INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

Saclay - Île-de-France

THEME NUM

Activity Report

2008

Table of contents

1. Team

Research Scientist

Stéphane Gaubert [Chef de projet, DR, Inria]

Marianne Akian [Responsable permanente, DR, Inria, HdR]

Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus/*Metalau project, part time member of Maxplus project*, HdR]

Cormac Walsh [CR, Inria]

PhD Student

Assale Adje [Bourse de la Région Île-de-France, École Polytechnique, commun avec l'équipe MeASI (CEA et LIX)]

Paul Poncet [École Polytechnique]

Guillaume Sagnol [CRE-INRIA-France-Telecom, École des Mines de Paris]

Meisam Sharify Najafabadi [CORDI-S, École Polytechnique]

Sylvie Detournay [CORDI-S, École Polytechnique, à partir du 15 sept./*since Sept. 15*]

Visiting Scientist

Alexander Guterman [Moscow State University, 3 mois répartis dans l'année/*3 months spread over the year*]

Bas Lemmens [Warwick University, 3 jours en avril/*3 days in April*]

Administrative Assistant

Wallis Filippi [TR, Inria]

Other

Max Plus [Nom collectif pour le groupe de travail initial de l'INRIA[1]/*Collective name for the initial INRIA working group*[2]]

2. Overall Objectives

2.1. Mots-clés/Keywords

Mots-clés : Algèbre max-plus, algèbre tropicale, systèmes à événements discrets, programmation dynamique, décision markovienne, contrôle optimal déterministe et stochastique, théorie des jeux, théorie des perturbations, théorie de Perron-Frobenius non linéaire, applications contractantes, analyse numérique, mathématiques discrètes, recherche opérationnelle.

Keywords: *Max-plus algebra, Tropical algebra, Discrete event dynamic systems, Dynamic programming, Markov decision, Deterministic and Stochastic optimal control, Game theory, Perturbation theory, Nonlinear Perron-Frobenius theory, Nonexpansive maps, Numerical analysis, Discrete mathematics, Operations Research.*

2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

[1] Réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2] *Comprising or having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes dijunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement "l'algèbre max-plus".

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [81]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [75], [94], [137], [140], [141]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [61]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [125], [123], [115], [101], [91], [129], [110], [92], [83], [48]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [114], [115], [101], grandes déviations [122], asymptotiques à température nulle en physique statistique [63]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle.

La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [102], [118], [112], [52], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [117], et la théorie des jeux [126], [37]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [62], [106], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [131], [97], [132], [103], [120]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [90], [136], [116], [134] et en théorie des représentations [85], [55], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [81]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [75], [94], [137], [140], [141]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [61]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [125], [123], [115], [101], [91], [129], [110], [92], [83], [48]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [114], [115], [101], large deviation asymptotics [122], or zero temperature asymptotics in statistical physics [63]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [102], [118], [112], [52], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [117] and game theory [126], [37]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [62], [106] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [131], [97], [132], [103], [120]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [90], [136], [116], [134] and in representation theory [85], [55], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0=i,\ \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \quad , \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \le s \le n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \quad . \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \quad , \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ \ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \quad , \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \le t \le T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot, 0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad H(x,p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x,y)) \quad , \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [115], [101], [110]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [125], [137], [75], [93], [69], [51], [6] pour la dimension finie, et [115], [101] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [83].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, ..., n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \le t \le T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [115], [101], [110]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [125], [137], [93], [69], [75], [51], [6] for the finite dimension case, and [115], [101] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the "Aubry-Mather" theory [83].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lccc} \text{monotonie}/\mathit{monotonicity} & x \le y & \Rightarrow & f(x) \le f(y) \ , \\ \text{contraction}/\mathit{nonexpansiveness} & \|f(x) - f(y)\|_\infty & \le & \|x - y\|_\infty \ . \end{array} \tag{6}$$

Ici, l'opérateur f est une application d'un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\le$ désigne l'ordre partiel usuel, et $\| \cdot \|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l'ensemble des états est $\{1, ..., n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l'addition d'une constante [74] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d'opérateurs : l'équation de la programmation dynamique d'un problème de commande optimale à horizon fini s'écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d'un problème à horizon infini (y compris le cas d'un problème d'arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d'un problème avec facteur d'actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [37]. Il permet d'inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l'extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d'homogénéité. Les problèmes auxquels on s'intéresse typiquement sont la structure de l'ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l'existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l'infini (afin d'obtenir le coût ergodique d'un problème de contrôle optimal ou de jeux), l'asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à

[118] pour un panorama. Signalons que dans [88],[7], des algorithmes inspirés de l'algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir le §4.4 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1, ..., n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [74] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [37]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [118] for more background. In [88],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §4.4 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [123], [78], [77], [48],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [114]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi, voir le §6.5.1 ci-dessous.

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [123], [78], [77], [48], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [114]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations, see §6.5.1 below.

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [64], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [69] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [119], [96], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [50]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [86], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [89], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [131], [97], [109], [132], [103], [120]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [108].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [64], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [69] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [119], [96], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [50]. Max-plus automata models [86], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [89], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [131], [97], [109], [132], [103], [120]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [108].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [81], [56], [137], [140],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [133], [127], [42] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [95], [121],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [79].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in Sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [81], [56], [137], [140],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [133], [127], [42] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyedra, determinants, symmetrisation [95], [121],[6]). The subject has attracted recently a new attention [79].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon} \asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon} \quad , \qquad e^{-a/\epsilon} \times e^{-b/\epsilon} = e^{-(a+b)/\epsilon} \quad , \tag{7}$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [114], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [122], [43], pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [41], [40], [39] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [136].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [114], motivated by the study of WKB-type asymptotics of

Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [122], [43] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [41], [40], [39] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [136].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [58], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [98], pour des réseaux ferroviaires [57] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [50]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [54], [107]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [113], [111], [82].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [58], or computing the throughput of a workshop [98] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [57] and [50]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [54], [107]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [113], [111], [82].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [59]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [68]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [139]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [89] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [108] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [108]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [105].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [59]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [68]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [139]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [89] for the jobshop case, a simpler representation was given in [108] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [108]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [105].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par P. et R. Cousot [72], qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. On associe en effet à chaque point de contrôle du programme un élément du treillis, qui représente une sur-approximation valide de l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables du programme en ce point. Le treillis le plus simple exprimant des propriétés numériques est celui des produits Cartésiens d'intervalles. Des treillis plus riches permettent de mieux tenir compte de relations entre variables, en particulier, des classes particulières de polyèdres sont souvent employées.

Voici, en guise d'illustration, un petit exemple de programme, avec le système de point fixe associé, pour le treillis des intervalles:

```
   void main() {
int x=0;          // 1
while (x<100) {   // 2
  x=x+1;          // 3
}                 // 4
         }
```

$$
\begin{aligned}
x_1 &= [0,0] \\
x_2 &=]-\infty, 99] \cap (x_1 \cup x_3) \\
x_3 &= x_2 + [1,1] \\
x_4 &= [100, +\infty[\cap (x_1 \cup x_3)
\end{aligned}
$$

Si l'on s'intéresse par exemple aux valeurs maximales prise par la variable x au point de contrôle 2, soit $x_2^+ := \max x_2$, après une élimination, on parvient au problème de point fixe:

$$x_2^+ = \min\left(99, \max\left(0, x_2^+ + 1\right)\right) \ , \tag{8}$$

qui a pour plus petite solution $x_2^+ = 99$, ce qui prouve que x est majoré par 99 au point 2.

On reconnait ici un opérateur de point fixe associé à un problème de jeux à deux joueurs et somme nulle. Cette analogie est en fait générale, dans le cadre d'un collaboration que l'équipe entretient depuis plusieurs années avec l'équipe MeASI d'Eric Goubault (CEA et LIX), spécialiste d'analyse statique, nous avons en effet mis progressivement en évidence une correspondance [71], [87], entre les problèmes de jeux à somme nulle et les problèmes d'analyse statique, qui peut se résumer par le dictionnaire suivant:

Jeux	Interprétation abstraite
système dynamique	programme
opérateur de Shapley	fonctionnelle
espace d'état	(# points de contrôle) $\times$ (# degrés de liberté du treillis)
problème en horizon n	exécution de n pas
limite du problème en horizon fini	invariant optimal (borne)
itération sur les valeurs	itération de Kleene

Pour que le nombre d'états du jeu soit fini, il est nécessaire de se limiter à des treillis d'ensembles ayant un nombre fini de degrés de liberté, ce qui est le cas de domaines communément utilisés (intervalles, ensembles définis par des contraintes de potentiel de type $x_i - x_j \leq$ cst, mais aussi, les "templates" qui sont des sous-classes de polyèdres introduits récemment par Sankaranarayanan, Sipma et Manna [130]). L'ensemble des actions est alors fini si on se limite à une arithmétique affine. Signalons cependant qu'en toute généralité, on aboutit à des jeux avec un taux d'escompte négatif, ce qui pose des difficultés inédites. Cette correspondance entre jeux et analyse statique est non intuitive, au sens où les actions du minimiseur consistent à sélectionner des points extrêmes de certains polyèdres obtenus par un mécanisme de dualité.

Une pathologie bien répertoriée en analyse statique est la lenteur des algorithmes de point fixe, qui peuvent effectuer un nombre d'itérations considérable (99 itérations pour obtenir le plus petit point fixe de (8)). Celle-ci est usuellement traitée par des méthodes d'accélération de convergence dites d'élargissement et rétrécissement [73], qui ont cependant l'inconvénient de conduire à une perte de précision des invariants obtenus. Nous avons exploité la correspondance entre analyse statique et jeux pour développer des algorithmes d'une nature très différente, s'inspirant de nos travaux antérieurs sur l'itération sur les politiques pour les jeux répétés [88], [66], [67],[7]. Une version assez générale de cet algorithme, adaptée au domaine des templates, est décrite dans [87] et a fait l'objet d'une implémentation prototype. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec souvent un gain en précision par rapport aux approches classiques, par exemple pour des programmes comprenant des boucles imbriquées.

Ce domaine se trouve être en pleine évolution, un enjeu actuel étant de traiter d'une manière qui passe à l'échelle des invariants plus précis, y compris dans des situations où l'arithmétique n'est plus affine.

English version

The abstract interpretation method introduced by P. and R. Cousot [72], allows one to determine automatically invariants of programs by computing the minimal fixed point of an order preserving map defined on a complete lattice. To every breakpoint of the program is associated an element of the lattice, which yields a valid overapproximation of the set of reachable values of the vectors of variables of the program, at this breakpoint. The simplest lattice expressing numerical invariants consists of Cartesian products of intervals. More sophisticated lattices, taking into account relations between variables, consisting in particular of subclasses of polyhedra, are often used.

As an illustration, we gave before Eqn (8) a simple example of program, together with the associated fixed-point equation. In this example, the value of the variable x at the breakpoint 2 is bounded by the smallest solution x_2^+ of the fixed point problem (8), which is equal to 99.

The fixed point equation (8) is similar to the one arising in the theory of zero-sum repeated games. This analogy turns out to be general. Un a series of joint works of our team with the MeASI team of Eric Goubault (CEA and LIX), we brought progressively to light a correspondence [71], [87], between the zero-sum game problems and the static analysis problems, which can be summarized by the following dictionnary:

Games	Abstract interpretation
dynamical system	program
Shapley operator	functional
state space	(# breakpoints) $\times$ (# degrees of freedom)
horizon n problem	execution of n logical steps
limit of the value in horizon n	optimal invariant (bound)
value iteration	Kleene iteration

For the game to have a finite state space, we must restrict our attention to lattices of sets with a finite number of degrees of freedom, which is the case of the domains commonly used in static analysis (intervals, sets defined by potentials constraints of the form $x_i - x_j \leq \text{cst}$, and also the subclasses of polyhedra called "templates", introduced recently by Sankaranarayanan, Sipma and Manna [130]). Then, the action space is finite if the arithmetics of the program is affine. However, in full generality, the games we end up with have a negative discount rate, which raises difficulties which are unfamiliar from the game theory point of view. This correspondence between games and static analysis turns out to be non intuitive, in that the action of the minimizer consist of selecting an extreme point of a polyhedron arising from a certain duality construction.

A well known pathology in static analysis is the fact that the standard Kleene fixed point algorithm may have a very slow behavior (99 iterations are needed to get the smallest fixed point of (8)). This is usually solved by using some accelerations of convergence, called widening and narrowing [73], which however lead to a loss of precision. We exploited the correspondence between static analysis and games to develop algorithms of a very different nature, inspired by our earlier work on policy iteration for games [88], [66], [67],[7]. A rather general version of this policy iteration algorithm, adpated to the domain of templates, is described in [87], together with a prototype implementation. Every iteration combines linear programming and combinatorial algorithms. Some experimental results indicate that the method often leads to invariants which are more accurate than the ones obtained by alternative methods, in particular for some programs with nested loops.

This topic of research is currently evolving, a question of current interest being to find accurate invariants, in a scalable way, in situations in which the arithmetics is not affine.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [70].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [70].

5. Software

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab, et qui est intégrée par défaut dans scilab gtk. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [49], [107]. Il faut aussi noter que le groupe de L.

Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site, and which is included by default in scilab gtk. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [49], [107]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations

Dans son travail de thèse, Asma Lakhoua a développé des programmes en Scilab et C, exploitant la boîte à outils Maxplus de Scilab, implémentant de nouvelles discrétisations des équations d'Hamilton-Jacobi correspondant aux problèmes de contrôle optimal déterministe, voir le §6.5.1 ci-dessous.

English version

Asma Lakhoua has developed, as part of her PhD thesis work, programs in Scilab and C, exploiting the Max-plus toolbox, allowing to test max-plus discretisation schemes for Hamilton-Jacobi equations corresponding to deterministic optimal control problems, see §6.5.1 below.

5.3. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games

L'algorithme d'itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle pour le cas de paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), et dégénérés de type "multi-chaîne" a été introduit dans [67]. Plusieurs stages ont permis l'implémentation partielle en Scilab, C ou C++, et le test de ce type d'algorithmes (voir le travail de Vishesh Dhingra [80]), ou de son couplage avec la résolution de systèmes linéaires par des méthodes multigrilles algébriques (stage de Shantanu Gangal en 2007). Le travail de thèse de Sylvie Detournay, qui porte sur le couplage entre ce type d'algorithmes et les méthodes multigrilles algébriques, devrait permettre le développement d'un programme complet, voir le §6.5.3 ci-dessous.

English version

The policy iteration algorithm for zero sum repeated games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), and in degenerate "multichain" cases, has been introduced in [67]. Several internships allowed us to implement in Scilab, C or C++, and to test such algorithms (see the work of Vishesh Dhingra [80]), or its combinaison with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods (internship of Shantanu Gangal in 2007). The PhD thesis work of Sylvie Detournay, who concerns the coupling between this type of policy algorithm and algebraic multigrid methods, should allow us to develop a complete program, see §6.5.3 below.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus et horo-frontières/Max-plus spectral theory and horoboundaries

6.1.1. Introduction

Étant donné un noyau $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on peut lui associer le problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x,y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{9}$$

dans lequel on cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme nous l'avons rappelé dans le §3.2 et le §3.3, le problème spectral (9) intervient en contrôle ergodique: l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x,y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité. Nous nous intéressons ici au cas où l'ensemble S est non compact, qui n'avait pas été beaucoup étudié auparavant.

English version

Let the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ be given. One may associate the max-plus spectral equation (9), where the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. As we recalled in §3.2 and §3.3, this spectral problem arises in ergodic optimal control: the set S is the *state space*, and the map $a(x,y)$ is the *transition reward*. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties. We consider here the case where S is non-compact, which has not been much studied before.

6.1.2. La frontière de Martin de problèmes de contrôle optimal déterministe/The Martin boundary of deterministic optimal control problems

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Cormac Walsh.

Lorsque $\lambda = 0$, l'équation (9) a une analogie évidente avec l'équation définissant les fonctions harmoniques en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. Dans [14], nous avons introduit l'analogue max-plus de la frontière de Martin, et obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (9) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) \quad , \tag{10}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u joue le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré aussi que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de "quasi-géodésiques". La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des horofonctions (fonctions de Busemann généralisées), ou horo-frontière, laquelle a pu être caractérisée dans plusieurs cas particuliers (voir les sections suivantes ainsi que le cas des espaces vectoriels normés traité dans [138]).

On a étudié par la suite les modèles à temps continu. Dans ce cadre, on cherche les points fixes, à constante additive près, des semi-groupes de Lax-Oleinik. Ceux-ci sont aussi les solutions "weak-KAM" de Fathi ou, de manière équivalente, les solutions de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi ergodique. Dans [46],[33] nous développons une version temps continu de la théorie des frontières de Martin max-plus. Celle-ci inclue des résultats de représentation, la notion de quasi-géodésique, et l'extrémalité des points de la frontière minimale (points de Busemann). Ces résultats s'appliquent aussi au cas de Lagrangiens non réguliers.

English version

When $\lambda = 0$, the equation (9) has an obvious analogy with the equation defining harmonic functions in classical or probabilistic potential theory. We have introduced in [14] a max-plus analogue of the classical Martin boundary, and obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (9) may be represented as in (10) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u plays the role of the spectral measure. We also showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain "almost-geodesics". The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions), or horoboundary. This horoboundary has been caracterized in several particular cases (see the following sections and the case of normed spaces studied in [138]).

We also studied the continuous time analogue of the max-plus spectral problem. In this case, one wishes to find the fixed points, up to a constant, of Lax-Oleinik semigroups. These are also the weak-KAM solutions of Fathi or, equivalently, the viscosity solutions of the ergodic Hamilton-Jacobi equation. In [46],[33] we develop a continuous-time version of the boundary theory, including representation results, the notion of almost–geodesic, and the extremal property of the points in the minimal boundary (Busemann points). These results can be applied to nonsmooth Lagrangians.

6.1.3. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry

Participants: Cormac Walsh, Bas Lemmens [Warwick University, UK].

L'un des intérêts de l'horo-frontière est de renseigner sur le groupe des isométries d'un espace métrique. En effet, ce groupe agit naturellement sur l'horofrontière, et cette action peut parfois être mieux comprise que l'action du groupe sur l'espace d'origine.

Nous avons étudié le groupe des isométries pour la métrique de Hilbert. De La Harpe [143] a donné plusieurs conjectures relatives à ce groupe. Nous conjecturons que le groupe des isométries est exactement le groupe des transformations linéaires projectives à moins que le domaine ne soit une coupe d'un cône symmétrique non-Lorentzien. Nous avons démontré cette conjecture lorsque le domaine est un polytope, ce qui fait l'objet d'un manuscrit en cours de préparation. Nous poursuivons ce travail avec l'étude du cas général.

Notre méthode utilise les résultats de [20]. Dans cet article, on a étudié en détail l'horo-frontière de la géométrie de Hilbert On a déterminé ses points de Busemann et donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les horofonctions soient des points de Busemann. De plus, on a montré que toute suite qui converge vers un point de l'horo-frontière, converge aussi au sens usuel vers un point de la frontière euclidienne du domaine sur lequel la métrique est définie.

English version

One use for the horofunction boundary is to study the group of isometries of a metric space. This is because this group has a well defined action on the horoboundary and it is likely that in many cases this action will be easier to understand than the action on the space itself.

We have been investigating the isometries of the Hilbert geometry. De La Harpe [143] has previously made several conjectures about the isometry group of this space. We conjecture that the isometry group is exactly the group of projective linear transformations unless the domain on which the geometry is defined is a cross section of a non-Lorentzian symmetric cone. We have found a proof of this conjecture in the case of a polytope domain, and almost finished writing it up as a paper. We are continuing to work on the general case.

Our method uses the knowledge of the horoboundary in [20]. In this paper, we worked out in detail the horofunction boundary of the Hilbert geometry. We determined its set of Busemann points and gave necessary and sufficient conditions for all horofunctions to be Busemann points. In addition we showed that any sequence of points converging to a point in the horofunction boundary also converges in the usual sense to a point in the Euclidean boundary of the domain on which the metric is defined.

6.1.4. Horo-frontières de groupes/The horoboundaries of groups

Participant: Cormac Walsh.

Les graphes de Cayley de groupes infinis finiment engendrés forment une classe intéressante d'espaces métriques, et l'étude de leur frontière est motivée par la théorie géométrique des groupes. Dans ce contexte, il est souvent possible de trouver une description combinatoire de la frontière définie par les horofonctions. Dans [19], on détermine l'horo-frontière de groupes d'Artin à deux générateurs, une classe qui contient le groupe de tresses sur 3 brins.

Dans [124], Rieffel a employé l'horo-frontière pour étudier la géométrie non-commutative associée à $\mathbb{Z}^n$. Ses résultats utilisent le fait que l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur son horo-frontière a suffisamment d'orbites finies. Nous tentons d'étendre ce résultat au cas des groupes nilpotents. Dans [36], nous montrons qu'il existe une orbite finie associée à chaque face du polytope construit comme le convexifié de la projection de l'ensemble générateur sur la composante sans torsion de l'abélianisé du groupe. Nous montrons aussi que ce sont les seules orbites finies des points de Busemann. Dans le cas du groupe de Heisenberg avec ses générateurs usuels, nous avons complètement déterminé l'ensemble des points de Busemann.

English version

The Cayley graphs of finitely-generated infinite groups form a very interesting class of metric spaces, and the study of their boundaries is motivated by geometric group theory. In this setting, there is often the possibility of finding a combinatorial description of the horoboundary. In [19], we determine the horoboundary of Artin groups with two generators, a class that includes the braid group on three strands.

In [124], Rieffel used the horoboundary to prove results about the non-commutative geometry associated to $\mathbb{Z}^n$. His results rely on the fact that the action of $\mathbb{Z}^n$ on its horoboundary has sufficiently many finite orbits. We have been attempting to extend these results to nilpotent groups. We have shown [36] that there is one finite orbit associated to each facet of the polytope obtained by projecting the generating set into the torsion-free component of the abelianisation of the group. We also prove that these are the only finite orbits of Busemann points. The case of the Heisenberg group with its usual generators is particularly tractable, and here we have determined the complete set of Busemann points.

6.2. Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et application au contrôle optimal et aux jeux/Non-linear Perron-Frobenius theory, with application to optimal control and games

6.2.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.3, les applications qui sont contractantes pour certaines métriques, ou qui vérifient certaines propriétés de monotonie ou d'homogénéité, jouent un rôle central en programmation dynamique. Nous étudions plusieurs problèmes concernant la description de l'ensemble des points fixes et le comportement itératif de ces applications, motivés par des questions de contrôle optimal ou de théorie des jeux.

English version

As detailed in §3.3, nonlinear maps that are nonexpansive in some metrics, or that satisfy monotonicity or homogeneity conditions, play a central role in dynamic programming. We have studied several problems concerning the description of the fixed points and of the dynamical behaviour of these maps, motivated by questions arising from optimal control or game theory.

6.2.2. Points fixes d'applications monotones/Fixed points of order preserving maps

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Bas Lemmens [Warwick University, UK], Roger Nussbaum [Rutgers University, USA].

On développe des méthodes générales pour étudier l'existence et l'unicité des points fixes d'applications f vérifiant des propriétés de monotonie et des propriétés auxiliaires: homogénéité, contraction au sens large pour des métriques telles que la métrique de Hilbert, convexité, ... On s'intéresse aussi au comportement asymptotique des itérées de telles applications, lequel peut être étudié notamment au moyen de rayons spectraux non-linéaires d'applications monotones homogènes. On considère aussi le cas d'applications monotones convexes "expansives".

English version

We are interested in general techniques to show the existence and uniqueness of fixed points of order preserving maps satisfying some auxiliary properties, like homogeneity, nonexpansiveness in Hilbert type metric, convexity, ... We are also interested in the asymptotic behavior of the iterates of such maps, which can be studied for instance by using non-linear spectral radii of order preserving homogeneous maps. We also study order preserving convex possibly expansive maps.

6.2.3. Solutions de viscosité stationnaires d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman dégénérées/Stationary viscosity solutions of degenerated Hamilton-Jacobi-Bellman equations

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Benoît David [formerly INRIA and Paris 6, now Professeur Agrégé].

Les vecteurs propres additifs non linéaires du semi-groupe associé à un problème de contrôle de diffusion coïncident, sous certaines hypothèses, avec les solutions de viscosité stationnaires des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman correspondantes. Dans le cas particulier déterministe, ces solutions sont étudiés dans le cadre de la théorie KAM faible et de la théorie spectrale max-plus, voir §6.1.2 (caractérisations au moyen de l'ensemble d'Aubry ou de la frontière de Martin). Dans [3], nous avons obtenu des caractérisations similaires pour des problèmes de contrôle stochastique à espace d'etat fini et temps discret.

En s'inspirant de [3], on étudie ici des problèmes de contrôle de diffusion sur un tore dans le cas dégénéré où il existe un nombre fini, k, de points "critiques" en lesquels la dynamique s'annule et le Lagrangien est minimal. On montre qu'une solution stationnaire de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante est uniquement déterminée par sa restriction à ce points critiques, et que l'ensemble des solutions stationnaires est isométrique au sens de la norme sup à un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^k$. L'ensemble de ces points critiques joue ainsi le rôle de l'ensemble d'Aubry. Les énoncés des résultats de ce travail ont fait l'objet de la note [11]. Un manuscrit comprenant les résultats avec preuves est en cours de préparation.

English version

The nonlinear additive eigenvectors of the semigroup associated to a diffusion control problem coincide, under some assumptions, with the stationary viscosity solutions of the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation. In the particular deterministic case, these solutions can be characterised by means of the weak KAM theory or max-plus spectral theory (see §6.1.2). In [3], we obtained similar characterisations for stochastic control problems with finite state space and discrete time.

In this work, we study optimal control problem for diffusions on the torus, in the degenerate case in which there is a finite number, k, of "critical" points where the dynamics vanishes and the Lagrangian is minimal. We show that a stationnary solution of the associated Hamilton-Jacobi-Bellman equation is uniquely determined by its restriction to the critical points, and that the set of stationnary solutions is sup-norm isometric to a convex subset of $\mathbb{R}^k$. Hence, the set of critical points plays precisely the role of the Aubry set. Statements of these results have been published in [11]. A manuscript with proofs of these results is in preparation.

6.3. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.3.1. Convexité max-plus ou tropicale/Max-plus or tropical convexity

Participants: Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Ricardo Katz [Conicet, Argentine], Fréderic Meunier [ENPC].

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d'états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, à la suite de Sturmfels et Develin [79]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d'analogues des résultats fondamentaux d'analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8].

Dans un travail de S. Gaubert et R. Katz [17], on étudie la représentation d'un polyèdre tropical comme intersection de demi-espaces, ou si l'on préfère, comme conjonction d'inégalités affines. L'ensemble des inégalités affines constitue un cône, analogue au polaire des ensembles convexes. On donne dans [17] une caractérisation du bipolaire, qui remplace en quelque sorte le théorème de Farkas, dont la forme simple familière n'est plus vraie dans le cas tropical.

Dans un autre travail, de S. Gaubert et F. Meunier [35], on établit les analogues tropicaux de plusieurs résultats de convexité discrète: théorème de Carathéodory coloré, théorème de Tverberg, on montre aussi qu'une conjecture reliée au théorème de Tverberg (conjecture de Sierksma), qui n'est pas résolue dans le cas classique, est vérifiée dans le cas tropical.

Enfin, dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault [27], rediscuté dans la section consacrée à l'application à l'analyse statique, on a développé un algorithme permettant de passer plus rapidement de la représentation par générateurs d'un polyèdre tropical à la représentation par inégalités.

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectively the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [79]. Max-plus polyedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following [8].

In a work of S. Gaubert and R. Katz [17], we study the description of tropical polyhedra as the intersection of half-spaces, or equivalently, by the conjunction of tropically affine inequalities. The set of these affines inequalities constitutes a cone, which is an analogue of the classical polar of a convex set. We characterize in [17] the bipolar, this result yields a replacement of Farkas lemma, which, in its simple familiar form, is no longer true in the tropical setting.

In another work, of S. Gaubert and F. Meunier [35], we establish tropical analogues of several results of discrete convexity: colorful Carathéodory theorem, Tverberg theorem. A conjecture related to the Tberberg theorem (Sierksma's conjecture), allhough still open for the usual convexity, is shown to be true in the tropical setting.

Finally, in a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault [27], which is discussed in more details in the section devoted to the application to static analysis, we developed an algorithm allowing one to pass in a faster way from the representation of a tropical polyhedra by generators to its representation by inequalities, and vice versa.

6.3.2. Le problème d'affectation pour un ensemble dénombrable/The assignment problem for a countable state space

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Vassili Kolokoltsov [Warwick University, UK].

Les conjugaisons de Moreau sont les transformations $f \mapsto Bf$ de la forme

$$Bf(x) = \sup_{y \in Y} b(x,y) - f(y) \quad , \qquad \forall x \in X \quad , \tag{11}$$

pour lesquelles le noyau $b : (x,y) \mapsto b(x,y)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est donné. L'application $f \mapsto B(-f)$ est alors max-plus linéaire, et lorsque $b(x,y) = \langle x,y \rangle$ on retrouve la transformée de Legendre-Fenchel. Dans [42], nous avons étudié le problème de l'existence et de l'unicité de la solution f à l'équation $Bf = g$, et obtenu des caractérisations faisant intervenir des sous-différentiels généralisés.

Lorsque $X = Y$ est fini, le problème d'affectation optimale (ou de manière équivalente le problème de transport de masse avec mesures uniformes) associé au noyau b consiste en la recherche d'une bijection σ de X maximisant la somme $\sum_{x \in X} b(x, \sigma(x))$. Un résultat de Butkovič et Hevery [60] montre que B est fortement régulière (ce qui signifie qu'il existe g tel que l'équation $Bf = g$ a une solution unique f) si et seulement si le problème d'affectation optimale associé à b a une solution unique σ. Dans [26], nous étendons ce résultat au cas où X est dénombrable, à l'aide des résultats ci-dessus de [42].

English version

Moreau conjugacies are transformations $f \mapsto Bf$ of the form (11) where $b : (x,y) \mapsto b(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is a given kernel. The map $f \mapsto B(-f)$ is then max-plus linear, and when $b(x,y) = \langle x,y \rangle$ we recover the Legendre-Fenchel transform. In [42], we studied the problem of the existence and uniqueness of the solution f of the equation $Bf = g$. We characterised the solvability in terms of generalised subdifferentials, with respect to the kernel b.

When $X = Y$ is finite, the optimal assignment problem (or equivalently the mass transportation problem with uniform measures) for the kernel b is to find a bijection σ of X maximising the sum $\sum_{x \in X} b(x, \sigma(x))$. A result of Butkovič and Hevery [60] shows that B is strongly regular (which means that there exists g such that the equation $Bf = g$ has a unique solution f) if and only if the optimal assignment problem associated to b has a unique solution σ. In [26], we extend this result to the case of a countable state space X, using the above results of [42].

6.3.3. *Indépendence linéaire et rangs de matrices max-plus/max-plus linear independence and matrix ranks*

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Alexander Guterman [Moscow State University].

Différentes notions d'indépendence linéaire et de rang de matrices sur le semi-anneau max-plus ou tropical, ou sur un semi-anneau idempotent plus général, ont été introduites dans la littérature. Contrairement au cas d'un corps ou d'un anneau, elles sont souvent non équivalentes. Dans [2], nous avions présenté un survol. Dans [25], nous comparons plus avant les notions d'indépendence linéaire et nous comparons les notions de rang définies au moyen de l'indépendence linéaire avec celles définies au moyen de déterminants. Par exemple, l'indépendence linéaire au sens de Gondran et Minoux [95] est reliée au rang défini au moyen du déterminant tropical signé, à partir de la symmétrisation de l'algèbre max-plus [121],[6]. Par ailleurs, à la suite du développement récent de la géométrie tropicale, Izhakian a introduit le “semi-anneau tropical étendu”, et une notion d'indépendence linéaire, qui est reliée au rang tropical [100], [99]. Pour comparer toutes ces notions, nous avons développé d'une part une technique générale pour prouver des identités combinatoires et polynomiales portant sur les matrices sur des semi-anneaux. D'autre part, nous avons introduit les notions de “semi-anneau symmétrisé” et d'“extension du semi-anneau max-plus”, cette dernière englobant à la fois la symmétrisation du semi-anneau max-plus et le semi-anneau tropical étendu d'Izhakian. Nous établissons ensuite des propriétés des espaces linéaires, des systèmes linéaires et des matrices sur ces semi-anneaux, au moyen des techniques déjà développées pour le semi-anneau max-plus symmétrisé. Certaines preuves et développements seront présentés dans [32], [31].

English version

Several notions of linear independence and matrix rank over the max-plus or tropical semiring, or an idempotent semiring, have been introduced in the literature. They are often not equivalent. In [2], we gave a survey. In [25], we compare further linear independence notions and compare ranks defined in terms of linear independence with ranks defined in terms of determinants. For instance the linear independence introduced by Gondran and Minoux [95] is related to a rank notion defined in terms of signed tropical determinants, using the symmetrization of the max-plus algebra [121],[6]. Following the recent development of tropical geometry, Izhakian introduced the "extended tropical semiring" and an associated notion of linear independence, which is related to the tropical rank [100], [99]. To compare all these notions, we develop on one hand some general technique to prove combinatorial and polynomial identities for matrices over semirings. On the other hand, we introduce the notions of "symetrized semiring" and of "extension of the max-plus semiring", the latter ones including both the symmetrization of the max-plus algebra and the extended tropical semiring of Izhakian. We then establish properties of linear spaces, linear systems, and matrices over these semirings, using the techniques developped in the symmetrization of max-plus algebra. Some proofs and further developments will be given in [32], [31].

6.4. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis

6.4.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.7, l'algèbre max-plus est la limite d'une déformation de l'algèbre classique, ou plutôt du semi-corps des réels positifs. Elle peut aussi fournir des estimations de ces déformations, puisque

$$\max(a,b) \leq \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) \leq \epsilon \log(2) + \max(a,b) \tag{12}$$

L'utilisation de ces propriétés a déjà conduit dans le passé aux travaux sur les perturbations de valeurs propres [41], [40], [39], ou sur les grandes déviations [1], [43]. Dans les travaux qui suivent, nous exploitons ces propriétés dans des contextes reliés ou similaires à ceux de nos travaux précédents.

English version

As detailled in §3.7, max-plus algebra is the limit of a deformation of classical algebra, or more precisely of the semi-field of usual real positive numbers. It can also give estimations for these deformations using for instance (12). By using these properties, we already obtained some works on singular perturbations of matrix eigenvalues [41], [40], [39], or on large deviations [1], [43]. In the works described below, we are exploiting again these properties in context that are related or similar to those of our earlier works.

6.4.2. Calcul numérique robuste de valeurs propres de matrices/Robust numerical computation of matrix eigenvalues

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Meisam Sharify Najafabadi.

Le travail de thèse de M. Sharify, commencé en Décembre 2007, vise à développer des méthodes numériques précises, adaptées notamment aux problèmes de valeurs propres, mettant à profit des mises à l'échelle de nature combinatoire déduites de résultats d'algèbre tropicale.

On s'appuie ici sur le travail antérieur de M. Akian, R. Bapat et S. Gaubert, [39], [40], qui, pour utiliser le langage de la géometrie tropicale, porte sur le calcul d'ambibes non-archimédiennes associées à des problèmes de valeurs propres. Autrement dit, on se donne une matrice dont les coefficients sont des séries de Puiseux, et l'on veut obtenir des renseignements de nature combinatoire sur les valuations des séries de Puiseux donnant les différentes valeurs propres. On a montré que ces valuations peuvent être obtenues en résolvant un problème d'affectation optimale paramétrique, sous certaines conditions de non dégénérescence. Si l'on change de corps et de valuation, en prenant cette fois-ci le corps des complexes, muni du log du module vu comme une valuation, on peut s'attendre à ce qu'un problème d'affectation analogue permette d'estimer a priori les ordres de grandeurs des différentes valeurs propres, les variables duales fournissant cette fois-ci des mises à l'échelle ayant de bonne propriété numérique. M. Sharify a commencé a explorer cette voie, en montrant en particulier que la mise à l'échelle "tropicale" raffine certaines mises à l'échelle connues.

English version

The aim of the PhD work of M. Sharify, which started in Dec 2007, is to develop accurate numerical methods, adapted in particular to the eigenvalue problem, exploiting some scalings obtained by tropical methods.

This relies on an earlier work of M. Akian, R. Bapat and S. Gaubert, [39], [40], in which, to use the vocabulary of tropical geometry, some nonarchimedean amoebas associated to an eigenproblem are computed. In other words, given a matrix the coefficients of which are Puiseux series, the point is to determine by direct combinatorial means the valuations of the Puiseux series which yield the different eigenvalues. It was shown that these valuations can be obtained by solving a parametric optimal assignment problem, under some nondegeneracy conditions. If one changes the field and the valuation, replacing the Puiseux series by complex numbers, equipped with the log of the modulus thought of as a valuation, we expect the same type of assignment problems to determine a priori the order of magnitude of the different eigenvalues, and the dual variables are expected to yield diagonal scaling with good numerical properties. M. Sharify began to explore this way, showing in particular that this "tropical" scaling refines some previously known scalings.

6.4.3. Mesures et applications maxitives

Participants: Marianne Akian, Paul Poncet.

D'une part, les mesures et intégrales maxitives qui ont été introduites et ré-introduites sous divers noms dans la littérature (intégrale de Shilkret, sup-mesures, mesures de possibilité, mesures idempotentes de Maslov, etc.), sont définies de manière analogue aux mesures et intégrales usuelles, en remplaçant les lois additive et multiplicative par celles d'un semi-anneau idempotent, comme par exemple le semi-anneau max-plus.

D'autre part, les lois de probabilités (usuelles) max-stables de type α-Fréchet peuvent être définies de manière analogue aux lois stables, ou α-stables, en remplaçant la combinaison linéaire de variables aléatoires (multidimensionnelles) par la combinaison linéaire max-plus. Les autres types de lois max-stables peuvent être définies de manière analogue mais en remplaçant le semi-anneau max-plus par des semi-anneaux isomorphes.

Ces deux analogies permettent de voir les théorèmes de représentation "intégrale" des processus max-stables comme des versions "maxitives" des théorèmes de représentation des processus α-stables, ce qui a été mis en forme en particulier récemment par Stoev et Taqqu [135]. La stabilité de lois de probabilités peut aussi être généralisée au cas de variables aléatoires à valeurs dans un semi-anneau ou un semi-module général (idempotent ou non), question qui a été récemment abordée par Davydov, Molchanov et Zuyev [76]. Finalement les processus max-stables peuvent aussi être vus comme un cas particulier de processus max-infiniment divisibles, ou encore de mesures ou intégrales maxitives aléatoires.

Le but de la thèse de Paul Poncet est de développer la théorie des mesures et intégrales maxitives et d'appliquer les résultats obtenus à l'étude des processus max-stables et de leur représentations, et plus généralement des mesures maxitives aléatoires et des valeurs extrêmes.

Dans son stage de Master 2, Paul Poncet avait déja étudié l'existence d'une densité d'une mesure maxitive par rapport à une autre (théorème de Radon-Nikodým), et obtenu la généralisation partielle de résultats d'existence d'une densité développés par Akian [1] et Barron, Cardaliaguet, Jensen [53], au moyen du théorème de séparation max-plus établi par Cohen, Gaubert et Quadrat [8].

Les résultats de [1] sont basés sur la notion de treillis continus, laquelle a été généralisée dans les années 80 par la théorie des ensembles ordonnés Z-continus. Cette année, le travail de thèse de Paul Poncet a porté sur l'étude de la théorie des mesures maxitives au moyen de la notion de Z-continuité, ce qui devrait permettre d'obtenir une généralisation du théorème de Radon-Nikodým englobant l'ensemble des résultats d'existence de densité cités plus haut, ainsi qu'une généralisation du théorème de représentation de Riesz des formes max-plus linéaires. Une généralisation de la théorie des ensembles ordonnés Z-continus au moyen de la notion d'espace de fermeture a aussi été étudiée.

English version

On the one hand, maxitive measures and integrals, which have been introduced and re-introduced under different names in the literature (Shilkret integral, sup-measures, possibility measures, idempotent measures in the sense of Maslov, etc.), are defined analogously to usual measures and integrals, by replacing the additive and multiplicative laws by that of an idempotent semi-ring, such as the max-plus semiring.

On the other hand, the (usual) max-stable probability laws of α-Fréchet type may be defined analogously to stable or α-stable probability laws, by replacing the usual linear combination of (multidimensional) random variables, by their max-plus linear combination. Moreover, other types of max-stables laws may be defined similarly, by replacing the max-plus semiring by one of its isomorphic semirings.

These two analgies allows one to see “integral” representation theorems of max-stable processes as “maxitive” versions of representation theorems of α-stable processes, a remark which has been stated recently by Stoev and Taqqu [135]. The stability of probability laws may also be generalized to the case of random variables with values in a general semiring or semimodule, as is done in the work of Davydov, Molchanov and Zuyev [76]. Finally, max-stable processes may be viewed as particular cases of max-infinitely divisible processes, or random maxitive measures or integrals.

The aim of the PhD thesis of Paul Poncet is to develop the theory of maxitive measures and integrals, and to apply it to the study of max-stable processes and of their representations, and more generally to the study of random maxitive measures and extreme values.

In his M2 memoir, Paul Poncet already studied the existence of a density of a maxitive measure with respect to another (Radon-Nikodým theorem) and obtained a partial generalization of the existing results of Akian [1] and Barron, Cardaliaguet, Jensen [53], by using the max-plus separation theorem of Cohen, Gaubert and Quadrat [8].

The results of [1] are based on the notion of continuous lattice, which has been generalized in the 80ties with the theory of Z-continuous posets. This year, the PhD work of Paul Poncet included the study of maxitive measures with the help of Z-continuity, which should allows one to obtain a generalization of Radon-Nikodým theorem gathering all the previous results of existence of a density, together with a generalization of the Riesz representation theorem for max-plus linear forms. A generalization of the theory of Z-continuous posets using the notion of closure spaces has also been studied.

6.5. Algorithmes/Algorithms

6.5.1. Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution de problèmes de commande optimale déterministe/The max-plus finite element method for deterministic optimal control problem

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Asma Lakhoua [formerly INRIA, now with Ing. Consort Tech.].

La thèse d'A. Lakhoua [104] a porté sur le développement de méthodes de discrétisation des équations d'Hamilton-Jacobi exploitant la linéarité max-plus. Nous avons commencé par étudier un analogue max-plus de la méthode des éléments finis de Petrov-Galerkin dans le cas de l'équation d'évolution

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \quad (x,t) \in X \times (0,T] \ , \qquad v(x,0) = \phi(x), \quad x \in X \ , \tag{13}$$

où l'hamiltonien $H(x,p)$ est supposé convexe par rapport à p. Comme rappelé dans la §3.2, le semi-groupe d'évolution S^t associé est max-plus linéaire. Ainsi, on peut remplacer l'équation (13) par la formulation variationnelle suivante, définie récursivement par :

$$v^{t+\Delta t} \in \mathcal{W}_h, \qquad \langle z, v^{t+\Delta t} \rangle = \langle z, S^{\Delta t} v^t \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{Z}_h \ , \tag{14}$$

pour $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire max-plus et $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont respectivement des semi-modules max-plus finiment engendrés d'éléments finis et de fonctions test. Cette formulation approxime la formulation variationnelle max-plus introduite par Kolokoltsov et Maslov. Comme (14) peut ne pas avoir de solution $v^{t+\Delta t}$, on définit $v^{t+\Delta t}$ comme étant la sous-solution maximale de (14), qui est obtenue en remplaçant l'égalité par une inégalité, et en maximisant $v^{t+\Delta t}$. Le système dynamique ainsi obtenu s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'un problème de jeux à somme nulle déterministe, contrairement au cas de la méthode proposée initialement par Fleming et McEneaney [84], qui elle est purement max-plus linéaire. Sous des hypothèses standard de régularité, nous avons obtenu des estimations d'erreur similaires au cas de la méthode des éléments finis classique : les projecteurs pour la norme d'énergie sont remplacés par des projecteurs sur des semi-modules max-plus, et l'erreur de projection est mesurée dans la norme du sup. Ces résultats utilisent la théorie développée dans [8], voir §6.3 : l'interprétation géométrique fournie par ces travaux permet de comprendre pourquoi les espaces $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ doivent être différents. La méthode nécessite le calcul de $\langle z, S^{\Delta t} w \rangle$ pour toute fonction test z et tout élément fini w. Plusieurs approximations ont été proposées et étudiées tant théoriquement que numériquement. Une partie de ces travaux a fait l'objet des articles [44], [45], ainsi que des articles [12], [22] publiés cette année

English version

In her PhD-thesis [104], A. Lakhoua developed methods of discretisation of Hamilton-Jacobi equations exploiting the max-plus linearity. We began by proposing a max-plus analogue of the classical Petrov-Galerkin finite element method, in the case of the evolution equation (13) where the Hamiltonian $H(x, p)$ is convex in the variable p. As we recalled in §3.2, the associated evolution semigroup S^t is max-plus linear. Therefore, we replace Equation (13) by the max-plus variational approximation, defined recursively by (14) for $t = 0, \Delta t, ..., T - \Delta t$. Here, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the max-plus scalar product, and $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ are finitely generated max-plus semimodules of finite elements and test functions, respectively. This formulation approximates the max-plus variational formulation due to Kolokoltsov and Maslov. Since Equation (14) need not have a solution $v^{t+\Delta t}$, we define $v^{t+\Delta t}$ to be the maximal subsolution of (14). This yields a discretised scheme which can be interpreted as the dynamic programming equation of a zero-sum two player repeated game, unlike a max-plus discretisation scheme proposed previously by Fleming and McEneaney [84] which is purely max-plus linear. We obtained, under standard assumptions, error estimates which are similar to the case of the classical finite element method: projectors in the energy norm are replaced here by projectors on max-plus semimodules, and the projection error is measured in the sup norm. These results rely on the theory developed in [8], see §6.3: in particular, the geometrical interpretation given there allows one to understand why the spaces $\mathcal{W}_h$ and $\mathcal{Z}_h$ must differ. The method requires the evaluation of $\langle z, S^{\Delta t} w \rangle$ for each test function z and each finite element w. Various approximations have been proposed and studied theoretically and numerically. Part of these studies appeared in [44], [45] and in the articles [12], [22] published this year.

6.5.2. Atténuation de la malédiction de la dimension en programmation dynamique/Curse of dimensionality attenuation in dynamic programming

Participants: A. Deshpande [Univ. of California, San Diego], Stéphane Gaubert, William McEneaney [Univ. of California, San Diego].

W. McEneaney a développé une famille de schémas de discrétisation de type max-plus, dédiés aux problèmes de contrôle optimal déterministe, et exploitant la linéarité du semi-groupe de Lax-Oleinik. L'une de ses méthodes consiste en une génération arborescente de “fonctions de base” max-plus, et se trouve bien adapté à des problèmes de contrôle avec commutation entre plusieurs modèles linéaires quadratiques. L'intérêt de celle-ci est de n'être pas formellement sujette à la malédiction de la dimension, dans la mesure où elle exploite des calculs intermédiaires faisant appels à des solveurs d'équation de Riccati, cependant, la complexité réapparait dans la génération de l'arbre, l'efficacité de la méthode dépendant de manière critique de la possibilité d'émonder celui-ci dynamiquement en supprimant les fonctions “de base” devenant inutiles.

Nous avons introduit dans [24] une méthode permettant d'émonder cet arbre en faisant appel à une technique de relaxation semi-définie (relaxation de Shor), ce qui a conduit a une amélioration de la méthode, permettant ainsi de résoudre précisément (sur une petite machine) un problème de dimension 6 (rappelons que les problèmes de dimension 6 ne sont pas accessibles par des schémas classiques).

English version

W. McEneaney developed a family of max-plus based discretization schemes to compute the value function of a deterministic optimal control problem, by exploiting the linearity of the Lax-Oleinik semigroup. One of his methods consists in the generation of a tree of max-plus "basis functions". It is well adapted to problems in which one can switch bewteen several linear quadratic models. It is not subject, stricly speaking, to the "curse of dimensionality", because it relies on some intermediate computations which are performed by computing the solutions of a family of Riccati equations. However, the complexity inherent to the problem reappears in the generation of the tree, since the efficiency of the method depends in a critical way of the possibility to trim dynamically the tree, in order to eliminate some "basis functions" which become useless.

We have developed in [24] a method allowing one to trim this tree, by using a semi-definite relaxation (Shor relaxation). This improvement allowed us to solve accurately (on a small computer) a problem in dimension 6 (problems of this dimension are not accessible by classical discretization schemes).

6.5.3. Méthodes multigrilles pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Multigrid methods for stochastic control and repeated zero sum games

Participants: Marianne Akian, Sylvie Detournay.

L'algorithme d'itération sur les politiques est bien connu pour résoudre efficacement les équations de la programmation dynamique associées à des problèmes de contrôle stochastique avec critère à horizon infini (Howard) ou ergodique (Denardo et Fox). Récemment, il a été généralisé au cas de problèmes de jeux à deux joueurs et somme nulle dégénérés (avec paiements ergodiques et de type "multi-chaîne"), au moyen de techniques d'algèbre max-plus et de théorie de Perron-Frobenius non linéaire [67]. Chaque itération de base de cet algorithme utilise la résolution d'un système d'équations linéaires dont l'opérateur est monotone, mais dont la taille peut être grande, soit parce qu'il provient d'une discrétisation fine d'une équation aux dérivées partielles, soit parce qu'il est associé à un problème discret de grande taille comme le graphe du Web.

Or, la méthode multigrilles est l'une des rares méthodes permettant de résoudre, au moins dans les bons cas, des systèmes linéaires en un temps de l'ordre de la taille du système. De plus, alors que la méthode multigrille classique ne s'applique qu'à des discrétisations d'équations aux dérivées partielles elliptiques, la méthode multigrille algébrique (voir par exemple [128]) peut s'appliquer à tout système linéaire présentant des propriétés de monotonie (principe du maximum ou système avec M-matrice).

L'association entre méthodes multigrilles et itérations sur les politiques a déjà été utilisée et étudiée dans le cas de problèmes de contrôle stochastique actualisé (voir par exemple [38], [47]), ainsi que dans le cas d'un algorithme d'itération sur les politiques simplifié pour le contrôle ergodique (voir par exemple [5]), mais pour lequel il n'existe pas de preuve de convergence. La méthode multigrilles algébrique a été récemment associée à des méthodes d'apprentissage (voir par exemple [142]). Nous l'avons aussi testée dans le cas de l'itération sur les politiques pour des problèmes de jeux à somme nulle actualisés au cours du stage de Shantanu Gangal en 2007.

La thèse de Sylvie Detournay, qui débute cette année, a pour but de développer et d'étudier un algorithme associant une méthode d'itération sur les politiques du type de celle introduite dans [67] et une méthode multigrilles algèbrique, afin de résoudre des problèmes de jeux à somme nulle dégénérés, éventuellement posés directement sous forme discrète.

English version

Policy iteration is a powerful and well known algorithm to solve the dynamic programming equation associated to one player problems. It has recently been extended to degenerate two players problems (with ergodic payoff and in "multichain" cases) using ideas from max-plus algebra and nonlinear potential theory [67]. One basic iteration of the algorithm consists in solving a linear system which operator is monotone, but which size may be large since it comes from the discretization of a partial differential equation or since it is associated to a large size discrete problem such as the Web graph.

For the solution of large size linear system, the state of art consists of multigrid methods which are often able to solve systems in linear time. Whereas multigrid methods can only be applied to systems that come from discretizations of elliptic partial differential equations, algebraic multigrid methods (see for instance [128]) can be applied to any linear systems with monotonicity properties (discrete maximum principle or systems with a M-matrix).

The association of multigrid methods with policy iteration has been used and studied in the case of discounted stochastic control problems (see for instance [38], [47]), or in the case of a simplified policy iteration algorithm for ergodic control (see for instance [5]), but for which no proof of convergence is known. Some recent work combines the algebraic multigrid method with learning methods [142]. We have also tested it in the case of policy iterations for discounted zero-sum two-player games, during the internship of Shantanu Gangal in 2007.

For degenerate two player problems and in particular for risk sensitive optimal control problems, no such algorithms have been studied or implemented yet.

The aim of the PhD thesis of Sylvie Detournay, which is starting this year, is to develop and study an algorithm for degenerate two player games (that may come from a discrete time and finite state space model) combining a policy iteration such as that introduced in [67] and an algebraic multigrid method.

6.6. Applications

6.6.1. Introduction

Nous présentons maintenant plusieurs travaux de nature appliquée, touchant à des domaines variés, dans lesquels nous exploitons certaines des techniques mathématiques présentées précédemment, et particulièrement celles qui relèvent de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la convexité tropicale. Ces applications utilisent aussi des techniques d'algèbre linéaire ou d'optimisation convexe.

English version

In this section, we describe several applied works in which we use some of the theoretical tools developed by the team, including non-linear Perron-Frobenius theory and tropical convexity. Some of these applications also make an intensive use of linear algebraic and convex programming methods.

6.6.2. Calcul de la valeur propre de Perron et application en chronothérapeutique/Computation of the Perron eigenvalue with an application to chronotherapeutics

Participants: Jean Clairambault [Projet BANG, INRIA], Stéphane Gaubert, Thomas Lepoutre [Projet BANG, INRIA], Benoît Perthame [Projet BANG, INRIA].

On s'intéresse à des modèles de systèmes dynamiques monotones structurés en age représentant la croissance de populations de cellules (saines ou tumorales), à la suite de travaux de Clairambault et Perthame. Il s'agit de comprendre l'influence du contrôle circardien sur la croissance des cellules. Dans le cas stationnaire, le taux de croissance est représenté par une valeur propre de Perron. Dans le cas périodique, il s'agit d'une valeur propre de Floquet. Le problème revient à évaluer la manière dont la valeur propre de Floquet dépend de certains termes périodiques et se compare à la valeur propre de Perron de divers systèmes moyennés. Les inégalités de convexité générales, établies dans un travail précédent [65], indiquent qu'il n'y a pas de résultat simple de comparaison permettant de rendre compte des expériences, lesquelles suggèrent que le contrôle circadien limite la prolifération tumorale. Le travail de thèse de T. Lepoutre, commencé à l'automne 2007, s'est donc orienté sur l'étude de modèles qui devraient permettre de rendre compte de ces phénomène. Le travail effectué dans [16], qui fournit des résultats analytiques précis sur un modèle à une phase, et des résultats numériques sur des modèles à plusieurs phases, a permis de montrer que les comportements les plus riches apparaissent lorsque le contrôle circadien agit sur le taux de transition entre phases, et non pas seulement sur le taux de mort, ce qui permet de guider le développement de modèles plus réalistes.

English version

We study monotone dynamical systems representing the growth of cells (healthy or tumoral), following a work of Clairambault and Perthame. The goal is to understand how the circadian control influences the growth of cells. In the case of stationnary monotone systems, this growth is measured by the Perron root. In the time periodic case, this Perron root is replaced by a Floquet multiplier. The general convexity inequalities established in the previous work [65] indicate that there is no simple comparison result explaining the experimental observation that the circadian controls reduces the proliferation of tumor cells, and so, the PhD work of T. Lepoutre, which began at the fall of 2007, is oriented towards the development of models accounting for these experimental results. The study done in [16] yields precise analytical results in a one phase model, and reports numerical experiments in models with several phases, showing that the most interesting behaviors appear when the circadian control acts on the transition phases between phases, rather than on the death rate of cells, which can be used to guide the development of more realistic models.

6.6.3. Identification du trafic dans les réseaux IP/Traffic identification in IP networks

Participants: Mustapha Bouhtou [France-Télécom R & D], Stéphane Gaubert, Guillaume Sagnol.

Le travail de thèse de Guillaume Sagnol, commencé à l'automne 2007, porte sur l'identification du trafic dans des réseaux IP. Le point de départ est le problème classique consistant à déterminer le trafic entre chaque origine et chaque destination à partir de diverses mesures et en particulier de mesures sur les liens (mesures SNMP). Ce problème a été renouvelé ces dernières années, en raison de la complexité croissante des réseaux, mais aussi de la possibilité de déployer dans le réseau des outils comme le logiciel Netflow produit par Cisco, permettant d'accéder finement à la mesure du trafic.

Dans [23], on a modélisé le problème de l'optimisation de l'emploi de Netflow à l'aide d'un démarche de type "plans d'expérience". Il s'agit de minimiser les ressources dédiées à la mesure du trafic, tout en garantissant une certaine qualité de mesure. La qualité de la mesure peut être quantifiée par une matrice symmétrique positive, qui représente la covariance de l'erreur d'estimation, ou plutôt, par des fonctionnelles scalaires de celles-ci, croissantes pour l'ordre des matrices symétriques (ordre de Loewner). On parvient ainsi après quelques réécritures, à une famille de problème dont les plus typiques sont de la forme

$$\max\left(\mathrm{trace}\,(M(w))^p\right)^{1/p}, \quad M(w)=\sum_k w_k A_k^T A_k, \quad w_k\in\{0,1\}, \quad \sum_k w_k c_k \leq B \ . \tag{15}$$

Ici, la variable binaire w_k modélise la possibilité de faire une observation de type k, celle ci-fournissant une fonction linéaire $A_k x$ (certaines informations agrégées) du vecteur x (le trafic) qu'il s'agit d'inférer. La contrainte $\sum_k w_k c_k \leq B$ limite le nombre de mesures ou un coût d'instrumentation. Les valeurs utiles de p sont dans l'intervalle fermé $[-\infty, 1]$. En effet, après relaxation de la contrainte d'intégrité, on parvient à un problème d'optimisation convexe, qui peut être résolu de manière efficace. Le cas où p tend vers 0 est particulièrement intéressant, le problème revenant alors à maximiser le rang de la matrice d'observation. Les problèmes en nombre entiers de la famille considérée sont NP-difficiles, cependant, nous avons pu établier certaines inégalités matricielles, qui combinées à des techniques de sous-modularité, permettent de montrer que le problème est approximable en temps polynômial par un algorithme de type glouton à un facteur $1-1/e$ près. Ceci a conduit au développement d'algorithmes, qui ont été validés sur des données du réseau backbone Opentransit de France-Télécom (5646 paires origine-destination).

English version

The PhD work of Guillaume Sagnol, which began at the fall 2007, deals with the identication of the trafic in IP networks. Its starting point is the classical problem which consists in determining the trafic between every origin and destination, from the available measurements, like the aggregated flows on the links (SNMP measures). This problem has been renewed the last years, due to the increasing complexity of networks, but also to the possibility of deploying refined measurement tools like the Netflow software produced by the company Cisco.

In [23], we developed an experimental design model allowing one to optimize the use of Netflow. The goal is to minimize the resources devoted to measurement under constraints requiring a given quality of measure. The latter can be represented by a positive semidefinite matrix (which gives the covariance of the estimation error) or rather, by scalar functionals of this matrix, which are order preserving for the standard ordering of symmetric matrices (Loewner order). After some transformations, we arrive at a family of problems which are typically of the form (15). Here, the binary decision variable w_k models the possibility to make an observation of a certain type, which yields a linear function $A_k x$ representing an agregated information of the trafic vector x to be estimated. The constraint $\sum_k w_k c_k \leq B$ limits the number of measures, or their cost. The useful values of p are in the closed interval $[-\infty, 1]$, then, after a relaxation of the integrity constraint, we arrive at a convex programming problem. The problem which consists in maximizing the rank of the observation matrix is recovered as the limit case $p \to 0^+$. The integer problems in this family are NP-hard, however, we managed to prove some matrix inequalities, which together with sub-modularity arguments, imply that there is a (greedy) polynomimal time algorithm which approximates the solution up to a factor $1 - 1/e$. Using these techniques, we developed algorithms, that we have tested on the “Opentransit” backbone network of France-Télécom (5646 origin-destination pairs).

6.6.4. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration

Participants: Assale Adje, Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA].

La thèse d’A. Adje, encadrée conjointement par S. Gaubert et E. Goubault, qui a démarré en Octobre 2007, traite de l’application de méthodes de théorie de jeux et d’optimisation (analyse convexe abstraite, programmation convexe et non convexe) aux problèmes de point fixe intervenant en analyse statique de programme. Un premier travail a porté sur des améliorations de l’algorithmes d’itération sur les politiques développé dans [71], [87]. Celui-ci a le mérite de fournir des invariants qui apparaissent souvent expérimentalement être précis, cependant, il ne garantit pas en général de fournir le point fixe minimal, lequel fournit l’invariant “optimal” modulo les approximations inhérentes à l’interprétation abstraite. À l’aide de techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, nous avons pu donner dans [21] un raffinement de l’itération sur les politiques. Celui-ci permet toujours d’obtenir le point fixe minimal, à condition que l’opérateur de point fixe soit “non-expansif” pour la norme sup, autrement dit, qu’il représente un jeu stochastique dont le taux d’escompte est positif ou nul. Lorsque le taux d’escompte est négatif, le calcul général du plus petit point fixe par itération sur les politiques reste un problème ouvert.

Le travail de thèse s’oriente maintenant vers l’emploi de domaines décrits par des contraintes non-linéaires, qui sont utiles en particulier pour traiter des situations où l’arithmétique du programme n’est plus affine, et également pour tenir compte d’informations fournies par des fonction de Lyapunov qui sont souvent automatiquement disponibles lorsque les programmes numériques à analyser proviennent de l’ingéniérie. Nous montrons que les techniques des jeux s’appliquent encore, au prix de relaxations convexes faisant appel à des outils de programmation semi-définie.

Dans un autre travail, de X. Allamigeon, S. Gaubert et E. Goubault [27], on a introduit un nouveau domaine en analyse statique de programme, reposant sur des polyèdres tropicaux. Ceux-ci permettent d’exprimer de manière économique des contraintes disjonctives, lesquelles apparaissent naturellement dans des calculs d’invariants associé à des primitives d’évaluation mémoire ou à des algorithmes de tri. Ce travail appliqué a eu comme retombée une progrès théorique, conduisant à une amélioration des algorithmes connus permettant de manipuler des polyèdres tropicaux, voir la section 6.3.1 a ce sujet.

English version

The goal of the PhD work of A. Adje, co-supervised by S. Gaubert and E. Goubault, which began in October 2007, is to apply methods from game theory and optimization (generalized duality, convex and non convex programming) to the fixed point problems arising in static analysis of programs by abstract interpretation. As the initial work of the PhD, we refined the policy iteration algorithm developed in [71], [87]. The latter provides invariants which often turn out to be accurate on concrete examples, but we would like to make sure that the fixed point which is returned is the smallest one, i.e., the one which yields the optimal invariant modulo the approximation which is inherent to abstract interpretation. By exploiting techniques from non-linear Perron-Frobenius theory, we managed in [21] to refine the algorithm in such a way that it always returns the minimal fixed point, provided that the fixed point operator is sup-norm nonexpansive, which means that the stochastic game that it represents has a nonnegative discount rate. When the discount rate is negative, finding the smallest fixed point by policy iteration remains an open problem.

The PhD work is now devoted to the design of domains described by non-linear constraints, which are useful to analyze programs the arithmetics of which is not affine, and which also allow one to exploit some information provided by Lyapunov functions, which is often automatically available when checking programs originating from engineering applications. We show that the correspondence with games carries over, up to some relaxations based on semidefinite programming.

In another work, by X. Allamigeon, S. Gaubert and E. Goubault [27], we introduced a new domain in static analysis, relying on tropical polyhedra. These allow one to express in an economical way some disjunctive constraints, which naturally appear when modelling some memory allocation primitives or some sort algorithms. This applied work had a theoretical by product, leading to an improvement of the known algorithms allowing one to handle tropical polyhedra, see section 6.3.1.

6.6.5. Modèles du web/Models of web surfing

Participants: Marianne Akian, Mustapha Bouhtou [France-Télécom R & D], Stéphane Gaubert, Laure Ninove [UCL, Belgique].

Le “PageRank” le plus couramment utilisé est un ordre des pages web calculé à partir du graphe du web, lequel a pour noeuds les pages web et pour arcs les hyperliens : on suppose qu’un visiteur d’une page web choisit la page suivante qu’il va visiter de manière uniforme parmi les pages pointées par la page qu’il est en train de visiter. Ainsi, le parcours d’un visiteur du web est une marche aléatoire sur le graphe du web et on ordonne les pages web par la valeur de la mesure invariante de cette marche aléatoire.

Dans [13], on a proposé un modèle tenant compte du fait qu’un visiteur du web peut avoir une idée a priori de la valeur des pages, et ainsi favoriser, dans ses choix de page suivante, les pages “réputées”. Notre modèle suppose que la réputation est liée au PageRank, lequel est encore défini comme la fréquence de visite des pages. On définit ainsi un “T-pagerank”, où l’inverse de la “température” T mesure l’influence de la réputation des pages sur la visite du web. Lorsque T tend vers l’infini, on retrouve le PageRank standard. Notre étude a permis de mettre en évidence des effets auto-validants. Ceux-ci se traduisent par des phénomènes d’instabilité du T-PageRank en deçà d’une température critique, mesurant le degré de confiance en le classement au delà duquel celui-ci cesse d’être fiable. Les preuves des résultats font appel à la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire.

Dans un travail en cours avec M. Bouhtou, qui a été démarré à l’occasion du co-encadrement d’un enseignement d’approfondissement a l’X, on s’intéresse cette fois-ci à l’optimisation du pagerank d’un site, à l’aide de techniques de décision Markovienne.

English version

The “PageRank” is a well known ranking of the webpages which uses the graph of the web, the nodes of which are the webpages and the arcs of which are hyperlinks. One assumes that a websurfer chooses randomly the next webpage she will visit, among the pages pointed from the page she is visiting, with a uniform distribution. Hence the trajectory of the websurfer is a random walk on the web graph, and one ranks webpages by the value of the invariant measure of this random walk.

In [13], we have proposed a model taking into account the fact that a websurfer may have an a priori idea of the value of pages, favouring, in his choice of next pages, pages from "reputed" sites. Our model assumes that the reputation is related to the PageRank, which is still defined as the frequency of visit of pages. This justifies the definition of a T-PageRank, for which the inverse of the temperature T measures the influence of the reputation of pages on the visit of the web. When T tends to infinity, we recover the classical PageRank. Our study brought to light self-validating effects, which are reflected by an instability of the T-PageRank, when T is inferior to a critical temperature which measures the degree of confidence in the ranking above which the ranking is no longer reliable. The proofs of these results rely on non-linear Perron-Frobenius theory.

In a more recent work with M. Bouhtou, which began with the co-supervision of a student project at École Polytechnique, we are deadling with the maximization of the pagerank of a group of web pages, using Markov decision techniques.

6.6.6. Modèles de gestion du revenu/Models of revenue management

Participants: Pierre Beauhaire [Paris 6, puis Air-France], E. Bouzgarrou [Air-France], Stéphane Gaubert, J. Peyrieux [Air-France].

E. Bouzgarrou, S. Gaubert et J. Peyrieux ont co-supervisé le travail de stage de M2 de P. Beauhaire, qui a porté sur le développement et sur l'analyse d'un modèle de programmation dynamique en gestion du revenu, limité au cas mono-segment, mais incorporant un modèle précis de la sensibilité du client au prix [29].

English version

E. Bouzgarrou, S. Gaubert and J. Peyrieux co-supervised the Master 2 research internship of P. Beauhaire, in which he developed and analyzed a dynamic programming model in revenue management, limited to the one-leg case, but incorporating an accurate model of the price sensitivity of the customer [29].

7. Contracts and Grants with Industry

7.1. Identification dynamique du trafic

CRE avec France Télécom R & D (responsable du suivi France-Télécom: Mustapha Bouhtou), d'Octobre 2006 à Octobre 2008, portant sur l'identification dynamique du trafic dans les réseaux backbone IP. En 2008, ce contrat implique S. Gaubert et G. Sagnol (doctorant). Le travail comprend le développement d'algorithmes d'optimisation combinatoire permettant d'optimiser le déploiement d'outils de mesure du trafic de type Netflow dans les réseaux IP. Voir §6.6.3.

8. Other Grants and Activities

8.1. Actions nationales

- Projet DIGITEO PASO (Preuve, Analyse Statique, Optimisation), à compter de Sept. 2008. Ce projet, dont le but est notamment d'appliquer des techniques d'optimisation à des problèmes de preuve de propriétés numériques de programmes, est coordoné par S. Putot (équipe MeASI, LIX/CEA), il fédere en outre des chercheurs de l'équipe-projet Typical (B. Werner), du LSS de Supélec (M. Kieffer, E. Walter), et de Maxplus (S. Gaubert). Ce projet a été l'occasion de démarrer une collaboration entre S. Gaubert et des chercheurs de Typical (B. Werner, R. Zumkeller), qui s'est traduite par le co-encadrement du stage de Master d'Éric Biagioli (Rosario, Argentina, 3 mois à l'automne), qui porte sur l'application de techniques à base de sommes de carrés pour produire des certificats pouvant être utilisés en preuve de programme.
- Projet ANR Arpège ASOPT (Analyse statique et Optimisation) démarrant à l'automne 2008. Partenaires: équipe-projet Popart (INRIA Grenoble), équipe MeASI, EADS, et Maxplus. Ce projet a été labellisé par le pôle de compétitivité System@tic.

8.2. Actions internationales

- Coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet, soutenue par le RFBR (3 ans, démarrée en juillet 2006) : coopération entre les membres du projet MAXPLUS, le groupe de Maslov à Moscou, comprenant entre autres G. Litvinov, et A. Sobolevskii, et un groupe à Strasbourg (CNRS) comprenant I. Itenberg et V. Kharlamov, autour de questions d'algèbre max-plus.

8.3. Accueils de chercheurs étrangers

- Bas Lemmens (Warwick University), 3 jours en avril,
- Alexander Guterman (Moscow State University), 3 mois répartis dans l'année.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique

- M . Akian :
  - Co-responsable du séminaire <<Probabilités, Optimisation, Contrôle>> de l'INRIA Rocquencourt, jusqu'en février 2008.
  - Membre élue de la Commission d'évaluation de l'INRIA (titulaire de septembre 2005 à août 2008, suppléante à partir de septembre 2008, pour 3 ans).
- S. Gaubert :
  - Vice-président du comité des projets du Centre de Recherche INRIA de Saclay – Île-de-France depuis Janvier 2008.
  - Membre du CSD5 "Mathématiques et interactions" de l'ANR.
  - Membre de la Commission de spécialistes de l'Université d'Orsay, section 61.
  - Membre du Conseil de la formation de l'ENSTA.
  - Membre du comité éditorial de J. Discrete Event Dynamic Systems.
  - Membre du comité éditorial de la collection Mathématiques et Applications, SMAI et Springer.
- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

9.2. Enseignement universitaire

- M. Akian
  - Cours de contrôle stochastique à temps discret du M2 Modélisation et Méthodes Mathématiques en Économie et Finance (MMMEF) de Paris 1.
- S. Gaubert
  - Cours (Systèmes à Événements Discrets) de la spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images (ATSI) du M2 IST de l'Université d'Orsay. Ce cours est commun à l'Option Automatique de l'ENSMP.
  - Cours (Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux) du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l'Université de Paris 6.

- Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [30].
- Participation au cours d'Optimisation Combinatoire en troisième année à l'ENSTA.
- Cours invité d'une semaine sur l'algèbre tropicale au département Traitement du Signal de l'Université Carlos III de Madrid (organisateur: Francisco José Valverde Albacete), Février 2008.

9.3. Encadrement de thèse

- Assale Adje, inscrit à l'École Polytechnique depuis Octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse) et Eric Goubault (CEA).
- Meisam Sharify Najafabadi, inscrit à l'École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de S. Gaubert.
- Guillaume Sagnol, inscrit à l'École des Mines de Paris depuis octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert et M. Bouhtou (France Télécom R&D).
- Paul Poncet, inscrit à l'École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de M. Akian.
- Thomas Lepoutre (projet BANG), inscrit à Paris VI depuis octobre 2007. Encadrement assuré par Benoît Perthame (ENS et INRIA, projet BANG, directeur de thèse), Jean Clairambault (projet BANG) et S. Gaubert.
- Sylvie Detournay, inscrite à l'École Polytechnique à partir de septembre 2008, sous la direction de M. Akian.

9.4. Membre de jury

- M. Akian
  - Concours de recrutement de chercheurs INRIA : CR2 Sophia.
- S. Gaubert
  - Membre du jury de la thèse de Laure Ninove, Université Catholique de Louvain, 21 Février 2008.
  - Membre du jury de la thèse de Roland Zumkeller, École Polytechnique, 21 Octobre 2008.
  - Membre du jury de la thèse de Florian Horn, LIAFA, Paris 7, 24 Novembre 2008.

9.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- A. Adje
  - Conférence MTNS 2008 (Eighteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems), Virginie, 28 Juillet–1er août 2008. Présentation de [21].
- M. Akian
  - Conférence MTNS 2008 (18th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems), 28 Juillet.–1er août 2008, Special Session on "Hamilton-Jacobi Equations, Viscosity Solutions, and Max-Plus Analysis" organisée par Martin Day et William McEneaney. Titre de l'exposé : "Representation of stationnary solutions of degenerate Hamilton-Jacobi-Bellman equations".
- S. Gaubert

  - Exposé au séminaire de mathématiques appliquées du Collège de France, janvier 2008. Titre de l'exposé : "De la théorie de Perron-Frobenius à la programmation dynamique et vice versa".
  - ILAS 20on 08 (15th ILAS conference), Cancún, 16-20 juin 2008, Minisymposium "Max algebra" organisé par Hans Schneider et Peter Butkovic. Titre de l'exposé : "Using max-plus eigenvalues to bound the roots of a polynomial".
  - AIM workshop on "Nonnegative Matrix Theory: Generalizations and Applications", organisé par Judith McDonald, Hans Schneider, and Michael Tsatsomeros, Palo Alto, 1-5 décembre 2008. Titre de l'exposé : Non-linear Perron Frobenius theory.
  - CDC'08 (47th IEEE Conference on Decision and Control), présentation de [22].
- G. Sagnol
  - Conférence ROADEF'08 (9ème congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision), 25–27 Fév. 2008, Clermont-Ferrand. Titre de l'exposé : "Optimisation de la mesure du trafic dans les réseaux : une approche SDP".
  - International Conference on Engineering Optimization (EngOpt 2008), 1er au 5 juin 2008. Présentation de [23].
  - Exposé à la 4ième Journée Optimisation dans les réseaux (GDR RO), le 13 octobre 2008. Titre de l'exposé : Méthodes pour l'optimisation du déploiement de Netflow sur un grand réseau Internet.
  - Participation au workshop (École) sur la statistique algébrique, MSRI, Berkeley, Décembre 2008.
- C. Walsh
  - Participation au symposium "Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology", Stockholm, mai 19–25, 2008.
  - Séjour au KTH à Stockholm pour collaborer avec Anders Karlsson, 3 jours.

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", vol. 351, n^{o} 11, 1999, p. 4515–4543.

[2] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. HOGBEN (editor), Chapter 25, vol. 39, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", vol. 52, n^{o} 2, 2003, p. 637-679, http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/.

[4] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", vol. 140, n^{o} 1, 2006, p. 157–176, http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084.

[5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", vol. 11, n^{o} 2, 2001, p. 153–188.

[6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992.

[7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", vol. 14, n^{o} 4, 1999.

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 379, 2004, p. 395–422, http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294.

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", vol. 23, 1999, p. 207–219.

[10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", Also arXiv:math.FA/0105091, vol. 356, n^{o} 12, 2004, p. 4931-4950, http://www.ams.org/tran/2004-356-12/S0002-9947-04-03470-1/home.html.

Year Publications

Articles in International Peer-Reviewed Journal

[11] M. AKIAN, B. DAVID, S. GAUBERT. *Un théorème de représentation des solutions de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique dégénérée sur le tore*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I", vol. 346, 2008, p. 1149-1154, http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2008.09.020.

[12] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control Optim.", vol. 47, n^{o} 2, 2008, p. 817–848, http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0603619.

[13] M. AKIAN, S. GAUBERT, L. NINOVE. *Multiple equilibria of nonhomogeneous Markov chains and self-validating Web rankings*, in "SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications", Accepted for publication, 2008, http://arxiv.org/abs/0712.0469.

[14] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Documenta Mathematica", To appear, 2008, http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0412408.

[15] V. D. BLONDEL, S. GAUBERT, N. PORTIER. *The set of realizations of a max-plus linear sequence is semi-polyhedral*, in "Journal of Computer and System Sciences", Accepted for publication, 2008.

[16] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE. *Comparison of Perron and Floquet eigenvalues in age structured cell division cycle models*, in "Math. Model. Nat. Phenom.", Accepted for publication, 2008.

[17] S. GAUBERT, R. KATZ. *The tropical analogue of polar cones*, in "Linear Algebra and Appl.", Accepted for publication, 2008, http://arxiv.org/abs/0805.3688.

[18] S. GAUBERT, S. SERGEEV. *Cyclic projectors and separation theorems in idempotent convex geometry*, in "Journal of Mathematical Sciences", Russian version published in Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 4, pp. 33-52, vol. 155, n^{o} 6, 2008, p. 815-829, http://arxiv.org/abs/0706.3347.

[19] C. WALSH. *Busemann points of Artin groups of dihedral type*, in "Int. J. Alg. Comp.", To appear, 2008, http://www.arxiv.org/abs/0705.1485.

[20] C. WALSH. *The horofunction boundary of the Hilbert geometry*, in "Advances in Geometry", To appear, 2008, http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0611920v2.

International Peer-Reviewed Conference/Proceedings

[21] A. ADJE, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the smallest fixed point of nonexpansive mappings arising in game theory and static analysis of programs*, in "Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2008), Blacksburg, Virginia", July 2008, http://arxiv.org/abs/0806.1160v2.

[22] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *Convergence Analysis of the Max-Plus Finite Element Method for Solving Deterministic Optimal Control Problems*, in "Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'08), Cancun", 2008.

[23] M. BOUHTOU, S. GAUBERT, G. SAGNOL. *Optimization of Network Traffic Measurement : A Semidefinite Programming Approach*, in "Proceedings of the International Conference on Engineering Optimization (EngOpt 2008), Rio de Janeiro", June 1-5 2008.

[24] W. MCENEANEY, A. DESHPANDE, S. GAUBERT. *Curse-of-Complexity Attenuation in the Curse-of-Dimensionality-Free Method for HJB PDEs*, in "Proc. of the 2008 American Control Conference, Seattle, Washington, USA", June 2008.

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

[25] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Linear independence over tropical semirings and beyond*, in "Proceedings of the International Conference on Tropical and Idempotent Mathematics", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, Accepted for publication, American Mathematical Society, 2008, http://www.arxiv.org/abs/0812.3496.

[26] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *The Optimal Assignment Problem for a Countable State Space*, in "Proceedings of the International Conference on Tropical and Idempotent Mathematics", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, Accepted for publication, American Mathematical Society, 2008, http://www.arxiv.org/abs/0812.4866.

[27] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Inferring Min and Max Invariants Using Max-plus Polyhedra*, in "Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)", Valencia, Spain, 16-18 July 2008, vol. 5079, Springer, 2008.

[28] C. WALSH. *Minimum representing measures in Idempotent Analysis*, in "Proceedings of the International Conference on Tropical and Idempotent Mathematics", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, Accepted for publication, American Mathematical Society, 2008, http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0503716.

Research Reports

[29] P. BEAUHAIRE. *Généralisation d'un Modèle de Sensibilité au Prix pour le Revenue Management*, Rapport de stage de recherche, M2 Optimisation, Jeux, et Modélisation Économique, Paris 6, 2008.

[30] F. BONNANS, S. GAUBERT. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, Quatrième édition, 170 p., Polycopié de cours, École Polytechnique, 2008.

Other Publications

[31] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Linear systems of equations in symmetrized tropical semirings*, Preprint, 2008.

[32] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical linear independence and mean payoff games*, Preprint, 2008.

[33] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The horoboundary of an optimal control problem*, Preprint, 2008.

[34] P. BUTKOVIC, R. CUNINGHAME-GREEN, S. GAUBERT. *Reducible spectral theory with applications to the robustness of matrices in max algebra*, Submitted, 2008.

[35] S. GAUBERT, F. MEUNIER. *Carathéodory, Helly and the others in the max-plus world*, Submitted, 2008, http://arxiv.org/abs/0804.1361.

[36] C. WALSH. *The action of a nilpotent group on its horofunction boundary has finite orbits*, 2008, http://arxiv.org/abs/0806.0966.

References in notes

[37] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, x+473.

[38] M. AKIAN. *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*, Thèse de Doctorat, Université Paris IX-Dauphine, Paris, 1990.

[39] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", vol. 339, 2004, p. 103–108, http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438.

[40] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090.

[41] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 327, Série I, 1998, p. 927–932, http://hal.inria.fr/inria-00073240.

[42] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, p. 19-51, http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441.

[43] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Solutions of max-plus linear equations and large deviations*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", Also arXiv:math.PR/0509279, 2005, http://hal.inria.fr/inria-00000218/en/.

[44] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *A max-plus finite element method for solving finite horizon deterministic optimal control problems*, in "Proceedings of MTNS'04, Louvain, Belgique", Also arXiv:math.OC/0404184, 2004, http://hal.inria.fr/inria-00071426.

[45] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for optimal control problems: further approximation results*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", Also arXiv:math.OC/0509250, 2005, http://hal.inria.fr/inria-00000965/en/.

[46] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *How to find horizon-independent optimal strategies leading off to infinity: a max-plus approach*, in "Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'06), San Diego", 2006, http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0609243.

[47] M. AKIAN, J. L. MENALDI, A. SULEM. *On an investment-consumption model with transaction costs*, in "SIAM J. Control Optim.", vol. 34, n$^{\text{o}}$ 1, 1996, p. 329–364.

[48] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[49] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, January 2002.

[50] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, p. 219-230.

[51] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", vol. 275/276, 1998, p. 3–18.

[52] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, n$^{\text{o}}$ 64, Cambridge university press, 1997.

[53] E. N. BARRON, P. CARDALIAGUET, R. R. JENSEN. *Radon-Nikodym theorem in L^∞*, in "Appl. Math. Optim.", vol. 42, n$^{\text{o}}$ 2, 2000, p. 103–126.

[54] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98), Cagliari, Italy", IEE, 1998.

[55] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001.

[56] T. BLYTH, M. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972.

[57] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Ph. D. Thesis, Delft University of Technology, Dec 1993.

[58] S. M. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, PhD Thesis, Caltech, 1990.

[59] P. BUTKOVIC. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 367, 2003, p. 313-335.

[60] P. BUTKOVIČ, F. HEVERY. *A condition for the strong regularity of matrices in the minimax algebra*, in "Discrete Appl. Math.", vol. 11, n^{o} 3, 1985, p. 209–222.

[61] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984.

[62] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000.

[63] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", vol. 34, 1986, p. 6219–34.

[64] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[65] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, B. PERTHAME. *An inequality for the Perron and Floquet eigenvalues of monotone differential systems and age structured equations*, in "Comptes Rendus Mathematique", vol. 345, n^{o} 10, November 2007, p. 549-554, http://arxiv.org/abs/0704.3820.

[66] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, Thèse, spécialité Mathématiques et Automatique, École des Mines, Dec. 2001.

[67] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", vol. 343, n^{o} 5, 2006, p. 377–382.

[68] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. MC GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes", July 1998.

[69] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport de recherche, n^{o} 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, http://hal.inria.fr/inria-00076367.

[70] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", vol. 293, 2003, p. 189–217.

[71] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05), Edinburgh", LNCS, Springer, July 2005, p. 462–475.

[72] P. COUSOT, R. COUSOT. *Abstract Interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points*, in "Principles of Programming Languages 4", 1977, p. 238–252.

[73] P. COUSOT, R. COUSOT. *Comparison of the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. JTASPEFL '91, Bordeaux*, in "BIGRE", vol. 74, October 1991, p. 107–110.

[74] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", vol. 78, n^{o} 3, 1980, p. 385–390.

[75] R. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, n^{o} 166, Springer, 1979.

[76] Y. DAVYDOV, I. MOLCHANOV, S. ZUYEV. *Stable distributions and harmonic analysis on convex cones*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", vol. 344, n^{o} 5, 2007, p. 321–326.

[77] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge", Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 354–382.

[78] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, Rapport de recherche, LAAS, 1990.

[79] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", vol. 9, 2004, p. 1–27 (electronic).

[80] V. DHINGRA, S. GAUBERT. *How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration*, in "Valuetools '06: Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools, New York, NY, USA", ACM Press, 2006, 12, http://doi.acm.org/10.1145/1190095.1190110.

[81] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, vol. XXI, Gauthier Villars, Paris, 1953.

[82] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", 2005.

[83] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", vol. 324, n^{o} 9, 1997, p. 1043–1046.

[84] W. FLEMING, W. MCENEANEY. *A max-plus based algorithm for an HJB equation of non-linear filtering*, in "SIAM J. Control and Opt.", 2000, p. 683–710.

[85] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", vol. 15, n^{o} 2, 2002, p. 497–529 (electronic), http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151.

[86] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 40, n^{o} 12, Dec 1995, p. 2014–2025.

[87] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the Proc. of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07), Braga (Portugal)", LNCS, vol. 4421, Springer, 2007, p. 237–252, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71316-6_17.

[88] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 326, Série I, 1998, p. 43–48.

[89] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", vol. 44, n^o 4, 1999, p. 683–697.

[90] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

[91] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", vol. 323, n^o 4, 1996, p. 371–375.

[92] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOC, Paris, 2002.

[93] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", vol. 2, 1977, p. 25-41.

[94] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984, Eyrolles, Paris, 1979.

[95] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Algebraic and combinatorial methods in operations research, Amsterdam", North-Holland Math. Stud., vol. 95, North-Holland, 1984, p. 147–163.

[96] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", vol. 293, 2003, p. 141–167.

[97] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", vol. 72, 1990, p. 27–38.

[98] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 34, n^o 1, Jan 1989, p. 3-9.

[99] Z. IZHAKIAN. *The tropical rank of a tropical matrix*, Eprint arXiv:math.AC/0604208v2, 2008.

[100] Z. IZHAKIAN. *Tropical arithmetic and tropical matrix algebra*, Eprint arXiv:math.AG/0505458v3, 2008.

[101] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[102] M. KREĬN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", vol. 1950, n^o 26, 1950, 128.

[103] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", vol. 3, 1993.

[104] A. LAKHOUA. *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007.

[105] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, p. 167–187.

[106] J.-Y. LE BOUDEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, n^o 2050, Springer, 2001.

[107] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Thèse de doctorat, Université Rennes 1, September 2002.

[108] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Thèse, Université de Tours, November 2001.

[109] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", vol. 81, 1991, p. 137–145.

[110] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", vol. 69, n^o 5, 2001, p. 696–729, http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128.

[111] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J.-P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", vol. 50, n^o 5, 2005, p. 699-705, http://hal.inria.fr/inria-00072263.

[112] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", vol. 8, n^o 3, July 2002, p. 519–562.

[113] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", vol. XLIII, 2005, p. 51-62, http://hal.inria.fr/inria-00072311.

[114] V. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, Edition Mir, Moscou, 1987.

[115] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[116] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300, http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015.

[117] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[118] R. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", vol. 75, n^o 391, 1988.

[119] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", vol. 1, n^o 2, 1991, p. 177-207.

[120] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[121] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu", Dec. 1990.

[122] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, n^o 119, Chapman & Hall, 2001.

[123] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", n^o 311, 1990, p. 745-748.

[124] M. A. RIEFFEL. *Group* C^**-algebras as compact quantum metric spaces*, in "Doc. Math.", vol. 7, 2002, p. 605–651 (electronic).

[125] I. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", vol. 3, n^o 2, 1967, p. 66-78.

[126] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", vol. 121, 2001, p. 221–246.

[127] A. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000.

[128] J. W. RUGE, K. STÜBEN. *Algebraic multigrid*, in "Multigrid methods, Philadelphia, PA", Frontiers Appl. Math., vol. 3, SIAM, 1987, p. 73–130.

[129] S. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", n^o 3, 2002, p. 163–180, 192.

[130] S. SANKARANARAYANAN, H. SIPMA, Z. MANNA. *Scalable Analysis of Linear Systems using Mathematical Programming*, in "VMCAI", LNCS, vol. 3385, 2005.

[131] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, p. 143–150.

[132] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", vol. 28, n^o 3-4, 1994, p. 277–294.

[133] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997.

[134] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", vol. 4, n^o 3, 2004, p. 389–411.

[135] S. A. STOEV, M. S. TAQQU. *Extremal stochastic integrals: a parallel between max-stable processes and* α*-stable processes*, in "Extremes", vol. 8, n^o 4, 2006, p. 237–266.

[136] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Basel", Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, p. 135–146, http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163.

[137] N. N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", in russian, vol. 3, 1967, p. 39–71.

[138] C. WALSH. *The horofunction boundary of finite-dimensional normed spaces*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", vol. 142, n^{o} 3, 2007, p. 497–507.

[139] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", Max-plus algebras, vol. 293, n^{o} 1, 2003, p. 45–54.

[140] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, (in Czech), Ekonomický ùstav C ˇSAV, Praha, 1976.

[141] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981.

[142] O. ZIV, N. SHIMKIN. *Multigrid Methods for policy evaluation and reinforcement learning*, in "Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC05), Limassol, Cyprus", 2005, p. 1391-1396.

[143] P. DE LA HARPE. *On Hilbert's metric for simplices*, in "Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991), Cambridge", London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 181, Cambridge Univ. Press, 1993, p. 97–119.