



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

*Algèbres max-plus et mathématiques de la
décision/Max-plus algebras and
mathematics of decision*

Saclay - Île-de-France

Theme : Modeling, Optimization, and Control of Dynamic Systems

Activity
R *eport*

2009

Table of contents

1. Team	1
2. Overall Objectives	1
2.1. Mots-clés/Keywords	1
2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives	2
3. Scientific Foundations	3
3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra	3
3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control	5
3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératoire du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games	6
3.4. Processus de Bellman/Bellman processes	7
3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems	8
3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra	8
3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis	9
4. Application Domains	10
4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)	10
4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games	10
4.3. Recherche opérationnelle/Operations research	11
4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs	11
4.5. Autres applications/Other applications	13
5. Software	13
5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab	13
5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations	14
5.3. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games	14
6. New Results	14
6.1. Théorie spectrale max-plus et horo-frontières/Max-plus spectral theory and horoboundaries	14
6.1.1. Introduction	14
6.1.2. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry	15
6.1.3. Horo-frontière de l'espace de Teichmüller/The horoboundary of Teichmüller space	16
6.2. Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et application au contrôle optimal et aux jeux/Non-linear Perron-Frobenius theory, with application to optimal control and games	17
6.2.1. Introduction	17
6.2.2. Valeur de jeux répétés avec paiements ergodiques/Value of repeated games with mean payoff	17
6.3. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis	17
6.3.1. Convexité max-plus ou tropicale/Max-plus or tropical convexity	17
6.3.2. De l'indépendance linéaire max-plus aux jeux avec paiements ergodiques/From max-plus linear independence to mean payoff games	18
6.3.3. Meilleure approximation par des semi-modules max-plus pour la métrique projective de Hilbert/Best approximation in Hilbert's projective metric by max-plus semimodules	19
6.4. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis	20
6.4.1. Introduction	20

6.4.2.	Calcul numérique robuste de valeurs propres de matrices/Robust numerical computation of matrix eigenvalues	20
6.4.3.	Un prétraitement parallèle pour le problème d'affectation optimale/A parallel preprocessing for the optimal assignment problem, based on matrix scaling	21
6.4.4.	Mesures et applications maxitives	21
6.5.	Algorithmes/Algorithms	22
6.5.1.	Méthodes multigrilles pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Multigrid methods for stochastic control and repeated zero sum games	22
6.5.2.	Algorithmique des polyèdres tropicaux/Algorithmics of tropical polyhedra	24
6.6.	Applications	24
6.6.1.	Introduction	24
6.6.2.	Propriétés des valeurs propres de Perron et de Floquet, et application en chronothérapie/Properties of Perron and Floquet eigenvalue, with an application to chronotherapeutics	24
6.6.3.	Identification du trafic dans les réseaux IP/Traffic identification in IP networks	25
6.6.4.	Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration	26
6.6.5.	Optimisation du référencement sur la toile/Optimization of web referencing	27
6.6.6.	Modélisation d'un service d'urgences hospitalières/Modelisation of a hospital emergency department	27
6.6.7.	Optimisation du revenu du fret aérien/Revenue Management of Air Cargo	28
7.	Contracts and Grants with Industry	28
8.	Other Grants and Activities	28
8.1.	Actions nationales	28
8.2.	Actions internationales	29
8.3.	Accueils de chercheurs étrangers	29
9.	Dissemination	29
9.1.	Animation de la communauté scientifique	29
9.2.	Enseignement universitaire	29
9.3.	Encadrement de thèse	30
9.4.	Membre de jury	30
9.5.	Participation à des colloques, séminaires, invitations	31
10.	Bibliography	32

1. Team

Research Scientist

Stéphane Gaubert [Chef de projet, DR, Inria]

Marianne Akian [Responsable permanente, DR, Inria, HdR]

Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus/*Metalau project, part time member of Maxplus project*, HdR]

Cormac Walsh [CR, Inria]

PhD Student

Assale Adjé [Bourse de la Région Île-de-France, École Polytechnique, commun avec l'équipe MeASI (CEA et LIX)]

Paul Poncet [École Polytechnique]

Guillaume Sagnol [CRE-INRIA-France-Telecom, École des Mines de Paris]

Meisam Sharify Najafabadi [CORDI-S, École Polytechnique]

Sylvie Detournay [CORDI-S, École Polytechnique]

Olivier Fercoq [CRE-INRIA-France-Telecom, École Polytechnique, à partir d'octobre/*from October*]

Post-Doctoral Fellow

Guillaume Vigerat [INRIA funded by Digiteo, à partir de Septembre/*from September*]

Visiting Scientist

Ricardo Katz [Conicet, Rosario, Argentina, mars-août/*march-Aug.*]

Administrative Assistant

Wallis Filippi [TR, Inria]

Other

Max Plus [Chercheur imaginaire¹/*Imaginary researcher*²]

2. Overall Objectives

2.1. Mots-clés/Keywords

Mots-clés : Algèbre max-plus, algèbre tropicale, systèmes à événements discrets, programmation dynamique, décision markovienne, contrôle optimal déterministe et stochastique, théorie des jeux, théorie des perturbations, théorie de Perron-Frobenius non linéaire, applications contractantes, analyse numérique, mathématiques discrètes, recherche opérationnelle.

Keywords: *Max-plus algebra, Tropical algebra, Discrete event dynamic systems, Dynamic programming, Markov decision, Deterministic and Stochastic optimal control, Game theory, Perturbation theory, Nonlinear Perron-Frobenius theory, Nonexpansive maps, Numerical analysis, Discrete mathematics, Operations Research.*

¹Max Plus est le nom collectif du groupe de travail de l'INRIA, réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

²*Maxplus is the collective name of the INRIA working group, having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller; Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes disjonctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developed.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que \mathbb{Z} ou \mathbb{R} , au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement "l'algèbre max-plus".

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [85]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [79], [97], [139], [142], [143]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [66]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [127], [126], [118], [104], [94], [131], [113], [95], [87], [53]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [117], [118], [104], grandes déviations [125], asymptotiques à température nulle en physique statistique [68]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [105], [121], [115], [58], laquelle a de nombreuses motivations, telles l'économie mathématique [120], et la théorie des jeux [128], [44]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [67], [109], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [133], [100], [134], [106], [123]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [93], [138], [119], [136] et en théorie des représentations [88], [61], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [85]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [79], [97], [139], [142], [143]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [66]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [127], [126], [118], [104], [94], [131], [113], [95], [87], [53]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [117], [118], [104], large deviation asymptotics [125], or zero temperature asymptotics in statistical physics [68]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [105], [121], [115], [58], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [120] and game theory [128], [44]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [67], [109] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a

key role in the solution of decision problems in automata theory [133], [100], [134], [106], [123]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [93], [138], [119], [136] and in representation theory [88], [61], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k , allant de i à j , est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell: \ell_0=i, \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r, \ell_{r+1}} , \quad (1)$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_k)$ de longueur k , de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \leq s \leq n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) . \quad (2)$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) , \quad (3)$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x, T) = \inf_{X(\cdot), X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) dt + \phi(X(T)) , \quad (4)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \leq t \leq T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v ,

$$v(\cdot, 0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \quad H(x, p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x, y)) , \quad (5)$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [118], [104], [113]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [127], [139], [79], [96], [73], [57], [6] pour la dimension finie, et [118], [104] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [87].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, \dots, n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j . The minimal cost of a path of a given length, k , from i to j , is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_k)$ of length k , with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \leq t \leq T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v , as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the development of the school of Idempotent Analysis (see [118], [104], [113]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [127], [139], [96], [73], [79], [57], [6] for the finite dimension case, and [118], [104] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the ‘‘Aubry-Mather’’ theory [87].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l’approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{monotonie/monotonicity} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) , \\ \text{contraction/nonexpansiveness} & \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty . \end{array} \quad (6)$$

Ici, l’opérateur f est une application d’un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, \leq désigne l’ordre partiel usuel, et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l’ensemble des états est $\{1, \dots, n\}$ et f est une application de \mathbb{R}^n dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l’addition d’une constante [78] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d’opérateurs : l’équation de la programmation dynamique d’un problème de commande optimale à horizon fini s’écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d’un problème à horizon infini (y compris le cas d’un problème d’arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d’un problème avec facteur d’actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [44]. Il permet d’inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l’extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d’homogénéité. Les problèmes auxquels on s’intéresse typiquement sont la structure de l’ensemble des points fixes de f , le comportement asymptotique de f^k , en particulier l’existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l’infini (afin d’obtenir le coût ergodique d’un problème de contrôle optimal ou de jeux), l’asymptotique plus précise de f^k , à une normalisation

près (afin d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [121] pour un panorama. Signalons que dans [91],[7], des algorithmes inspirés de l'algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir le §4.4 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering \leq and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1, \dots, n\}$, and f is a self-map of \mathbb{R}^n . Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [78] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [44]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f , the asymptotic behaviour of f^k , including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k , possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [121] for more background. In [91],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §4.4 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [126], [82], [81], [53],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [117]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétrer les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi retrouvés en particulier dans le travail de thèse d'Asma Lakhoua [107], [51].

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [126], [82], [81], [53], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due

to Maslov [117]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations found again in particular in the PhD thesis work of Asma Lakhoua [107], [51].

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i , une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t . Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t . Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [69], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [73] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [122], [99], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [56]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [89], incluant certaines versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [92], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus ont été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [133], [100], [112], [134], [106], [123]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [111].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i , a counter function, $v_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t . For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t . In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [69], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [73] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [122], [99], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [56]. Max-plus automata models [89], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [92], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [133], [100], [112], [134], [106], [123]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [111].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le

problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [85], [62], [139], [142],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [135], [129], [49] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [98], [124],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [83].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in Sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [85], [62], [139], [142],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [135], [129], [49] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyhedra, determinants, symmetrisation [98], [124],[6]). The subject has attracted recently a new attention [83].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon} \asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon}, \quad e^{-a/\epsilon} \times e^{-b/\epsilon} = e^{-(a+b)/\epsilon}, \quad (7)$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau \mathbb{R}_ϵ , qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. Pour tout $\epsilon > 0$, \mathbb{R}_ϵ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, \mathbb{R}_ϵ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [117], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [125], [50], pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [48], [47], [46] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [138].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \rightarrow 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field \mathbb{R}_ϵ , which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, \mathbb{R}_ϵ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, \mathbb{R}_ϵ coincides with the min-plus

semiring. This idea was introduced by Maslov [117], motivated by the study of WKB-type asymptotics of Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [125], [50] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [48], [47], [46] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [138].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [64], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [101], pour des réseaux ferroviaires [63] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [56]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [60], [110]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [116], [114], [86].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [64], or computing the throughput of a workshop [101] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [63] and [56]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [60], [110]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [116], [114], [86].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fields: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [65]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [72]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [141]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [92] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [111] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [111]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [108].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [65]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [72]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [141]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [92] for the jobshop case, a simpler representation was given in [111] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [111]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [108].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par P. et R. Cousot [76], qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. On associe en effet à chaque point de contrôle du programme un élément du treillis, qui représente une sur-approximation valide de l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables du programme en ce point. Le treillis le plus simple exprimant des propriétés numériques est celui des produits Cartésiens d'intervalles. Des treillis plus riches permettent de mieux tenir compte de relations entre variables, en particulier, des classes particulières de polyèdres sont souvent employées.

Voici, en guise d'illustration, un petit exemple de programme, avec le système de point fixe associé, pour le treillis des intervalles:

void main() {	$x_1 =$	$[0, 0]$
int x=0; // 1	$x_2 =$	$] - \infty, 99] \cap (x_1 \cup x_3)$
while (x<100) { // 2	$x_3 =$	$x_2 + [1, 1]$
x=x+1; // 3	$x_4 =$	$[100, +\infty] \cap (x_1 \cup x_3)$
} // 4		
}		

Si l'on s'intéresse par exemple aux valeurs maximales prise par la variable x au point de contrôle 2, soit $x_2^{\dagger} := \max x_2$, après une élimination, on parvient au problème de point fixe:

$$x_2^+ = \min(99, \max(0, x_2^+ + 1)) , \quad (8)$$

qui a pour plus petite solution $x_2^+ = 99$, ce qui prouve que x est majoré par 99 au point 2.

On reconnaît ici un opérateur de point fixe associé à un problème de jeux à deux joueurs et somme nulle. Cette analogie est en fait générale, dans le cadre d’une collaboration que l’équipe entretient depuis plusieurs années avec l’équipe MeASI d’Eric Goubault (CEA et LIX), spécialiste d’analyse statique, nous avons en effet mis progressivement en évidence une correspondance [75], [90], entre les problèmes de jeux à somme nulle et les problèmes d’analyse statique, qui peut se résumer par le dictionnaire suivant:

Jeux	Interprétation abstraite
système dynamique	programme
opérateur de Shapley	fonctionnelle
espace d’état	(# points de contrôle) × (# degrés de liberté du treillis)
problème en horizon n	exécution de n pas
limite du problème en horizon fini	invariant optimal (borne)
itération sur les valeurs	itération de Kleene

Pour que le nombre d’états du jeu soit fini, il est nécessaire de se limiter à des treillis d’ensembles ayant un nombre fini de degrés de liberté, ce qui est le cas de domaines communément utilisés (intervalles, ensembles définis par des contraintes de potentiel de type $x_i - x_j \leq \text{cst}$, mais aussi, les “templates” qui sont des sous-classes de polyèdres introduits récemment par Sankaranarayanan, Sipma et Manna [132]). L’ensemble des actions est alors fini si on se limite à une arithmétique affine. Signalons cependant qu’en toute généralité, on aboutit à des jeux avec un taux d’escompte négatif, ce qui pose des difficultés inédites. Cette correspondance entre jeux et analyse statique est non intuitive, au sens où les actions du minimiseur consistent à sélectionner des points extrêmes de certains polyèdres obtenus par un mécanisme de dualité.

Une pathologie bien répertoriée en analyse statique est la lenteur des algorithmes de point fixe, qui peuvent effectuer un nombre d’itérations considérable (99 itérations pour obtenir le plus petit point fixe de (8)). Celle-ci est usuellement traitée par des méthodes d’accélération de convergence dites d’élargissement et rétrécissement [77], qui ont cependant l’inconvénient de conduire à une perte de précision des invariants obtenus. Nous avons exploité la correspondance entre analyse statique et jeux pour développer des algorithmes d’une nature très différente, s’inspirant de nos travaux antérieurs sur l’itération sur les politiques pour les jeux répétés [91], [70], [71],[7]. Une version assez générale de cet algorithme, adaptée au domaine des templates, est décrite dans [90] et a fait l’objet d’une implémentation prototype. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec souvent un gain en précision par rapport aux approches classiques, par exemple pour des programmes comprenant des boucles imbriquées.

Ce domaine se trouve être en pleine évolution, un enjeu actuel étant de traiter d’une manière qui passe à l’échelle des invariants plus précis, y compris dans des situations où l’arithmétique n’est plus affine.

English version

The abstract interpretation method introduced by P. and R. Cousot [76], allows one to determine automatically invariants of programs by computing the minimal fixed point of an order preserving map defined on a complete lattice. To every breakpoint of the program is associated an element of the lattice, which yields a valid overapproximation of the set of reachable values of the vectors of variables of the program, at this breakpoint. The simplest lattice expressing numerical invariants consists of Cartesian products of intervals. More sophisticated lattices, taking into account relations between variables, consisting in particular of subclasses of polyhedra, are often used.

As an illustration, we gave before Eqn (8) a simple example of program, together with the associated fixed-point equation. In this example, the value of the variable x at the breakpoint 2 is bounded by the smallest solution x_2^+ of the fixed point problem (8), which is equal to 99.

The fixed point equation (8) is similar to the one arising in the theory of zero-sum repeated games. This analogy turns out to be general. Un a series of joint works of our team with the MeASI team of Eric Goubault (CEA and LIX), we brought progressively to light a correspondence [75], [90], between the zero-sum game problems and the static analysis problems, which can be summarized by the following dictionary:

Games	Abstract interpretation
dynamical system	program
Shapley operator	functional
state space	(# breakpoints) \times (# degrees of freedom)
horizon n problem	execution of n logical steps
limit of the value in horizon n	optimal invariant (bound)
value iteration	Kleene iteration

For the game to have a finite state space, we must restrict our attention to lattices of sets with a finite number of degrees of freedom, which is the case of the domains commonly used in static analysis (intervals, sets defined by potentials constraints of the form $x_i - x_j \leq \text{cst}$, and also the subclasses of polyhedra called “templates”, introduced recently by Sankaranarayanan, Sipma and Manna [132]). Then, the action space is finite if the arithmetics of the program is affine. However, in full generality, the games we end up with have a negative discount rate, which raises difficulties which are unfamiliar from the game theory point of view. This correspondence between games and static analysis turns out to be non intuitive, in that the action of the minimizer consist of selecting an extreme point of a polyhedron arising from a certain duality construction.

A well known pathology in static analysis is the fact that the standard Kleene fixed point algorithm may have a very slow behavior (99 iterations are needed to get the smallest fixed point of (8)). This is usually solved by using some accelerations of convergence, called widening and narrowing [77], which however lead to a loss of precision. We exploited the correspondence between static analysis and games to develop algorithms of a very different nature, inspired by our earlier work on policy iteration for games [91], [70], [71],[7]. A rather general version of this policy iteration algorithm, adapted to the domain of templates, is described in [90], together with a prototype implementation. Every iteration combines linear programming and combinatorial algorithms. Some experimental results indicate that the method often leads to invariants which are more accurate than the ones obtained by alternative methods, in particular for some programs with nested loops.

This topic of research is currently evolving, a question of current interest being to find accurate invariants, in a scalable way, in situations in which the arithmetics is not affine.

4.5. Autres applications/Other applications

L’algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [74].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [74].

5. Software

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d’une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est **téléchargeable librement** parmi les contributions du site **Scilab**, et qui est maintenant intégrée par défaut dans **Scicoslab**. Cette boîte à outils implémente l’ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [55], [110]. Il faut aussi noter que le

groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre **librairie** C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely **available** among the contributions on the **Scilab** web site, and which is now included by default in **Scicoslab**. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [55], [110]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ **library** computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations

Dans son travail de thèse [107] dans l'équipe sous la direction de Stéphane Gaubert et Marianne Akian, Asma Lakhoua a développé des programmes en Scilab et C, exploitant la boîte à outils Maxplus de Scilab, implémentant de nouvelles discrétisations des équations d'Hamilton-Jacobi correspondant aux problèmes de contrôle optimal déterministe.

English version

As part of her PhD thesis work [107] in the team, under the supervision of Stéphane Gaubert and Marianne Akian, Asma Lakhoua has developed programs in Scilab and C, exploiting the Maxplus toolbox, allowing to test max-plus discretisation schemes for Hamilton-Jacobi equations corresponding to deterministic optimal control problems.

5.3. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games

L'algorithme d'itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle pour le cas de paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), et dégénérés de type "multi-chaîne" a été introduit dans [71]. Plusieurs stages ont permis l'implémentation partielle en Scilab, C ou C++, et le test de ce type d'algorithmes (voir le travail de Vishesh Dhingra [84]), ou de son couplage avec la résolution de systèmes linéaires par des méthodes multigrilles algébriques (stage de Shantanu Gangal en 2007). Le travail de thèse de Sylvie Detournay, qui porte sur le couplage entre itérations sur les politiques et méthodes multigrilles algébriques, devrait permettre le développement d'un programme complet, voir le §6.5.1 ci-dessous.

English version

The policy iteration algorithm for zero sum repeated games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), and in degenerate "multichain" cases, has been introduced in [71]. Several internships allowed us to implement in Scilab, C or C++, and to test such algorithms (see the work of Vishesh Dhingra [84]), or its combinaison with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods (internship of Shantanu Gangal in 2007). The PhD thesis work of Sylvie Detournay, who concerns the combinaison of policy iterations with algebraic multigrid methods, should allow us to develop a complete program, see §6.5.1 below.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus et horo-frontières/Max-plus spectral theory and horoboundaries

6.1.1. Introduction

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Cormac Walsh.

Étant donné un noyau $a : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on peut lui associer le problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x, y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \quad (9)$$

dans lequel on cherche le vecteur propre $u : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme nous l'avons rappelé dans les §3.2 et 3.3, le problème spectral (9) intervient en contrôle ergodique: l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x, y)$ fournit le gain associé à la transition $x \rightarrow y$. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité.

Dans [11], nous avons considéré le cas où S est non compact. Lorsque $\lambda = 0$, l'espace propre est analogue à l'espace des fonctions harmoniques défini en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. En introduisant l'analogie max-plus de la frontière de Martin, nous avons obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (9) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w), \quad (10)$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogie max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u joue le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré aussi que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de "quasi-géodésiques". La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des horo-fonctions (fonctions de Busemann généralisées), ou horo-frontière. Ces résultats inspirent les travaux des sections suivantes, qui portent sur des cas remarquables d'espaces métriques (§6.1.2 et 6.1.3) ou sur des applications en théorie des jeux (§6.2.2).

English version

Let the kernel $a : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ be given. One may associate the max-plus spectral equation (9), where the eigenvector $u : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. As we recalled in §3.2 and refmonotone, this spectral problem arises in ergodic optimal control: the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties.

In [11], we considered the case where S is non-compact. When $\lambda = 0$, the eigenspace is analogous to the set of harmonic functions defined in classical or probabilistic potential theory. By introducing a max-plus analogue of the classical Martin boundary, we obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (9) may be represented as in (10) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u plays the role of the spectral measure. We also showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain "almost-geodesics". The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions), or horoboundary. These results have inspired the work of the next sections, which deal either with remarkable examples of metric spaces (§6.1.2 and 6.1.3) or applications to zero-sum games (§6.2.2).

6.1.2. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry

Participants: Cormac Walsh, Bas Lemmens [Warwick University, UK].

L'un des intérêts de l'horo-frontière est de renseigner sur le groupe des isométries d'un espace métrique. En effet, ce groupe agit naturellement sur l'horo-frontière, et cette action peut parfois être mieux comprise que l'action du groupe sur l'espace d'origine.

Nous étudions le groupe des isométries pour la métrique de Hilbert. De La Harpe [145] a donné plusieurs conjectures relatives à ce groupe. Nous conjecturons que le groupe des isométries est exactement le groupe des transformations linéaires projectives à moins que le domaine ne soit une coupe d'un cône symétrique non-Lorentzien. Nous avons démontré cette conjecture lorsque le domaine est un polytope [37]. Nous poursuivons ce travail avec l'étude du cas général.

Notre méthode utilise les résultats de [140]. Dans cet article, on a étudié en détail l'horofrontière de la géométrie de Hilbert. On a déterminé ses points de Busemann et donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les horofonctions soient des points de Busemann. De plus, on a montré que toute suite qui converge vers un point de l'horofrontière, converge aussi au sens usuel vers un point de la frontière euclidienne du domaine sur lequel la métrique est définie.

English version

One use for the horofunction boundary is to study the group of isometries of a metric space. This is because this group has a well defined action on the horoboundary and it is likely that in many cases this action will be easier to understand than the action on the space itself.

We have been investigating the isometries of the Hilbert geometry. De La Harpe [145] has previously made several conjectures about the isometry group of this space. We conjecture that the isometry group is exactly the group of projective linear transformations unless the domain on which the geometry is defined is a cross section of a non-Lorentzian symmetric cone. We have managed to prove this conjecture in the case of a polytope domain [37]. We are continuing to work on the general case.

Our method uses the knowledge of the horoboundary in [140]. In this paper, we worked out in detail the horofunction boundary of the Hilbert geometry. We determined its set of Busemann points and gave necessary and sufficient conditions for all horofunctions to be Busemann points. In addition we showed that any sequence of points converging to a point in the horofunction boundary also converges in the usual sense to a point in the Euclidean boundary of the domain on which the metric is defined.

6.1.3. *Horo-frontière de l'espace de Teichmüller/The horoboundary of Teichmüller space*

Participant: Cormac Walsh.

L'espace de Teichmüller d'une surface est un espace métrique composé des structures conformes de cette surface. On peut le voir comme l'ensemble des classes d'équivalence des métriques riemanniennes de cette surface, où deux métriques sont équivalentes si il existe une application conforme homotope à l'identité qui envoie l'une des métriques sur l'autre. Il existe plusieurs métriques naturelles sur l'espace de Teichmüller, la plus utilisée étant la métrique de Teichmüller. Nous avons étudié l'horofrontière de cet espace métrique, et déterminé l'ensemble des points de Busemann. Celui-ci se trouve être relié à une frontière déjà étudiée dans la littérature, appelée frontière de Teichmüller. Par la suite, nous avons l'intention d'utiliser cette propriété afin d'étudier les sous-groupes du groupe des isométries de la métrique de Teichmüller.

English version

An interesting metric space is the Teichmüller space of a surface. This is the space of conformal structures on the surface. One may think of it as the space of equivalence classes of Riemannian metrics on the surface, where two such metrics are regarded as being equivalent if there is a conformal map on the surface taking one to the other that is homotopic to the identity. There are several natural metrics on Teichmüller space; the most commonly used is Teichmüller metric. We have investigated the horofunction boundary of this metric space, and have determined its set of Busemann points. This set turns out to be related to a previously studied boundary of Teichmüller space called the Teichmüller boundary. In future work, we intend to apply this knowledge to study subgroups of the mapping class group, which is the isometry group of the Teichmüller metric.

6.2. Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et application au contrôle optimal et aux jeux/Non-linear Perron-Frobenius theory, with application to optimal control and games

6.2.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.3, les applications qui sont contractantes pour certaines métriques, ou qui vérifient certaines propriétés de monotonie ou d'homogénéité, jouent un rôle central en programmation dynamique. Cette année, nous avons étudié un problème d'analyse particulier lié à l'existence de la valeur moyenne en horizon long.

English version

As detailed in §3.3, nonlinear maps that are nonexpansive in some metrics, or that satisfy monotonicity or homogeneity conditions, play a central role in dynamic programming. This year, we studied a special problem of analysis, related to the existence of the mean payoff per time unit as the horizon tends to infinity.

6.2.2. Valeur de jeux répétés avec paiements ergodiques/Value of repeated games with mean payoff

Participants: Stéphane Gaubert, Guillaume Vigeral.

Le problème de l'existence du gain moyen par unité de temps pour des jeux répétés à somme nulle conduit à étudier plus généralement la limite $f^k(v)/k$ lorsque l'horizon k tend vers l'infini, où f (l'opérateur de programmation dynamique) est une application contractante au sens large sur un espace de Banach, voir §3.3. La limite peut ne pas exister, mais un résultat de Kohlberg et Neyman montre qu'il existe toujours une forme linéaire ϕ de norme 1 telle que la limite de $\phi(f^k(x)/k)$ existe. Depuis l'arrivée en post-doc de Guillaume Vigeral en septembre, nous travaillons à des généralisations de ce résultat au cas d'applications contractantes sur des espaces métriques incluant le cône des matrices définies positives muni de sa métrique Riemannienne (ce qui est motivé par des problèmes de contrôle ou de jeux quadratiques). Dans ces généralisations, la fonction ϕ est remplacée par une horo-fonction (§6.1.1).

English version

The problem of the existence of the mean payoff per time unit for repeated games leads to studying more generally the existence of the limit of $f^k(v)/k$, where f is a nonexpansive map (the dynamic programming operator) acting on a Banach space, see §3.3 for more background. The limit may not exist, but a result of Kohlberg et Neyman shows that there is always a norm one linear form ϕ such that the limit of $\phi(f^k(x)/k)$ exists. Since Guillaume Vigeral arrived as a post-doc in the team, in September, we have been working on the extension of this type of results to metric spaces including the cone of definite positive matrices equipped with its Riemannian metric (this is motivated by the analysis of quadratic control and game problems). In these generalizations, the function ϕ is replaced by an horofunction (§6.1.1).

6.3. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.3.1. Convexité max-plus ou tropicale/Max-plus or tropical convexity

Participants: Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Ricardo Katz [Conicet, Argentine].

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d'états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, à la suite de Sturmfels et Develin [83]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d'analogues des résultats fondamentaux d'analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8].

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault [33], on développe un analogue tropical de l'algorithme de la double description. Celui-ci permet de manipuler effectivement des polyèdres, et en particulier de passer de la description interne (points extrêmes) à la description externe (contraintes inégalités) et vice-versa. L'algorithme tropical repose sur une caractérisation des points extrêmes en termes d'hypergraphes, ce qui permet d'éliminer de manière incrémentale en temps presque linéaire chaque générateur redondant (gagnant ainsi un ordre de grandeur en vitesse par rapport aux méthodes antérieures). Ce travail est motivé par des applications à l'analyse statique [54] et aux systèmes à événements discrets [38], dans lesquelles la manipulation de tels polyèdres est le goulot d'étranglement.

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et R. Katz [12], on étend le théorème de McMullen au cas tropical: ce dernier caractérise le nombre maximal de points extrêmes d'un polyèdre, en fonction du nombre d'inégalités qui le définissent et de sa dimension. Nous montrons que la même borne est valide dans le cas tropical (à une modification triviale près). Cependant, le calcul de la borne optimale est encore ouvert dans ce cas.

Dans un travail de S. Gaubert et R. Katz [36], on étudie la représentation d'un polyèdre tropical comme intersection de demi-espaces, ou si l'on préfère, comme conjonction d'inégalités affines. Nous donnons notamment un contre-exemple, montrant les inconvénients de la représentation en termes de demi-espaces minimaux proposée précédemment dans la littérature tropicale.

Un survol incluant la plupart de ces résultats a été présenté à la conférence [20].

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectively the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [83]. Max-plus polyhedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following [8].

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault [33], we develop a tropical analogue of the double description method. The latter allows one to handle effectively polyhedra, and in particular to pass from the internal representation (in terms of extreme points) to the external representation (by inequality constraints), and vice versa. The tropical algorithm relies on a characterization of extreme points in terms of hypergraphs, which allows us to eliminate in almost linear time every redundant generator (which yields a speedup by one order of magnitude by comparison with earlier methods). This is motivated by applications to static analysis [54] and discrete event systems [38], in which computing such polyhedra turns out to be the bottleneck.

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and R. Katz [12], we extend the McMullen upper bound theorem to the tropical case. This theorem characterises the maximal number of extreme points of a polyhedron, as a function of the number of inequalities defining it, and of the dimension. We show that the same bound is valid in the tropical case (up to a trivial modification). However, computing the optimal bound is an open problem in this case.

In a work of S. Gaubert and R. Katz [36], we study the representation of a tropical polyhedron as an intersection of half-spaces. We give in particular a counter example, showing some inconvenients of the representation in terms of minimal half-spaces proposed previously in the tropical literature.

A survey including most of these results has been presented at the conference [20].

6.3.2. De l'indépendance linéaire max-plus aux jeux avec paiements ergodiques/From max-plus linear independence to mean payoff games

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Alexander Guterman [Moscow State University].

Différentes notions d'indépendance linéaire et de rang de matrices sur le semi-anneau max-plus ou tropical, ou sur un semi-anneau idempotent plus général, ont été introduites dans la littérature. Contrairement au cas d'un corps ou d'un anneau, elles sont souvent non équivalentes. Dans [2], nous avons présenté un survol. Dans [24], nous avons comparé plus avant les notions d'indépendance linéaire et nous avons comparé les notions de rang définies au moyen de l'indépendance linéaire avec celles définies au moyen de déterminants. Par exemple, l'indépendance linéaire au sens de Gondran et Minoux [98] est reliée au rang défini au moyen du déterminant tropical signé, à partir de la symétrisation de l'algèbre max-plus [124],[6]. Par ailleurs, à la suite du développement récent de la géométrie tropicale, Izhakian a introduit le "semi-anneau tropical étendu", et une notion d'indépendance linéaire, qui est reliée au rang tropical [103], [102]. Pour comparer toutes ces notions, nous avons développé d'une part une technique générale pour prouver des identités combinatoires et polynomiales portant sur les matrices sur des semi-anneaux. D'autre part, nous avons introduit les notions de "semi-anneau symétrisé" et d'"extension du semi-anneau max-plus", cette dernière englobant à la fois la symétrisation du semi-anneau max-plus et le semi-anneau tropical étendu d'Izhakian. Nous avons ensuite établi des propriétés des espaces linéaires, des systèmes linéaires et des matrices sur ces semi-anneaux, au moyen des techniques déjà développées pour le semi-anneau max-plus symétrisé. Certaines preuves et développements ont été présentées dans [31], ce travail se poursuit [30].

En particulier dans [31], nous avons montré que le rang tropical peut se définir de manière équivalente au moyen de déterminants ou de l'indépendance linéaire dans le semi-anneau tropical étendu. La preuve utilise un résultat plus général montrant l'équivalence entre la solution de jeux ergodiques et à somme nulle et la solution de systèmes d'inégalités max-plus linéaires (ce qui revient à vérifier si un polyèdre affine max-plus est non vide). La preuve de ce dernier résultat fait appel à un résultat de Nussbaum sur les applications monotones homogènes.

English version

Several notions of linear independence and matrix rank over the max-plus or tropical semiring, or an idempotent semiring, have been introduced in the literature. They are often not equivalent. In [2], we gave a survey. In [24], we compare further linear independence notions and compare ranks defined in terms of linear independence with ranks defined in terms of determinants. For instance the linear independence introduced by Gondran and Minoux [98] is related to a rank notion defined in terms of signed tropical determinants, using the symmetrization of the max-plus algebra [124],[6]. Following the recent development of tropical geometry, Izhakian introduced the "extended tropical semiring" and an associated notion of linear independence, which is related to the tropical rank [103], [102]. To compare all these notions, we developed on one hand some general technique to prove combinatorial and polynomial identities for matrices over semirings. On the other hand, we introduced the notions of "symetrized semiring" and of "extension of the max-plus semiring", the latter one including both the symmetrization of the max-plus algebra and the extended tropical semiring of Izhakian. We then established properties of linear spaces, linear systems, and matrices over these semirings, using the techniques developed in the symmetrization of max-plus algebra. Some proofs and further developments have been presented in [31]. This work is being pursued [30].

In particular in [31], we have shown that the tropical rank can be defined equivalently in terms of determinants or in terms of linear independence in the extended tropical semiring of Izhakian. The proof uses a more general result showing the equivalence between the solution of mean payoff games and the solution of max-plus linear inequalities (which is reduced to check if an affine tropical polyhedron is nonempty). The proof of this latter result uses a result of Nussbaum on monotone homogeneous maps.

6.3.3. Meilleure approximation par des semi-modules max-plus pour la métrique projective de Hilbert/Best approximation in Hilbert's projective metric by max-plus semimodules

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Viorel Nitica [West Chester University (US) and IMAR (Bucharest, Romania)], Ivan Singer [IMAR (Bucharest, Romania)].

Nous étudions les projecteurs sur des espaces linéaires max-plus, les demi-espaces séparants, ainsi que l'ensemble des points minimisants pour la distance d'un point à un demi-espace max-plus. Ce travail est effectué dans le cadre d'un projet LEA Math mode.

English version

We are studying projectors on max-plus linear spaces, as well as separating half-spaces, and minimizers for the Hilbert's projective distance between a point and a half-space over the max-plus semiring. This work is carried out as part of a LEA Math-mode project.

6.4. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis

6.4.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.7, l'algèbre max-plus est la limite d'une déformation de l'algèbre classique, ou plutôt du semi-corps des réels positifs. Elle peut aussi fournir des estimations de ces déformations, puisque

$$\max(a, b) \leq \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) \leq \epsilon \log(2) + \max(a, b) . \quad (11)$$

L'utilisation de ces propriétés a déjà conduit dans le passé aux travaux sur les perturbations de valeurs propres [48], [47], [46], ou sur les grandes déviations [1], [50]. Dans les travaux qui suivent, nous exploitons ces propriétés dans des contextes reliés ou similaires à ceux de nos travaux précédents.

English version

As detailed in §3.7, max-plus algebra is the limit of a deformation of classical algebra, or more precisely of the semi-field of usual real positive numbers. It can also give estimations for these deformations using for instance (11). By using these properties, we already obtained some works on singular perturbations of matrix eigenvalues [48], [47], [46], or on large deviations [1], [50]. In the works described below, we are exploiting again these properties in contexts that are related or similar to those of our earlier works.

6.4.2. Calcul numérique robuste de valeurs propres de matrices/Robust numerical computation of matrix eigenvalues

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Meisam Sharify Najafabadi.

Le travail de thèse de M. Sharify vise à développer des méthodes numériques précises, adaptées notamment aux problèmes de valeurs propres, mettant à profit des mises à l'échelle de nature combinatoire déduites de résultats d'algèbre tropicale.

On s'appuie ici sur le travail antérieur de M. Akian, R. Bapat et S. Gaubert [46], [47], qui, pour utiliser le langage de la géométrie tropicale, porte sur le calcul d'amibes non-archimédiennes associées à des problèmes de valeurs propres. Autrement dit, on se donne une matrice dont les coefficients sont des séries de Puiseux, et l'on veut obtenir des renseignements de nature combinatoire sur les valuations des séries de Puiseux donnant les différentes valeurs propres. On a montré que ces valuations peuvent être obtenues en résolvant un problème d'affectation optimale paramétrique, sous certaines conditions de non dégénérescence. Si l'on change de corps et de valuation, en prenant cette fois-ci le corps des complexes, muni du log du module vu comme une valuation, on peut s'attendre à ce qu'un problème d'affectation analogue permette d'estimer a priori les ordres de grandeurs des différentes valeurs propres, les variables duales fournissant cette fois-ci des mises à l'échelle ayant de bonnes propriétés numériques.

Dans [26], on a donné des estimations théoriques montrant que des valeurs propres tropicales permettent de prédire l'ordre de grandeur des valeurs propres (classiques) d'une matrice polynomiale, et l'on a rapporté des expériences montrant qu'une mise à l'échelle reposant sur cette analyse améliore la précision (erreur rétrograde) des calculs numériques.

English version

In his PhD work, M. Sharify develops accurate numerical methods, adapted in particular to the eigenvalue problem, exploiting some scalings obtained by tropical methods.

This relies on an earlier work of M. Akian, R. Bapat and S. Gaubert [46], [47], in which, to use the vocabulary of tropical geometry, some nonarchimedean amoebas associated to an eigenproblem are computed. In other words, given a matrix the coefficients of which are Puiseux series, the point is to determine by direct combinatorial means the valuations of the Puiseux series which yield the different eigenvalues. It was shown that these valuations can be obtained by solving a parametric optimal assignment problem, under some nondegeneracy conditions. If one changes the field and the valuation, replacing the Puiseux series by complex numbers, equipped with the log of the modulus thought of as a valuation, we expect the same type of assignment problem to determine a priori the order of magnitude of the different eigenvalues, and the dual variables are expected to yield diagonal scaling with good numerical properties.

In [26], we gave theoretical estimates showing that tropical eigenvalues allow one to predict the order of magnitude of the (classical) eigenvalues of matrix polynomials, and we reported experiments showing that scalings exploiting this approach improve the backward error of numerical computations.

6.4.3. *Un prétraitement parallèle pour le problème d'affectation optimale/A parallel preprocessing for the optimal assignment problem, based on matrix scaling*

Participants: Stéphane Gaubert, Laura Grigori, Meisam Sharify Najafabadi.

Un problème important dans la résolution de grands systèmes linéaires creux consiste à placer les coefficients de plus grand module sur la diagonale à l'aide de permutations. Ceci revient à résoudre un problème d'affectation optimale. Cependant, les méthodes classiques sont intrinsèquement séquentielles, ce qui les rend inadaptées à des cas où la taille du système est très grande. Nous proposons dans [22] un prétraitement parallèle reposant sur des idées très différentes : le problème d'affectation optimale est vu comme une limite d'un problème de maximisation d'entropie. Ce dernier peut être résolu par un algorithme lent, mais parallèle, l'itération de Sinkhorn. Nous introduisons une itération de Sinkhorn déformée, qui fournit une suite de matrices qui converge vers la face du polytope des matrices bistochastiques engendrée par les permutations optimales. Nous utilisons cette itération pour effectuer un pré-traitement parallèle, qui permet d'éliminer une proportion importante des coefficients de la matrice ne contribuant à aucune permutation optimale, ce qui permet de ramener de grandes instances à des instances plus creuses qui deviennent accessibles sur des machines séquentielles.

English version

An important problem in the solution of very large sparse linear systems of equations is to permute large elements in magnitude on the diagonal of a matrix. This is equivalent to solving an optimal assignment problem. However, the classical methods, which are inherently sequential, are not adapted to situations in which the system is very large. We propose in [22] a parallel preprocessing based on a completely different idea: the optimal assignment problem is thought of as the limit of an entropy maximization problem. The latter can be solved by a slow but parallel algorithm, Sinkhorn iteration. We use a deformation of Sinkhorn iteration, which yields a sequence of matrices converging to the face of the polytope of bistochastic matrices generated by optimal permutations. This is used as a parallel preprocessing allowing one to eliminate the entries of the matrix which do not contribute to any optimal permutation, reducing large instances to sparser instances which become accessible on sequential machines.

6.4.4. *Mesures et applications maxitives*

Participants: Marianne Akian, Paul Poncet.

D'une part, les mesures et intégrales maxitives qui ont été introduites et ré-introduites sous divers noms dans la littérature (intégrale de Shilkret, sup-mesures, mesures de possibilité, mesures idempotentes de Maslov, etc.), sont définies de manière analogue aux mesures et intégrales usuelles, en remplaçant les lois additive et multiplicative par celles d'un semi-anneau idempotent, comme par exemple le semi-anneau max-plus.

D'autre part, les lois de probabilité (usuelles) max-stables de type α -Fréchet peuvent être définies de manière analogue aux lois stables, ou α -stables, en remplaçant la combinaison linéaire de variables aléatoires (multidimensionnelles) par la combinaison linéaire max-plus. Les autres types de lois max-stables peuvent être définies de manière analogue mais en remplaçant le semi-anneau max-plus par des semi-anneaux isomorphes.

Ces deux analogies permettent de voir les théorèmes de représentation “intégrale” des processus max-stables comme des versions “maxitives” des théorèmes de représentation des processus α -stables, ce qui a été mis en forme en particulier récemment par Stoev et Taqqu [137]. La stabilité de lois de probabilité peut aussi être généralisée au cas de variables aléatoires à valeurs dans un semi-anneau ou un semi-module général (idempotent ou non), question qui a été récemment abordée par Davydov, Molchanov et Zuyev [80]. Finalement les processus max-stables peuvent aussi être vus comme un cas particulier de processus max-infinitement divisibles, ou encore de mesures ou intégrales maxitives aléatoires.

Le but de la thèse de Paul Poncet (commencé à l’automne de 2007) est de développer la théorie des mesures et intégrales maxitives et d’appliquer les résultats obtenus à l’étude des processus max-stables et de leur représentations, et plus généralement des mesures maxitives aléatoires et des valeurs extrêmes.

Les résultats de [1] sont basés sur la notion de treillis continu, laquelle a été généralisée dans les années 80 par la théorie des ensembles ordonnés Z -continus. Dans [41], Paul Poncet a étudié les mesures et plus généralement les applications maxitives au moyen de la notion de Z -continuité. Dans [40], il en a déduit des caractérisations de l’existence d’une densité cardinale d’une mesure maxitive, ainsi qu’une décomposition. Ce résultat peut être vu comme un cas particulier d’un théorème de Krein-Milman max-plus, sur lequel Paul Poncet travaille actuellement. L’ensemble de ces résultats devraient permettre d’obtenir un théorème de Radon-Nikodým max-plus généralisant à la fois les résultats d’existence d’une densité développés par Akian [1] et Barron, Cardaliaguet, Jensen [59], et le théorème de séparation max-plus établi par Cohen, Gaubert et Quadrat [8].

English version

On the one hand, maxitive measures and integrals, which have been introduced and re-introduced under different names in the literature (Shilkret integral, sup-measures, possibility measures, Maslov idempotent measures, etc.), are defined analogously to usual measures and integrals, by replacing the additive and multiplicative laws by the laws of an idempotent semi-ring, such as the max-plus semiring.

On the other hand, the (usual) max-stable probability laws of α -Fréchet type may be defined analogously to stable or α -stable probability laws, by replacing the usual linear combination of (multidimensional) random variables, by their max-plus linear combination. Moreover, other types of max-stables laws may be defined similarly, by replacing the max-plus semiring by one of its isomorphic semirings.

These two analogies allow one to see “integral” representation theorems of max-stable processes as “maxitive” versions of representation theorems of α -stable processes, a remark which has been stated recently by Stoev and Taqqu [137]. The stability of probability laws may also be generalized to the case of random variables with values in a general semiring or semimodule, as is done in the work of Davydov, Molchanov and Zuyev [80]. Finally, max-stable processes may be viewed as particular cases of max-infinitely divisible processes, or random maxitive measures or integrals.

The aim of the PhD thesis of Paul Poncet (which began at the fall of 2007) is to develop the theory of maxitive measures and integrals, and to apply it to the study of max-stable processes and of their representations, and more generally to the study of random maxitive measures and extreme values.

The results of [1] are based on the notion of continuous lattice, which has been generalized in the eighties with the theory of Z -continuous posets. In [41], Paul Poncet has studied maxitive measures and maps with the help of Z -continuity. In [40], he is deducing characterisations of the existence of a cardinal density of a maxitive measure maxitive, together with a decomposition. This result can be seen as a particular case of a max-plus Krein-Milman theorem, on which Paul Poncet is working now. All these results should allow one to obtain a max-plus Radon-Nikodým theorem generalizing at the same time the existence of a density results of Akian [1] and Barron, Cardaliaguet, Jensen [59], and the max-plus separation theorem of Cohen, Gaubert and Quadrat [8].

6.5. Algorithmes/Algorithms

6.5.1. Méthodes multigrilles pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Multigrid methods for stochastic control and repeated zero sum games

Participants: Marianne Akian, Sylvie Detournay.

L'algorithme d'itération sur les politiques est bien connu pour résoudre efficacement les équations de la programmation dynamique associées à des problèmes de contrôle stochastique avec critère à horizon infini (Howard) ou ergodique (Denardo et Fox). Récemment, il a été généralisé au cas de problèmes de jeux à deux joueurs et somme nulle dégénérés (avec paiements ergodiques et de type "multi-chaîne"), au moyen de techniques d'algèbre max-plus et de théorie de Perron-Frobenius non linéaire [71]. Chaque itération de base de cet algorithme utilise la résolution d'un système d'équations linéaires dont l'opérateur est monotone, mais dont la taille peut être grande, soit parce qu'il provient d'une discrétisation fine d'une équation aux dérivées partielles, soit parce qu'il est associé à un problème discret de grande taille comme le graphe du Web.

Or, la méthode multigrilles est l'une des rares méthodes permettant de résoudre, au moins dans les bons cas, des systèmes linéaires en un temps de l'ordre de la taille du système. De plus, alors que la méthode multigrille classique ne s'applique qu'à des discrétisations d'équations aux dérivées partielles elliptiques, la méthode multigrille algébrique (voir par exemple [130]) peut s'appliquer à tout système linéaire présentant des propriétés de monotonie (principe du maximum ou système avec M-matrice).

L'association entre méthodes multigrilles et itérations sur les politiques a déjà été utilisée et étudiée dans le cas de problèmes de contrôle stochastique actualisé (voir par exemple [45], [52]), ainsi que dans le cas d'un algorithme d'itération sur les politiques simplifié pour le contrôle ergodique (voir par exemple [5]), mais pour lequel il n'existe pas de preuve de convergence. La méthode multigrilles algébrique a été récemment associée à des méthodes d'apprentissage (voir par exemple [144]). Nous l'avons aussi testée dans le cas de l'itération sur les politiques pour des problèmes de jeux à somme nulle actualisés au cours du stage de Shantanu Gangal en 2007.

La thèse de Sylvie Detournay, commencée à l'automne 2008, a pour but de développer et d'étudier un algorithme associant une méthode d'itération sur les politiques du type de celle introduite dans [71] et une méthode multigrilles algébrique, afin de résoudre des problèmes de jeux à somme nulle dégénérés, éventuellement posés directement sous forme discrète. Sylvie Detournay a travaillé pour le moment sur le cas non dégénéré (actualisé) en codant d'abord seulement l'itération sur les politiques (en C) et appelant des codes libres de méthodes multigrilles algébriques. Ces codes n'étant pas assez souples pour être modifiés, elle a ensuite codé elle-même les méthodes multigrilles algébriques. Des tests sur des discrétisations d'équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman ou d'Isaacs, ou d'inéquations variationnelles sont en cours et donnent de bons résultats. Dans le futur, il faudra traiter le cas dégénéré en intégrant en particulier les méthodes multigrilles algébriques développées dans la littérature pour le calcul des mesures invariantes de chaînes de Markov.

English version

Policy iteration is a powerful and well known algorithm to solve the dynamic programming equation associated to one player problems. It has recently been extended to degenerate two players problems (with ergodic payoff and in "multichain" cases) using ideas from max-plus algebra and nonlinear potential theory [71]. One basic iteration of the algorithm consists in solving a linear system which operator is monotone, but which size may be large since it comes from the discretization of a partial differential equation or since it is associated to a large size discrete problem such as the Web graph.

For the solution of large size linear systems, the state of art consists of multigrid methods which are often able to solve systems in linear time. Whereas multigrid methods can only be applied to systems that come from discretizations of elliptic partial differential equations, algebraic multigrid methods (see for instance [130]) can be applied to any linear system with monotonicity properties (discrete maximum principle or system with a M-matrix).

The association of multigrid methods with policy iteration has been used and studied in the case of discounted stochastic control problems (see for instance [45], [52]), or in the case of a simplified policy iteration algorithm for ergodic control (see for instance [5]), but for which no proof of convergence is known. Some recent work combines the algebraic multigrid method with learning methods [144]. We have also tested it in the case of policy iterations for discounted zero-sum two-player games, during the internship of Shantanu Gangal in 2007.

The aim of the PhD thesis of Sylvie Detournay, which began at the fall of 2008, is to develop and study an algorithm for degenerate two player games (that may come from a discrete time and finite state space model) combining a policy iteration such as that introduced in [71] and an algebraic multigrid method (AMG). For the moment, Sylvie Detournay has worked on the nondegenerate (discounted) case, by coding first the policy iterations (in C) and using free AMG softwares. Since these softwares cannot be modified easily, she has then implemented the AMG algorithm (in C). Some tests on discretisations of Hamilton-Jacobi-Bellman or Isaacs partial differential equations or variational inequalities gave good results. In future work, she should study the degenerate case by using in particular AMG methods developed in the literature for computing invariant measures of Markov chains.

6.5.2. *Algorithmique des polyèdres tropicaux/Algorithmics of tropical polyhedra*

Participants: Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA].

X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault, ont développé dans [54],[33] des algorithmes permettant de manipuler des polyèdres tropicaux (voir §6.3.1 pour les motivations et pour les fondements théoriques). X. Allamigeon, a implémenté ces algorithmes dans une librairie Ocaml, TPLib (“Tropical polyhedral library”). Celle-ci est distribuée sous license LPGL <http://penjili.org/tplib.html>.

English version

X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault, have developed in [54],[33] algorithms allowing one to handle tropical polyhedra (see §6.3.1 for motivations and theoretical background). X. Allamigeon has developed an Ocaml library, TPLib, the “Tropical polyhedral library”, which implements these algorithms. It is distributed under the LPGL license, see <http://penjili.org/tplib.html>.

6.6. Applications

6.6.1. Introduction

Nous présentons maintenant plusieurs travaux de nature appliquée, touchant à des domaines variés, dans lesquels nous exploitons certaines des techniques mathématiques présentées précédemment, et particulièrement celles qui relèvent de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la convexité tropicale. Ces applications utilisent aussi des techniques d’algèbre linéaire ou d’optimisation convexe.

English version

In this section, we describe several applied works in which we use some of the theoretical tools developed by the team, including non-linear Perron-Frobenius theory and tropical convexity. Some of these applications also make an intensive use of linear algebraic and convex programming methods.

6.6.2. *Propriétés des valeurs propres de Perron et de Floquet, et application en chronothérapie/Properties of Perron and Floquet eigenvalue, with an application to chronotherapeutics*

Participants: Jean Clairambault [Projet BANG, INRIA], Stéphane Gaubert, Thomas Lepoutre [Projet BANG, INRIA], Benoît Perthame [Projet BANG, INRIA].

On s'intéresse à des modèles de systèmes dynamiques monotones structurés en âge représentant la croissance de populations de cellules (saines ou tumorales), à la suite de travaux de Clairambault et Perthame. Il s'agit de comprendre l'influence du contrôle circadien sur la croissance des cellules. Dans le cas stationnaire, le taux de croissance est représenté par une valeur propre de Perron. Dans le cas périodique, il s'agit d'une valeur propre de Floquet. Le problème revient à évaluer la manière dont la valeur propre de Floquet dépend de certains termes périodiques et se compare à la valeur propre de Perron de divers systèmes moyennés. Le travail effectué dans [14] fournit des résultats analytiques précis sur un modèle à une phase. Le travail [34] démontre une propriété générale de log-convexité du multiplicateur de Floquet et l'interprète en termes de chronothérapeutique.

English version

We study monotone dynamical systems representing the growth of cells (healthy or tumoral), following a work of Clairambault and Perthame. The goal is to understand how the circadian control influences the growth of cells. In the case of stationary monotone systems, this growth is measured by the Perron root. In the time periodic case, this Perron root is replaced by a Floquet multiplier. The study of [14] yields analytic results concerning one phase models. The work [34] establishes a general log-convexity property of the Floquet multiplier, and interprets it in terms of chronotherapeutics.

6.6.3. Identification du trafic dans les réseaux IP/Traffic identification in IP networks

Participants: Mustapha Bouhtou [France-Télécom R & D], Stéphane Gaubert, Guillaume Sagnol.

Le travail de thèse de Guillaume Sagnol porte sur l'identification du trafic dans des réseaux IP. Le point de départ est le problème classique consistant à déterminer le trafic entre chaque origine et chaque destination à partir de diverses mesures et en particulier de mesures sur les liens (mesures SNMP). Ce problème a été renouvelé ces dernières années, en raison de la complexité croissante des réseaux, mais aussi de la possibilité de déployer dans le réseau des outils comme le logiciel Netflow produit par Cisco, permettant d'accéder finement à la mesure du trafic.

Dans [23], on aborde le problème de l'optimisation de l'emploi de Netflow à l'aide d'une démarche de type "plans d'expérience". Il s'agit de minimiser les ressources dédiées à la mesure du trafic, tout en garantissant une certaine qualité de mesure. La qualité de la mesure peut être quantifiée par une matrice symétrique positive, qui représente la covariance de l'erreur d'estimation, ou plutôt, par des fonctionnelles scalaires de celle-ci, croissantes pour l'ordre des matrices symétriques (ordre de Loewner). On parvient ainsi après quelques réécritures, à une famille de problèmes dont les plus typiques sont de la forme

$$\max (\text{trace} (M(w))^p)^{1/p}, \quad M(w) = \sum_k w_k A_k^T A_k, \quad w_k \in \{0, 1\}, \quad \sum_k w_k c_k \leq B . \quad (12)$$

Ici, la variable binaire w_k modélise la possibilité de faire une observation de type k , celle-ci fournissant une fonction linéaire $A_k x$ (certaines informations agrégées) du vecteur x (le trafic) qu'il s'agit d'inférer. La contrainte $\sum_k w_k c_k \leq B$ limite le nombre de mesures ou un coût d'instrumentation. Les valeurs utiles de p sont dans l'intervalle fermé $[-\infty, 1]$. En relaxant la contrainte d'intégrité, on peut résoudre de tels problèmes par des algorithmes de type points intérieurs. Cependant, ces algorithmes (typiquement des SDP) deviennent trop coûteux pour des réseaux télécom réels (pour le réseau backbone Opentransit de France-Télécom, de l'ordre de 10^4 paires origine-destination). On a proposé dans [23] un nouvel algorithme, basé sur un résultat théorique démontré par Sagnol dans [42], [43], montrant qu'une variante simplifiée du problème, dans laquelle on cherche seulement à inférer une fonction linéaire scalaire du trafic, se ramène à un problème de programmation conique du second ordre, qui contrairement aux méthodes SDP passe à l'échelle. Le travail [43] contient aussi de nouveaux résultats théoriques sur les plans d'expériences (généralisations du théorème de Dette). On a déduit de ces résultats un algorithme stochastique, basé sur la résolution d'une suite de problèmes scalaires. Cet algorithme permet de traiter des instances précédemment inaccessibles, tout en fournissant une estimation de trafic de bonne qualité.

English version

The PhD work of Guillaume Sagnol deals with the identification of the traffic in IP networks. Its starting point is the classical problem which consists in determining the traffic between every origin and destination, from the available measurements, like the aggregated flows on the links (SNMP measures). This problem has been renewed the last years, due to the increasing complexity of networks, but also to the possibility of deploying refined measurement tools like the Netflow software produced by the company Cisco.

In [23], we developed an experimental design model allowing one to optimize the use of Netflow. The goal is to minimize the resources devoted to measurement under constraints requiring a given quality of measure. The latter can be represented by a positive semidefinite matrix (which gives the covariance of the estimation error) or rather, by scalar functionals of this matrix, which are order preserving for the standard ordering of symmetric matrices (Loewner order). After some transformations, we arrive at a family of problems which are typically of the form (12). Here, the binary decision variable w_k models the possibility to make an observation of a certain type, which yields a linear function $A_k x$ representing an aggregated information of the traffic vector x to be estimated. The constraint $\sum_k w_k c_k \leq B$ limits the number of measures, or their cost. The useful values of p are in the closed interval $[-\infty, 1]$. Then, by relaxing the integrity constraint, we solve such problems by interior point methods. However, these algorithms (typically SDP) become too slow for real telecom networks (around 10^4 origin-destination pairs for the Opentransit backbone network of France-Télécom). We proposed in [23] a new algorithm, based on a theoretical result of Sagnol [42], [43], showing that a simplified problem, in which one only infers a scalar linear function of the traffic, reduces to a problem of second order cone programming, which scales much better than SDP methods. The work [43] also contains new theoretical results on experiment design (generalisations of Dette's theorem). We derived from these results a stochastic algorithm, which consists in solving a sequence of scalar problems. This algorithm allows one to handle previously inaccessible instances, while keeping a good quality of estimation of the traffic.

6.6.4. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration

Participants: Assale Adjé, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA].

La thèse d'A. Adjé, encadrée conjointement par S. Gaubert et E. Goubault, et commencée en octobre 2007, traite de l'application de méthodes de théorie des jeux et d'optimisation (analyse convexe abstraite, programmation convexe et non convexe) aux problèmes de point fixe intervenant en analyse statique de programme. On a introduit dans [29] un nouveau domaine en analyse statique, qui étend au cas non-linéaire le domaine des "gabarits" introduit par Manna, Sankaranarayanan, and Sipma [132]. Ce domaine permet de représenter des ensembles accessibles non-convexes (définis par un nombre fini d'inégalités prises dans un dictionnaire). Ceci permet d'intégrer en particulier des informations liées à l'existence de fonctions de Lyapunov, qui sont souvent connues dans les applications issues de l'ingénierie. Nous avons montré dans [29] que des invariants (expérimentalement précis) pouvaient être obtenus en couplant l'itération sur les politiques avec des relaxations de Shor (relaxations SDP de problèmes quadratiques non-convexes). Ceci permet notamment de traiter des cas dégénérés (par exemple, des filtres linéaires seuillés, ou un petit schéma symplectique dans lequel la difficulté provient de la présence de valeurs propres de module unité pour le schéma discret, conduisant à des accumulations d'erreurs numériques pour des méthodes alternatives d'analyse statique).

English version

The goal of the PhD work of A. Adjé, co-supervised by S. Gaubert and E. Goubault, which began in October 2007, is to apply methods from game theory and optimization (generalized duality, convex and non convex programming) to the fixed point problems arising in static analysis of programs by abstract interpretation. We introduced in [29] a new domain in static analysis, which extends to nonlinear cases the "templates" introduced by Manna, Sankaranarayanan, and Sipma [132]. This domain allows one to represent accessible sets that are non convex. These are defined by finitely many inequalities taken from a dictionary. This allows one to use in particular the information provided by Lyapunov functions, which are often known in applications arising from engineering. We showed in [29] that experimentally accurate invariants can be obtained by coupling

policy iteration with Shor relaxation (SDP relaxation of convex programming problems). This allowed us in particular to treat degenerate cases (linear filter with a threshold, small symplectic scheme in which the difficulty stems from the presence of eigenvalues of modulus one of the discrete scheme, leading to numerical error accumulations for alternative static analysis methods).

6.6.5. *Optimisation du référencement sur la toile/Optimization of web referencig*

Participants: Marianne Akian, Mustapha Bouhtou [France-Télécom R & D], Olivier Fercoq, Stéphane Gaubert.

La thèse d'O. Fercoq, co-encadrée par M. Akian, M. Bouhtou, et S. Gaubert, financée par un CRE de France-Télécom R&D, et démarrée en octobre 2009, a pour but d'appliquer des méthodes d'optimisation et de théorie des jeux à l'optimisation de services en lignes. On a commencé en étudiant le problème de l'optimisation du référencement, que l'on formalise en se donnant par exemple un ensemble d'hyperliens et de ressources obligatoires, dont la nature et la position sur le site web sont déterminées à l'avance par le concepteur. Cet ensemble forme en quelque sorte le squelette du site web. On se donne aussi un ensemble d'hyperliens ou de ressources facultatives, pour lesquels le concepteur du site a certains degrés de liberté (le lien ou le contenu peut être mis sur une page plutôt qu'une autre, voire être omis). Dans un travail en cours, on aborde le problème de l'optimisation du "Pagerank" dans ce cadre, en appliquant des techniques de décision Markovienne sous-contraintes.

English version

The goal of the PhD work of O. Fercoq, cosupervised by M. Akian, M. Bouhtou, and S. Gaubert, and supported by a research contract (CRE) of France-Télécom R&D, which started in October 2009, is to apply optimization and game theory methods to the optimization of online services. We started by investigating the problem of the optimization of referencig, which we modelled by considering a family of compulsory hyperlinks and resources (fixed in advance by the website designer, these constitute the "skeleton" of the website) and also a family of facultative hyperlink or resources (some links may be omitted or some other links may be added). We are approaching the problem of the pagerank optimization in this framework, by applying constrained Markov decision processes techniques.

6.6.6. *Modélisation d'un service d'urgences hospitalières/Modelisation of a hospital emergency department*

Participants: Pascal Benchimol [École Polytechnique], Stéphane Gaubert, Philippe Robert [Projet RAP, INRIA].

Ce travail, réalisé par P. Benchimol (stagiaire d'option de l'X), sous la codirection de S. Gaubert et Ph. Robert, à l'initiative du Prof. J.-L. Pouriat et du Dr. J.-F. Vigneau du service des urgences de l'Hôtel-Dieu, a consisté à modéliser le service des urgences, afin d'identifier les ressources critiques (celles qui influent le plus directement sur les paramètres de qualité de service, et notamment le temps d'attente des patients). Après une période d'immersion dans le service, P. Benchimol a développé un modèle à base de réseau de Petri, et implémenté un simulateur, qui a permis de retrouver in silico les "transitions de phase" entre les différents régimes de congestion prévues par des modèles fluides simplifiés. Ce simulateur a permis de reproduire le trafic observé sur les données réelles avec une précision raisonnable, de confirmer la validité de règles de dimensionnement connues des médecins, et d'aider à évaluer des changements possibles. P. Benchimol a reçu pour ce travail le Prix du Centre de Recherche de l'École Polytechnique.

English version

This work was performed by P. Benchimol, as part of his research internship of École Polytechnique, under the cosupervision of S. Gaubert and Ph. Robert, following an initiative of Prof. J.-L. Pouriat and Dr. J.-F. Vigneau of the emergency department of Hôtel-Dieu in Paris. The goal was to model the emergency department, in order to identify the bottleneck resources (the ones which have the main influence on the waiting time of patients, for instance). After having observed the department, P. Benchimol developed a timed Petri net based model, and implemented a simulator, which permitted him to reproduce in silico the "phase transitions"

between the different saturations regimes, the existence of which is predicted by simplified theoretical fluid models. This simulator allowed him to reproduce the real data with an acceptable accuracy, to confirm the validity of certain dimensionning rules known by the physicians, and to evaluate the effect of some possible changes. P. Benchimol received for this work the Prize of the Research Center of École Polytechnique.

6.6.7. *Optimisation du revenu du fret aérien/Revenue Management of Air Cargo*

Participants: Olivier Ratier [École Polytechnique], Stéphane Gaubert, Pierre Carpentier [ENSTA].

Le travail de stage de M2 d'Olivier Ratier a été codirigé par P. Carpentier (ENSTA), S. Gaubert, et J. Peyrieux (Air France). Celui-ci portait sur le développement de modèles d'optimisation du revenu, prenant en compte les spécificités du marché du fret aérien (demande en poids et en volume, et non en nombre de sièges, réalisation tardive et aléatoire de la demande, possibilité d'affectation à divers vols). Un modèle de programmation dynamique agrégé a été proposé et implémenté dans le cas mono-segment mais multi-vols.

English version

The Master internship of Olivier Ratier was cosupervised by P. Carpentier (ENSTA), S. Gaubert, and J. Peyrieux (Air France). The goal was to develop models of revenue management taking into account some characteristics specific to the cargo context (demand both in weight and volume, rather than in number of seats; late and random realization of the demand, possibility of assigning a given demand to several flights). An aggregated dynamic programming model was proposed and implemented in the case of a single segment but multiple flights.

7. Contracts and Grants with Industry

7.1. Optimisation de services en ligne

CRE avec France Télécom R & D (responsable du suivi France-Télécom: Mustapha Bouhtou), de février 2009 à février 2012, portant sur l'application de l'optimisation à la tarification et à l'amélioration de services en ligne. Ce travail applique des techniques d'optimisation (processus de décision markoviens) et d'analyse non-linéaire (généralisations d'algorithmes de classement de type "pagerank") dans un but notamment d'amélioration du référencement, et étudie les problèmes de tarification reliés. Ce contrat finance la thèse d'Olivier Fercoq, qui a démarré en octobre 2009.

8. Other Grants and Activities

8.1. Actions nationales

- Projet DIGITEO PASO (Preuve, Analyse Statique, Optimisation), depuis sept. 2008. Ce projet, dont le but est notamment d'appliquer des techniques d'optimisation à des problèmes de preuve de propriétés numériques de programmes, est coordonné par S. Putot (équipe MeASI, LIX/CEA), il fédère en outre des chercheurs de l'équipe-projet Typical (B. Werner), du LSS de Supélec (M. Kieffer, E. Walter), et de Maxplus (S. Gaubert). Ce projet finance le post-doc de G. Vigerat dans l'équipe.
- Projet ANR Arpège ASOPT (Analyse statique et Optimisation), responsable B. Jeannet. Partenaires: équipe-projet Popart (INRIA Grenoble), équipe MeASI, EADS, et Maxplus. Ce projet a été labellisé par le pôle de compétitivité System@tic.
- Participation au projet ANR CPP (Confidence, Proof and Probabilities), responsable J. Goubault Larecq. Partenaires: LSV, CEA List, INRIA Saclay (Comète [responsable], Parsifal, Maxplus), Supelec L2S, Supelec SSE.

8.2. Actions internationales

- Coopération INRIA-CNRS-Laboratoire Poncelet, soutenue par le RFBR (3 ans, démarrée en juillet 2006) : coopération entre les membres du projet MAXPLUS, le groupe de Maslov à Moscou, comprenant entre autres G. Litvinov et A. Sobolevskii, et un groupe à Strasbourg (CNRS) comprenant I. Itenberg et V. Kharlamov, autour de questions d'algèbre max-plus.
- Projet commun de recherche dans le cadre du Laboratoire Européen Associé CNRS Franco-Roumain (LEA) Math Mode (2 ans, commencé en janvier 2009). Coopération entre Marianne Akian et Stéphane Gaubert du projet MAXPLUS et Viorel Nitica et Ivan Singer de l'IMAR, sur le thème "géométries convexes tropicales".

8.3. Accueils de chercheurs étrangers

- Sergey Sergeev (Univ. Birmingham), 1 semaine en février.
- Ricardo Katz (Conicet, Rosario), 6 mois de mars à août.
- Vladimir Gurvich (Rutgers Center for Operations Research), 1 mois en mai-juin.
- Francisco J. Valverde Albacete (Univ. Carlos 3 de Madrid), 1 semaine en juin.
- Carmen Pelaez Moreno (Univ. Carlos 3 de Madrid), 1 semaine en juin.
- Ivan Singer (Institute of Mathematics of the Romanian Academy of Sciences), 1 semaine en novembre financée par le LEA Mathmode.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique

- M. Akian :
 - Membre élue de la Commission d'évaluation de l'INRIA (suppléante depuis septembre 2008, pour 3 ans).
- S. Gaubert :
 - Vice-président du comité des projets du Centre de Recherche INRIA de Saclay – Île-de-France depuis Janvier 2008.
 - Membre du CSD5 "Mathématiques et interactions" de l'ANR.
 - Membre du Conseil de la formation de l'ENSTA.
 - Membre du comité éditorial de J. Discrete Event Dynamic Systems.
 - Membre du comité éditorial de la collection Mathématiques et Applications, SMAI et Springer.
 - Co-organisation avec F. Meunier du mini-symposium "recherche opérationnelle" à la conférence smai 2009, La Colle sur Loup, 25 mai.
 - Membre du comité de programme de la conférence POSTA'09 (Positive Systems: Theory and Applications), Valencia, Spain.
- J.P. Quadrat :
 - Administre le site d'intérêt général <http://www.maxplus.org>, dédié à l'algèbre max-plus.

9.2. Enseignement universitaire

- S. Gaubert

- Cours (Systèmes à Événements Discrets) de la spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images (ATSI) du M2 IST de l’Université d’Orsay. Ce cours est commun à l’Option Automatique de l’ENSMP.
- Cours (Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux) du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l’Université de Paris 6.
- Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d’approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l’École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [28].
- Participation au cours d’Optimisation Combinatoire en troisième année à l’ENSTA.
- G. Sagnol
 - Petites Classes du cours de Mathématiques 2 (intégration) en première année à l’École des Mines de Paris.

9.3. Encadrement de thèse

- Assale Adjé, inscrit à l’École Polytechnique depuis octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse) et Eric Goubault (CEA).
- Meisam Sharify Najafabadi, inscrit à l’École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de S. Gaubert.
- Guillaume Sagnol, inscrit à l’École des Mines de Paris depuis octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert et M. Bouhtou (France Télécom R&D).
- Paul Poncet, inscrit à l’École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de M. Akian.
- Thomas Lepoutre (projet BANG), inscrit à Paris VI depuis octobre 2007. Encadrement assuré par Benoît Perthame (ENS et INRIA, projet BANG, directeur de thèse), Jean Clairambault (projet BANG) et S. Gaubert.
- Sylvie Detournay, inscrite à l’École Polytechnique à partir de septembre 2008, sous la direction de M. Akian.
- Olivier Fercoq, inscrit à l’École Polytechnique à partir d’octobre 2009. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse), M. Akian et M. Bouhtou (France Télécom R&D).
- Éric Biagoli (INRIA, Projet Typical). Encadrement assuré par Benjamin Werner (projet Typical, directeur de thèse) et S. Gaubert.

9.4. Membre de jury

- S. Gaubert
 - Rapporteur de la thèse de Guillaume Vigerat, sur les “Propriétés asymptotiques des jeux répétés à somme nulle”, Université Paris 6,
 - Rapporteur de la thèse d’Olivier Boutin, “Modélisation de conflits et le calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes”, IRCCyN, Nantes,
 - Rapporteur de la thèse d’Hélène Le Cadre, “Contributions à la modélisation de la demande et tarification dans un contexte de compétition dans le secteur des télécommunications”, Université de Rennes 1, 26 novembre 200
 - Membre du jury de la thèse de Thomas Lepoutre, “Analyse et modélisation de phénomènes de croissance et mouvement issus de la biologie”, Université Paris 6, 25 Novembre 2009.

- Membre du jury de la thèse de Xavier Allamigeon, “Static analysis of memory manipulations by abstract interpretation: algorithmics of tropical polyhedra, and application to abstract interpretation”, École Polytechnique, November 30, 2009.
- Membre du jury national du concours DR2 de l’INRIA, Mai 2009.
- Membre du jury du concours CR de l’INRIA Saclay – Île-de-France, Mai 2009
- Membre du jury du concours CR de l’INRIA Nancy – Grand-Est, Mai 2009

9.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- A. Adjé
 - Réunion de l’ANR BLANC ASOPT, EADS, Suresnes, 24 Avril. Titre de l’exposé : Zones quadratiques et relaxation de Shor. ,
- M. Akian
 - Séminaire Parisien d’optimisation, IHP, 26 janvier 2009. Titre de l’exposé : “Inversibilité de conjugaisons de Moreau et calcul de taux de grandes déviations en contrôle optimal”.
 - Montreal workshop on idempotent and tropical mathematic, 29 juin-3 juillet 2009. Titre de l’exposé : “Tropical linear independence, signed linear equations, and mean payoff games”.
 - Invitation au MSRI (Berkeley, USA) comme “Research member” pour le programme “Tropical Geometry”, du 17 août au 11 septembre 2009.
 - Connections for Women: Tropical Geometry, MSRI, Berkeley, 22-23 Août 2009. Titre de l’exposé : “Tropical linear independence and symmetrization of the tropical semiring”. Voir la [video](#).
 - AFOSR Workshop on Computational Control, Monterey, 9-10 novembre 2009. Titre de l’exposé : “The max-plus finite element method for solving first order Hamilton-Jacobi equations”.
 - Groupe de travail de l’équipe COMMANDS, 19 novembre 2009. Titre de l’exposé : “Techniques d’algèbre max-plus pour la résolution numérique d’équations d’Hamilton-Jacobi”.
- S. Gaubert
 - Séminaire de théorie des jeux, École Polytechnique, Palaiseau, 16 Janvier. Titre de l’exposé : “Aspect tropicaux des jeux répétés”.
 - Réunion de l’ANR BLANC ASOPT, VERIMAG, Grenoble, 27 janvier. Titre de l’exposé : “Questions de théorie des jeux en analyse statique de programme”.
 - Séminaire de l’IRISA, Rennes, 14 février. Titre de l’exposé : “Questions de théorie des jeux et de convexité abstraite en analyse statique de programme”.
 - Journées organisées dans le cadre du GDR 2932 "Théorie des Jeux : Modélisation Mathématique et Application" et du GDR Informatique Mathématique, Chevaleret, 19 février. Titre de l’exposé : “Questions de théorie des jeux en analyse statique de programme”.
 - Groupe de travail de Géométrie Tropicale, Université Paris 7, 21 février. Titre de l’exposé : “Équations linéaires tropicales et jeux avec paiements ergodiques”.
 - Séminaire du LABRI, Bordeaux, 30 avril. Titre de l’exposé : “Algorithmes de théorie des jeux en analyse statique de programme”.
 - Réunion du GdR Théorie des Jeux, CIRM, Luminy, 8 mai. Titre de l’exposé : “From tropical algebra to repeated games, and vice versa”.

- Orange Labs Operations Reseach Seminar, Sophia Antipolis, 27 mai. Titre de l'exposé : "Nonlinear Perron-Frobenius theory: combinatorial aspects and applications".
- Montreal workshop on idempotent and tropical mathematic, 29 juin-3 juillet 2009. Titre de l'exposé : "Tropicalizing discrete convex geometry: some unexpected results".
- SIAM Conference on Control and its Applications, Denver, Colorado, 6-8 Juillet, 2009 (Plenary). Titre de l'exposé : "Max-plus algebra: a guided tour".
- Invitation au MSRI (Berkeley, USA) comme "Research Member" pour le programme "Tropical Geometry", du 17 août au 11 septembre 2009.
- Seminar on Applications of Tropical Algebra, Math. Dep., UC Berkeley, 20 août. Titre de l'exposé : "Max-plus and tropical convexity unified".
- INRIA - Bell Labs Workshop, October 22-23, Rocquencourt. Titre de l'exposé: "Tropical algebra, non-linear perron-frobenius theory, and applications".
- SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing (CSC09), 29-31 Octobre 2009, Monterey. Titre de l'exposé : "A parallel optimal assignment algorithm based on diagonal scaling".
- Conférence "Modélisation de Systèmes réactifs (MSR'09)", IRCCyN, Nantes, November (Plénière). Titre de l'exposé : "echniques and applications of tropical algebra: a survey".
- P. Poncet
 - Montreal workshop on idempotent and tropical mathematic, 29 juin-3 juillet 2009. Titre de l'exposé : "A decomposition theorem for maxitive measures".
- J.-P. Quadrat
 - Montreal workshop on idempotent and tropical mathematic, 29 juin-3 juillet 2009. Titre de l'exposé : "About analytical derivation of trafic phase diagram".
- G. Sagnol
 - International Network Optimization Conference, Pisa, 26-29Avril. Titre de l'exposé : "Optimizing the measurement of the traffic on large networks: An experimental design approach".
- M. Sharify
 - Conférence SMAI 2009, La Colle sur Loup, 25-29 mai 2009. Titre de l'exposé : "Tropical scaling of polynomial eigenvalue problems".
 - Montreal workshop on idempotent and tropical mathematic, 29 juin-3 juillet 2009. Titre de l'exposé : "Tropical scaling of polynomial eigenvalue problems".
 - SIAM Conferences on Applied Linear Algebra, Monterey, 26-29 octobre 2009. Titre de l'exposé : "Tropical scaling of polynomial eigenvalue problems".
- C. Walsh
 - SIAM Conference on Control and its Applications, Denver, Colorado, 6-8 Juillet, 2009. Titre de l'exposé : "The Boundary at Infinity of Optimal Control Problems".
 - Séminaire du département de Mathématiques, Université Paris-Sud 11, 3 avril 2009. Titre de l'exposé : "The horofunction boundary of some discrete groups".

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

- [1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", vol. 351, n^o 11, 1999, p. 4515–4543.

- [2] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. HOGGEN (editor), vol. 39, Chapman & Hall/CRC, 2006, Chapter 25.
- [3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", vol. 52, n^o 2, 2003, p. 637-679, <http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/>.
- [4] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", vol. 140, n^o 1, 2006, p. 157–176, <http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084>.
- [5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", vol. 11, n^o 2, 2001, p. 153–188.
- [6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992.
- [7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", vol. 14, n^o 4, 1999.
- [8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 379, 2004, p. 395–422, <http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294>.
- [9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", vol. 23, 1999, p. 207–219.
- [10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", vol. 356, n^o 12, 2004, p. 4931-4950, <http://www.ams.org/tran/2004-356-12/S0002-9947-04-03470-1/home.html>, Also arXiv:math.FA/0105091.

Year Publications

Articles in International Peer-Reviewed Journal

- [11] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Doc. Math.", vol. 14, 2009, p. 195–240, <http://arxiv.org/abs/math/0412408>.
- [12] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, R. KATZ. *The number of extreme points of tropical polyhedra*, in "J. Comb. Series. A.", 2009, <http://arxiv.org/abs/0906.3492>, Accepted for publication RU .
- [13] P. BUTKOVIČ, R. CUNINGHAME-GREEN, S. GAUBERT. *Reducible spectral theory with applications to the robustness of matrices in max algebra*, in "SIAM J. Matrix Anal. Appl.", vol. 31, n^o 3, 2009, p. 1412–1431 GB .
- [14] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE. *Comparison of Perron and Floquet eigenvalues in age structured cell division cycle models*, in "Math. Model. Nat. Phenom.", vol. 4, n^o 3, 2009, p. 183–209, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00344039/en/>, See also arXiv:0812.0803.
- [15] S. GAUBERT, R. KATZ. *The tropical analogue of polar cones*, in "Linear Algebra Appl.", vol. 431, n^o 5-7, 2009, p. 608–625, <http://arxiv.org/abs/0805.3688AR>.

- [16] S. GAUBERT, F. MEUNIER. *Carathéodory, Helly and the others in the max-plus world*, in "Discrete Comput. Geom.", 2009, <http://arxiv.org/abs/0804.1361>, Published online, doi:10.1007/s00454-009-9207-x.
- [17] C. WALSH. *Busemann points of Artin groups of dihedral type*, in "Int. J. Alg. Comp.", vol. 19, n^o 7, 2009, p. 1–20, <http://www.arxiv.org/abs/0705.1485>.
- [18] C. WALSH. *The action of a nilpotent group on its horofunction boundary has finite orbits*, in "Groups, Geometry, and Dynamics", 2009, <http://arxiv.org/abs/0806.0966>, To appear.

Invited Conferences

- [19] S. GAUBERT. *Max-plus algebra: a guided tour*, in "SIAM Conference on Control and its Applications (Plenary)", 6 - 8 July 2009, (Plenary talk).
- [20] S. GAUBERT. *Max-plus algebraic tools for discrete event systems, static analysis, and zero sum games*, in "Formal Modeling and Analysis of Timed Systems (FORMATS 2009)", Lecture Notes in Computer Science, vol. 5813, Springer, 2009, p. 7-11, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04368-0>, (Plenary talk).
- [21] S. GAUBERT. *Techniques and applications of tropical algebra: a survey*, in "Modélisation de Systèmes réactifs (MSR'09), IRCCyN, Nantes, November 14-16", 2009, (Plenary talk).

Workshops without Proceedings

- [22] S. GAUBERT, L. GRIGORI, M. SHARIFY. *A parallel optimal assignment algorithm based on diagonal scaling*, in "SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing (CSC09), 29-31 October 2009, Monterey", 2009, (Extended abstract).
- [23] G. SAGNOL, M. BOUHTOU, S. GAUBERT. *Optimizing the measurement of the traffic on large Networks: An Experimental Design Approach*, in "International Network Optimization Conferences (INOC'2009), April 26-27, Pisa, Italy", 2009, (Article included in the CDROM of the conference).

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

- [24] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Linear independence over tropical semirings and beyond*, in "Proceedings of the International Conference on Tropical and Idempotent Mathematics", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, vol. 495, American Mathematical Society, 2009, p. 1-38, <http://www.arxiv.org/abs/0812.3496> RU .
- [25] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *The Optimal Assignment Problem for a Countable State Space*, in "Proceedings of the International Conference on Tropical and Idempotent Mathematics", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, vol. 495, American Mathematical Society, 2009, p. 39-60, <http://www.arxiv.org/abs/0812.4866> GB .
- [26] S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Tropical Scaling of Polynomial Matrices*, in "Positive Systems, Berlin", Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 389, Springer, 2009, p. 291-303, <http://arxiv.org/abs/0905.0121>.
- [27] C. WALSH. *Minimum representing measures in Idempotent Analysis*, in "Idempotent mathematics and mathematical physics, Providence, RI", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemp. Math., vol. 495, Amer. Math. Soc., 2009, p. 367–382, <http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0503716>.

Research Reports

- [28] F. BONNANS, S. GAUBERT. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, École Polytechnique, 2009, Cinquième édition, 176 p., Polycopié de cours.

Other Publications

- [29] A. ADJÉ, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Coupling policy iteration with semi-definite relaxation to compute accurate numerical invariants in static analysis*, 2009, Preprint. Accepted for publication in Proceedings of ESOP'2010.
- [30] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Linear systems of equations in symmetrized tropical semirings*, 2009, Preprint RU .
- [31] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0912.2462>, Submitted RU .
- [32] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The horoboundary of an optimal control problem*, 2009, Preprint.
- [33] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the Extreme Points of Tropical Polyhedra*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0904.3436>, An abridged version of this manuscript, entitled “The tropical double description method”, has been accepted for publication in the Proceedings of STACS'2010.
- [34] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE. *Circadian rhythm and cell population growth*, 2009, Submitted.
- [35] S. FRIEDLAND, S. GAUBERT, L. HAN. *Perron-Frobenius theorem for nonnegative multilinear form*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0905.1626> US .
- [36] S. GAUBERT, R. KATZ. *Minimal half-spaces and external representation of tropical polyhedra*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0908.1586>, Submitted AR .
- [37] B. LEMMENS, C. WALSH. *Isometries of polyhedral Hilbert geometries*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0904.3306> GB .
- [38] M. D. LORETO, S. GAUBERT, R. KATZ, J.-J. LOISEAU. *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, 2009, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00411243/en/>, Submitted. See also arXiv:0901.2915.
- [39] P. PONCET. *A class of compact subsets for non-sober topological spaces*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0912.5469>.
- [40] P. PONCET. *A decomposition theorem for maxitive measures*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0912.5178>, Submitted.
- [41] P. PONCET. *Domain-valued maxitive maps and their representations*, 2009, Preprint.
- [42] G. SAGNOL. *A Class of Semidefinite Programs with a rank-one solution*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0909.5577>.

- [43] G. SAGNOL. *Computing Optimal Designs of multiresponse Experiments reduces to Second-Order Cone Programming*, 2009, <http://arxiv.org/abs/0912.5467>.

References in notes

- [44] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, x+473.
- [45] M. AKIAN. *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*, Université Paris IX-Dauphine, Paris, 1990, Thèse de Doctorat.
- [46] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", vol. 339, 2004, p. 103–108, <http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438>.
- [47] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, <http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090>.
- [48] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 327, Série I, 1998, p. 927–932, <http://hal.inria.fr/inria-00073240>.
- [49] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, p. 19-51, <http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441>.
- [50] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Solutions of max-plus linear equations and large deviations*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", 2005, <http://hal.inria.fr/inria-00000218/en/>, Also arXiv:math.PR/0509279.
- [51] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOVA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control Optim.", vol. 47, n^o 2, 2008, p. 817–848, <http://www.arxiv.org/abs/math.OA/0603619>.
- [52] M. AKIAN, J. MENALDI, A. SULEM. *On an investment-consumption model with transaction costs*, in "SIAM J. Control Optim.", vol. 34, n^o 1, 1996, p. 329–364.
- [53] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.
- [54] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Inferring Min and Max Invariants Using Max-plus Polyhedra*, in "Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)", vol. 5079, Springer, 2008, Valencia, Spain, 16-18 July 2008.
- [55] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Université Paris 6, January 2002, Thèse de doctorat.

-
- [56] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, p. 219-230.
- [57] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", vol. 275/276, 1998, p. 3-18.
- [58] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, n^o 64, Cambridge university press, 1997.
- [59] E. BARRON, P. CARDALIAGUET, R. JENSEN. *Radon-Nikodym theorem in L^∞* , in "Appl. Math. Optim.", vol. 42, n^o 2, 2000, p. 103-126.
- [60] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98), Cagliari, Italy", IEE, 1998.
- [61] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piecewise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001.
- [62] T. BLYTH, M. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972.
- [63] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Delft University of Technology, Dec 1993, Ph. D. Thesis.
- [64] S. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, Caltech, 1990, PhD Thesis.
- [65] P. BUTKOVIČ. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", vol. 367, 2003, p. 313-335.
- [66] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984.
- [67] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000.
- [68] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", vol. 34, 1986, p. 6219-34.
- [69] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.
- [70] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, École des Mines, Dec. 2001, Thèse, spécialité Mathématiques et Automatique.
- [71] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", vol. 343, n^o 5, 2006, p. 377-382.
- [72] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. MC GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes", July 1998.

- [73] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, n^o 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, <http://hal.inria.fr/inria-00076367>, Rapport de recherche.
- [74] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", vol. 293, 2003, p. 189–217.
- [75] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05), Edinburgh", LNCS, Springer, July 2005, p. 462–475.
- [76] P. COUSOT, R. COUSOT. *Abstract Interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points*, in "Principles of Programming Languages 4", 1977, p. 238–252.
- [77] P. COUSOT, R. COUSOT. *Comparison of the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. JTASPEFL '91, Bordeaux*, in "BIGRE", vol. 74, October 1991, p. 107–110.
- [78] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", vol. 78, n^o 3, 1980, p. 385–390.
- [79] R. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, n^o 166, Springer, 1979.
- [80] Y. DAVYDOV, I. MOLCHANOV, S. ZUYEV. *Stable distributions and harmonic analysis on convex cones*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", vol. 344, n^o 5, 2007, p. 321–326.
- [81] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge", Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 354–382.
- [82] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, LAAS, 1990, Rapport de recherche.
- [83] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", vol. 9, 2004, p. 1–27 (electronic).
- [84] V. DHINGRA, S. GAUBERT. *How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration*, in "Valuetools '06: Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools, New York, NY, USA", ACM Press, 2006, 12, <http://doi.acm.org/10.1145/1190095.1190110>.
- [85] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, vol. XXI, Gauthier Villars, Paris, 1953.
- [86] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05), Seville, Espagne", 2005.

- [87] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", vol. 324, n^o 9, 1997, p. 1043–1046.
- [88] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", vol. 15, n^o 2, 2002, p. 497–529 (electronic), <http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151>.
- [89] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max, +) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 40, n^o 12, Dec 1995, p. 2014–2025.
- [90] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the Proc. of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07), Braga (Portugal)", LNCS, vol. 4421, Springer, 2007, p. 237–252, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71316-6_17.
- [91] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", vol. 326, Série I, 1998, p. 43–48.
- [92] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", vol. 44, n^o 4, 1999, p. 683–697.
- [93] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.
- [94] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", vol. 323, n^o 4, 1996, p. 371–375.
- [95] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOC, Paris, 2002.
- [96] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", vol. 2, 1977, p. 25-41.
- [97] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1979, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984.
- [98] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioïds: a survey of recent results*, in "Algebraic and combinatorial methods in operations research, Amsterdam", North-Holland Math. Stud., vol. 95, North-Holland, 1984, p. 147–163.
- [99] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", vol. 293, 2003, p. 141–167.
- [100] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", vol. 72, 1990, p. 27–38.
- [101] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", vol. 34, n^o 1, Jan 1989, p. 3-9.
- [102] Z. IZHAKIAN. *The tropical rank of a tropical matrix*, 2008, Eprint arXiv:math.AC/0604208v2.

- [103] Z. IZHAKIAN. *Tropical arithmetic and tropical matrix algebra*, 2008, Eprint arXiv:math.AG/0505458v3.
- [104] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997.
- [105] M. KREĀN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", vol. 1950, n^o 26, 1950, 128.
- [106] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", vol. 3, 1993.
- [107] A. LAKHOUA. *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007, Thèse de Doctorat.
- [108] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, p. 167–187.
- [109] J.-Y. LE BOUDEEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, n^o 2050, Springer, 2001.
- [110] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Université Rennes 1, September 2002, Thèse de doctorat.
- [111] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Université de Tours, November 2001, Thèse.
- [112] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", vol. 81, 1991, p. 137–145.
- [113] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", vol. 69, n^o 5, 2001, p. 696–729, <http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128>.
- [114] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J.-P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", vol. 50, n^o 5, 2005, p. 699-705, <http://hal.inria.fr/inria-00072263>.
- [115] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", vol. 8, n^o 3, July 2002, p. 519–562.
- [116] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletín del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", vol. XLIII, 2005, p. 51-62, <http://hal.inria.fr/inria-00072311>.
- [117] V. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, Edition Mir, Moscou, 1987.
- [118] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĀ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

- [119] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300, <http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015>.
- [120] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [121] R. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", vol. 75, n^o 391, 1988.
- [122] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", vol. 1, n^o 2, 1991, p. 177-207.
- [123] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.
- [124] M. PLUS. *Linear systems in (max, +)-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu", Dec. 1990.
- [125] A. PUHALSKIĀ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, n^o 119, Chapman & Hall, 2001.
- [126] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", n^o 311, 1990, p. 745-748.
- [127] I. ROMANOVSKIĀ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", vol. 3, n^o 2, 1967, p. 66-78.
- [128] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", vol. 121, 2001, p. 221–246.
- [129] A. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000.
- [130] J. W. RUGE, K. STÜBEN. *Algebraic multigrid*, in "Multigrid methods, Philadelphia, PA", Frontiers Appl. Math., vol. 3, SIAM, 1987, p. 73–130.
- [131] S. SAMBORSKIĀ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", n^o 3, 2002, p. 163–180, 192.
- [132] S. SANKARANARAYANAN, H. SIPMA, Z. MANNA. *Scalable Analysis of Linear Systems using Mathematical Programming*, in "VMCAI", LNCS, vol. 3385, 2005.
- [133] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, p. 143–150.
- [134] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", vol. 28, n^o 3-4, 1994, p. 277–294.

- [135] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997.
- [136] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", vol. 4, n^o 3, 2004, p. 389–411.
- [137] S. STOEV, M. TAQQU. *Extremal stochastic integrals: a parallel between max-stable processes and α -stable processes*, in "Extremes", vol. 8, n^o 4, 2006, p. 237–266.
- [138] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Basel", Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, p. 135–146, <http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163>.
- [139] N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", vol. 3, 1967, p. 39–71, in russian.
- [140] C. WALSH. *The horofunction boundary of the Hilbert geometry*, in "Adv. Geom.", vol. 8, n^o 4, 2008, p. 503–529, <http://www.arxiv.org/abs/math.MG/0611920v2>.
- [141] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", vol. 293, n^o 1, 2003, p. 45–54, Max-plus algebras.
- [142] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, Ekonomický ústav ČSAV, Praha, 1976, (in Czech).
- [143] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981.
- [144] O. ZIV, N. SHIMKIN. *Multigrid Methods for policy evaluation and reinforcement learning*, in "Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC05), Limassol, Cyprus", 2005, p. 1391-1396.
- [145] P. DE LA HARPE. *On Hilbert's metric for simplices*, in "Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991), Cambridge", London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 181, Cambridge Univ. Press, 1993, p. 97–119.