaptés fortement anisotropes, une étape de correction est nécessaire pour rendre connexe chaque partition.

L'algorithme a déjà été utilisé avec succès dans pour l'adaptation de maillage anisotrope en parallèle dans le cas particulier où la surface du domaine n'est pas adaptée. A titre d'exemple, le partitionnement d'un maillage adapté anisotrope contenant 10 millions de sommets et 60 millions d'éléments prend 6 minutes, IO compris, sur 1 processeur.

6.5. Modélisation géométrique et maillage des structures granulaires.

Application aux matériaux nanostructurés

Keywords: *maillage, matériau nanostructuré, modélisation, structure granulaire.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki, Jian Lu [The Hong Kong Polytechnic University], Azeddine Benabbou.

Ce travail a fait l'objet d'une thèse (A. Benabbou depuis octobre 2005, soutenance le 19 décembre 2008) en commun avec l'Université de Technologie de Troyes et *The Hong Kong Polytechnic University*, dans le but de développer un outil permettant de fournir des modèles géométriques et des maillages de structures granulaires en deux et trois dimensions. Les maillages générés sont utilisés dans les calculs par éléments finis de ces structures. Nous étudions, en particulier, des matériaux nanostructurés issus d'une gamme de procédés SMAT (Surface Mechanical Attrition Treatment).

Dans la modélisation géométrique proposée, les grains sont modélisés par des boules en 3D et des disques en 2D, leur taille est générée aléatoirement dans une distribution de tailles obtenue expérimentalement, et leur répartition est définie par un algorithme constructif de type frontal. Par ailleurs, la structure générée, composée de boules (disques), est éventuellement transformée en un diagramme composé de polyèdres (polygones).

Les maillages sont générés selon un schéma adaptatif, gouverné par un champ de métriques. Ce champ est spécifié en prenant en compte la géométrie et la proximité des grains, ainsi que la qualité des éléments du maillage (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). Dans les essais expérimentaux (de traction-compression par exemple), la structure des éprouvettes utilisées contient un très grand nombre de grains, de l'ordre de quelques milliards. La génération d'un maillage adapté de qualité d'un tel système présente un coût considérable en termes de nombres d'éléments : 10 millions de tétraèdres pour 1000 grains sphériques, trente fois plus pour des grains polyédriques. Afin de paralléliser le maillage (et le calcul éléments finis), nous avons proposé des méthodes de décomposition de domaines. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation du Diagramme de Laguerre ou la surface moyenne (axe médian en 2D).

Durant l'année 2008, nous nous sommes focalisés sur la génération de maillages adaptés en 3D et sur les méthodes de décomposition de domaines (figure 3).

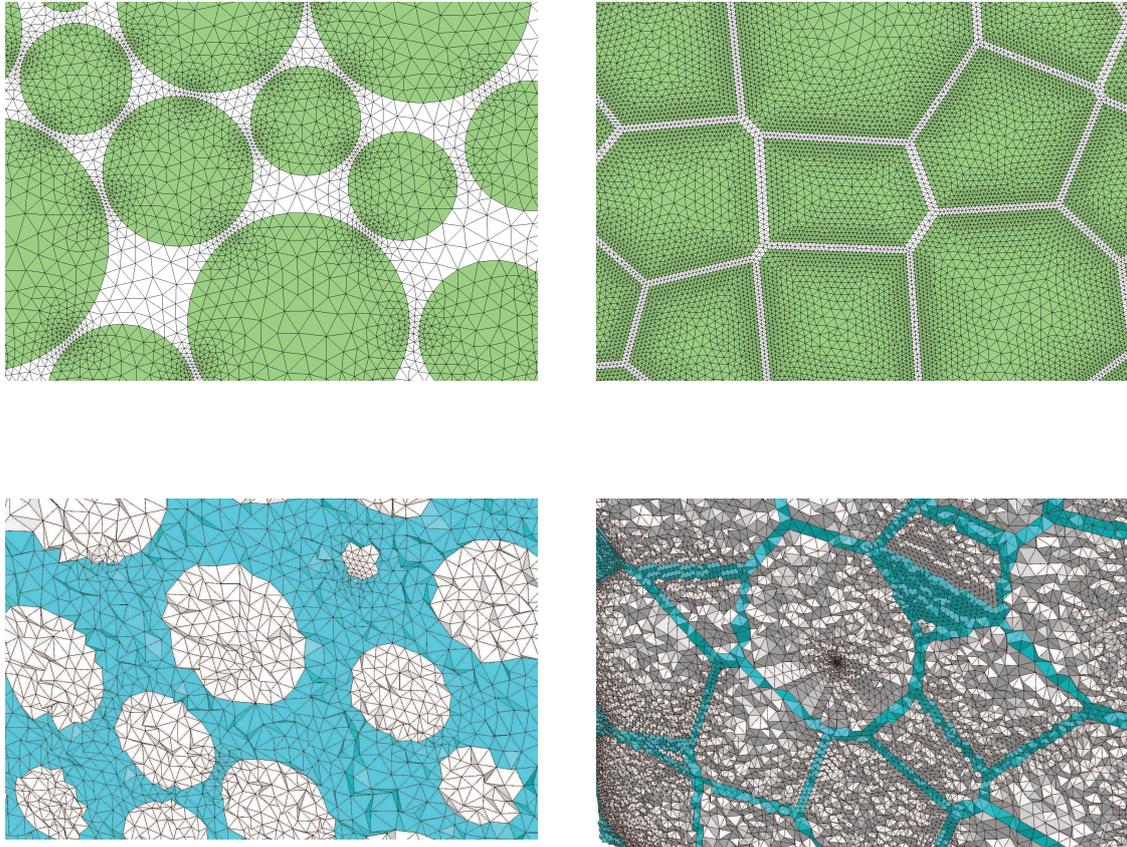


Figure 3. En haut : maillage d'un modèle composé de disques (à gauche) ou de polygones (à droite). En bas : coupe dans un maillage volumique d'un modèle composé de boules (à gauche) ou de polyèdres (à droite).

6.6. Reconstruction de la topologie et génération de maillages de surfaces composées de carreaux paramétrés

Keywords: maillage, modélisation, squelette topologique.

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki, Erwan Renaut.

Cette étude, qui fait l'objet d'une thèse (E. Renaut depuis octobre 2006) en commun avec l'Université de Technologie de Troyes et dans le cadre du projet EHPOC du Pôle de Compétitivité SYSTEM@TIC, concerne la génération de maillages de surfaces conçues via un système de CAO (conception assistée par ordinateur). Celle-ci exige une définition propre de la topologie des différents carreaux constituant une surface. Ainsi, une surface est composée d'un assemblage conforme de carreaux, chaque carreau est constitué d'un assemblage conforme de segments courbes, et chaque segment courbe est délimité par ses deux extrémités. Ces segments courbes et ces points extrémités constituent le squelette de la surface, et la conformité topologique exige que les relations d'adjacence entre les carreaux soient exprimées en termes de ces entités élémentaires. Ces

informations topologiques étant souvent absentes du système de CAO, notre objectif est la reconstruction de ce squelette à partir de considérations géométriques, après avoir déterminé la possibilité ou non de cette reconstruction. Le problème peut être décomposé en deux étapes :

- La première étape correspond à la reconstruction de la topologie des sommets. Pour ce faire, un algorithme de recollement des sommets via les courbes frontières des carreaux a été développé. L'originalité de la méthode réside dans l'utilisation d'un score calculé entre deux courbes de la surface. Ce score nous permet de quantifier le degré de correspondance entre les sommets des deux courbes considérées.
- La deuxième étape constitue la reconstruction de la topologie des courbes. En s'appuyant sur la topologie des sommets récupérée précédemment, il s'agit de faire correspondre les courbes entre les carreaux adjacents de la surface. L'utilisation d'un seuil de distance entre deux courbes adjacentes nous permet de contrôler le recouvrement de la surface.

L'ensemble de ces deux étapes constitue le noyau de reconstruction topologique. Actuellement, nous sommes capables de reconstruire la topologie pour des cas de surfaces CAO composées d'un grand nombre de carreaux et pour des configurations multi-échelles. La figure 4 illustre un résultat obtenu pour une surface complexe.

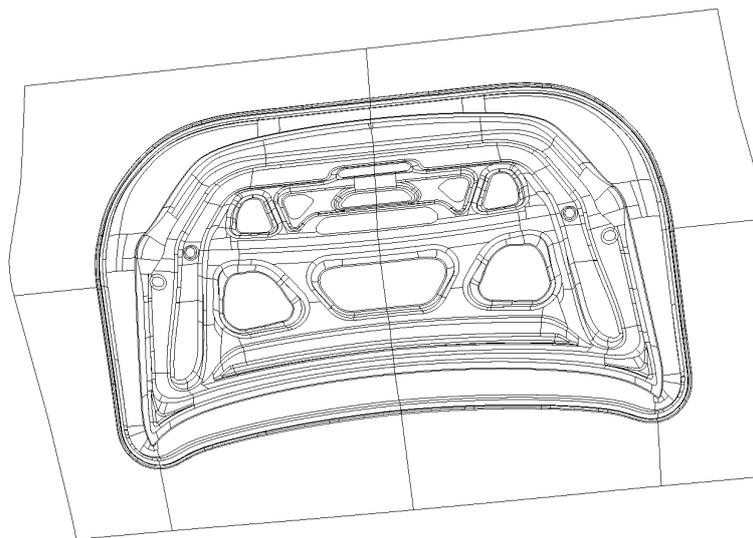


Figure 4. Squelette topologique reconstruit d'une surface CAO composée de 924 carreaux.

6.7. Support géométrique linéarisé des surfaces CAO

Keywords: *maillage, modélisation, support surfacique.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

Ces travaux constituent une extension aux surfaces d'une précédente étude concernant les courbes. En effet, dans le contexte du maillage de surfaces formées de carreaux paramétrés, par une méthode directe ou indirecte (via le maillage des domaines de paramètres), la discrétisation des courbes interfaces reliant les carreaux joue un rôle crucial car elle influe sur la qualité du maillage qui en découle. Dans le cas d'une méthode indirecte, la discrétisation des courbes interfaces doit être reportée dans les espaces paramétriques. Ceci est habituellement réalisé par des techniques de recherche de racines d'équations généralement non linéaires.

Pour une plus grande efficacité, nous utilisons une technique innovante de linéarisation afin de déterminer la correspondance précédente. De plus, cette linéarisation des courbes interfaces permet de les discrétiser sans calculer explicitement des longueurs d'arcs.

Dans notre nouvelle étude, chaque carreau paramétré est approché par un support géométrique linéarisé, composé de triangles. Étant donné un point de l'espace tridimensionnel, le triangle le plus proche est identifié via une grille de localisation selon le même principe que le *bucket sort*. La linéarisation permet d'en déduire de manière efficace le point antécédent dans le domaine de paramètres correspondant. Un algorithme de *steepest descent* permet d'améliorer la précision du résultat. Ce concept ouvre des perspectives très prometteuses pour la génération de maillages entièrement déconnectée du système de CAO, ce qui améliorerait sensiblement les vitesses de calcul et résoudrait les problèmes de qualité dans le cas de paramétrisations instables.

6.8. Empreintes de courbes sur une surface CAO

Keywords: *courbe, empreinte, maillage.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

Cette étude a été motivée par le besoin d'interfaces avec des maillages indépendants. Il s'agit d'importer des maillages provenant d'autres maillages, spécialisés par exemple pour des portions particulières d'une voilure d'avion. L'importation de ces maillages oblige à projeter des courbes 3D sur la surface et dans les domaines de paramètres. La première projection permet d'attacher une courbe 3D isolée à un carreau ou à un ensemble de carreaux supposé la contenir. La seconde, opération inverse du mapping, est essentielle pour la définition des carreaux restreints (*trimmed*). Toutes ces opérations sont réalisées de manière efficace grâce au support géométrique linéarisé décrit ci-dessus.

Par ailleurs, nous avons mis en place une méthodologie basée sur des techniques de contrôle de gradation de maillages, qui permet de générer un maillage de qualité d'un domaine pour lequel des spécifications de taille sont données et des discrétisations de courbes sont imposées. Notre approche généralise un algorithme classique de réduction de gradation pour améliorer la qualité en forme des éléments du maillage, en symétrisant l'équilibrage des tailles par diminution et aussi par augmentation.

À titre d'exemple, la figure 5 montre l'empreinte du maillage d'une voilure sur le fuselage d'un avion. La courbe à importer est définie par une discrétisation géométrique, tandis que le maillage spécifié sur le fuselage est à taille constante. Le choc de tailles produit des éléments de mauvaise qualité au voisinage de l'empreinte (apparition de « parapluies »). Ce phénomène est évité par la méthode généralisée du contrôle de la gradation de taille.

6.9. Maillages transcarreaux

Keywords: *maillage, transcarreaux.*

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

Généralement, le maillage d'une surface CAO est carreau-dépendant, c'est-à-dire qu'il préserve le contour de chaque carreau. Cette propriété est parfois souhaitée, mais il peut en découler la présence de petites arêtes et d'éléments de mauvaise qualité. Ces petites arêtes ne sont pas, en général, conformes à la carte de taille spécifiée. Le but de ces travaux est d'éliminer les petites arêtes qui résultent de cette contrainte de préservation des frontières des carreaux, à condition qu'elles appartiennent à une région presque plane. À cette fin, deux zones de tolérance par rapport au maillage de référence initial ont été introduites pour rester proche de la surface. Le maillage de référence est ensuite simplifié et optimisé (en termes de qualité en forme) de manière à ce que le maillage résultant appartienne à ces zones de tolérance. La présence du support géométrique linéarisé, présenté plus haut, permet de projeter tous les sommets du maillage transcarreaux sur la surface exacte.

6.10. Reconstruction de surface à partir d'un nuage de points

Keywords: *maillage de surface, nuage de points, reverse engineering.*

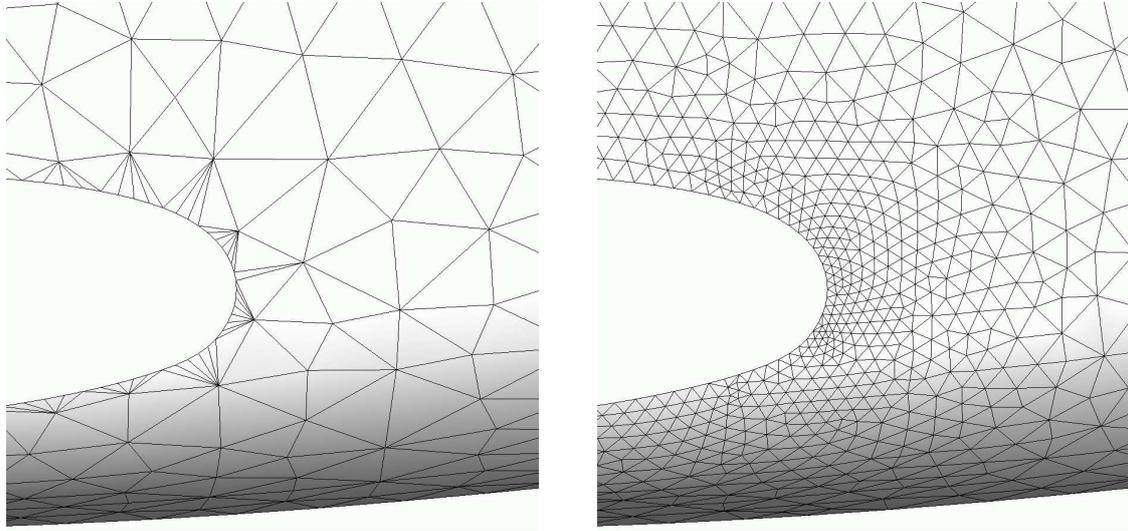


Figure 5. Empreinte du maillage d'une voilure sur le fuselage d'un avion, sans et avec gradation.

Participants: Houman Borouchaki, Paul Louis George [correspondant], Éric Saltel.

La construction d'un maillage de surface à partir de la donnée d'un nuage de points obtenus par un processus de saisie (scanner, ...) est un problème délicat déjà traité en vue d'autres applications. Les méthodes utilisées, en général, ne conduisent pas à un résultat satisfaisant dans notre cas justifiant cette étude.

Le but est en effet de construire une surface apte à être traitée par les outils "standards" de remaillage et d'optimisation de surfaces et, de ce fait, apte à être le support de calculs. Ces demandes induisent la recherche de propriétés particulières liées, en particulier, aux Éléments Finis. Évidemment, la méthode permet de traiter d'autres types d'applications qui, en général, sont de difficulté nettement moindre au niveau de ce qui est attendu.

La méthode proposée débute par la construction d'une triangulation de Delaunay exacte au sens de son dual (le diagramme de Voronoï). Ensuite, une construction simulée de la surface moyenne correspondant à l'objet volumique construit permet de sélectionner, parmi les faces des tétraèdres de la triangulation actuelle, une liste de faces candidates.

Le résultat est une surface le plus souvent trouée (des faces manquent), à variété non uniforme (des faces sont en trop et des arêtes sont communes à plus de deux faces), de mauvais genre, voire non orientable (en un sens local, un ruban de Moebius ne posant pas de problème), telle que des sommets sont sur-connectés (appartenant à plusieurs nappes), ..., et surtout, ne présentant pas les propriétés minimales souhaitées.

La dernière étape de la méthode consiste donc à résoudre tous ces cas afin de construire une surface à la fois régulière, présentant les "bonnes" singularités (coins et arêtes vives, pour des pièces mécaniques en particulier), à variété uniforme (chaque arête appartient au plus à deux faces) et, au final, telle que les outils standards de traitement des surfaces s'appliquent sans problèmes particuliers.

Les diverses étapes de cette enchaînement nous ont conduit à divers développements algorithmiques dont un triangulateur rapide capable de produire 600.000 tétraèdres par seconde.

Les critères de décision (décider quelle face de tétraèdre est un triangle de la solution cherchée) sont multiples et prennent en compte :

- la notion de proximité. Par exemple, avec des notations évidentes, on définit $d(P, AB) = \text{Max}(d(AP), d(BP))$ pour quantifier la proximité d'un point P vis à vis d'une arête AB , notons que cette formule contrôle, au vol, les angles en A et B ;
- la notion de régularité (angle entre deux faces) ou la variation de courbure locale (via des normales);
- des propriétés statistiques (ainsi, le fait qu'il n'y a pas en général d'angle très obtus dans les faces d'une surface);
- les défauts angulaires (la somme des angles autour d'un sommet), manques ou excès sont le plus souvent synonymes de mauvais choix;
- la notion de continuité (une face à retenir "ressemble" aux faces voisines);
- etc.

Notons que tous ces critères sont dynamiques (changent au cours du processus de reconstruction).

Pour des échantillons raisonnables, ceci suffit. Pour des échantillons bruités ou ambigus (double nappe de points, épaisseur locale versus pas local de l'échantillon, ...) cela ne suffit plus. Par ailleurs les pièces mécaniques, à la différence des statues et autres lapins (de Stanford) ont des propriétés spécifiques (angle dièdre à 90 degrés, singularités, ...) qu'il convient de prendre en compte. C'est dans ces directions que nous avons progressé cette année.

Les résultats sont statistiquement probants (même si l'on peut toujours exhiber des cas qui ne marchent pas) comme l'atteste le jeu de données que nous utilisons comme test (à côté de tests en aveugle sur la base de données du projet, plusieurs dizaines de milliers de cas). Nos tests vont des objets "mous" (statues, lapins, dragons, ...) aux objets réels d'origine mécanique.

Pour des raisons de mémoire les échantillons de plus de 5 millions de points sont décimés a priori (via une structure spatiale). Par ailleurs, une décimation locale est possible en utilisant le triangulateur comme filtre. Par suite, on s'autorise la perte de (quelques) points du nuage initial. Dans le cas où la surface comprend plusieurs composantes connexes et si la plus grande comprend plus de 95% des triangles, les autres sont supprimées.

On donne, pour illustrer, quelques figures et informations chiffrées relatives à différents types de données en notant, pour finir, que dans certains cas, on ferait mieux à l'œil. C'est dans cette direction que nous allons poursuivre cette étude (dans le cadre du contrat EHPOC).



Figure 6. Objets "mous". Le lapin, surface fermée avec 71.882 triangles, 1,33 sec. La tête de David, surface ouverte (290 arêtes de bord), sans trou avec 708.812 triangles, 71 sec. Le "happy", surface fermée avec 917.676 triangles, 20,1 sec.

6.11. Parallélisation de codes : la librairie LP2

Keywords: maillage, multicœurs, multithreads, parallélisation, pthread, simulation numérique.

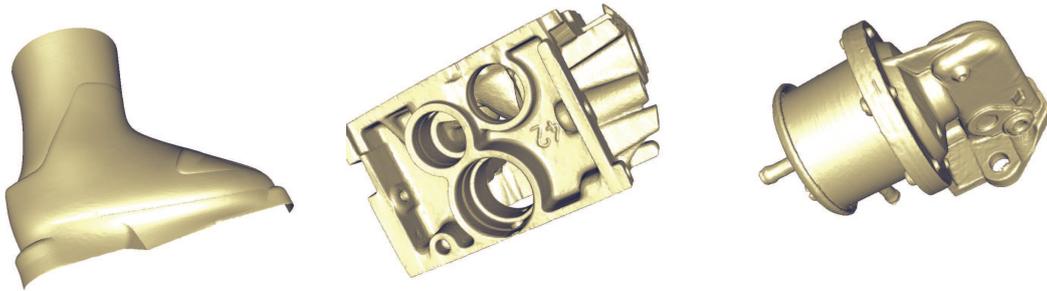


Figure 7. Objets de nature mécanique. Chaussure, surface ouverte (890 arêtes de bord), sans trou avec 66.355 triangles, 3,08 sec. Moteur, surface fermée avec 640.146 triangles, 13,89 sec. Pompe, surface ouverte (331 arêtes de bord), sans trou avec 1.000.641 triangles, 20,83 sec.



Figure 8. Objets peu évidents (bien qu'éventuellement d'apparence simple). À gauche, 180 faces, 0,01 sec., présence de coins et d'arêtes vives. Un simple critère de proximité violerait ces singularités. Au milieu, 3.808 faces, .18 sec., mêmes syndromes. À droite, surface ouverte sans trou, 231.892 triangles, 5,14 sec., présence de zones minces et possibilités de "ponts".



Figure 9. Objets améliorables. Dans ces trois cas, on a l'illustration d'une reconstruction ayant fait, localement, quelques mauvais choix. Il manque quelques faces (cas concave, pas assez de matière) ou, au contraire, on a des faces à supprimer (cas convexe, trop de matière).

Participants: Loïc Maréchal [correspondant], Frédéric Alauzet, Adrien Loseille, Éric Saltel.

Le but de la librairie LP2 est de fournir une API aux développeurs de solveurs ou de mailleurs dans le domaine du calcul scientifique afin de paralléliser leurs codes de manière simple, transparente et rapide.

Cette librairie est basée sur les threads au standard posix (pthreads) et permet donc d'exploiter les machines multi-processeurs et les processeurs multi-cœurs à mémoire partagée sur la plupart des plateformes actuelles (Linux, Mac Os X, Unix, Windows).

6.11.1. Introduction

La motivation initiale est de tirer parti des nouveaux processeurs multi-cœurs aujourd'hui accessibles à toutes les bourses.

Depuis 2004, le gain en fréquence et en efficacité des processeurs mono-cœurs augmente nettement plus lentement que par le passé. Une accélération annuelle de 10% est observée au lieu de 40% lors des 30 dernières années (soit un doublement tous les deux ans).

Les gains de vitesses ne peuvent désormais être obtenus que grâce au parallélisme en multipliant le nombre de processeurs (désormais appelés "cœurs") présents dans chaque puce.

Ceci impose une nouvelle contrainte aux programmeurs : alors que les augmentations de vitesse via la fréquence d'horloge ne nécessitent que peu de modifications algorithmiques (optimisation des défauts de caches essentiellement), les multi-cœurs demandent une parallélisation des codes, soit leur réécriture complète dans certains cas !

6.11.2. API

L'appel aux commandes pthreads étant encore trop complexe et non-transparent pour l'utilisateur, l'encapsulation dans une API simplifiée s'imposait.

La LP2 permet donc de paralléliser des boucles de calculs travaillant sur des tableaux ou structures à accès séquentiels ou même indirects (elles constituent l'essentiel du temps de calcul en simulation numérique basée sur des maillages).

Le programmeur n'a pas à réécrire son code mais à sortir les boucles de calcul dans des procédures indépendantes et à décrire simplement les structures de données sur lesquelles elles travailleront (taille du tableau, accès séquentiel ou indirect).

Cette API, actuellement appellable à partir du langage C, est en cours de portage pour le Fortran, hélas toujours utilisé dans le calcul scientifique.

6.11.3. Capacités

La LP2 peut travailler sur des accès mémoires indirects ce qui fait son originalité. Ce type d'accès est très fréquent lors de la manipulation de maillages et empêche la parallélisation automatique proposée par de nombreux compilateurs C ou Fortran.

Le problème a été résolu en renumérotant les maillages à l'aide d'une courbe de Peano-Hilbert et en utilisant ses propriétés de localisation spatiale afin d'éviter les conflits potentiels d'accès mémoire.

Elle permet aussi de lancer des processus différents de manière asynchrone (parallélisme non symétrique ou pipeline). Ceci permet de faire du recouvrement (ou pipelining) dans les processus d'entrées/sorties où lors de phases de calculs totalement indépendantes les unes des autres.

6.11.4. Applications

Seules deux logiciels du projet Gamma ont été modifiés pour utiliser cette librairie. Dans les deux cas, l'essentiel du travail d'adaptation a pris deux ou trois jours ce qui est très court dans le domaine de la parallélisation.

6.11.4.1. Le mailleur hexaédrique Hexotic.

Seule l'optimisation de la qualité des éléments par déplacement des nœuds a été parallélisée. Comme cette procédure représente environ les deux tiers du temps de calcul, l'accélération maximale est trois (d'après la loi d'Amdhal).

Ceci peu paraître peu mais il faut garder à l'esprit que l'objectif est d'utiliser au mieux les machines de bureaux disposant actuellement de quatre cœurs. De plus l'investissement en temps n'a été que de deux jours...

6.11.4.2. Le solveur en mécanique des fluides Wolf

Les routines principales de la résolution, qui représentent 97% du temps de calcul du code, ont été parallélisées. Elles concernent des routines sans dépendance qui sont le calcul du pas de temps et la mises à jour de la solution et des routines avec dépendance qui sont le calcul des gradients, des conditions aux limites et des flux. L'investissement en temps n'a été que de deux jours pour paralléliser les parties 2D et 3D.

Un point primordial pour obtenir de bon taux d'accélération dans les routines avec dépendance a été d'utiliser des renumérotations de Péano Hilbert. En effet, en général les taux de collisions sont de l'ordre de 40% à 90% alors qu'avec renumérotation ils sont toujours inférieurs à 3%.

Ceci a permis d'obtenir des taux d'accélération entre 6 et 7 lors de tous nos calculs sur un MacPro à 8 processeurs. Le solveur a aussi été utilisé sur un ordinateur SGI Altix à 128 processeurs, cf. paragraphe suivant.

6.11.4.3. Utilisation sur un ordinateur SGI Altix à 128 processeurs.

Bien que prévue initialement pour fonctionner sur des machines communes de deux à huit cœurs, nous avons eu l'occasion de tester la LP2 sur une machine à 128 processeurs et à accès mémoire non-uniforme (ccNUMA) réputé plus lent (mais plus "scalable") que l'accès uniforme (ou "crossbar") utilisé dans les machines de bureaux.

Nous avons pu obtenir les taux d'accélération prévu par la loi d'Amdhal soit 30 pour le solveur Wolf dont 3% du code est série. Ceci prouve que la parallélisation à mémoire partagée peut être utilisée avec succès au delà d'une dizaine de processeurs.

6.11.5. Développements futurs

Nous souhaitons paralléliser d'autres codes du projet Gamma afin d'obtenir un maximum de retour d'expériences avant de décider d'éventuelles corrections ou évolutions à donner à la LP2.

Il est envisagé de paralléliser les mailleurs BLSURF et GHS3D et peut-être le visualiseur de maillages MEDIT développé par Pascal Frey afin d'élargir le champ d'application au graphisme.

6.12. Site de données 3D

Keywords: *maillage de surface, site de données.*

Participant: Eric Saltel [correspondant].

Nous avons créé un site pour mettre à disposition les maillages de surface que nous utilisons à des fins de mise au point et de validation de nos logiciels. Par ailleurs, il est possible de construire des scénarios de calculs en combinant des objets sélectionnés dans ce site. L'adresse du site est :

<http://www-c.inria.fr/gamma/gamma.php>

Par ailleurs, les objets du site sont marqués en indiquant si ils sont maillables par GHS3D, si ils sont remaillables par un de nos maillages de surface, si ils sont passés dans un intersecteur de surfaces (correction de surfaces "fausses"), si ils sont correctement reconstruit à partir du nuage de points correspondant.

Les maillages sont dans leur format initial (.3ds, .obj, .wrl,...) et afin de faciliter leur lecture, ils sont toujours présents dans le format interne .mesh en vogue à GAMMA.

Plus de 100000 objets sont accessibles directement ou indirectement si le site de provenance n'autorise pas la rediffusion. En 1 an et 1/2 il a eu 400000 downloads ce qui fait une moyenne de 700 downloads par jour.

7. Contracts and Grants with Industry

7.1. Contrat de partenariat Dassault Aviation

Participants: Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

A la suite d'un précédent contrat entre l'INRIA, l'Université de Technologie de Troyes et Dassault Aviation, ce nouveau contrat de trois ans (2007-2009) porte sur les sujets de recherche suivants :

- Intégration de BLSURF dans l'évaluateur de Dassault Aviation : interface avec des maillages indépendants, reconstruction du squelette topologique à partir de considérations géométriques, traitement des paramétrisations instables.
- Adaptation de maillages : estimation d'erreur et génération de maillages isotropes ou anisotropes.
- Maillages quadrilatéraux : pour générer un maillage quadrilatéral, la méthode d'appariement consiste à assembler des triangles deux à deux ; cependant, pour obtenir des quadrilatères de bonne qualité, la forme de ces triangles doit respecter des critères particuliers qui doivent être pris en compte lors du placement des points dans la méthode actuelle.
- Maillages transcarreaux : le maillage simplifié doit être optimisé en se basant sur la surface exacte (définie par la CAO).
- Identification des courbes critiques : dans de nombreux cas, le maillage généré doit s'appuyer sur certaines courbes critiques, en particulier des lignes de courbure surfacique maximale (notamment le long des bords d'attaque) et des lignes physiques particulières pour le suivi de phénomènes directionnels.

7.2. Projet EHPOC : maillage surfacique

Participant: Patrick Laug [correspondant].

Le projet EHPOC (2008-2010) fait partie du Pôle de Compétitivité SYSTEM@TIC – Paris Région. Le consortium EHPOC (Environnement Haute Performance pour l'Optimisation et la Conception) compte 17 entreprises de l'industrie et des services (grands groupes et PME) et 12 centres de recherche (laboratoires publics et centres techniques). Il a pour objectif la conception et le développement de plates-formes et de logiciels pour la simulation (maillage, optimisation, ...), ainsi que leur mise en œuvre sur des architectures à haute performance. Notre contribution concernant le maillage surfacique portera sur les sujets suivants :

- Meilleure prise en compte des quadrilatères : supprimer les fichiers temporaires, éliminer les quadrilatères dégénérés, améliorer les appariements, diminuer le nombre de triangles restants, ...
- Amélioration du plug-in fourni dans le cadre du précédent projet IOLS, notamment pour le transcarreaux.
- Prise en compte par le mailleur de la variation locale importante de métrique et des discontinuités.
- Maillage en triangles quadratiques P^2 .

7.3. HISAC

Participants: F. Alauzet, A. Loseille.

Le contrat européen HISAC (highspeed aircraft) vise à analyser la faisabilité par Dassault Aviation d'un avion supersonique de transport de petite taille économiquement viable vérifiant les contraintes environnementales (notamment les nuisances sonores). Notre contribution dans ce projet est :

- de modéliser et de simuler précisément le bang sonique émis par le jet supersonique,
- de modifier le profil aérodynamique afin de réduire le bang tout en préservant les autres coefficients aérodynamiques (dont la traînée).

Pour cela, on cherchera à obtenir une signature du bang sonique avec une forme spéciale contenant plusieurs petits pics au lieu d'un seul grand pic de pression. Des travaux préliminaires ont déjà été effectués dans le cadre du programme national français COS.

Pour la modélisation du bang sonique, l'objectif est d'améliorer la simulation du champ proche de l'avion donné par le solveur volumes finis `Wolf`, qui sert de condition initiale pour le code de propagation `SonicBoom`, par le biais d'une stratégie d'adaptation de maillage développé à l'INRIA au projet Gamma. L'algorithme d'adaptation de maillage est basé sur :

- les nouveaux générateurs de maillage adapté anisotrope (`Yams` pour la peau et `GAMANIC3D` pour le volume),
- et une prescription du champ de métriques, *via* `Matrix`, issue des propriétés locales de la surface et de senseurs CFD.

Les résultats attendus ont été obtenus avec l'approche adaptative multi-échelles sur la géométrie fournie par Dassault Aviation. Le champ proche de l'avion a été calculé précisément sur plusieurs kilomètres et a permis de valider des modèles simplifiés de propagation du bang sonique.

Une nouvelle géométrie plus réaliste, représentant une forme "low boom", nous a récemment été fournie sur laquelle une étude complète doit encore être réalisée.

7.4. Contrat de partenariat INRIA/EPFL/Dassault Aviation

Participant: F. Alauzet.

Ce contrat se déroule dans le cadre d'une collaboration entre Dassault Aviation, l'EPFL et l'INRIA. L'objectif est d'analyser le comportement des algorithmes de maillage adaptatif anisotrope pour des écoulements transsoniques autour d'un avion. Deux géométries ont été fournies par Dassault Aviation: une aile ONERA M6 et un avion d'affaire Falcon.

Pour cela on comparera, sur des configurations de vol définies par Dassault Aviation, les calculs Navier-Stokes réalisés sur deux types de maillages. Les premiers, fournis par Dassault Aviation, sont des maillages de type Navier-Stokes où la couche limite est finement maillée de manière structurée et le reste du domaine est maillé pseudo-uniformement. Ces maillages sont couramment utilisés par Dassault Aviation pour réaliser leurs calculs Navier-Stokes. Les seconds sont des maillages adaptés où cette fois la couche limite et le reste du domaine sont maillés de manière automatique par le processus d'adaptation. On analysera entre autres les estimateurs d'erreur proposés afin de voir s'ils permettent à la fois de bien capturer la couche limite et les autres phénomènes physiques tels que les ondes de chocs ou bien les tourbillons.

Le schéma d'adaptation de maillage utilise:

- Wolf le solveur Navier-Stokes compressible basé sur la méthode Mixte-Element-Volume développé dans le projet Gamma,
- Felib qui construit la métrique à partir de la solution développé à l'EPFL,
- Mmg3d le remaillieur local anisotrope adaptatif développé à l'UMPC Paris VI,
- Meshinter qui interpole le champ de solution d'un maillage sur un autre développé dans le projet Gamma.

7.5. Génération de maillages hexaédriques : Hexotic

Participant: Loïc Maréchal [correspondant].

Le projet Hexotic vise à mettre au point un algorithme et un logiciel de génération automatique de maillages hexaédriques non-structurés. Il a démarré dans le cadre du projet IOLS et se poursuit dans le projet EHPOC, le tout au sein du pôle de compétitivité Sytem@tic.

Développements apportés à la méthode en 2008 :

- Tentative de maillage des angles dièdres aigus par extrusion n'utilisant que des hexaèdres, hélas non couronnée de succès après plusieurs mois de recherches. Cette voie n'est pas abandonnée mais mise en suspens pour cause de calendrier du projet EHPOC à respecter.
- Amélioration de la parallélisation grâce à la librairie LP2 développée en interne (voir projet LP2 plus loin).

Projets pour l'année 2009 :

"Plan B" pour le maillage des angles aigus grâce à l'utilisation de tétraèdres et de pyramides. Ceci viole en partie l'objectif initial de génération de maillages purement hexaédriques. Néanmoins, deux options seront offertes à l'utilisateur : l'une ne générant que des hexaèdres mais ne représentant fidèlement que des angles supérieurs à 60 degrés et l'autre maillant tous types d'angles mais introduisant une minorité d'éléments non-hexaédriques.

8. Dissemination

8.1. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- F. ALAUZET, *Modèle continu de maillage et adaptation de maillage anisotrope basée sur les métriques*, Séminaire Geometrica INRIA Sophia-Antipolis, Sophia-Antipolis, France, juin 2008.
- F. ALAUZET, *Modèle continu de maillage et adaptation de maillage anisotrope basée sur les métriques*, Séminaire du Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université de Paris VI, Paris, France, juin 2008.
- F. ALAUZET, *Enhancing Accuracy and Convergence Order of High Order Methods with Adaptive Techniques*, ECCOMAS'08, Venice, Italy, July 2008.

- F. ALAUZET, A. DERVIEUX, A. LOSEILLE AND Y. MESRI, *Sonic Boom Modeling: Aspects, Numerical Methods and Optimisation*, ECCOMAS'08, Venice, Italy, July 2008.
- A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU, *Numerical modeling of nanostructures*, World Congress on Computational Mechanics, WCCM8/ECCOMAS2008, Venice, Italy, July 2008.
- A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU, *Sphere packing and applications to granular structure modeling*, 17th International Meshing Roundtable, Pittsburgh, PA, USA, 12-15 October 2008.
- A. LOSEILLE, F. ALAUZET, P.-L. GEORGE, L. MARÉCHAL AND E. SALTEL, *Harnessing the power of multi-core architectures in CFD by coupling multi-threading programming, cache misses reduction techniques with multi-scale adaptivity*, ECCOMAS'08, Venice, Italy, July 2008.
- P.L. GEORGE, *Mesh generation and mesh adaptation*, 5th Montreal Scientific Computing Days, April 2008.
- P.L. GEORGE, *Maillage et adaptation*, École thématique (CEMEF et CNRS), Octobre 2008.
- D. GUEGAN, F. ALAUZET, O. ALLAIN AND A. DERVIEUX, *Mesh Adaptation applied to Unsteady Simulation of Bi-Fluid Flow with Level Set*, ECCOMAS'08, Venice, Italy, July 2008.
- P. LAUG, *Maillage des surfaces paramétrées*, séminaire à l'École Polytechnique de Montréal (Québec), Canada, 17 octobre 2008.
- L. MARÉCHAL, *Hexahedral mesh generation using octree and dual-mesh*, IDMMME Virtual Concept, Pékin, Chine, octobre 2008.
- M. PICASSO, J. NARSKI, Y. BOURGALT, F. ALAUZET AND A. LOSEILLE, *Adaptive Finite Elements with Large Aspect Ratio: Theory and Practice*, ECCOMAS'08, Venice, Italy, July 2008.
- E. RENAUT, H. BOROUCAKI AND P. LAUG, *Extraction of surface topological skeletons*, International conference Numgrid2008 & Voronoi2008, Moscow, Russia, 10-13 June 2008.

8.2. Enseignement

- F. Alauzet - cours à l'École Centrale de Paris en 2^e année, sur la "Simulation numérique en géométries complexes : apport des techniques modernes de l'adaptation de maillages. Utilisation de Matlab".
- A. Loseille - cours à l'École Centrale de Paris en 2^e année, sur la "Simulation numérique en géométries complexes : apport des techniques modernes de l'adaptation de maillages. Utilisation de Matlab".
- P. Laug - cours, TD et TP intitulés « CAO - Maillage » à l'Université Paris XII Val de Marne, 2^e année de Master mention Sciences de l'Ingénieur et Applications (SdIA), spécialité Conception des Systèmes Mécaniques et Énergétiques (CSME).

9. Bibliography

Major publications by the team in recent years

- [1] H. BOROUCAKI, D. CHAPPELLE, P. GEORGE, P. LAUG, P. FREY. 9, in "Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillages", Hermès, Paris, France, 2001, p. 279-310.
- [2] P. GEORGE, H. BOROUCAKI, P. FREY, P. LAUG, E. SALTEL. 17, in "Mesh Generation and Mesh Adaptivity: Theories and Techniques", ISBN 0-470-84699-2, E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes ed., 2nd edition 2008, Wiley InterScience, 2004, p. 497-523.

- [3] J. TOMASI, B. MENNUCCI, P. LAUG. *The modeling and simulation of the liquid phase*, ISBN: 0-444-51248-9, P. G. Ciarlet and C. Le Bris ed., North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 2003, p. 271-375.

Year Publications

Doctoral Dissertations and Habilitation Theses

- [4] A. BENABBOU. *Modélisation géométrique et maillage des structures granulaires – Application aux matériaux nanostructurés*, Ph. D. Thesis, Université de Technologie de Troyes, décembre 2008.
- [5] B. CLÉMENÇON. *Extraction des lignes caractéristiques géométriques des surfaces paramétrées et application à la génération de maillages surfaciques*, Ph. D. Thesis, Université de Technologie de Troyes, février 2008.
- [6] A. LOSEILLE. *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*, Ph. D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie, décembre 2008.

Articles in International Peer-Reviewed Journal

- [7] F. ALAUZET. *High-Order method and mesh adaptation for Euler equations*, in "Int. J. Numer. Meth. Fluids", vol. 56, 2008, p. 1069-1076.
- [8] F. ALAUZET, S. BOREL-SANDOU, L. DAUMAS, A. DERVIEUX, Q. DINH, S. KLEINVELD, A. LOSEILLE, Y. MESRI, G. ROGÉ. *Multi-model and multi-scale optimization strategies. Application to sonic boom reduction*, in "European Journal of Computational Mechanics", vol. 17, n^o 1-2, 2008, p. 191-214.
- [9] B. CLÉMENÇON, H. BOROUCAKI, P. LAUG. *Ridge extraction and its application to surface meshing*, in "Engineering with Computers", vol. 24, n^o 3, 2008, p. 287-304.
- [10] A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU. *Geometrical modeling of granular structures in two and three dimensions – Application to nanostructures*, in "International Journal for Numerical Methods in Engineering", to appear, 2009.
- [11] A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU. *Preparation of geometrical models and adaptive meshes for finite element analysis of granular structures*, in "Finite Elements in Analysis and Design", to appear, 2009.
- [12] C. BENNIS, H. BOROUCAKI, N. FLANDRIN. *3D conforming power diagrams for radial LGR in CPG reservoir grids*, in "Engineering with Computers", vol. 24, n^o 3, 2008, p. 253-265.
- [13] Y. BOURGAULT, M. PICASSO, F. ALAUZET, A. LOSEILLE. *On the use of anisotropic error estimators for the adaptative solution of 3-D inviscid compressible flows*, in "Int. J. Numer. Meth. Fluids", published online, 2008.
- [14] T. GROSGES, H. BOROUCAKI, D. BARCHIESI. *New adaptive mesh development for accurate near-field enhancement computation*, in "Journal of Microscopy", vol. 229, n^o 2, 2008, p. 293-301.

- [15] P. LAUG, H. BOROUCAKI, A. BENABBOU, J. LU. *Modélisation géométrique des structures granulaires*, in "Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mécanique", Geometrical modeling of granular structures, vol. 336, n° 6, 2008, p. 506-511.

International Peer-Reviewed Conference/Proceedings

- [16] A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU. *Numerical modeling of nanostructures*, in "World Congress on Computational Mechanics, WCCM8/ECCOMAS2008", July 2008.
- [17] A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, P. LAUG, J. LU. *Sphere packing and applications to granular structure modeling*, in "17th International Meshing Roundtable", October 2008, p. 1-18.
- [18] E. RENAUT, H. BOROUCAKI, P. LAUG. *Extraction of surface topological skeletons*, in "International conference Numgrid2008 & Voronoi2008", June 2008.

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

- [19] P. FREY, P. GEORGE. *Mesh generation*, ISTE and Wiley, 2008.
- [20] P. GEORGE, H. BOROUCAKI, P. FREY, P. LAUG, E. SALTEL. *Mesh generation and mesh adaptivity*, in "Encyclopedia of computational Mechanics", E. STEIN, R. BORST, T. HUGHES (editors), 2nd edition, Chapter 17, vol. 1, West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2008, p. 497-523.

Research Reports

- [21] A. BENABBOU, P. LAUG, H. BOROUCAKI, J. LU. *Modélisation géométrique, maillage et simulation des structures granulaires – Application aux nanostructures Partie I. Aspects théoriques et algorithmiques de la modélisation – Cas de la dimension deux*, RR-6414, Rapport de recherche, 2008, <http://hal.inria.fr/inria-00203375/en/>.

Scientific Popularization

- [22] P. GEORGE, J. JONGWANE. *A propos des maillages*, janvier 2008, <http://interstices.info/a-propos-maillages>.
- [23] P. LAUG, A. BENABBOU, H. BOROUCAKI, J. LU. *Modélisation géométrique des matériaux nanostructurés*, janvier 2008, <http://interstices.info/nanostructure>.

References in notes

- [24] J. D. BOISSONNAT, M. YVINEC. *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995.
- [25] P. G. CIARLET. *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, vol. II, Ciarlet, P. G. and Lions, J. L., North Holland, 1991.
- [26] P. FREY, P. GEORGE. *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999.
- [27] P. GEORGE, H. BOROUCAKI. *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès, 1997.

-
- [28] A. GEORGE. *Computer implementation of the finite element method*, Ph. D. Thesis, Dep. of Computer Science, Stanford, 1971.
- [29] R. LOHNER. *Progress in grid generation via the advancing front technique*, in "Engineering with computers.", vol. 12, 1996, p. 186-210.
- [30] F. PREPARATA, M. SHAMOS. *Computational geometry, an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [31] M. S. SHEPHARD, M. K. GEORGES. *Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique*, in "Int. J. Numer. Methods Eng.", vol. 32, n^o 4, 1991, p. 709-749.
- [32] R. VERFURTH. *A review of a posteriori error estimation and adaptive refinement techniques*, Wiley-Teubner, 1996.