INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

Saclay - Île-de-France

Theme : Modeling, Optimization, and Control of Dynamic Systems

Activity Report

2010

Table of contents

1. Team

Research Scientists

Stéphane Gaubert [Chef de projet, DR, Inria/*Team leader*]
Marianne Akian [Responsable permanente, DR, Inria, HdR]
Jean-Pierre Quadrat [DR, projet Metalau, à temps partiel dans Maxplus/*Metalau project, part time member of Maxplus project*, HdR]
Cormac Walsh [CR, Inria]
Xavier Allamigeon [Ingénieur du corps des mines accueilli en détachement à partir de septembre/*Corps des mines, under secondment from September*]

PhD Students

Assale Adjé [Bourse de la Région Île-de-France, École Polytechnique, commun avec l'équipe MeASI (CEA et LIX)]
Paul Poncet [École Polytechnique]
Guillaume Sagnol [CRE-INRIA-Orange Labs, École des Mines de Paris, jusqu'à août/*until August*]
Meisam Sharify Najafabadi [CORDI-S, École Polytechnique]
Sylvie Detournay [CORDI-S, École Polytechnique]
Olivier Fercoq [CRE-INRIA-Orange Labs, École Polytechnique]
Zheng Qu [Bourse AMX, École Polytechnique, depuis septembre/*from September*]
Jean-Baptiste Dumont [CIFRE Orange Labs, École Polytechnique, depuis septembre/*from September*]

Post-Doctoral Fellows

Guillaume Vigeral [INRIA financé par Digiteo, jusqu'à août/*until August*]
Sergey Sergeev [INRIA financé par l'ANR ASOPT, à partir de décembre/*from December*]

Administrative Assistant

Wallis Filippi [TR, Inria]

Other

Max Plus [Chercheur imaginaire[1]/*Imaginary researcher*[2]]

2. Overall Objectives

2.1. Mots-clés/Keywords

Mots-clés : Algèbre max-plus, algèbre tropicale, systèmes à événements discrets, programmation dynamique, décision markovienne, contrôle optimal déterministe et stochastique, théorie des jeux, théorie des perturbations, théorie de Perron-Frobenius non linéaire, applications contractantes, analyse numérique, mathématiques discrètes, recherche opérationnelle.

Keywords: *Max-plus algebra, Tropical algebra, Discrete event dynamic systems, Dynamic programming, Markov decision, Deterministic and Stochastic optimal control, Game theory, Perturbation theory, Nonlinear Perron-Frobenius theory, Nonexpansive maps, Numerical analysis, Discrete mathematics, Operations Research.*

[1] Max Plus est le nom collectif du groupe de travail de l'INRIA, réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2] *Maxplus is the collective name of the INRIA working group, having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

2.2. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes dijunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

2.3. Faits marquants/Highlights of the year

Xavier Allamigeon, qui a rejoint l'équipe en septembre, a obtenu le prix Gilles Kahn 2010, décerné par Specif et patronné par l'Académie des Sciences, pour sa thèse portant sur l'application des polyèdres tropicaux en analyse statique de programme. Voir http://specif.org/prix-these/historique.html.

English version

Xavier Allamigeon, who joined the team in September, got the Gilles Kahn 2010 prize, attributed by Specif under the patronage of the French academy of science, for his PhD work on the application of tropical polyhedra to static analysis. See http://specif.org/prix-these/historique.html.

3. Scientific Foundations

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plusalgebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement "l'algèbre max-plus".

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [101]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [96], [115], [155], [157], [158]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [83]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [144], [143], [135], [121], [112], [148], [130], [113], [103], [68]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [134], [135], [121], grandes déviations [142], asymptotiques à température nulle en physique statistique [85]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [122], [138], [132], [74], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [137], et la théorie des jeux [145], [57]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [84], [126], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [150], [118], [151], [123], [140]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [111], [154], [136], [153] et en théorie des représentations [104], [77], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [101]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [96], [115], [155], [157], [158]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [83]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [144], [143], [135], [121], [112], [148], [130], [113], [103], [68]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [134], [135], [121], large deviation asymptotics [142], or zero temperature asymptotics in statistical physics

[85]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [122], [138], [132], [74], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [137] and game theory [145], [57]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [84], [126] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [150], [118], [151], [123], [140]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [111], [154], [136], [153] and in representation theory [104], [77], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0=i,\ \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \quad , \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \le s \le n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \quad . \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \quad , \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \quad , \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \le t \le T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot,0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad H(x,p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x,y)) \quad , \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [135], [121], [130]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [144], [155], [96], [114], [90], [73], [6] pour la dimension finie, et [135], [121] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [103].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, ..., n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \leq t \leq T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [135], [121], [130]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [144], [155], [114], [90], [96], [73], [6] for the finite dimension case, and [135], [121] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the "Aubry-Mather" theory [103].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llcl} \text{monotonie}/\textit{monotonicity} & x \leq y & \Rightarrow & f(x) \leq f(y) \ , \\ \text{contraction}/\textit{nonexpansiveness} & \|f(x) - f(y)\|_\infty & \leq & \|x - y\|_\infty \ . \end{array} \tag{6}$$

Ici, l'opérateur f est une application d'un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\leq$ désigne l'ordre partiel usuel, et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l'ensemble des états est $\{1, ..., n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l'addition d'une constante [95] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d'opérateurs : l'équation de la programmation dynamique d'un problème de commande optimale à horizon fini s'écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d'un problème à horizon infini (y compris le cas d'un problème d'arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d'un problème avec facteur d'actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [57]. Il permet d'inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l'extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d'homogénéité. Les problèmes auxquels on s'intéresse typiquement sont la structure de l'ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l'existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l'infini (afin d'obtenir le coût ergodique d'un problème de contrôle optimal ou de jeux), l'asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [138] pour un panorama. Signalons que dans [107],[7], des algorithmes inspirés de l'algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir le §4.4 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1, ..., n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [95] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [57]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [138] for more background. In [107],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §4.4 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [143], [98], [97], [68],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [134]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi retrouvés en particulier dans le travail de thèse d'Asma Lakhoua [124], [65].

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [143], [98], [97], [68], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [134]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations found again in particular in the PhD thesis work of Asma Lakhoua [124], [65].

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [86], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [90] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [139], [117], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [72]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [105], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [109], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [150], [118], [129], [151], [123], [140]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [128].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [86], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [90] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [139], [117], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [72]. Max-plus automata models [105], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [109], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [150], [118], [129], [151], [123], [140]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [128].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax=\lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax=b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax\leq b$). Le problème $Ax=b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [101], [78], [155], [157],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax=b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [152], [146], [63] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax=Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [116], [141],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [99].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in Sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax=\lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax=b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax\leq b$). The $Ax=b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [101], [78], [155], [157],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax=b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [152], [146], [63] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax=Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyedra, determinants, symmetrisation [116], [141],[6]). The subject has attracted recently a new attention [99].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon}+e^{-b/\epsilon}\asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon}\quad,\qquad e^{-a/\epsilon}\times e^{-b/\epsilon}=e^{-(a+b)/\epsilon}\quad,\tag{7}$$

lorsque $\epsilon\to 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, muni de l'addition $(a,b)\mapsto -\epsilon\log(e^{-a/\epsilon}+e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a,b)\mapsto a+b$. Pour tout $\epsilon>0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+,+,\times)$, mais pour $\epsilon=0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [134], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [142], [64], pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [61], [60], [59] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [154].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log (e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [134], motivated by the study of WKB-type asymptotics of Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [142], [64] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [61], [60], [59] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [154].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [80], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [120], pour des réseaux ferroviaires [79] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [72]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [76], [127]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [133], [131], [102].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [80], or computing the throughput of a workshop [120] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [79] and [72]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [76], [127]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [133], [131], [102].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [81]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [89]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [156]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [109] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [128] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [128]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [125].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [81]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [89]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [156]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [109] for the jobshop case, a simpler representation was given in [128] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [128]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [125].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par P. et R. Cousot [93], qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. On associe en effet à chaque point de contrôle du programme un élément du treillis, qui représente une sur-approximation valide de l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables du programme en ce point. Le treillis le plus simple exprimant des propriétés numériques est celui des produits Cartésiens d'intervalles. Des treillis plus riches permettent de mieux tenir compte de relations entre variables, en particulier, des classes particulières de polyèdres sont souvent employées.

Voici, en guise d'illustration, un petit exemple de programme, avec le système de point fixe associé, pour le treillis des intervalles:

```
   void main() {
int x=0;          // 1
while (x<100) {   // 2
  x=x+1;          // 3
}                 // 4
         }
```

$$\begin{aligned} x_1 &= [0,0] \\ x_2 &=]-\infty, 99] \cap (x_1 \cup x_3) \\ x_3 &= x_2 + [1,1] \\ x_4 &= [100, +\infty[\cap (x_1 \cup x_3) \end{aligned}$$

Si l'on s'intéresse par exemple aux valeurs maximales prise par la variable x au point de contrôle 2, soit $x_2^+ := \max x_2$, après une élimination, on parvient au problème de point fixe:

$$x_2^+ = \min\left(99, \max\left(0, x_2^+ + 1\right)\right) \ , \tag{8}$$

qui a pour plus petite solution $x_2^+ = 99$, ce qui prouve que x est majoré par 99 au point 2.

On reconnait ici un opérateur de point fixe associé à un problème de jeux à deux joueurs et somme nulle. Cette analogie est en fait générale, dans le cadre d'un collaboration que l'équipe entretient depuis plusieurs années avec l'équipe MeASI d'Eric Goubault (CEA et LIX), spécialiste d'analyse statique, nous avons en effet mis progressivement en évidence une correspondance [92], [106], entre les problèmes de jeux à somme nulle et les problèmes d'analyse statique, qui peut se résumer par le dictionnaire suivant:

Jeux	Interprétation abstraite
système dynamique	programme
opérateur de Shapley	fonctionnelle
espace d'état	(# points de contrôle) $\times$ (# degrés de liberté du treillis)
problème en horizon n	exécution de n pas
limite du problème en horizon fini	invariant optimal (borne)
itération sur les valeurs	itération de Kleene

Pour que le nombre d'états du jeu soit fini, il est nécessaire de se limiter à des treillis d'ensembles ayant un nombre fini de degrés de liberté, ce qui est le cas de domaines communément utilisés (intervalles, ensembles définis par des contraintes de potentiel de type $x_i - x_j \leq$ cst, mais aussi, les "templates" qui sont des sous-classes de polyèdres introduits récemment par Sankaranarayanan, Sipma et Manna [149]). L'ensemble des actions est alors fini si on se limite à une arithmétique affine. Signalons cependant qu'en toute généralité, on aboutit à des jeux avec un taux d'escompte négatif, ce qui pose des difficultés inédites. Cette correspondance entre jeux et analyse statique est non intuitive, au sens où les actions du minimiseur consistent à sélectionner des points extrêmes de certains polyèdres obtenus par un mécanisme de dualité.

Une pathologie bien répertoriée en analyse statique est la lenteur des algorithmes de point fixe, qui peuvent effectuer un nombre d'itérations considérable (99 itérations pour obtenir le plus petit point fixe de (8)). Celle-ci est usuellement traitée par des méthodes d'accélération de convergence dites d'élargissement et rétrécissement [94], qui ont cependant l'inconvénient de conduire à une perte de précision des invariants obtenus. Nous avons exploité la correspondance entre analyse statique et jeux pour développer des algorithmes d'une nature très différente, s'inspirant de nos travaux antérieurs sur l'itération sur les politiques pour les jeux répétés [107], [87], [88],[7]. Une version assez générale de cet algorithme, adaptée au domaine des templates, est décrite dans [106] et a fait l'objet d'une implémentation prototype. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec souvent un gain en précision par rapport aux approches classiques, par exemple pour des programmes comprenant des boucles imbriquées.

Ce domaine se trouve être en pleine évolution, un enjeu actuel étant de traiter d'une manière qui passe à l'échelle des invariants plus précis, y compris dans des situations où l'arithmétique n'est plus affine.

English version

The abstract interpretation method introduced by P. and R. Cousot [93], allows one to determine automatically invariants of programs by computing the minimal fixed point of an order preserving map defined on a complete lattice. To every breakpoint of the program is associated an element of the lattice, which yields a valid overapproximation of the set of reachable values of the vectors of variables of the program, at this breakpoint. The simplest lattice expressing numerical invariants consists of Cartesian products of intervals. More sophisticated lattices, taking into account relations between variables, consisting in particular of subclasses of polyhedra, are often used.

As an illustration, we gave before Eqn (8) a simple example of program, together with the associated fixed-point equation. In this example, the value of the variable x at the breakpoint 2 is bounded by the smallest solution x_2^+ of the fixed point problem (8), which is equal to 99.

The fixed point equation (8) is similar to the one arising in the theory of zero-sum repeated games. This analogy turns out to be general. Un a series of joint works of our team with the MeASI team of Eric Goubault (CEA and LIX), we brought progressively to light a correspondence [92], [106], between the zero-sum game problems and the static analysis problems, which can be summarized by the following dictionnary:

Games	Abstract interpretation
dynamical system	program
Shapley operator	functional
state space	(# breakpoints) $\times$ (# degrees of freedom)
horizon n problem	execution of n logical steps
limit of the value in horizon n	optimal invariant (bound)
value iteration	Kleene iteration

For the game to have a finite state space, we must restrict our attention to lattices of sets with a finite number of degrees of freedom, which is the case of the domains commonly used in static analysis (intervals, sets defined by potentials constraints of the form $x_i - x_j \leq \text{cst}$, and also the subclasses of polyhedra called "templates", introduced recently by Sankaranarayanan, Sipma and Manna [149]). Then, the action space is finite if the arithmetics of the program is affine. However, in full generality, the games we end up with have a negative discount rate, which raises difficulties which are unfamiliar from the game theory point of view. This correspondence between games and static analysis turns out to be non intuitive, in that the action of the minimizer consist of selecting an extreme point of a polyhedron arising from a certain duality construction.

A well known pathology in static analysis is the fact that the standard Kleene fixed point algorithm may have a very slow behavior (99 iterations are needed to get the smallest fixed point of (8)). This is usually solved by using some accelerations of convergence, called widening and narrowing [94], which however lead to a loss of precision. We exploited the correspondence between static analysis and games to develop algorithms of a very different nature, inspired by our earlier work on policy iteration for games [107], [87], [88],[7]. A rather general version of this policy iteration algorithm, adpated to the domain of templates, is described in [106], together with a prototype implementation. Every iteration combines linear programming and combinatorial algorithms. Some experimental results indicate that the method often leads to invariants which are more accurate than the ones obtained by alternative methods, in particular for some programs with nested loops.

This topic of research is currently evolving, a question of current interest being to find accurate invariants, in a scalable way, in situations in which the arithmetics is not affine.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [91].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [91].

5. Software

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab, et qui est maintenant intégrée par défaut dans Scicoslab. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [71], [127]. Il faut aussi noter que le groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site, and which is now included by default in Scicoslab. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [71], [127]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Solveurs numériques d'équations de Hamilton-Jacobi/Numerical solution of Hamilton-Jacobi equations

Dans son travail de thèse [124] dans l'équipe sous la direction de Stéphane Gaubert et Marianne Akian, Asma Lakhoua a développé des programmes en Scilab et C, exploitant la boîte à outils Maxplus de Scilab, implémentant de nouvelles discrétisations des équations d'Hamilton-Jacobi correspondant aux problèmes de contrôle optimal déterministe.

English version

As part of her PhD thesis work [124] in the team, under the supervision of Stéphane Gaubert and Marianne Akian, Asma Lakhoua has developed programs in Scilab and C, exploiting the Maxplus toolbox, allowing to test max-plus discretisation schemes for Hamilton-Jacobi equations corresponding to deterministic optimal control problems.

5.3. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games

L'algorithme d'itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle pour le cas de paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), et dégénérés de type "multi-chaîne" a été introduit dans [88]. Plusieurs stages ont permis l'implémentation partielle en Scilab, C ou C++, et le test de ce type d'algorithmes (voir le travail de Vishesh Dhingra [100]), ou de son couplage avec la résolution de systèmes linéaires par des méthodes multigrilles algébriques (stage de Shantanu Gangal en 2007). Le travail de thèse de Sylvie Detournay, qui porte sur le couplage entre itérations sur les politiques et méthodes multigrilles algébriques, devrait permettre le développement d'un programme complet, voir le §6.4.1 ci-dessous.

English version

The policy iteration algorithm for zero sum repeated games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), and in degenerate “multichain” cases, has been introduced in [88]. Several internships allowed us to implement in Scilab, C or C++, and to test such algorithms (see the work of Vishesh Dhingra [100]), or its combinaison with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods (internship of Shantanu Gangal in 2007). The PhD thesis work of Sylvie Detournay, who concerns the combinaison of policy iterations with algebraic multigrid methods, should allow us to develop a complete program, see §6.4.1 below.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus et géométrie métrique/Max-plus spectral theory and metric geometry

6.1.1. Introduction

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Cormac Walsh.

Étant donné un noyau $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on peut lui associer le problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x, y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{9}$$

dans lequel on cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme nous l’avons rappelé dans les §3.2 et 3.3, le problème spectral (9) intervient en contrôle ergodique: l’ensemble S est l’espace des états, et l’application $a(x, y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Le cas où S est fini est classique, l’on a alors un résultat précis de représentation de l’espace propre, à l’aide d’un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité.

Dans [66], nous avons considéré le cas où S est non compact. Lorsque $\lambda = 0$, l’espace propre est analogue à l’espace des fonctions harmoniques défini en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. En introduisant l’analogue max-plus de la frontière de Martin, nous avons obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (9) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) \quad , \tag{10}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l’analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l’ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u joue le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré aussi que les éléments de l’espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de “quasi-géodésiques”. La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d’un espace métrique construite à partir des horo-fonctions (fonctions de Busemann généralisées), ou horo-frontière. Ces résultats inspirent les travaux des sections suivantes, qui portent sur des cas remarquables d’espaces métriques (§6.1.3) ou sur des applications en théorie des jeux (§6.1.2).

English version

Let the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ be given. One may associate the max-plus spectral equation (9), where the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. As we recalled in §3.2 and refmonotone, this spectral problem arises in ergodic optimal control: the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties.

In [66], we considered the case where S is non-compact. When $\lambda = 0$, the eigenspace is analoguous to the set of harmonic functions defined in classical or probabilistic potential theory. By introducing a max-plus analogue of the classical Martin boundary, we obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (9) may be represented as in (10) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u plays the role of the spectral measure. We also showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain "almost-geodesics". The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions), or horoboundary. These results have inspired the work of the next sections, which deal either with remarkable examples of metric spaces (§6.1.3) or applications to zero-sum games (§6.1.2).

6.1.2. Une caractérisation maximin du taux de fuite d'applications nonexpansives/A maximin characterization of the escape rate of nonexpansive mappings

Participants: Stéphane Gaubert, Guillaume Vigeral.

Le problème de l'existence du gain moyen par unité de temps pour des jeux répétés à somme nulle conduit à étudier la limite $f^k(v)/k$ lorsque l'horizon k tend vers l'infini, où f (l'opérateur de programmation dynamique) est une application contractante au sens large sur un espace de Banach, voir §3.3. La limite peut ne pas exister, mais un résultat de Kohlberg et Neyman montre qu'il existe toujours une forme linéaire ϕ de norme 1 telle que la limite de $\phi(f^k(x)/k)$ existe lorsque $k \to \infty$ et coïncide avec le "taux de fuite" $\lim_{k\to\infty} \|f^k(x)/k\|$. Dans [47], on s'intéresse aux généralisations de ce résultat lorsque f est une application nonexpansive (contractante au sens large) sur un espace métrique vérifiant une forme affaiblie de l'hypothèse de courbure nonpositive au sens de Busemann. La forme linéaire ϕ est alors remplacée par une horofonction, et l'on obtient une caractérisation de type "maximin" du taux de fuite, qui étend la formule de Collatz-Wielandt en théorie de Perron-Frobenius. Ceci est motivé par les problèmes de contrôle ou de jeux quadratiques, dans lesquels l'espace métrique est le cône des matrices définies positives muni de sa métrique Riemanienne ou de la métrique de Thompson.

English version

The problem of the existence of the mean payoff per time unit for repeated games leads to studying the existence of the limit of $f^k(v)/k$, where f is a nonexpansive map (the dynamic programming operator) acting on a Banach space, see §3.3 for more background. The limit may not exist, but a result of Kohlberg et Neyman shows that there is always a norm one linear form ϕ such that the limit of $\phi(f^k(x)/k)$ exists and coincides with the limit of $\|f^k(x)/k\|$ as k tends to infinity (the escape rate). In [47], we extend this result to the case of a nonexpansive map defined on a metric space satisfying a mild form of Busemann nonpositive curvature condition. Then, the linear form ϕ is replaced by an horofonction, and we obtain a maximin type characterization of the escape rate, which extends the Collatz-Wielandt formula in Perron-Frobenius theory. This is motivated by the study of quadratic optimal control and game problems, in which the metric space is the cone of positive semi-definite matrices equipped with the Riemannian or Thompson metric.

6.1.3. Frontières de l'espace de Teichmüller/Boundaries of Teichmüller space

Participant: Cormac Walsh.

La définition de l'horo-frontière peut être étendue sans trop de difficulté aux metriques non symétriques, telles que la métrique lipschitzienne de Thurston sur l'espace de Teichmüller. Lorsque la métrique est non symétrique, il existe deux horo-frontières, l'une "vers l'avant" et l'autre "vers l'arrière".

L'espace de Teichmüller est l'espace des métriques hyperboliques d'aire finie complètes sur une surface, modulo l'isotopie. Thurston définit la distance de x à y dans l'espace de Teichmüller comme le logarithme de la plus petite constante de Lipschitz de tous les homéomophismes de x à y, isotopes à l'identité. Cette métrique n'a pas reçu autant d'attention que la métrique de Teichmüller, plus utilisée.

Dans [56], nous avons montré que l'horo-frontière (en avant) de la métrique de Thurston est simplement la frontière de Thurston usuelle. Une conséquence immédiate est que toutes les géodésiques de cet espace métrique convergent (en $+\infty$) vers un point de la frontière de Thurston. Un tel résultat n'existait précédemment que pour certaines classes de géodésiques.

Une application importante de l'horo-frontière est l'étude de l'action du groupe des isométries. Ceci est dû au fait que l'action du groupe des isométries d'un espace métrique s'etend continuement en l'action des homéomorphismes de la compactification par les horo-fonctions.

Nous avons utilisé cette action afin de déterminer le groupe des isométries de la métrique de Thurston, sauf dans certains cas spéciaux de genre petit. Il est facile de voir que les éléments du "mapping class group" sont des isométries de la métrique. Nous avons montré que si la surface n'est pas la sphère avec moins de quatre trous, ou le tore avec moins de deux trous, toute isométrie de la métrique de thurston est élément du "mapping class group". Ce résultat est analogue au théorème de Royden sur la métrique de Teichmüller, prouvé par Royden dans le cas de surfaces compactes et d'automorphismes analytiques, et étendu par Earle and Kra dans le cas général.

En utilisant des techniques similaires, nous avons aussi montré que des surfaces distinctes conduisent à des espaces de Teichmüller distincts, excepté peut-être dans le cas de surfaces de genre petit. Ceci est analogue au théorème de Patterson.

English version

The definition of the horoboundary can be extended without too much difficulty to non-symmetric metrics, such as the Thurston's Lipschitz metric on Teichmüller space. When the metric is non-symmetric there are actually two horofunction boundaries, one in the forward direction and one in the backward direction.

Teichmüller space is the space of complete finite-area hyperbolic metrics on a given surface up to isotopy. Thurston defines a distance from x to y in Teichmüller space by taking the logarithm of the smallest Lipschitz constant over all homeomorphisms from x to y that are isotopic to the identity. This metric has not been as intensively studied as the more common Teichmüller metric.

We have shown in [56] that the horofunction boundary of Thurston's metric (in the forward direction) is just the usual Thurston boundary. An immediate consequence is that all geodesics in this metric space converge in the forward direction to a point on the Thurston boundary. This had only been known previously for a special class of geodesics.

An important application of the horofunction boundary is to study isometric group actions. It is useful for this purpose because the action of the isometry group of a metric space extends continuously to an action by homeomorphisms on the horofunction compactification.

We used this action to determine the isometry group of Thurston's metric, except in certain special cases of low genus. It is easy to see that the elements of the mapping class group are isometries of the metric. We showed that, if the surface is not a sphere with four or fewer punctures, nor a torus with two or fewer punctures, then every isometry of Thurston's metric arises as an element of the mapping class group. This theorem is an analogue of Royden's theorem concerning the Teichmüller metric, which was proved by Royden in the case of compact surfaces and analytic automorphisms, and extended to the general case by Earle and Kra.

Using similar techniques, we were also able to show that distinct surfaces give rise to distinct Teichmüller spaces, again with some possible exceptions in low genus. This is an analogue of theorem of Patterson.

6.2. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.2.1. Convexité max-plus ou tropicale/Max-plus or tropical convexity

Participants: Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Ricardo Katz [Conicet, Argentine].

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d'états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, à la suite de Sturmfels et Develin [99]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d'analogues des résultats fondamentaux d'analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8].

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault [27], on développe un analogue tropical de l'algorithme de la double description. Celui-ci permet de manipuler effectivement des polyèdres, et en particulier de passer de la description interne (points extrêmes) à la description externe (contraintes inégalités) et vice-versa. L'algorithme tropical repose sur une caractérisation des points extrêmes en terme d'hypergraphes, ce qui permet d'éliminer de manière incrémentale en temps presque linéaire chaque générateur redondant (gagnant ainsi un ordre de grandeur en vitesse par rapport aux méthodes antérieures). Ce travail est motivé par des applications à l'analyse statique [69] et aux systèmes à événements discrets [17], dans lesquelles la manipulation de tels polyèdres est le goulot d'étranglement.

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et R. Katz [13], on étend le théorème de McMullen au cas tropical: ce dernier caractérise le nombre maximal de points extrêmes d'un polyèdre, en fonction du nombre d'inégalités qui le définissent et de sa dimension. Nous montrons que la même borne est valide dans le cas tropical (à une modification triviale près). Cependant, le calcul de la borne optimale est encore ouvert dans ce cas.

Dans un travail de S. Gaubert et R. Katz [20], on étudie la représentation d'un polyèdre tropical comme intersection de demi-espaces, ou si l'on préfère, comme conjonction d'inégalités affines. Nous donnons notamment un contre-exemple, montrant les inconvénients de la représentation en termes de demi-espaces minimaux proposée précédemment dans la littérature tropicale.

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectively the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [99]. Max-plus polyedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following [8].

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault [27], we develop a tropical analogue of the double description method. The latter allows one to handle effectively polyhedra, and in particular to pass from the internal representation (in terms of extreme points) to the external representation (by inequality constraints), and vice versa. The tropical algorithm relies on a characterization of extreme points in terms of hypergraphs, which allows us to eliminate in almost linear time every redundant generator (which yields a speedup by one order of magnitude by comparison with earlier methods). This is motivated by applications to static analysis [69] and discrete event systems [17], in which computing such polyhedra turns out to be the bottleneck.

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and R. Katz [13], we extend the McMullen upper bound theorem to the tropical case. This theorem characterises the maximal number of extreme points of a polyhedron, as a function of the number of inequalities defining it, and of the dimension. We show that the same bound is valid in the tropical case (up to a trivial modification). However, computing the optimal bound is an open problem in this case.

In a work of S. Gaubert and R. Katz [20], we study the representation of a tropical polyhedron as an intersection of half-spaces. We give in particular a counter example, showing some inconvenients of the representation in terms of minimal half-spaces proposed previously in the tropical litterature.

6.2.2. *Convexes max-plus et jeux avec paiements ergodiques/Max-plus convex sets and mean payoff games*

Participants: Marianne Akian, Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Alexander Guterman [Moscow State University], Ricardo Katz [Conicet, Argentine], Sergei Sergeev.

Dans un travail d'Akian, Gaubert et Guterman [26] et [62], on montre un résultat d'équivalence entre les jeux ergodiques à somme nulle et les systèmes d'inégalités max-plus linéaires: décider la non-vacuité d'un polyèdre tropical est équivalent à vérifier si un jeu déterministe à somme nulle a un paiement moyen par unité de temps positif ou nul. Plus généralement, la même question pour un jeu stochastique à somme nulle est équivalente à vérifier si un convexe tropical (non-polyédral, i.e., défini par un système infini d'inégalités) est vide. Ces résultats sont démontrés à l'aide de techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire. Ils sont ensuite appliqués à l'étude de l'indépendance linéaire dans le semi-anneau tropical.

Le résultat de [26], [62] a eu plusieurs retombées.

D'une part, dans un travail d'Allamigeon, Gaubert, et Katz [43], on établit un analogue tropical du théorème de Farkas: on montre que décider si une inégalité max-plus linéaire est une conséquence logique d'une famille de telles inégalités est également équivalent à un problème de jeu ergodique. Le travail [43] comprend aussi une description des "faces" (ou plus précisément, des points extrêmes du polaire) d'un polyèdre tropical en termes de transversaux minimaux dans un hypergraphe.

D'autre part, dans un travail de Gaubert et Sergeev [46], on réduit le problème spectral tropical de type faisceaux, $Ax = \lambda Bx$, à un jeu paramétrique (ce qui permet de calculer le spectre en temps pseudo-polynômial).

Enfin, dans un travail de Gaubert, Katz, et Sergeev [28], on développe un algorithme de programmation linéaire tropicale (pseudo-polynômial) basé sur cette correspondance avec les jeux répétés.

English version

In [26] and [62], we show the equivalence mean payoff games and max-plus linear inequalities: testing whether a tropical polyhedron is non-empty is equivalent to checking whether a mean payoff deterministic game is winning. More generally, checking whether a mean payoff stochastic game is winning is equivalent to checking the non-emptyness of a tropical convex set defined by an infinite family of inequalities. These results are established using techniques of non-linear Perron-Frobenius theory. Then, they are applied to the study of linear independence over the tropical semiring.

The equivalence established in [26], [62] had several consequences.

First, a work of Allamigeon, Gaubert, and Katz [43] yields a tropical analogue of Farkas theorem: we show that deciding whether a max-plus linear inequality follows from a family of such inequalities is also equivalent to solving a mean payoff game. Moreover, the work [43] comprises a characterization of the "faces" (more precisely, the extreme points of the polar) of a tropical polyhedra in terms of minimal transversals of a hypergraph.

Next, in a work of Gaubert and Sergeev [46], the tropical spectral problem for matrix pencils, $Ax = \lambda Bx$, is reduced to a parametric game (which allows one to compute the spectrum in pseudo-polynomial time).

Finally, in a work of Gaubert, Katz, and Sergeev [28], a (pseudo-polynomial) tropical linear programming algorithm is developed, based on the same correspondence with mean payoff games.

6.2.3. Meilleure approximation par des semi-modules max-plus pour la métrique projective de Hilbert/Best approximation in Hilbert's projective metric by max-plus semimodules

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Viorel Nitica [West Chester University (US) and IMAR (Bucharest, Romania)], Ivan Singer [IMAR (Bucharest, Romania)].

Nous étudions les projecteurs sur des espaces linéaires max-plus, ainsi que les demi-espaces max-plus séparants. Dans [42], nous obtenons de nouvelles propriétés concernant ces objets, ce qui nous permet de déduire une formule explicite de la distance d'un point à un demi-espace max-plus pour la métrique projective de Hilbert, ainsi qu'une caractérisation de l'ensemble des points minimisants de cette distance. Nous obtenons aussi un algorithme de type projection cyclique permettant de résoudre des systèmes d'inégalités linéaires max-plus. Ce travail est effectué dans le cadre d'un projet LEA Math mode.

English version

We are studying projectors on max-plus linear spaces, as well as separating half-spaces over the max-plus semiring. In [42], we establish new results, and derive an explicit formula for the distance in Hilbert's projective metric between a point and a half-space, as well as explicit descriptions of the set of minimizers of this distance. We also obtain, as a consequence of the previous results, a cyclic projection type algorithm to solve systems of max-plus linear inequalities. This work is carried out as part of a LEA Math-mode project.

6.3. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis

6.3.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.7, l'algèbre max-plus est la limite d'une déformation de l'algèbre classique, ou plutôt du semi-corps des réels positifs. Elle peut aussi fournir des estimations de ces déformations, puisque

$$\max(a,b) \leq \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) \leq \epsilon \log(2) + \max(a,b) \ . \tag{11}$$

L'utilisation de ces propriétés a déjà conduit dans le passé aux travaux sur les perturbations de valeurs propres [61], [60], [59], ou sur les grandes déviations [1], [64]. Dans les travaux qui suivent, nous exploitons ces propriétés dans des contextes reliés ou similaires à ceux de nos travaux précédents.

English version

As detailled in §3.7, max-plus algebra is the limit of a deformation of classical algebra, or more precisely of the semi-field of usual real positive numbers. It can also give estimations for these deformations using for instance (11). By using these properties, we already obtained some works on singular perturbations of matrix eigenvalues [61], [60], [59], or on large deviations [1], [64]. In the works described below, we are exploiting again these properties in contexts that are related or similar to those of our earlier works.

6.3.2. Aspects tropicaux des algorithmes de scaling matriciel/Tropical aspects of matrix scaling problems

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Laura Grigori, Meisam Sharify Najafabadi.

Le travail de thèse de M. Sharify porte sur les méthodes de mise à l'échelle utilisées en algorithmique numérique matricielle pour améliorer la précision des calculs.

Une première partie du travail, appliquant les techniques de [59], [60], porte sur les problèmes de valeurs propres. On montre notamment dans [110],[35], que l'ordre de grandeur des valeurs propres d'un faisceau matriciel est donné (sous des conditions de non-dégénerescence) par les valeurs tropicales, qui peuvent être calculées de manière robuste, et fournissent ainsi une mise à l'échelle pour calculer les valeurs propres classiques.

Une seconde partie du travail (collaboration avec L. Grigori) [38] porte sur le calcul de mises-à-l'échelle issues de la résolution d'un problème d'affectation optimale. On a développé un algorithme dont l'idée est de voir le problème d'affectation comme une limite d'un problème de maximisation d'entropie. Ceci conduit à un préprocessing parallèle, qui permet d'éliminer a priori des coefficients qui ne participent pas aux affectations optimales, de sorte que le problème réduit devient résoluble sur une machine séquentielle.

English version

The PhD work of M. Sharify deals with the development of scaling methods in matrix analysis to improve the accuracy of numerical computions.

A first part of the work, applying the techniques of [59], [60], deals with eigenvalue problems. We show in particular in [110],[35] that the order of magnitude of the eigenvalues of a matrix pencil can be determined (under nondegeracy conditions) by computing tropical eigenvalues. The latter can always be computed accurately and provide a scaling which can be combined with standard numerical methods for matrix pencils.

A second part of the work (collaboration with L. Grigori) [38] deals with the parallel computation of scalings based on the optimal assignment problem. The latter is thought of as a limit of an entropy maximization problem. This leads to a parallel preprocessing, allowing one to eliminate a priori entries which do not belong to optimal assignment, so that the reduced problem becomes solvable on a sequential machine.

6.3.3. Mesures et applications maxitives

Participants: Marianne Akian, Paul Poncet.

Les mesures et intégrales maxitives qui ont été introduites et ré-introduites sous divers noms dans la littérature (intégrale de Shilkret, sup-mesures, mesures de possibilité, mesures idempotentes de Maslov, etc.), sont définies de manière analogue aux mesures et intégrales usuelles, en remplaçant les lois additive et multiplicative par celles d'un semi-anneau idempotent, comme par exemple le semi-anneau max-plus. Elles peuvent aussi être obtenues comme limites de mesures positives après déformation logarithmique, par le principe des grandes déviations.

Le but de la thèse de Paul Poncet est de développer la théorie des mesures et intégrales maxitives et d'appliquer les résultats obtenus à l'étude des processus max-stables et de leur représentations, et plus généralement des mesures maxitives aléatoires et des valeurs extrêmes.

Les résultats de [1] étaient basés sur la notion de treillis continus, laquelle a été généralisée dans les années 80 par la théorie des ensembles ordonnés Z-continus. Dans [51], Paul Poncet a étudié les mesures et plus généralement les applications maxitives au moyen de la notion de Z-continuité. Dans [22], il en a déduit des caractérisations de l'existence d'une densité cardinale d'une mesure maxitive, ainsi qu'une décomposition. Ce résultat peut être vu d'une certaine manière comme un cas particulier des théorèmes de Krein-Milman et de Choquet max-plus de dimension infinie, obtenus par Paul Poncet dans [52]. De tels résultats prouvés jusqu'à présent dans la litérature uniquement dans le cas de la dimension finie [119], [82], [108], ont été déduits d'un résultat de type Krein-Milman dans les treillis [50], obtenu au moyen de la théorie des treillis continus.

L'ensemble de ces résultats devrait permettre de retrouver les résultats sur la frontière de Martin max-plus décrits dans la section 6.1.1, comme cela a été présenté dans [36], et d'obtenir un théorème de Radon-Nikodým max-plus généralisant à la fois les résultats d'existence d'une densité développés par Akian [1] et Barron, Cardaliaguet, Jensen [75], et le théorème de séparation max-plus établi par Cohen, Gaubert et Quadrat [8].

English version

Maxitive measures and integrals, which have been introduced and re-introduced under different names in the literature (Shilkret integral, sup-measures, possibility measures, Maslov idempotent measures, etc.), are defined analogously to usual measures and integrals, by replacing the additive and multiplicative laws by the laws of an idempotent semiring, such as the max-plus semiring. They can also be obtained as limits of positive measures after logarithmic deformation, by the large deviation principle.

The aim of the PhD thesis of Paul Poncet is to develop the theory of maxitive measures and integrals, and to apply it to the study of max-stable processes and of their representations, and more generally to the study of random maxitive measures and extreme values.

The results of [1] were based on the notion of continuous lattice, which has been generalized in the eighties with the theory of Z-continuous posets. In [51], Paul Poncet has studied maxitive measures and maps with the help of Z-continuity. In [22], he deduced characterisations of the existence of a cardinal density of a maxitive measure, together with a decomposition. This result can be seen as a particular case of infinite dimensional max-plus Krein-Milman and Choquet theorems, obtained by Paul Poncet in [52]. Such results proved until now in the litterature in finite dimension only [119], [82], [108], are deduced from a Krein-Milman type theorem in lattices [50], obtained by mean of continuous lattices theory.

All these results should allow one to find again the results on Martin boundary described in Section 6.1.1, as presented in [36], and to obtain a max-plus Radon-Nikodým theorem generalizing at the same time the existence of a density results of Akian [1] and Barron, Cardaliaguet, Jensen [75], and the max-plus separation theorem of Cohen, Gaubert and Quadrat [8].

6.4. Algorithmes/Algorithms

6.4.1. Méthodes multigrilles pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Multigrid methods for stochastic control and repeated zero sum games

Participants: Marianne Akian, Sylvie Detournay.

L'algorithme d'itération sur les politiques est bien connu pour résoudre efficacement les équations de la programmation dynamique associées à des problèmes de contrôle stochastique avec critère à horizon infini (Howard) ou ergodique (Denardo et Fox). Récemment, il a été généralisé au cas de problèmes de jeux à deux joueurs et somme nulle dégénérés (avec paiements ergodiques et de type "multi-chaîne"), au moyen de techniques d'algèbre max-plus et de théorie de Perron-Frobenius non linéaire [88]. Chaque itération de base de cet algorithme utilise la résolution d'un système d'équations linéaires dont l'opérateur est monotone, mais dont la taille peut être grande, soit parce qu'il provient d'une discrétisation fine d'une équation aux dérivées partielles, soit parce qu'il est associé à un problème discret de grande taille comme le graphe du Web.

Or, la méthode multigrille est l'une des rares méthodes permettant de résoudre, au moins dans les bons cas, des systèmes linéaires en un temps de l'ordre de la taille du système. De plus, alors que la méthode multigrille classique ne s'applique qu'à des discrétisations d'équations aux dérivées partielles elliptiques, la méthode multigrille algébrique (voir par exemple [147]) peut s'appliquer à tout système linéaire présentant des propriétés de monotonie (principe du maximum ou système avec M-matrice).

L'association entre méthodes multigrilles et itérations sur les politiques a déjà été utilisée et étudiée dans le cas de problèmes de contrôle stochastique actualisé (voir par exemple [58], [67]), ainsi que dans le cas d'un algorithme d'itération sur les politiques simplifié pour le contrôle ergodique (voir par exemple [5]), mais pour lequel il n'existe pas de preuve de convergence. La méthode multigrille algébrique a été récemment associée à des méthodes d'apprentissage (voir par exemple [159]). Nous l'avons aussi testée dans le cas de l'itération sur les politiques pour des problèmes de jeux à somme nulle actualisés au cours du stage de Shantanu Gangal en 2007.

La thèse de Sylvie Detournay a pour but de développer et d'étudier un algorithme associant une méthode d'itération sur les politiques du type de celle introduite dans [88] et une méthode multigrille algèbrique, afin de résoudre des problèmes de jeux à somme nulle dégénérés, éventuellement posés directement sous forme discrète. Sylvie Detournay a d'abord travaillé sur le cas non dégénéré (actualisé) en codant d'abord seulement l'itération sur les politiques (en C) et appelant des codes libres de méthodes multigrilles algèbriques. Ces codes n'étant pas assez souples pour être modifiés, elle a ensuite codé elle-même certains types de méthodes multigrilles algébriques. Des tests sur des discrétisations d'équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman ou d'Isaacs, ou d'inéquations variationnelles ont donné de bons résultats et ont été présentés lors de 3 conférences cette année [34], [32], [33].

Elle travaille actuellement sur le cas dégénéré, en combinant les algorithmes de [88], et la résolution d'équations linéaires à base des méthodes multigrilles algébriques déjà utilisées dans le cas non dégénéré mais aussi les méthodes multigrilles algèbriques développées dans la littérature pour le calcul des mesures invariantes de chaînes de Markov.

English version

Policy iteration is a powerful and well known algorithm to solve the dynamic programming equation associated to one player problems. It has recently been extended to degenerate two players problems (with ergodic payoff and in "multichain" cases) using ideas from max-plus algebra and nonlinear potential theory [88]. One basic iteration of the algorithm consists in solving a linear system which operator is monotone, but which size may be large since it comes from the discretization of a partial differential equation or since it is associated to a large size discrete problem such as the Web graph.

For the solution of large size linear systems, the state of art consists of multigrid methods which are often able to solve systems in linear time. Whereas multigrid methods can only be applied to systems that come from discretizations of elliptic partial differential equations, algebraic multigrid methods (see for instance [147]) can be applied to any linear system with monotonicity properties (discrete maximum principle or system with a M-matrix).

The association of multigrid methods with policy iteration has been used and studied in the case of discounted stochastic control problems (see for instance [58], [67]), or in the case of a simplified policy iteration algorithm for ergodic control (see for instance [5]), but for which no proof of convergence is known. Some recent work combines the algebraic multigrid method with learning methods [159]. We have also tested it in the case of policy iterations for discounted zero-sum two-player games, during the internship of Shantanu Gangal in 2007.

The aim of the PhD thesis of Sylvie Detournay is to develop and study an algorithm for degenerate two player games (that may come from a discrete time and finite state space model) combining a policy iteration such as that introduced in [88] and an algebraic multigrid method (AMG). Sylvie Detournay has first worked on the nondegenerate (discounted) case, by coding first the policy iterations (in C) and using free AMG softwares. Since these softwares cannot be modified easily, she has then implemented some types of AMG algorithms (in C). Some tests on discretisations of Hamilton-Jacobi-Bellman or Isaacs partial differential equations or variational inequalities gave good results and were presented this year in 3 conferences [34], [32], [33].

She is working now on the degenerate case by combining the algorithms of [88], with the solution of linear equations based on the AMG methods already used in the nondegenerate case, and also the AMG methods developped in the literature for computing invariant measures of Markov chains.

6.4.2. Algorithmique des polyèdres tropicaux/Algorithmics of tropical polyhedra

Participants: Xavier Allamigeon [EADS], Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA].

X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault, ont développé dans [69], [70] des algorithmes permettant de manipuler des polyèdres tropicaux (voir §6.2.1 pour les motivations et pour les fondements théoriques). X. Allamigeon, a implémenté ces algorithmes dans une librairie Ocaml, `TPLib` (“Tropical polyhedral library”). Celle-ci est distribuée sous license LPGL. Ce travail est actuellement poursuivi par X. Allamigeon, en exploitant l’approche de [43] qui permet d’employer des techniques d’hypergraphes.

English version

X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault, have developped in [69], [70] algorithms allowing one to handle tropical polyhedra (see §6.2.1 for motivations and theoretical background). X. Allamigeon has developed an Ocaml library, `TPLib`, the “Tropical polyhedral library”, which implements these algorithms. It is distributed under the LPGL license. This work is being pursued by X. Allamigeon, exploiting the reduction of [43], which allows one to develop hypergraph based techniques.

6.4.3. Approximation max-plus de fonctions valeurs/Max-plus approximation of value functions

Participants: Stéphane Gaubert, Zheng Qu, Shanjian Tang [Fudan university, Shanghai].

La thèse de Zheng Qu, démarrée en septembre, supervisée par S. Gaubert et S. Tang, porte sur le développement de méthodes tropicales en programmation dynamique approchée. Un problème de base consiste à approcher au mieux la fonction valeur d’un problème de contrôle ou de jeux par le supremum d’un petit nombre de fonctions choisies dans un dictionnaire fixé a priori. Pendant son travail de M2, Zheng Qu a obtenu des bornes, contrôlant le nombre minimal de telles fonctions nécessaires pour obtenir une précision donnée, à l’aide de la courbure Gaussienne de la fonction valeur. Elle a aussi commencé à explorer divers algorithmes d’approximation.

English version

The PhD work of Zheng Qu, which started in September, and is supervised by S. Gaubert and S. Tang, aims in particular at developing tropical methods in approximate dynamic programming. A basic problem consists in approximating the value function of a control or game problem by the supremum of a small number of functions taken from a given dictionnary. During her Master thesis, Zheng Qu obtained bounds, determining the minimal number of such functions needed to get a prescribed accuracy, in terms of the Gauss curvature of the value function. She began to investigate various approximation algorithms.

6.5. Applications

6.5.1. Introduction

Nous présentons maintenant plusieurs travaux de nature appliquée, touchant à des domaines variés, dans lesquels nous exploitons certaines des techniques mathématiques présentées précédemment, et particulièrement celles qui relèvent de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la convexité tropicale. Ces applications utilisent aussi des techniques d'algèbre linéaire ou d'optimisation convexe.

English version

In this section, we describe several applied works in which we use some of the theoretical tools developed by the team, including non-linear Perron-Frobenius theory and tropical convexity. Some of these applications also make an intensive use of linear algebraic and convex programming methods.

6.5.2. Propriétés des valeurs propres de Perron et de Floquet, et application en chronothérapeutique/Properties of Perron and Floquet eigenvalue, with an application to chronotherapeutics

Participants: Jean Clairambault [Projet BANG, INRIA], Stéphane Gaubert, Thomas Lepoutre [Projet BANG puis DRACULA, INRIA], Benoît Perthame [Projet BANG, INRIA].

On s'intéresse à des modèles de systèmes dynamiques monotones structurés en âge représentant la croissance de populations de cellules (saines ou tumorales), à la suite de travaux de Clairambault et Perthame. Il s'agit de comprendre l'influence du contrôle circardien sur la croissance des cellules. Dans le cas stationnaire, le taux de croissance est représenté par une valeur propre de Perron. Dans le cas périodique, il s'agit d'une valeur propre de Floquet. Le travail [16] démontre une propriété générale de log-convexité du multiplicateur de Floquet et l'interprète en termes de chronothérapeutique.

English version

We study monotone dynamical systems representing the growth of cells (healthy or tumoral), following a work of Clairambault and Perthame. The goal is to understand how the circadian control influences the growth of cells. In the case of stationnary monotone systems, this growth is measured by the Perron root. In the time periodic case, this Perron root is replaced by a Floquet multiplier. The work [16] establishes a general log-convexity property of the Floquet multiplier, and interprets it in terms of chronotherapeutics.

6.5.3. Identification du trafic dans les réseaux IP/Traffic identification in IP networks

Participants: Mustapha Bouhtou [Orange Labs], Stéphane Gaubert, Guillaume Sagnol.

Le travail de thèse de Guillaume Sagnol [11] porte sur l'identification du trafic dans des réseaux IP. Le point de départ est le problème classique consistant à déterminer le trafic entre chaque origine et chaque destination à partir de diverses mesures et en particulier de mesures sur les liens (mesures SNMP). Ce problème a été renouvelé ces dernières années, en raison de la complexité croissante des réseaux, mais aussi de la possibilité de déployer dans le réseau des outils comme le logiciel Netflow produit par Cisco, permettant d'accéder finement à la mesure du trafic.

Dans [29], [30], on aborde le problème de l'optimisation de l'emploi de Netflow à l'aide d'une démarche de type “plans d'expérience”. Il s'agit de minimiser les ressources dédiées à la mesure du trafic, tout en garantissant une certaine qualité de mesure. La qualité de la mesure peut être quantifiée par une matrice symétrique positive, qui représente la covariance de l'erreur d'estimation, ou plutôt, par des fonctionnelles scalaires de celle-ci, croissantes pour l'ordre des matrices symétriques (ordre de Loewner). On parvient ainsi après quelques réécritures, à une famille de problèmes dont les plus typiques sont de la forme

$$\max\left(\mathrm{trace}\left(M(w)\right)^p\right)^{1/p}, \quad M(w) = \sum_k w_k A_k^T A_k, \quad w_k \in \{0,1\}, \quad \sum_k w_k c_k \leq B \ . \tag{12}$$

Ici, la variable binaire w_k modélise la possibilité de faire une observation de type k, celle ci-fournissant une fonction linéaire $A_k x$ (certaines informations agrégées) du vecteur x (le trafic) qu'il s'agit d'inférer. La contrainte $\sum_k w_k c_k \leq B$ limite le nombre de mesures ou un coût d'instrumentation. Les valeurs utiles de p sont dans l'intervalle fermé $[-\infty, 1]$. En relaxant la contrainte d'intégrité, on peut résoudre de tels problèmes par des algorithmes de type points intérieurs. Cependant, ces algorithmes (typiquement des SDP) deviennent trop coûteux pour des réseaux télécom réels (pour le réseau backbone Opentransit de France-Télécom, de l'ordre de 10^4 paires origine-destination). La contribution principale de [29], [30] est un nouvel algorithme (successive c-optimal design), basé sur la résolution de problèmes de plans d'experience dans lesquels on cherche à inférer une grandeur scalaire, combinaison linéaire de variables d'états. Cet algorithme repose sur le résultat de [23], [53], qui montre que ces derniers problèmes (scalaires) peuvent se formuler comme des problèmes coniques du second ordre (généralisation du théorème d'Elfving), qui contrairement aux formulations SDP, passent à l'échelle. On parvient ainsi à traiter des instances de réseaux précédemment inaccessibles, tout en obtenant une estimation de trafic de bonne qualité. Enfin, le problème combinatoire proprement dit est étudié dans [15], [54] à l'aide de techniques d'optimisation sous-modulaire.

English version

The PhD work of Guillaume Sagnol [11] deals with the identication of the trafic in IP networks. Its starting point is the classical problem which consists in determining the trafic between every origin and destination, from the available measurements, like the aggregated flows on the links (SNMP measures). This problem has been renewed the last years, due to the increasing complexity of networks, but also to the possibility of deploying refined measurement tools like the Netflow software produced by the company Cisco.

In [29], [30], we developed an experimental design model allowing one to optimize the use of Netflow. The goal is to minimize the resources devoted to measurement under constraints requiring a given quality of measure. The latter can be represented by a positive semidefinite matrix (which gives the covariance of the estimation error) or rather, by scalar functionals of this matrix, which are order preserving for the standard ordering of symmetric matrices (Loewner order). After some transformations, we arrive at a family of problems which are typically of the form (12). Here, the binary decision variable w_k models the possibility to make an observation of a certain type, which yields a linear function $A_k x$ representing an agregated information of the trafic vector x to be estimated. The constraint $\sum_k w_k c_k \leq B$ limits the number of measures, or their cost. The useful values of p are in the closed interval $[-\infty, 1]$. Then, by relaxing the integrity constraint, we solve such problems by interior point methods. However, these algorithms (typically SDP) become too slow for real telecom networks (around 10^4 origin-destination pairs for the Opentransit backbone network of France-Télécom).

The main contribution of [29], [30] is a new method (successive c-optimal design), relying on the successive resolution of optimal designs problems in which the quantity to be inferred is a scalar linear combination of the state variables. This method exploits the results of [23], [53], showing that such scalar problems can be formulated as second order conic quadratic problems, which unlike SDP problems, scale well, allowing us to solve previously unaccessible instances, keeping a good quality of estimation of the traffic. Finally, the combinatorial optimization problem is studied in [15], [54] using submodular optimization techniques.

6.5.4. Analyse statique de programmes et itération sur les politiques/Static analysis of computer programs and policy iteration

Participants: Assale Adjé, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA].

La thèse d'A. Adjé, encadrée conjointement par S. Gaubert et E. Goubault, traite de l'application de méthodes de théorie des jeux et d'optimisation (analyse convexe abstraite, programmation convexe et non convexe) aux problèmes de point fixe intervenant en analyse statique de programme. On a introduit dans [39] un nouveau domaine en analyse statique, qui étend au cas non-linéaire le domaine des "gabarits" introduit par Manna, Sankaranarayanan, and Sipma [149]. Ce domaine permet de représenter des ensembles accessibles non-convexes (définis par un nombre fini d'inégalités prises dans un dictionnaire). Ceci permet d'intégrer en particulier des informations liées à l'existence de fonctions de Lyapunov, qui sont souvent connues dans les applications issues de l'ingénierie. Nous avons montré dans [39] que des invariants (expérimentalement précis) pouvaient être obtenus en couplant l'itération sur les politiques avec des relaxations de Shor (relaxations SDP de problèmes quadratiques non-convexes), ce qui fournit des abstractions précises de certains programmes numériques (ex: filtres avec seuils).

Un problème important consiste à déterminer le plus petit point fixe (l'algorithme de [39] fournit un point fixe, qui peut ne pas être minimal). Ce problème est abordé dans [48], où l'approche de [39] est comparée avec une approche duale développée par Gawlitza et Seidl.

English version

The PhD work of A. Adjé, co-supervised by S. Gaubert and E. Goubault, applies methods from game theory and optimization (generalized duality, convex and non convex programming) to the fixed point problems arising in static analysis of programs by abstract interpretation. We introduced in [39] a new domain in static analysis, which extends to nonlinear cases the "templates" introduced by Manna, Sankaranarayanan, and Sipma [149]. This domain allows one to represent accessible sets that are non convex. These are defined by finitely many inequalities taken from a dictionnary. This allows one to use in particular the information provided by Lyapunov functions, which are often known in applications arising from engineering. We showed in [39] that experimentally accurate invariants can be obtained by coupling policy iteration with Shor relaxation (SDP relaxation of convex programming problems). This yields accurate abstractions of some numerical programs, like linear filters with thresholds.

An important problem consists in determining the smallest fixed point (the algorithm of [39] yields a possibly non minimal fixed point). This problem is addressed in [48], in which the approach of [39] is compared with a dual approach developed by Gawlitza and Seidl.

6.5.5. Optimisation du référencement sur la toile/Optimization of web referencing

Participants: Marianne Akian, Mustapha Bouhtou [Orange Labs], Olivier Fercoq, Stéphane Gaubert.

La thèse d'O. Fercoq, co-encadrée par M. Akian, M. Bouhtou, et S. Gaubert, financée par un CRE d'Orange Labs, a pour but d'appliquer des méthodes d'optimisation et de théorie des jeux à l'optimisation de services en lignes. On a commencé en étudiant le problème de l'optimisation du référencement, que l'on formalise en se donnant par exemple un ensemble d'hyperliens et de ressources obligatoires, dont la nature et la position sur le site web sont déterminées à l'avance par le concepteur. Cet ensemble forme en quelque sorte le squelette du site web. On se donne aussi un ensemble d'hyperliens ou de ressources facultatives, pour lesquels le concepteur du site a certains degrés de liberté (le lien ou le contenu peut être mis sur une page plutôt qu'une autre, voire être omis).

Dans [37], [44], on aborde le problème de l'optimisation du "Pagerank" dans ce cadre, en appliquant des techniques de décision Markovienne classiques et sous-contraintes. Le problème peut en effet se ramener à un problème de contrôle ergodique ou de contrôle ergodique sous contraintes (ergodiques), selon que les contraintes sur les hyperliens sont locales à chaque page ou font intervenir plusieurs pages. On traite à la fois le cas relaxé où les probabilités de passage d'une page à une autre peuvent être des réels positifs quelconques (on peut par exemple supposer que cette probabilité dépend de la position et des caractères utilisés pour l'hyperlien correspondant) et le cas discret où ces probabilités sont uniformes parmis celles qui sont strictement positives (comme dans la modélisation classique conduisant au calcul du Pagerank). On montre par une technique polyédrale que le problème discret peut être résolu en temps polynômial s'il n'y a que des contraintes locales, et que le problème relâché peut toujours l'être. Cette approche conduit à un algorithme adapté à des instances de grande taille, couplant programmation dynamique et relaxation Lagrangienne, qui a été testé sur un fragment du graphe du web.

English version

The goal of the PhD work of O. Fercoq, cosupervised by M. Akian, M. Bouhtou, and S. Gaubert, and supported by a research contract (CRE) of Orange Labs, is to apply optimization and game theory methods to the optimization of online services. We started by investigating the problem of the optimization of referencing, which we modelled by considering a family of compulsory hyperlinks and resources (fixed in advance by the website designer, these constitute the "skeletton" of the website) and also a family of facultative hyperlink or resources (some links may be ommited or some other links may be added).

In [37], [44], we are approaching the problem of the pagerank optimization in this framework, by applying usual and constrainted Markov decision processes techniques. This problem can indeed be reduced to an ergodic control problem without or with (ergodic) constraints, depending on the fact that hyperlinks constraints are local to each web page or depend on several web pages. We study the relaxed problem where the transition probabilities from one page to another may be any positive real (one may assume for instance that this probability depends on the position and type used for the corresponding hyperlink), as well as the discrete problem where these probabilities are uniform among the positive ones (as in the usual modelisation leading to the Pagerank). We show, by a polyhedral technique, that the discrete problem can be solved in polynomial time if there are only local constraints, whereas the relaxed problem can always be solved in polynomial time. This approach leads to an algorithm adapted to large scale instances, based on dynamic programming and Lagrange relaxation, which has been tested on a fragment of the web graph.

6.5.6. Gestion du revenu appliquée à la tarification de services données/Yield management applied to pricing of data services

Participants: Mustapha Bouhtou [Orange Labs], Jean-Baptiste Dumont, Stéphane Gaubert.

Le travail de thèse CIFRE de J-B. Dumont, qui a démarré en Septembre, sous la supervision de M. Bouhtou et S. Gaubert, porte sur la tarification de services data et la gestion des ressources dans les réseaux mobiles, qui est abordée à l'aide de techniques de contrôle et d'optimisation stochastique.

English version

The CIFRE PhD work of J-B. Dumont, which started in September, under the joint supervision of M. Bouhtou and S. Gaubert, deals with the pricing of data services and resource allocation in mobile networks. This is addressed through stochastic control and stochastic optimization techniques.

7. Contracts and Grants with Industry

7.1. Contrats

- Optimisation de services en ligne: CRE avec Orange Labs (responsable du suivi Orange Labs: Mustapha Bouhtou), de février 2009 à février 2012, portant sur l'application de l'optimisation à la tarification et à l'amélioration de services en ligne. Ce travail applique des techiques d'optimisation (processus de décision markoviens) et d'analyse non-linéaire (généralisations d'algorithmes de classement de type "pagerank") dans un but notamment d'amélioration du référencement, et étudie les problèmes de tarification reliés. Ce contrat finance la thèse d'Olivier Fercoq, qui a démarré en octobre 2009.

- Thèse CIFRE de J-B. Dumont, financée par Orange Labs (encadrant Orange Labs: Mustapha Bouhtou, directeur de thèse: S. Gaubert), démarrée en septembre 2010. Sujet: tarification de services data et gestion des ressources dans les réseaux mobiles 3G et LTE.

8. Other Grants and Activities

8.1. Actions nationales

- Projet DIGITEO PASO (Preuve, Analyse Statique, Optimisation), de Sept. 2008 à Avril. 2011. Ce projet, dont le but est notamment d'appliquer des techniques d'optimisation à des problèmes de preuve de propriétés numériques de programmes, est coordonné par S. Putot (équipe MeASI, LIX/CEA), il fédère en outre des chercheurs de l'équipe-projet Typical (B. Werner), du LSS de Supélec (M. Kieffer, E. Walter), et de Maxplus (S. Gaubert). Ce projet a financé le post-doc de G. Vigeral dans l'équipe.
- Projet ANR Arpège ASOPT (Analyse statique et Optimisation), responsable B. Jeannet. Partenaires: équipe-projet Popart (INRIA Grenoble), équipe MeASI, EADS, et Maxplus. Ce projet a été labellisé par le pôle de compétitivité System@tic. Ce projet finance le postdoc de S. Sergeev dans l'équipe.
- Participation au projet ANR CPP (Confidence, Proof and Probabilities), responsable J. Goubault Larecq. Partenaires: LSV, CEA List, INRIA Saclay (Comète [responsable], Parsifal, Maxplus), Supelec L2S, Supelec SSE.

8.2. Actions internationales

- Projet commun de recherche dans le cadre du Laboratoire Européen Associé CNRS Franco-Roumain (LEA) Math Mode (2 ans, commencé en janvier 2009). Coopération entre Marianne Akian et Stéphane Gaubert du projet MAXPLUS et Viorel Nitica et Ivan Singer de l'IMAR, sur le thème “géométries convexes tropicales”.

8.3. Accueils de chercheurs étrangers

- Vladimir Gurvich (Rutgers Center for Operations Research), 1 semaine en janvier et 1 semaine en août.
- Sergey Sergeev (Univ. Birmingham), 1 semaine en février.
- Alexander Guterman (Université d'état de Moscou), 1 semaine en avril.
- Shmuel Friedland (Université de l'Illinois à Chicago), 1 semaine en juin.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique

- M . Akian :
  - Membre élue de la Commission d'évaluation de l'INRIA (suppléante depuis septembre 2008, pour 3 ans).
  - Membre nommée du conseil du laboratoire CMAP.
- S. Detournay.
  - Membre élue (collège doctorants) du conseil du laboratoire CMAP.
- S. Gaubert :

  - Vice-président du comité des projets du Centre de Recherche INRIA de Saclay – Île-de-France depuis Janvier 2008, et membre nommé de la commission d'évaluation de l'INRIA.
  - Membre du Conseil de la formation de l'ENSTA.
  - Membre du comité éditorial de la collection Mathématiques et Applications, SMAI et Springer.
  - Comité de programme de WODES'2010 (10th int. workshop on Discrete Evenet Systems, Berlin) et de NSV-3 (Third International Workshop on Numerical Software Verification, Edinburgh).
  - Membre de la commission de recrutement en Informatique à l'École polytechnique.
  - Membre du conseil scientifique du CMAP.

- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

- G. Sagnol:
  - Membre nommé (doctorant) du conseil de centre, pour le Centre de Recherche INRIA de Saclay.

9.2. Enseignement universitaire

- M. Akian
  - Cours " Contrôle de chaînes de Markov : programmation dynamique et applications" du M2 Modélisation et Méthodes Mathématiques en Économie et Finance (MMMEF) de Paris 1.

- S. Gaubert
  - Cours "Systèmes à Événements Discrets" de la spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images (ATSI) du M2 IST de l'Université d'Orsay. Ce cours est commun à l'Option Automatique de l'ENSMP.
  - Cours "Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux" du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l'Université de Paris 6.
  - Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [40].
  - CIMPA School on Dynamic Optimization, Tandil, Argentine, Septembre 2010 (5h00 of lectures at doctoral level, "Algebraic methods in dynamic programming").

- G. Sagnol
  - Petites Classes du cours de Mathématiques 2 (intégration) en première année à l'École des Mines de Paris.
  - Petites Classes du cours de "Programmation dynamique" en troisème année à l'ENSTA (cours magistral: Ramine Nikoukhah).

- G. Vigeral
  - TDs d'optimisation dynamique à l'ENSAE (6h).

9.3. Encadrement de thèse

- Assale Adjé, inscrit à l'École Polytechnique depuis octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse) et Eric Goubault (CEA).
- Meisam Sharify Najafabadi, inscrit à l'École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de S. Gaubert.
- Guillaume Sagnol, inscrit à l'École des Mines de Paris depuis octobre 2007. Encadrement assuré par S. Gaubert et M. Bouhtou (Orange Labs). Soutenance le 13 décembre 2010.
- Paul Poncet, inscrit à l'École Polytechnique depuis décembre 2007, sous la direction de M. Akian.
- Sylvie Detournay, inscrite à l'École Polytechnique à partir de septembre 2008, sous la direction de M. Akian.
- Olivier Fercoq, inscrit à l'École Polytechnique à partir d'octobre 2009. Encadrement assuré par S. Gaubert (directeur de thèse), M. Akian et M. Bouhtou (Orange Labs).
- Zheng Qu, inscrite à l'École Polytechnique à partir de septembre 2010, encadrée par S. Gaubert et S. Tang (Université Fudan, Shanghai, Chine).
- Jean-Baptiste Dumont, inscrit à l'École Polytechnique à partir de novembre 2010, encadré par M. Bouhtou (Orange Labs) et S. Gaubert (directeur de thèse).

9.4. Membre de jury

- M. Akian
  - Membre du jury du concours (national) DR2 de l'INRIA, Mai 2010.
  - Membre du jury du concours CR de l'INRIA Bordeaux Sud-Ouest, Mai 2010.
- S. Gaubert
  - Vice-Président du jury du concours CR de l'INRIA Saclay – Île-de-France, Mai 2010.
  - Membre de la commission de recrutement en informatique à l'École Polytechnique, Juin 2010.
  - Jury de thèse de G. Sagnol, Déc. 2010, École des Mines, Paris.

9.5. Participation à des colloques, séminaires, invitations

- A. Adjé
  - 19th European Symposium on Programming (ESOP 2010), March 22-26, 2010, Paphos, Cyprus. Présentation de [39].
- M. Akian
  - Visite d'Ivan Singer (IMAR), dans le cadre du LEA Math Mode, 1 semaine en mars.
  - EPSRC Symposium Workshop on Game theory for finance, social and biological sciences (GAM), Warwick (UK), 14-17 April 2010. Titre de l'exposé: "Tropical Polyhedra are Equivalent to Mean Payoff Games".
  - 16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Pisa, Italy, June 21-25, 2010. Titre de l'exposé: "Representation of maxitive measures" (avec P. Poncet).
- S. Detournay
  - 11th Copper Mountain Conference on Iterative Methods 2010, Colorado, 4-9 avril 2010. Titre de l'exposé: "Multigrid methods for stochastic games".
  - 40e Congrès National d'Analyse Numérique, France, 31 mai - 4 juin 2010 (CANUM 2010). Titre du Poster: "Méthodes multigrilles pour des problèmes de jeux stochastiques à somme nulle".

  - European Multi-Grid Conference EMG 2010, Ischia, Italie, 12-23 septembre 2010. Titre de l'exposé: "Multigrid methods for stochastic games".

- O. Fercoq
  - SIAM Annual Meeting, Pittsburgh, USA, 12-16 Juillet 2010. Titre de l'exposé: "PageRank Optimization Through Ergodic Control".
  - 11th Seminar on Operations research and Decision-mAking Engineering (SODA'10), Orange labs R&D, Sophia-Antipolis, 8-10 Juin 2010. Titre de l'exposé: "PageRank Optimization through Constrained Ergodic Control".

- S. Gaubert
  - Séminaire "Algo", INRIA Rocquencourt, 11 Janvier 2010, "Tropical aspects of eigenvalue computation problems".
  - Séminaire du département de Mathématique, Université de Saint Étienne, 4 Février 2010, "Tropical aspects of eigenvalue computation problems".
  - "Pretty theorems...", a workshop in the Honor of Jack Edmonds, IHP, Paris, February 9, 2010, "Tropical convexity and mean-payoff games".
  - Rencontre Unithé ou café, INRIA Saclay, 12 février 2010. Titre de l'exposé: "L'optimum est sous les tropiques".
  - Conférence STACS, Nancy, 5 Mars 2010, "The tropical double description method" (with Allamigeon and Goubault).
  - Journée inaugurale du groupe MAIRCI de la SMAI, 19 Mars 2010, Issy-les-Moulineaux, "Methods and applications of Tropical algebra: a guided tour".
  - AIMS Conference, Dresden, 25-27 Mai 2010, Positive systems session, "Tropical aspects of non-linear Perron-Frobenius theory".
  - 16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Pisa, Italy, June 21-25, 2010. Titre de l'exposé: "Tropical approximation of matrix eigenvalues" (avec M. Akian et M. Sharify).
  - 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2010), 5-9 juillet 2010. Titre de l'exposé: "The Correspondence between Tropical Convexity and Mean Payoff Games" (avec M. Akian et A. Guterman).
  - Workshop on Invariant generation, Edinburgh, July 21, 2010, "Tropical linear programming and parametric mean payoff games" (with R. Katz and S. Sergeev).
  - GDR MOA, 12 Octobre 2010, IHP, Paris, "Tropical convexity, Perron-Frobenius theory and repeated games".
  - Optimization seminar, TU Darmstadt, Oct. 25, 2010, "From tropical convexity to mean payoff games".
  - Visite d'Ivan Singer (IMAR), dans le cadre du LEA Math Mode, 1 semaine en Novembre 2010.

- J.-P. Quadrat
  - 16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Pisa, Italy, June 21-25, 2010. Titre de l'exposé : "Fundamental traffic diagrams: a maxplus point of view"

- G. Sagnol
  - Seminar on large graphs and networks of the CESAME project , UCL, Louvain-La-Neuve, Belgium, January 26, 2010. Titre de l'exposé: "A scalable technique to compute optimal experimental designs on large networks".

   - ISCO 2010, Hammamet, Tunisia, March 2010. Titre de l'exposé: "Submodularity and Randomized rounding techniques applied to Optimal Experimental Design".
   - Plenary meeting of the European ECODE project, INRIA Sophia-Antipolis, March 1, 2010. Titre de l'exposé : "Optimal monitoring in large networks by Successive c-Optimal Designs".
   - ACM SIGMETRICS 2010 Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems , New York, NY, USA, June 2010, "Optimal Monitoring in Large Networks by Successive c-Optimal Designs".
   - 22nd International Teletraffic Congress (ITC 22) , Amsterdam, The Netherlands, September 2010, "Successive c-Optimal Designs : A scalable technique to optimize the measurements on large networks".
- G. Vigeral
   - Séminaire Parisien de théorie des jeux, 4 janvier 2010. Titre de l'exposé: " Jeux récursifs avec ensembles d'actions compacts".
   - Séminaire d'Analyse appliquée de l'Université de Brest, 23 février 2010. Titre de l'exposé: "A uniform Tauberian theorem in optimal control".
   - Conférence de la SMAI sur l'optimisation et la décision, MODE 2010, 24-26 mars 2010. Titre de l'exposé: "Comportement asymptotique des valeurs de jeux répétés à somme nulle : équations d'évolution en temps discret et continu"
   - 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2010), 5-9 juillet 2010. Titre de l'exposé: "Asymptotic Values of Zero Sum Repeated Games: Evolution Equations in Discrete and Continuous Time".
- C. Walsh
   - Workshop "The geometry of the outer automorphism group of a free group", October 25 to October 29, 2010. American Institute of Mathematics, Palo Alto, California. Titre de l'exposé : "The horofunction boundary of Teichmüller space"
   - Workshop "Teichmüller Theory", November 28th - December 4th, 2010. MFO Oberwolfach, Germany. Titre de l'exposé : "The horofunction boundary of Teichmüller space".
   - Séminaire GT3, IRMA, Strasbourg, 15 novembre 2010. Titre de l'exposé : "The horofunction boundary of Teichmüller space".
   - Séminaire Géométrie Dynamique. Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1, 17 décembre 2010. Titre de l'exposé : "Thurston's metric on Teichmüller space, and its horoboundary".

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", 1999, vol. 351, n^{o} 11, p. 4515–4543.

[2] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. HOGBEN (editor), Chapman & Hall/CRC, 2006, vol. 39, Chapter 25.

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", 2003, vol. 52, n^{o} 2, p. 637-679, http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/.

[4] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", 2006, vol. 140, n^o 1, p. 157–176, http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084.

[5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", 2001, vol. 11, n^o 2, p. 153–188.

[6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992.

[7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", 1999, vol. 14, n^o 4.

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", 2004, vol. 379, p. 395–422, http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294.

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", 1999, vol. 23, p. 207–219.

[10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", 2004, vol. 356, n^o 12, p. 4931-4950, Also arXiv:math.FA/0105091, http://www.ams.org/tran/2004-356-12/S0002-9947-04-03470-1/home.html.

Publications of the year

Doctoral Dissertations and Habilitation Theses

[11] G. SAGNOL. *Plans d'expériences optimaux et application à l'estimation des matrices de trafic dans les grands réseaux: Programmation conique du second ordre et Sous-modularité (Optimal design of experiments with application to the inference of traffic matrices in large networks: Second order cone programming and Submodularity)*, École Nationale Supérieure des Mines de Paris (ENSMP), December 2010.

Articles in International Peer-Reviewed Journal

[12] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS. *Stability and convergence in discrete convex monotone dynamical systems*, in "Journal of Fixed Point Theory and Applications", 2010, Accepted for publication, http://arxiv.org/abs/1003.5346.

[13] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, R. KATZ. *The number of extreme points of tropical polyhedra*, in "J. Comb. Series. A.", 2010, Published Online, http://arxiv.org/abs/0906.3492.

[14] V. BLONDEL, S. GAUBERT, N. PORTIER. *The set of realizations of a max-plus linear sequence is semi-polyhedral*, in "Journal of Computer and System Sciences", 2010, vol. In Press, Corrected Proof [*DOI :* 10.1016/J.JCSS.2010.08.010], http://arxiv.org/abs/1010.3685, http://prunel.ccsd.cnrs.fr/ensl-00507757/fr/.

[15] M. BOUHTOU, S. GAUBERT, G. SAGNOL. *Submodularity and Randomized rounding techniques applied to Optimal Experimental Design*, in "Electronic Notes on Discrete Mathematics", 2010, vol. 36, p. 679–686, ISCO 2010 - International Symposium on Combinatorial Optimization, http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2010.05.086.

[16] J. CLAIRAMBAULT, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE. *Circadian rhythm and cell population growth*, in "Mathematical and Computer Modelling", 2010, In Press, Corrected Proof [*DOI :* 10.1016/J.MCM.2010.05.034], http://arxiv.org/abs/1006.3459, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00492983/fr/.

[17] M. DI LORETO, S. GAUBERT, R. KATZ, J.-J. LOISEAU. *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, in "SIAM J. Control Optim.", 2010, vol. 48, n^{o} 8, p. 5606-5628, http://arxiv.org/abs/0901.2915, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00411243/en/.

[18] J. EDMONDS, S. GAUBERT, V. GURVICH. *Scarf oiks*, in "Electronic Notes in Discrete Mathematics", 2010, vol. 36, p. 1281-1288, ISCO 2010 - International Symposium on Combinatorial Optimization, http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2010.05.162.

[19] J. EDMONDS, S. GAUBERT, V. GURVICH. *Sperner oiks*, in "Electronic Notes in Discrete Mathematics", 2010, vol. 36, p. 1273-1280, ISCO 2010 - International Symposium on Combinatorial Optimization, http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2010.05.161.

[20] S. GAUBERT, R. KATZ. *Minimal half-spaces and external representation of tropical polyhedra*, in "Journal of Algebraic Combinatorics", 2010, Published on line [*DOI :* 10.1007/S10801-010-0246-4], http://arxiv.org/abs/0908.1586.

[21] S. GAUBERT, F. MEUNIER. *Carathéodory, Helly and the others in the max-plus world*, in "Discrete Comput. Geom.", 2010, vol. 43, n^{o} 3, p. 648–662, http://dx.doi.org/10.1007/s00454-009-9207-x.

[22] P. PONCET. *A decomposition theorem for maxitive measures*, in "Linear Algebra and applications", 2010, Article in press, Corrected proof [*DOI :* 10.1016/J.LAA.2010.03.004], http://arxiv.org/abs/0912.5178.

[23] G. SAGNOL. *Computing Optimal Designs of multiresponse Experiments reduces to Second-Order Cone Programming*, in "Journal of Statistical Planning and Inference", 2010, vol. In Press, Corrected Proof [*DOI :* 10.1016/J.JSPI.2010.11.031], http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V0M-51M0N9C-1/2/4240c1cc1abf2c79e62c7745c986604b.

[24] S. SORIN, X. VENEL, G. VIGERAL. *Asymptotic properties of optimal trajectories in dynamic programming*, in "Sankhya", 2010, vol. 72-A, p. 237-245, http://sankhya.isical.ac.in/search/72a1/final15.pdf.

[25] G. VIGERAL. *Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces*, in "ESAIM COCV", 2010, vol. 16, n^{o} 4, p. 809-832, http://arxiv.org/abs/0904.2342.

International Peer-Reviewed Conference/Proceedings

[26] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *The correspondence between tropical convexity and mean payoff games*, in "Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2010)", Budapest, Hungary, 5-9 July 2010, p. 1295–1302.

[27] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *The tropical double description method*, in "Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2010)", Nancy, France), March 4-6 2010, http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2010/2443/pdf/1001.AllamigeonXavier.2443.pdf.

[28] S. GAUBERT, R. KATZ, S. SERGEEV. *Tropical linear programming and parametric mean payoff games*, in "Third international Workshop on Invariant Generation (WING'2010), associated with the International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR 2010)", Edinburgh, July 21 2010.

[29] G. SAGNOL, M. BOUHTOU, S. GAUBERT. *Successive c-Optimal Designs : A scalable technique to optimize the measurements on large networks*, in "Proceedings of the ACM SIGMETRICS 2010 Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems", New York, NY, USA, June 2010 2010, p. 347–348, Extended abstract, http://dx.doi.org/10.1145/1811039.1811080.

[30] G. SAGNOL, S. GAUBERT, M. BOUHTOU. *Optimal Monitoring in Large Networks by Successive c-Optimal Designs*, in "Proceedings of the 22nd International Teletraffic Congress (ITC 22)", Amsterdam, The Netherlands, September 2010 2010, http://dx.doi.org/10.1109/ITC.2010.5608717.

Workshops without Proceedings

[31] M. AKIAN. *Tropical Polyhedra are Equivalent to Mean Payoff Games*, in "EPSRC Symposium Workshop on Game theory for finance, social and biological sciences (GAM)", Warwick (UK), 14-17 April 2010 2010.

[32] M. AKIAN, S. DETOURNAY. *Méthodes multigrilles pour des problèmes de jeux stochastiques à somme nulle*, in "40e Congrès National d'Analyse Num'erique (CANUM 2010)", France, 31 mai - 4 juin 2010, Poster.

[33] M. AKIAN, S. DETOURNAY. *Multigrid methods for stochastic games*, in "European Multi-Grid Conference EMG 2010", Ischia, Italie, 12-23 septembre 2010.

[34] M. AKIAN, S. DETOURNAY. *Multigrid methods for stochastic games*, in "11th Copper Mountain Conference on Iterative Methods", Colorado, April 4-9 2010.

[35] M. AKIAN, S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Tropical approximation of matrix eigenvalues*, in "16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS)", Pisa, Italy, June 21 - June 25 2010.

[36] M. AKIAN, P. PONCET. *Representation of maxitive measures*, in "16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS)", Pisa, Italy, June 21 - June 25 2010.

[37] O. FERCOQ, M. AKIAN, M. BOUHTOU, S. GAUBERT. *PageRank Optimization Through Ergodic Control*, in "SIAM Annual Meeting", Pittsburgh, USA, July 12-16 2010.

[38] S. GAUBERT, L. GRIGORI, M. SHARIFY. *A parallel preprocessing for the optimal assignment problem based on diagonal scaling*, in "6th International Workshop on Parallel Matrix Algorithms and Applications (PMAA'10)", Basel, Switzerland, June 30 - July 02 2010.

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

[39] A. ADJÉ, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Coupling policy iteration with semi-definite relaxation to compute accurate numerical invariants in static analysis*, in "Proceedings of the 19th European Symposium on Programming (ESOP 2010)", Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2010, vol. 6012, p. 23–42, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11957-6_3.

Research Reports

[40] F. BONNANS, S. GAUBERT. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, École Polytechnique, 2010, Sixième édition, 176 p..

[41] Z. QU. *Polyhedral approximation of value functions*, University Paris 6, September 2010.

Other Publications

[42] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. NITICA, I. SINGER. *Best approximation in max-plus semimodules*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/abs/1012.5492.

[43] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, R. KATZ. *Tropical polar cones, hypergraph transversals, and mean payoff games*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/abs/1004.2778.

[44] O. FERCOQ, M. AKIAN, M. BOUHTOU, S. GAUBERT. *Ergodic Control and Polyhedral approaches to PageRank Optimization*, 2010, Submitted, http://arxiv.org/abs/1011.2348.

[45] S. FRIEDLAND, S. GAUBERT. *Submodular spectral functions of principal submatrices of an hermitian matrix*, 2010, Preprint., http://arxiv.org/abs/1007.3478.

[46] S. GAUBERT, S. SERGEEV. *The level set method for the two-sided eigenproblem*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/abs/1006.5702.

[47] S. GAUBERT, G. VIGERAL. *A maximin characterization of the escape rate of nonexpansive mappings in metrically convex spaces*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/abs/1012.4765.

[48] T. M. GAWLITZA, H. SEIDL, A. ADJÉ, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Abstract Interpretation Meets Convex Optimization*, 2010, Preprint, submitted.

[49] M. OLIU-BARTON, G. VIGERAL. *A uniform Tauberian theorem in optimal control*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/abs/1004.4174.

[50] P. PONCET. *Convexities on ordered structures and the Krein-Milman theorem*, 2010, Preprint.

[51] P. PONCET. *Domain-valued maxitive maps and their representations*, 2010, Preprint, http://arxiv.org/abs/1001.0158.

[52] P. PONCET. *The max-plus Krein-Milman theorem*, 2010, Preprint.

[53] G. SAGNOL. *A Class of Semidefinite Programs with rank-one solutions*, 2010, Revised version. Submitted, http://arxiv.org/pdf/0909.5577.

[54] G. SAGNOL. *Polynomial-time Approximability Results for combinatorial problems arising in Optimal Experimental Design*, 2010, Preprint. Submitted, http://arxiv.org/pdf/1007.4152.

[55] G. VIGERAL. *Iterated monotonic nonexpansive operators and asymptotic properties of zero-sum stochastic games*, 2010, Preprint. Submitted.

[56] C. WALSH. *The horoboundary and isometry group of Thurston's Lipschitz metric*, 2010, Preprint, http://arxiv.org/abs/1006.2158.

References in notes

[57] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, vol. 570, x+473.

[58] M. AKIAN. *Méthodes multigrilles en contrôle stochastique*, Université Paris IX-Dauphine, Paris, 1990.

[59] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", 2004, vol. 339, p. 103–108, http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438.

[60] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090.

[61] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 327, Série I, p. 927–932, http://hal.inria.fr/inria-00073240.

[62] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games*, 2009, Submitted, http://arxiv.org/abs/0912.2462.

[63] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, p. 19-51, http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441.

[64] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Solutions of max-plus linear equations and large deviations*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005, Also arXiv:math.PR/0509279, http://hal.inria.fr/inria-00000218/en/.

[65] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control Optim.", 2008, vol. 47, n^{o} 2, p. 817–848 [*DOI :* 10.1137/060655286], http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0603619.

[66] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Doc. Math.", 2009, vol. 14, p. 195–240, http://arxiv.org/abs/math/0412408.

[67] M. AKIAN, J. MENALDI, A. SULEM. *On an investment-consumption model with transaction costs*, in "SIAM J. Control Optim.", 1996, vol. 34, n^{o} 1, p. 329–364.

[68] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[69] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Inferring Min and Max Invariants Using Max-plus Polyhedra*, in "Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)", Springer, 2008, vol. 5079, Valencia, Spain, 16-18 July 2008.

[70] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the Extreme Points of Tropical Polyhedra*, 2009, An abridged version of this manuscript, entitled “The tropical double description method”, has been accepted for publication in the Proceedings of STACS’2010, http://arxiv.org/abs/0904.3436.

[71] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Université Paris 6, January 2002.

[72] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, p. 219-230.

[73] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", 1998, vol. 275/276, p. 3–18.

[74] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, Cambridge university press, 1997, n° 64.

[75] E. BARRON, P. CARDALIAGUET, R. JENSEN. *Radon-Nikodym theorem in L^∞*, in "Appl. Math. Optim.", 2000, vol. 42, n° 2, p. 103–126.

[76] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98)", Cagliari, Italy, IEE, 1998.

[77] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC’01", 2001.

[78] T. BLYTH, M. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972.

[79] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Delft University of Technology, Dec 1993.

[80] S. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, Caltech, 1990.

[81] P. BUTKOVIČ. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", 2003, vol. 367, p. 313-335.

[82] P. BUTKOVIČ, H. SCHNEIDER, S. SERGEEV. *Generators, extremals and bases of max cones*, in "Linear Algebra Appl.", 2007, vol. 421, n° 2-3, p. 394–406.

[83] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984.

[84] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000.

[85] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", 1986, vol. 34, p. 6219–34.

[86] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[87] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, École des Mines, Dec. 2001.

[88] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", 2006, vol. 343, n^{o} 5, p. 377–382.

[89] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. MC GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control", Nantes, July 1998.

[90] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, INRIA, Le Chesnay, France, 1983, n^{o} 191, http://hal.inria.fr/inria-00076367.

[91] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", 2003, vol. 293, p. 189–217.

[92] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05)", Edinburgh, LNCS, Springer, July 2005, p. 462–475.

[93] P. COUSOT, R. COUSOT. *Abstract Interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points*, in "Principles of Programming Languages 4", 1977, p. 238–252.

[94] P. COUSOT, R. COUSOT. *Comparison of the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. JTASPEFL '91, Bordeaux*, in "BIGRE", October 1991, vol. 74, p. 107–110.

[95] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", 1980, vol. 78, n^{o} 3, p. 385–390.

[96] R. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, 1979, n^{o} 166.

[97] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994)", Cambridge, Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, vol. 11, p. 354–382.

[98] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, LAAS, 1990.

[99] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", 2004, vol. 9, p. 1–27 (electronic).

[100] V. DHINGRA, S. GAUBERT. *How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration*, in "Valuetools '06: Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools", New York, NY, USA, ACM Press, 2006, 12, http://doi.acm.org/10.1145/1190095.1190110.

[101] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, Gauthier Villars, Paris, 1953, vol. XXI.

[102] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005.

[103] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", 1997, vol. 324, n° 9, p. 1043–1046.

[104] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", 2002, vol. 15, n° 2, p. 497–529 (electronic), http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151.

[105] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Dec 1995, vol. 40, n° 12, p. 2014–2025.

[106] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the Proc. of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07)", Braga (Portugal), LNCS, Springer, 2007, vol. 4421, p. 237–252, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71316-6_17.

[107] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 326, Série I, p. 43–48.

[108] S. GAUBERT, R. KATZ. *The Minkowski Theorem for Max-plus Convex Sets*, in "Linear Algebra and Appl.", 2007, vol. 421, p. 356–369, http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0605078.

[109] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", 1999, vol. 44, n° 4, p. 683–697.

[110] S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Tropical scaling of polynomial matrices*, in "Positive systems", Berlin, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, Berlin, 2009, vol. 389, p. 291–303, See also arXiv:0905.0121, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02894-6_28.

[111] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

[112] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", 1996, vol. 323, n° 4, p. 371–375.

[113] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOC, Paris, 2002.

[114] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", 1977, vol. 2, p. 25-41.

[115] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1979, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984.

[116] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Algebraic and combinatorial methods in operations research", Amsterdam, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam, 1984, vol. 95, p. 147–163.

[117] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", 2003, vol. 293, p. 141–167.

[118] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", 1990, vol. 72, p. 27–38.

[119] S. HELBIG. *On Carathéodory's and Krein-Milman's theorems in fully ordered groups*, in "Comment. Math. Univ. Carolin.", 1988, vol. 29, n^o 1, p. 157–167.

[120] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Jan 1989, vol. 34, n^o 1, p. 3-9.

[121] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[122] M. KREĬN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", 1950, vol. 1950, n^o 26, 128.

[123] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", 1993, vol. 3.

[124] A. LAKHOUA. *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007.

[125] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, p. 167–187.

[126] J.-Y. LE BOUDEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, Springer, 2001, n^o 2050.

[127] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Université Rennes 1, September 2002.

[128] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Université de Tours, November 2001.

[129] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", 1991, vol. 81, p. 137–145.

[130] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", 2001, vol. 69, n^o 5, p. 696–729, http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128.

[131] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J.-P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", 2005, vol. 50, n^o 5, p. 699-705, http://hal.inria.fr/inria-00072263.

[132] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", July 2002, vol. 8, n^o 3, p. 519–562.

[133] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", 2005, vol. XLIII, p. 51-62, http://hal.inria.fr/inria-00072311.

[134] V. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, Edition Mir, Moscou, 1987.

[135] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, 1992, vol. 13.

[136] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), Kluwer/Plenum, New York, 2004, vol. 3, p. 257–300, http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015.

[137] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[138] R. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", 1988, vol. 75, n^o 391.

[139] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", 1991, vol. 1, n^o 2, p. 177-207.

[140] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

[141] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control", Honolulu, Dec. 1990.

[142] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall, 2001, n^o 119.

[143] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", 1990, n^o 311, p. 745-748.

[144] I. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", 1967, vol. 3, n^o 2, p. 66-78.

[145] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", 2001, vol. 121, p. 221–246.

[146] A. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000.

[147] J. W. RUGE, K. STÜBEN. *Algebraic multigrid*, in "Multigrid methods", Philadelphia, PA, Frontiers Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1987, vol. 3, p. 73–130.

[148] S. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", 2002, n^{o} 3, p. 163–180, 192.

[149] S. SANKARANARAYANAN, H. SIPMA, Z. MANNA. *Scalable Analysis of Linear Systems using Mathematical Programming*, in "VMCAI", LNCS, 2005, vol. 3385.

[150] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, p. 143–150.

[151] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", 1994, vol. 28, n^{o} 3-4, p. 277–294.

[152] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997.

[153] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", 2004, vol. 4, n^{o} 3, p. 389–411.

[154] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)", Basel, Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 2001, vol. 201, p. 135–146, http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163.

[155] N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", 1967, vol. 3, p. 39–71, in russian.

[156] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", 2003, vol. 293, n^{o} 1, p. 45–54, Max-plus algebras.

[157] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, Ekonomický ùstav C ˇSAV, Praha, 1976, (in Czech).

[158] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981.

[159] O. ZIV, N. SHIMKIN. *Multigrid Methods for policy evaluation and reinforcement learning*, in "Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC05)", Limassol, Cyprus, 2005, p. 1391-1396.