



IN PARTNERSHIP WITH:  
**Université de Technologie de  
Troyes**

Activity Report 2012

## **Project-Team GAMMA3**

Automatic mesh generation and advanced  
methods

RESEARCH CENTER  
**Paris - Rocquencourt**

THEME  
**Computational models and simula-  
tion**



## Table of contents

<b>1. Members</b>	<b>1</b>
<b>2. Overall Objectives</b>	<b>1</b>
2.1. Introduction	1
2.2. Highlights of the Year	2
<b>3. New Results</b>	<b>2</b>
3.1. Validité des éléments finis usuels	2
3.2. Maillages tétraédriques de grande taille	3
3.3. Surface meshing with metric gradation control	3
3.4. Metric field interpolation	3
3.5. Large deformation simulation using adaptive remeshing	4
3.6. Maillage d'un milieu géologique et d'ouvrages de stockage	4
3.7. Advanced meshing and remeshing procedure for mechanical and numerical simulations	5
3.8. Effect of fibre geometrical morphology on the mechanical properties of PolyPropylene Hemp fibre composite material	6
3.9. Mise au point de méthodes de remaillage adaptatif 3D dans le cadre de simulations numériques de mise en forme de structure minces	6
3.10. Mise au point de méthodes de remaillage adaptatif 3D dans le cadre de simulations numériques de mise en forme de structure minces	7
3.11. Applications du maillage et développements de méthodes avancées pour la cryptographie	7
3.12. Développement de méthodes avancées et maillages appliqués à l'étude de la nanomorphologie des nanotubes/fils en suspension liquide	7
3.13. Applications du maillage à des problèmes multi-physiques, développement de méthodes de résolutions avancées et modélisation électromagnétisme-thermique-mécanique à l'échelle mesoscopique	8
3.14. Mesh adaptation for very high-order numerical scheme	8
3.15. Visualisation et modification des maillages courbes d'ordre élevé	9
3.16. A changing-topology ALE numerical scheme	9
3.17. Mesh adaptation for Navier-Stokes Equations	9
3.18. Maillages hexaédriques et calcul parallèle	9
<b>4. Bilateral Contracts and Grants with Industry</b>	<b>10</b>
4.1. Bilateral Contracts with Industry	10
4.2. Bilateral Grants with Industry	10
<b>5. Partnerships and Cooperations</b>	<b>10</b>
5.1. Regional Initiatives	10
5.2. European Initiatives	10
5.3. International Research Visitors	10
5.3.1. Internships	10
5.3.2. Visits to International Teams	10
<b>6. Dissemination</b>	<b>11</b>
6.1.1. Teaching	11
6.1.2. Supervision	11
<b>7. Bibliography</b>	<b>11</b>



# Project-Team GAMMA3

**Keywords:** Geometry Modeling

*Creation of the Project-Team:* January 01, 2010 .

## 1. Members

### Research Scientists

Paul-Louis George [Team leader, responsable scientifique, Senior Researcher]  
Patrick Laug [Responsable permanent, Senior Researcher, HdR]  
Frédéric Alauzet [Junior Researcher, HdR]  
Adrien Loseille [Junior Researcher]

### Faculty Members

Houman Borouchaki [Professeur, Université de Technologie de Troyes, HdR]  
Abel Cherouat [Professeur, Université de Technologie de Troyes, HdR]  
Dominique Barchiesi [Professeur, Université de Technologie de Troyes, HdR]  
Thomas Grosjes [Maître de conférences, Université de Technologie de Troyes, HdR]  
Laurence Moreau [Maître de conférences, Université de Technologie de Troyes]

### Engineers

Dominique Moreau [Ingénieur Expert, Université de Technologie de Troyes]  
Julien Castelneau [Ingénieur Expert]  
Loïc Maréchal [Ingénieur Expert]

### PhD Students

Guillaume Dufay [Université de Technologie de Troyes]  
Rémi Figueredo [Université de Technologie de Troyes]  
Mickael François [Université de Technologie de Troyes]  
Florent Ilczyszyn [Université de Technologie de Troyes]  
Sameh Kessentini [Université de Technologie de Troyes]  
Estelle Mbinky [Université Paris 6]  
Nicolas Barral [Université Paris 6]  
Victorien Menier [Université Paris 6]  
Longmin Ran [Université de Technologie de Troyes]  
Faouzi Slimani [Université de Technologie de Troyes]  
Rémi Slys [Université de Technologie de Troyes]  
Brahim Yahiaoui [Université de Technologie de Troyes]  
Jie Zhang [Université de Technologie de Troyes]

### Administrative Assistant

Maryse Desnous [TR (en commun avec Macs, Bang et Reo)]

## 2. Overall Objectives

### 2.1. Introduction

Une branche importante des sciences de l'ingénieur s'intéresse aux calculs des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques, ...) par la méthode des éléments ou des volumes finis. Ces méthodes utilisent comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées. Par suite, les algorithmes (de construction) de maillages occupent un rôle important dans toute simulation par la méthode des éléments ou des volumes finis d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé [47].

L'équipe-projet GAMMA3 a été créé en 2010 à la suite du projet GAMMA. L'équipe est bilocalisée avec une partie à l'UTT (Troyes) et l'autre à Rocquencourt. Les thèmes du projet regroupent un ensemble d'activités concernant les points indiqués ci-dessus, en particulier, l'aspect génération automatique de maillages afin de construire les supports utilisés par les méthodes d'éléments ou de volumes finis. Sont également étudiés les aspects de modélisation géométrique, de post-traitement et de visualisation des résultats issus de tels calculs [48].

L'évolution de la demande en termes de génération automatique de maillages implique une évolution des méthodes classiques de création de maillages vers des méthodes permettant de construire des maillages contrôlés. Les maillages doivent donc être soit isotropes, le contrôle portant sur des tailles souhaitées, soit anisotropes, le contrôle portant à la fois sur des directions et des tailles selon ces dernières.

Le développement d'algorithmes de maillages gouvernés sert de support naturel à la conception de boucles de maillages adaptatifs qui, via un estimateur d'erreurs *a posteriori*, permettent de contrôler la qualité des solutions.

Ces préoccupations amènent à considérer le problème du maillage des domaines de calculs en eux-mêmes tout comme celui du maillage ou du remaillage des courbes et surfaces, frontières de ces domaines.

La taille, en termes de nombre de nœuds, des maillages nécessaires pour certaines simulations, amène à travailler sur la parallélisation des processus de calculs. Cette problématique conduit également à s'intéresser à l'aspect multi-cœurs au niveau des algorithmes de maillages proprement dits.

Simultanément, le volume des résultats obtenus dans de telles simulations, nécessite d'envisager le post-traitement de ces résultats en parallèle ou par des méthodes appropriées.

Par ailleurs, de nombreux problèmes partent de saisies *scanner* (ou autre système discret) des géométries à traiter et demandent d'en déduire des maillages de surfaces aptes à être, par la suite, traités par les méthodes classiques (de remaillage, d'optimisation, de calculs).

Enfin, la maturité de certaines méthodes (victimes de leur succès) conduit les utilisateurs à demander plus et à considérer des problèmes de maillage ou des conditions d'utilisations extrêmes induisant des algorithmes *a priori* inattendus.

Les objectifs du projet GAMMA3 consistent à étudier l'ensemble des points mentionnés ci-dessus afin de rendre automatique le calcul de la solution d'un problème donné avec une précision imposée au départ. Par ailleurs, certaines des techniques utilisées dans les problématiques de maillage sont utilisables dans d'autres disciplines (compression d'images pour ne citer qu'un seul exemple).

## 2.2. Highlights of the Year

### **Paul-Louis George : Inria - Dassault Systèmes 2012 Innovation Award winner:**

Team leader of the Gamma3 project team (Inria, Troyes University of Technology), Paul-Louis George is one of the inventors of the GHS3D volume mesh, a software used throughout the world by players in the industry, researchers and academics. Integrated in several software for 3D calculations by finished elements, GHS3D helps obtain simulations which are particularly reliable and high performing. A success based on teamwork undertaken over the long term and which is now being rewarded with the innovation award.

## 3. New Results

### 3.1. Validité des éléments finis usuels

**Participants:** Houman Borouchaki, Paul-Louis George [correspondant].

éléments finis-éléments finis généralisés-P1-P2-Q1-Q2-Bézier

On continue l'étude sur les conditions assurant la validité géométrique des éléments finis usuels de degré 1 et 2. La formulation éléments finis ne conduisant pas toujours à une conclusion simple, on formule les éléments finis sous leur forme de Bézier. Ceci conduit à exhiber des conditions suffisantes (parfois nécessaires et suffisantes) de validité des éléments, c'est-à-dire des conditions garantissant la positivité de leur jacobien. Pour les éléments de degré 2, on donne l'interprétation géométrique de ces conditions. Les éléments étudiés sont le triangle à 3 nœuds, le triangle à 6 nœuds, le quadrilatère à 4 nœuds et les quadrilatère à 8 et 9 nœuds, le tétraèdre à 4 nœuds et le tétraèdre à 10 nœuds puis les pentaèdres à 6, 15 et 18 nœuds et les hexaèdres à 8, 27 et 20 nœuds.

On regarde ensuite les éléments finis généralisés déduits d'une formulation en Bézier rationnels puis basés sur des fonctions B-splines et Nurbs.

### 3.2. Maillages tétraédriques de grande taille

**Participants:** Houman Borouchaki, Paul-Louis George [correspondant], Loïc Maréchal.

Triangulation-tétraèdre p1-Hilbert- Maillage de grande taille

Le comportement en complexité des algorithmes de triangulation sur les "gros" maillage nous amène à utiliser les algorithmes de renumérotation de type Hilbert qui minimisent les défauts de cache. Cette technique est également utilisée comme aide à l'optimisation des "gros" maillages avec des gains en temps important. L'algorithme de renumérotation est multi-cœurs.

Des triangulations de plusieurs dizaines de millions de sommets sont construites en utilisant un "simple" ordinateur. La vitesse d'insertion frole le million de tétraèdres à la seconde.

Par coquetterie (et pour améliorer la robustesse dans l'absolu), on regarde ce que donne nos méthodes quand on construit des maillages de plus de un milliard de tétraèdres en séquentiel (une machine de un Tera de mémoire est utilisée). On vérifie que la taille des cavités peut être arbitrairement grande ce qui nécessite une programmation plus délicate permettant de traiter ces cas peu courants dans les situations habituelles.

### 3.3. Surface meshing with metric gradation control

**Participants:** Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

Scientific computing requires the automatic generation of high quality meshes, in particular isotropic or anisotropic meshes of surfaces defined by a CAD modeler. For this purpose, two major approaches are called direct and indirect. Direct methods (octree, advancing-front or paving) work directly in the tridimensional space, while indirect methods consist in meshing each parametric domain and mapping the resulting mesh onto the composite surface. Using the latter approach, we propose a general scheme for generating "geometric" (or geometry-preserving) meshes by means of metrics. In addition, we introduce a new methodology for controlling the metric gradation in order to improve the shape quality. Application examples have shown the capabilities of this approach.

### 3.4. Metric field interpolation

**Participants:** Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

To solve a physical problem formulated in terms of partial differential equations, the finite element method is generally used, based on a spatial discretization, or *mesh*, of the domain studied. Local adaptations of meshes to the behavior of the physical phenomena can improve the accuracy to the computed solutions, and in particular it is possible to capture high variations of the solution in specific areas while maintaining a reasonable number of degrees of freedom. In an initial phase, a mesh of the domain is built by using any particular method, then a first calculation of the solution of the problem is made. After choosing an appropriate criterion (Hessian and/or gradient of the solution, error estimate in general), areas that must be adapted by refinement or coarsening are detected in the initial mesh, and a new mesh is generated which is better adapted to the problem. This process is iterated until obtaining a mesh which satisfies the specified criterion (for which the finite element error is bounded by a specified threshold).

In practice, via an *a posteriori* analysis of the finite element error, a discrete map of sizes or metrics is set to the mesh vertices. This discrete size or metric field is made continuous by interpolating on the mesh, and the new mesh is generated according to this new field. In general, for a given point of the domain, a mesh element containing this point is found, and the interpolation of the size or metric field at this point is made from the sizes or metrics associated with the vertices of the containing element. For a scalar size field, the interpolation is straightforward by considering any interpolation scheme (for instance linear or geometric). On the other hand, the same scheme cannot be applied in the case of metrics representing a tensor field. However, several approaches have been proposed based on the link between a size and the corresponding metric and, in most cases, the interpolation scheme for sizes is applied to a power or the logarithm of the metrics. In particular, as a size  $h$  is represented by the isotropic metric  $\mathcal{M} = \frac{1}{h^2} \mathcal{J}$ , where  $\mathcal{J}$  is the identity matrix, a possible link consists in approximating the size by  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ , then applying the size interpolation scheme to this new metric and finally recovering the interpolated metric. These schemes are still an approximation and require the calculation of the eigenvalues of  $\mathcal{M}$  which is generally costly.

In this work, a new method for interpolating discrete metric fields is proposed. It is based on the “natural decomposition” of metrics using the LU factorization. With this decomposition, for each metric, the natural sizes along particular (or natural) directions can be retrieved, thus the size interpolation scheme can be applied to both natural directions and sizes, and the interpolation on the metrics is obtained. The proposed method is faster than those mentioned above and provides a continuous metric field with low variations. Some numerical examples illustrate our methodology.

### 3.5. Large deformation simulation using adaptive remeshing

**Participants:** Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.

The object of non-linear solid and structural mechanics is the modeling and the computation of structures with strong non-linearities, both geometrical and physical. The aim is to simulate the behavior of a mechanical part submitted to various mechanical stresses, in order to improve its mechanical strength, or even to optimize its manufacturing process with respect to damage occurrence. Among various theoretical, numerical and geometric tools involved in such a simulation, the interest in adaptive remeshing is really high nowadays. It is generally based on local refinement (governed by error estimation) and vertex smoothing strategies. Let us mention that the main difficulty lies in the fact that, in large strains, the domain geometry is variable and cannot be defined in an explicit way.

New contributions to the strategy using adaptive meshing and *a posteriori* error estimation in large elasto-plasticity have been developed. We are interested in the problem of remeshing a mechanical structure composed of several parts (which are in contact) subjected to large plastic deformations. A general scheme, constituted by several steps necessary to an almost optimal representation of the evolving domain, is proposed. These steps are divided into two main categories: the definition of the boundary of the deformed parts and the whole remeshing of the parts. The remeshing is governed by a mesh size map representing the conformity with the underlying geometry of the deformed parts, the improvement of the accuracy of the desired mechanical fields, and the convergence of the mechanical process as well. This size map results from an *a posteriori* estimation of the “interpolation error” independently from the considered mechanical fields. The final deformation after the whole simulation is assumed to be obtained iteratively by “small” deformations (which is the case in the framework of an explicit integration scheme to solve the problem). After such a small deformation, rigid parts are moved and deformable parts are slightly distorted (assuming that each mesh element is still valid). The remeshing is applied to deformable parts after each deformation increment. The proposed technique is used to simulate the impact of a projectile on a confined explosive. We show in particular that the ignition of the explosive appears in two different areas.

### 3.6. Maillage d’un milieu géologique et d’ouvrages de stockage

**Participants:** Patrick Laug [correspondant], Houman Borouchaki.



Cette étude a été menée dans le cadre du partenariat stratégique ANDRA/Inria. L'objectif est la construction d'un maillage statique 3D prenant en compte la géométrie des couches d'un milieu géologique et celle d'ouvrages de stockage afin de réaliser un calcul d'hydraulique et de transfert de solutés. En particulier, ce maillage sera exploité pour mener des calculs préparatoires aux calculs de sûreté. Il permettra de mieux représenter à l'échelle du milieu géologique les différentes voies de transfert (ouvrages et géologie multicouches) des radionucléides, en considérant les évolutions géodynamiques, et de contribuer à identifier les simplifications éventuelles qui seront définies pour établir le modèle conceptuel de calcul de performances et de sûreté.

Les données d'entrée représentent la description géométrique du milieu géologique incluant les ouvrages de stockage. Le schéma de construction comprend quatre étapes :

*1. Prétraitement des données d'entrée.* Les sommets multiples du maillage volumique sont fusionnés afin de pouvoir extraire une topologie conforme. Grâce à cette topologie, les surfaces interfaces entre deux couches consécutives sont identifiées. Ces surfaces représentent des contraintes surfaciques que le maillage volumique doit respecter. En outre, les lignes intersections entre ces surfaces contraintes, appelées lignes d'affleurement, sont identifiées. De même, ces lignes représentent des contraintes linéiques pour le maillage volumique. Afin de définir la ligne polygonale associée à chaque rivière, les arêtes de l'enveloppe supérieure du maillage volumique de référence (surface topographique) dont les deux extrémités ont le même code de rivière sont identifiées.

*2. Définition de la géométrie du domaine 2D de référence.* On définit le plan de référence comme étant le plan d'équation  $z = 0$ , et le domaine 2D de référence comme la trace du polygone de l'extension horizontale dans ce plan. Toutes les contraintes linéiques (lignes d'affleurement, rivières et contours des ouvrages) sont projetées verticalement sur le plan de référence et leurs traces dans le domaine de référence sont retenues. En outre, des nouvelles lignes contraintes parallèles aux contours des ouvrages sont insérées afin de mieux contrôler la génération du maillage du domaine de référence. L'ensemble de toutes les lignes du domaine de référence est rendu conforme par ajout des points aux intersections éventuelles de ces lignes, et aussi par fusion des points et des lignes coïncidents.

*3. Construction du maillage quad-dominant du domaine 2D de référence.* Le maillage du domaine de référence est généré en utilisant un schéma adaptatif de construction de maillages quad-dominants. Dans un premier temps, un maillage quad-dominant initial du domaine est construit en spécifiant une taille fixe sur les lignes d'affleurement et les rivières et une taille dépendant de la grandeur des ouvrages sur ces derniers. Afin de contrôler la gradation du maillage (rapport maximal entre les longueurs d'arêtes issues d'un même sommet), deux maillages quad-dominants adaptés sont générés. Ici, l'adaptation consiste à modifier la carte de taille courante pour respecter le seuil de gradation spécifié.

*4. Construction du maillage hex-dominant 3D du milieu.* Le maillage volumique du milieu géologique est généré par extrusion verticale du maillage quad-dominant du domaine de référence. Deux types de configuration sont considérés : extrusion d'un quadrilatère (dit de base) du maillage du domaine de référence et extrusion d'un triangle (dit de base) du maillage du domaine de référence. Dans le premier cas, selon la configuration des surfaces (surfaces interfaces entre deux couches ou faces supérieures ou inférieures d'ouvrages) rencontrées, des hexaèdres et des prismes sont générés. Plus précisément, dans ce cas, l'extrusion résulte en un ensemble de quadrilatères ordonnés verticalement avec quatre arêtes appartenant à la même surface ou deux arêtes opposées appartenant chacune à une surface. Les quadrilatères consécutifs sont connectés et, en fonction du nombre de sommets communs entre deux quadrilatères consécutifs, des hexaèdres ou des prismes sont générés. Par ailleurs, une configuration de quadrilatère est validée si d'une part chaque élément résultant est géométriquement valide (hexaèdre, prisme ou pyramide) et si, d'autre part, il contient son barycentre et ses faces sont quasi-planes. Dans le cas contraire, le quadrilatère de base est subdivisé en deux triangles et généralement selon la diagonale donnant une configuration de deux triangles de Delaunay.

### **3.7. Advanced meshing and remeshing procedure for mechanical and numerical simulations**

**Participants:** Abel Cherouat [correspondant], Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Patrick Laug, Zhu Aichun, Jie Zhang, Faouzi Slimani, Guillaume Dufaye.

Most metal forming parts involve complex geometry and flow characteristics as large (visco)-plasticity flow, heat exchange, ductile damage, evolving contact with friction. An intrinsic difficulty in metal forming process is the constantly changing configuration of the deforming part (finite transformation, thermo-plastic flow). In metal forming, the mesh size should be adapted to the curvature of complex tools in order to optimize the contact boundaries and the damaged zones. These problems can be resolved if an adaptive remeshing scheme is incorporated automatically in the finite element analysis. It is necessary to adapt the mesh in order to improve the geometry of the deformed part and the damage localization. To mesh the 3D computational domain, we apply a new optimization approach which uses a combined Delaunay-frontal method to define field points and to construct the connection between these points or with a given prescribed size map (error estimate). The first objective of this project is to develop a 3D advanced remeshing procedure (error estimation, field transfer, optimisation meshing) for metal forming. The second objective is to integrate in a computational environment the mechanical model, 3D reconstruction from images, reliability-optimisation and the remeshing procedure using the ABAQUS/Explicit solver and the adaptive mesher. Application is dedicated to some examples (side pressing, blanking and orthogonal cutting, 3D guillotining, thermo-hydroforming and forging) for metal forming and breast and porous metal foam material reconstitution.

### **3.8. Effect of fibre geometrical morphology on the mechanical properties of PolyPropylene Hemp fibre composite material**

**Participants:** Abel Cherouat [correspondant], Florent Ilcyszyn.

These last years, hemp fibres have been used as reinforcement for compound based on polymer in different industrial manufacturing for their interesting mechanical and ecological properties. Hemp fibres present a non-homogeneous cross section and complex geometry that can have a high effect on their mechanical properties. The mechanical properties of hemp fibres are rather difficult to determine and request a specific characterization method. In this project, micro-tensile tests coupled with numerical imaging treatments, meshing reconstitution and finite elements computations are investigated. The numerical imaging allows to define finely the hemp cross section along the fibre and aims to reconstruct a 3D hemp fibre CAD using adaptive mesh.

### **3.9. Mise au point de méthodes de remaillage adaptatif 3D dans le cadre de simulations numériques de mise en forme de structure minces**

**Participants:** Houman Borouchaki, Abel Cherouat, Laurence Moreau [correspondant].

Au cours des simulations numériques de mise en forme en 3D, les grandes déformations mises en jeu font que le maillage subit de fortes distorsions. Il est alors nécessaire de remailler continuellement la pièce afin de pouvoir capturer les détails géométriques des surface en contact, adapter la taille du maillage à la solution physique et surtout pouvoir effectuer la simulation jusqu'à la fin du procédé de mise en forme. Lorsque la pièce est comprise entre des outils rigides (cas de l'emboutissage), aux problèmes de remaillage s'ajoutent aussi des difficultés sur la gestion du contact entre les pièce. Une méthode couplant une stratégie de remaillage adaptatif et une technique de projection a été développée. La méthode de remaillage adaptatif, basée sur des techniques de raffinement et déraffinement est contrôlée par des cartes de taille géométrique et physique. La projection des nouveaux nœuds sur l'outil permet de conserver le contact entre la pièce et l'outil. Afin de pouvoir réaliser des simulations numériques de composites tissés, une procédure spécifique a été ajoutée au remailleur afin de pouvoir raffiner les éléments finis bi-composants (association d'éléments finis de barre et de membrane orientés matérialisant le comportement de fibres chaîne et trame). Le formage incrémental est un procédé de mise en forme de tôle récent sans poinçon ni matrice, basé sur la déformation progressive du flan à l'aide d'un simple outil de forme hémisphérique commandé par une machine à commande numérique. L'inconvénient de ce nouveau procédé étant le temps de calcul, nous avons proposé une méthode de remaillage adaptatif permettant de raffiner le maillage uniquement au voisinage de l'outil rigide, là où les déformations ont lieux et permettant de déraffiner le maillage après le passage de l'outil rigide.

### **3.10. Mise au point de méthodes de remaillage adaptatif 3D dans le cadre de simulations numériques de mise en forme de structure minces**

**Participants:** Houman Borouchaki, Abel Cherouat, Laurence Moreau [correspondant].

L'objectif est de reconstruire un maillage de la surface 3D d'un buste féminin à partir d'images 2D issues des prises de vue simultanées de plusieurs appareils photos numériques (photos prises sous des angles différents). Une cabine de mesure, équipée de 24 appareils photos numériques, 6 vidéoprojecteurs, pilotée par un ordinateur extérieur à la cabine a été développée et permet d'acquérir de manière simultanée 24 photos numériques du buste sous des angles différents. Un algorithme original basé sur l'utilisation d'un motif projeté sur le buste a été développé et programmé pour la corrélation entre les images 2D. Une méthode de triangulation 3D associée à une technique d'optimisation a été développée et permet de déterminer les positions 3D des points à partir des pixels de vues différentes.

### **3.11. Applications du maillage et développements de méthodes avancées pour la cryptographie**

**Participants:** Dominique Barchiesi [correspondant], Thomas Grosge, Michael François.

L'utilisation des nombres (pseudo)-aléatoires a pris une dimension importante ces dernières décennies. De nombreuses applications dans le domaine des télécommunications, de la cryptographie, des simulations numériques ou encore des jeux de hasard, ont contribué au développement et à l'usage de ces nombres. Les méthodes utilisées pour la génération de tels nombres (pseudo)-aléatoires proviennent de deux types de processus : physique et algorithmique. Ce projet de recherche a donc pour objectif principal le développement de nouveaux procédés de génération de clés de chiffrement, dits "exotiques", basés sur des processus physiques, multi-échelles, multi-domaines assurant un niveau élevé de sécurité. Deux classes de générateurs basés sur des principes de mesures physiques et des processus mathématiques ont été développés.

La première classe de générateurs exploite la réponse d'un système physique servant de source pour la génération des séquences aléatoires. Cette classe utilise aussi bien des résultats de simulation que des résultats de mesures interférométriques pour produire des séquences de nombres aléatoires. L'application du maillage adaptatif sert au contrôle de l'erreur sur la solution des champs physiques (simulés ou mesurés). A partir de ces cartes physiques, un maillage avec estimateur d'erreur sur l'entropie du système est appliqué. Celui-ci permet de redistribuer les positions spatiales des noeuds. L'étude (locale) de la réduction d'entropie des clés tout au long de la chaîne de création et l'étude (globale) de l'entropie de l'espace des clés générées sont réalisées à partir de tests statistiques.

La seconde classe de générateurs porte sur le développement de méthodes avancées et est basée sur l'exploitation de fonctions chaotiques en utilisant les sorties de ces fonctions comme indice de permutation sur un vecteur initial. Ce projet s'intéresse également aux systèmes de chiffrement pour la protection des données et deux algorithmes de chiffrement d'images utilisant des fonctions chaotiques sont développés et analysés. Ces Algorithmes utilisent un processus de permutation-substitution sur les bits de l'image originale. Une analyse statistique approfondie confirme la pertinence des cryptosystèmes développés.

### **3.12. Développement de méthodes avancées et maillages appliqués à l'étude de la nanomorphologie des nanotubes/fils en suspension liquide**

**Participants:** Dominique Barchiesi, Houman Borouchaki, Abel Cherouat, Anis Chaari, Thomas Grosge [correspondant], Laurence Moreau.

Ce projet de recherche (NANOMORPH) a pour objet principal le développement et la mise au point d'une instrumentation optique pour déterminer la distribution en tailles et le coefficient de forme de nanofils (NF) ou de nanotubes (NT) en suspension dans un écoulement. Au cours de ce projet, deux types de techniques optiques complémentaires sont développées. La première, basée sur la diffusion statique de la lumière, nécessite d'étudier au préalable la physico-chimie de la dispersion, la stabilisation et l'orientation des nanofils dans les milieux d'étude. La seconde méthode, basée sur une méthode opto-thermique pulsée, nécessite en sus, la modélisation de l'interaction laser/nanofils, ainsi que l'étude des phénomènes multiphysiques induits par ce processus. L'implication de l'équipe-projet GAMMA3 concerne principalement la simulation multiphysique de l'interaction laser-nanofils et l'évolution temporelle des bulles et leurs formations. L'une des principales difficultés de ces problématiques est que la géométrie du domaine est variable (à la fois au sens géométrique et topologique). Ces simulations ne peuvent donc être réalisées que dans un schéma adaptatif de calcul nécessitant le remaillage tridimensionnel mobile, déformable avec topologie variable du domaine (formation et évolution des bulles au cours du temps et de l'espace).

### 3.13. Applications du maillage à des problèmes multi-physiques, développement de méthodes de résolutions avancées et modélisation électromagnétique-thermique-mécanique à l'échelle mesoscopique

**Participants:** Dominique Barchiesi [correspondant], Thomas Grosge, Abel Cherouat, Thomas Grosge, Houman Borouchaki, Laurence Giraud-Moreau, Sameh Kessentini, Anis Chaari, Fadhil Mezghani.

Le contrôle et l'adaptation du maillage lors de la résolution de problèmes couplés ou/et non linéaires reste un problème ouvert et fortement dépendant du type de couplage physique entre les EDP à résoudre. Notre objectif est de développer des modèles stables afin de calculer les dilatations induites par l'absorption d'énergie électromagnétique, par des structures matérielles inférieures au micron. Les structures étudiées sont en particulier des nanoparticules métalliques en condition de résonance plasmon. Dans ce cas, un maximum d'énergie absorbée est attendu, accompagné d'un maximum d'élévation de température et de dilatation. Il faut en particulier développer des modèles permettant de simuler le comportement multiphysique de particules de formes quelconques, pour une gamme de fréquences du laser d'éclairage assez étendue afin d'obtenir une étude spectroscopique de la température et de la dilatation. L'objectif intermédiaire est de pouvoir quantifier la dilatation en fonction de la puissance laser incidente. Le calcul doit donc être dimensionné et permettre finalement des applications dans les domaines des capteurs et de l'ingénierie biomédicale. En effet, ces nanoparticules métalliques sont utilisées à la fois pour le traitement des cancers superficiels par nécrose de tumeur sous éclairage adéquat, dans la fenêtre de transparence cellulaire. Déposées sur un substrat de verre, ces nanoparticules permettent de construire des capteurs utilisant la résonance plasmon pour être plus sensibles (voir projet européen *Nanoantenna* et l'activité génération de nombres aléatoires). Cependant, dans les deux cas, il est nécessaire, en environnement complexe de déterminer la température locale, voire la dilatation de ces nanoparticules, pouvant conduire à un désaccord du capteur, la résonance plasmon étant très sensible aux paramètres géométriques et matériels des nanostructures. Dans ce sens, l'étude permet d'aller plus loin que la << simple >> interaction électromagnétique avec la matière du projet européen *Nanoantenna*.

Le travail de l'année 2012 a constitué en une pré-étude des spécificités de ce type de problème multiphysique pour des structures de forme simple et la mise en place de fonctions test de référence, pour les développements de maillage adaptatifs pour les modèles multiphysiques éléments finis. Nous espérons pouvoir proposer un projet ANR couplant les points de vue microscopiques et macroscopiques dans les deux années qui viennent.

### 3.14. Mesh adaptation for very high-order numerical scheme

**Participants:** Frederic Alauzet [correspondant], Adrien Loseille, Estelle Mbinky.

In the past, we have demonstrate that multi-scale anisotropic mesh adaptation is a powerful tool to accurately simulate compressible flow problem and to obtain faster convergence to continuous solutions. But, this was limited to second order numerical scheme. Nowadays, numerous teams are working on the development of very high-order numerical scheme (e.g. of third or greater order): Discontinuous Galerkin, Residual Distribution scheme, Spectral method, ...

This work extend interpolation error estimates to higher order numerical solution representation. We have examined the case of third-order accuracy. The first step is to reduce the tri-linear form given by the third order error term into a quadratic form based on the third order derivative. From this local error model, the optimal mesh is exhibited thanks to the continuous mesh framework.

### 3.15. Visualisation et modification des maillages courbes d'ordre élevé

**Participants:** Julien Castelneau, Adrien Loseille [correspondant], Loïc Maréchal.

Dans le cadre du projet ILab, des nouveaux algorithmes de visualisation et de modifications interactives des maillages courbes et hybrides ont été développés. En effet, une des principales difficultés dans la génération de maillages courbes reste la visualisation. Il est également nécessaire de disposer d'algorithmes de corrections interactifs car les maillages de surfaces initiaux (de degré 2) sont pour la plupart faux.

### 3.16. A changing-topology ALE numerical scheme

**Participants:** Frédéric Alauzet [correspondant], Nicolas Baral.

The main difficulty arising in numerical simulations with moving geometries is to handle the displacement of the domain boundaries, *i.e.*, the moving bodies. Only vertices displacement is not sufficient to achieve complex movement such as shear. We proved that the use of edge swapping allows us to achieve such complex displacement. We therefore developed an ALE formulation of this topological mesh modification to preserve the solver accuracy and convergence order. The goal is to extend to 3D the previous work done in 2D.

### 3.17. Mesh adaptation for Navier-Stokes Equations

**Participants:** Frédéric Alauzet, Victorien Menier, Adrien Loseille [correspondant].

Adaptive simulations for Navier-Stokes equations require to propose accurate error estimates and design robust mesh adaptation algorithms (for boundary layers).

For error estimates, we design new estimates suited to accurately capture the speed profile in the boundary layers. For mesh adaptation, we design a new method to generate structured boundary layer meshes which are mandatory to accurately compute compressible flows a high Reynolds number (several millions). It couple the specification of the optimal boundary layer from the geometry boundary and moving mesh techniques to extrude the boundary layer in an already existing mesh. The main advantage of this approach is its robustness, *i.e.*, at each step of the algorithm we have always a valid mesh.

### 3.18. Maillages hexaédriques et calcul parallèle

**Participant:** Loïc Maréchal [correspondant].

Développement d'un remaillleur de surfaces par la méthode octree. Celui-ci permet de passer d'une surface triangulée à problèmes (intersections de triangles, non-conformités, trous, etc.) à un maillage valide au sens des éléments finis.

Nouvelle version de la librairie d'aide au calcul sur GPU, GMLIB2, permettant de porter des codes travaillant sur des maillages de manière bien plus simple et efficace que la précédente. Des accélérations de l'ordre de 30, par rapport à un CPU en séquentiel, ont été obtenus avec le solveur Wolf et le mailleur Hexotic sur une carte Quadro 6000.

De nombreux développements sur le mailleur hexaédrique Hexotic ont été réalisés suite aux demandes de nombreux acheteurs industriels potentiels.

## 4. Bilateral Contracts and Grants with Industry

### 4.1. Bilateral Contracts with Industry

- ANDRA, partenariat stratégique, projet 2, *Maillage adaptatif hexaédrique du milieu géologique multicouche avec prise en compte des ouvrages de stockage et des évolutions géodynamiques*, P. Laug et H. Borouchaki, 48 k-euros, 12/07/2011 - 12/09/2012.
- DASSAULT, *Maillage surfacique et topologie*, P. Laug et H. Borouchaki, 33 k-euros, 01/01/2010 - 31/12/2012.
- LECTRA, *Redéfinition des domaines de paramètres*, P. Laug et H. Borouchaki, 6 k-euros, 20/09/2011 - 19/09/2012.

### 4.2. Bilateral Grants with Industry

- Fondation EADS Grant, F. Alauzet, 150 k-euros, 2012-2015
- Fondation EADS Grant, A. Loseille, 140 k-euros, 2012-2015

## 5. Partnerships and Cooperations

### 5.1. Regional Initiatives

- Maîtrise des propriétés des fibres de chanvre (fibre / chènevotte), dans le cadre de valorisation s en agro-composites base polymère, MAPROFI CONTRAT DE PROJETS ETAT-REGION 2007-2013, INRA, UTT, USTL, AFT plasturgie, ITC
- Valorisation par recyclage de composites bio-sourcés à base de fibres de chanvre au travers de leur comportement mécanique sous sollicitations statiques et dynamiques, Projet BioComposites Incitatif Amont DRRT 2012 de la région Champagne Ardenne

### 5.2. European Initiatives

#### 5.2.1. FP7 Projects

- Projet Européen : FP7 Health-F5-2009-241818 : NANOANTENNA  
**Participants:** Dominique Barchiesi [correspondant], Thomas Grosge, Sameh Kensentini  
Développement d'un biocapteur in vitro, ultra sensible et sélectif destiné à la détection de protéines impliquées dans les premières phases du développement de maladies. Modélisation et optimisation numériques du dispositif (taille, forme, couplage électromagnétique-matériaux).

### 5.3. International Research Visitors

#### 5.3.1. Internships

- ZHANG Jie, 3D advanced remeshing procedure for numerical simulation of forming processes
- SLIMANI Faouzi, Modélisation mécanique des aptitudes de formage à chaud des tôles et des tubes minces avec remaillage adaptatif en grandes déformations

#### 5.3.2. Visits to International Teams

- Frederic Alauzet, Septembre 2011-Septembre 2012, Mississippi State University, CAVS lab.

## 6. Dissemination

### 6.1. Teaching - Supervision - Juries

#### 6.1.1. Teaching

Doctorat : F. Alauzet : Vérification des simulations numériques en mécanique des milieux continus, Cours de 2h au Collège de Polytechnique (Paris) avec A. Dervieux

Master (ou équivalent) : F. Alauzet: Simulation numérique en géométries complexes, niveau M1, 36 heures, École Centrale Paris

Master (ou équivalent) : A. Loseille : CAO et maillage, 35 heures, niveau M2, UPEC (Université Paris-Est Créteil), France

Licence (ou équivalent) : A. Loseille : Introduction à la discrétisation des équations aux dérivées partielles, 12 heures, niveau L3, ENSTA, France

Master (ou équivalent) : A. Loseille : Programmation pour la simulation numérique, 30 heures, niveau M1, ENSTA, France

#### 6.1.2. Supervision

HdR : Frédéric Alauzet, Contributions aux méthodes numériques pour l'adaptation de maillage en Mécanique des Fluides, Université Paris 6, 28 Juin 2012

## 7. Bibliography

### Major publications by the team in recent years

- [1] F. ALAUZET, A. LOSEILLE. *High Order Sonic Boom Modeling by Adaptive Methods*, in "Journal Of Computational Physics", 2010, vol. 229, p. 561-593, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.09.020>.
- [2] F. ALAUZET, M. MEHRENBERGER. *P1-conservative solution interpolation on unstructured triangular meshes*, Inria, January 2009, <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00354509/>.
- [3] H. BOROUCAKI, D. CHAPPELLE, P.-L. GEORGE, P. LAUG, P.-J. FREY. 9, in "Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillages", Hermès, Paris, France, 2001, p. 279-310.
- [4] Y. BOURGAULT, M. PICASSO, F. ALAUZET, A. LOSEILLE. *On the use of anisotropic error estimators for the adaptative solution of 3-D inviscid compressible flows*, in "International Journal for Numerical Methods in Fluids", 2009, vol. 59, p. 47-74, <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/fld.1797/abstract>.
- [5] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI, P.-J. FREY, P. LAUG, E. SALTEL. *Chapter 17*, in "Mesh Generation and Mesh Adaptivity: Theories and Techniques", Wiley InterScience, 2004, p. 497-523, ISBN 0-470-84699-2, E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes ed., 2nd edition 2008.
- [6] A. LOSEILLE, F. ALAUZET. *Optimal 3D Highly Anisotropic Mesh Adaptation based on the Continuous Mesh Framework*, in "18th International meshing roundtable", Springer, 2009, [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04319-2\\_20](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04319-2_20).
- [7] A. LOSEILLE, A. DERVIEUX, F. ALAUZET. *Fully anisotropic goal-oriented mesh adaptation for 3D steady Euler equations*, in "Journal Of Computational Physics", 2010, vol. 229, p. 2866-2897, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.12.021>.

- [8] J. TOMASI, B. MENNUCCI, P. LAUG. *The modeling and simulation of the liquid phase*, P. G. CIARLET, C. L. BRIS (editors), North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 2003, p. 271-375, ISBN: 0-444-51248-9.

## Publications of the year

### Doctoral Dissertations and Habilitation Theses

- [9] F. ALAUZET. *Contributions aux méthodes numériques pour l'adaptation de maillage et le maillage mobile*, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2012, Habilitation à Diriger des Recherches.

### Articles in International Peer-Reviewed Journals

- [10] F. ALAUZET, O. PIRONNEAU. *Continuous and discrete adjoints to the Euler equations for fluids*, in "International Journal for Numerical Methods in Fluids", 2012, vol. 70, p. 135-157.
- [11] D. BARCHIESI. *A classroom theory of the surface plasmon polariton*, in "European Journal of Physics", 2012, vol. 33, n<sup>o</sup> 5, p. 1345-1357.
- [12] D. BARCHIESI. *Improved method based on S matrix for the optimization of SPR biosensors*, in "Optics Communication", 2012, vol. 286, n<sup>o</sup> 1, p. 23-29.
- [13] D. BARCHIESI. *Numerical retrieval of thin aluminium layer properties from SPR experimental data*, in "Optics Express", 2012, vol. 20, n<sup>o</sup> 8, p. 9064-9078.
- [14] D. BARCHIESI, E. KREMER, A. CHEROUAT, T. GROSGES, H. BOROUCHAKI. *Dilation of nanonatennas induced by an electromagnetic source*, in "Advanced Electromagnetics", 2012, vol. 1, n<sup>o</sup> 2, p. 48-57.
- [15] D. BARCHIESI, N. LIDGI-GUIGUI, M. LAMY DE LA CHAPELLE. *Functionalization layer influence on the sensitivity of surface plasmon resonance SPR biosensor*, in "Optics Communication", 2012, vol. 256, n<sup>o</sup> 6, p. 1619-1623.
- [16] A. BELME, A. DERVIEUX, F. ALAUZET. *Time accurate anisotropic goal-oriented mesh adaptation for unsteady flows*, in "Journal Of Computational Physics", 2012, vol. 231, p. 6323-6348.
- [17] M. FRANCOIS, T. GROSGES, D. BARCHIESI, R. ERRA. *A new image encryption based on a chaotic function*, in "Signal Processing: Image Communication", 2012, vol. 27, n<sup>o</sup> 3, p. 249-257.
- [18] M. FRANCOIS, T. GROSGES, D. BARCHIESI, R. ERRA. *A novel pseudo random number generator based on two plasmonic maps*, in "Applied Mathematics", 2012, vol. 3, n<sup>o</sup> 11, p. 1664-1673.
- [19] M. FRANCOIS, T. GROSGES, D. BARCHIESI, R. ERRA. *Image encryption algorithm based on a chaotic iterative process*, in "Applied Mathematics", 2012, vol. 3, n<sup>o</sup> 12, p. 1910-1920.
- [20] M. FRANCOIS, T. GROSGES, D. BARCHIESI, R. ERRA. *Random sequences generation through optical measurements by phase shifting interferometry*, in "Europhysics Letters", 2012, vol. 98, n<sup>o</sup> 1, 14002.
- [21] S. KESSENTINI, D. BARCHIESI. *Quantitative comparison of optimized nanorods, nanoshells and hollow nanospheres for photothermal therapy*, in "Biomedical Optics Express", 2012, vol. 3, n<sup>o</sup> 3, p. 590-604.



- [22] S. KESSENTINI, D. BARCHIESI. *Roughness effect on the efficiency of dimer antenna based biosensor*, in "Advanced Electromagnetics", 2012, vol. 1, n<sup>o</sup> 2, p. 41–47.

### International Conferences with Proceedings

- [23] F. ALAUZET. *Efficient moving mesh technique using generalized swapping*, in "21st International Meshing Roundtable", Springer, 2012, p. 17-37.
- [24] T. AMARI, F. DELYON, F. ALAUZET, P.-J. FREY, G. OLIVIER, J. ALY, SDO/HMI TEAM. *On Some Algorithm for Modeling the Solar Coronal Magnetic Field as MHD Equilibrium on Unstructured Mesh*, in "Proc. of the 6th International Conference of Numerical Modeling of Space Plasma Flows (ASTRONUM 2011)", N. POGORELOV, J. FONT, E. AUDIT, G. ZANK (editors), ASP Conference Series, 2012, vol. 459, 189.
- [25] P. LAUG, H. BOROUCAKI, A. CHEROUAT, D. PICART. *Large deformation simulation using adaptive remeshing*, in "10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)", July 2012, p. 318-319, #19730.
- [26] P. LAUG, H. BOROUCAKI. *Metric field interpolation*, in "The Joint International IMACS/ISGG Workshop MASCOT12 & ISGG12, Volume of IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, ISSN 1098-870X", October 2012.
- [27] P. LAUG, H. BOROUCAKI. *Surface meshing with metric gradation control*, in "Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering Computational Technology (ECT)", Stirlingshire, United Kingdom, B. TOPPING (editor), Civil-Comp Press, September 2012, n<sup>o</sup> 33, p. 1-20, <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.100.33>.
- [28] A. LOSEILLE, R. LÖHNER. *Robust boundary layer meshing*, in "21st International Meshing Roundtable", Springer, 2012, p. 493-511.

### Conferences without Proceedings

- [29] F. ALAUZET. *Extension of metric-based anisotropic mesh adaptation to time-dependent problems involving moving geometry*, in "Aeronautics and Astronautics Seminar, Stanford University", 2012.
- [30] F. ALAUZET. *Extension of metric-based anisotropic mesh adaptation to time-dependent problems involving moving geometry*, in "HPC2 CAVS SimCenter Seminar, Mississippi State University", 2012.
- [31] F. ALAUZET. *Extension of metric-based anisotropic mesh adaptation to time-dependent problems involving moving geometry*, in "Mathematics Institute of Computational Science and Engineering Seminar, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne", 2012.
- [32] F. ALAUZET. *Time-accurate anisotropic mesh adaptation using Hessian-based or Goal-Oriented error estimates*, in "Nasa Ames Seminar", 2012.
- [33] F. ALAUZET, A. BELME, A. LOSEILLE, D. GUÉGAN, A. DERVIEUX. *Goal-Oriented anisotropic mesh adaptation based on a priori estimates*, in "Workshop on Adaptive Methods with Applications in Fluid Dynamics", 2012.

- [34] D. BARCHIESI, S. KESSENTINI, T. GROSGES. *Uncertainty analysis of nanoparticles for cancer photothermal therapy*, in "Advances in Safety, Reliability and Risk Management - Proceedings of the European Safety and Reliability Conference, ESREL 2011", C. BÉRENGUER, A. GRALL (editors), Taylor & Francis, 2012, p. 2197–2204.
- [35] A. CARABIAS, A. BELME, F. ALAUZET, B. KOOBUS, A. DERVIEUX. *Anisotropic Goal-Oriented estimate for a third-order accurate Euler model*, in "ECCOMAS 2012", 2012.
- [36] A. DERVIEUX, A. BELME, H. ALCIN, F. ALAUZET. *Goal-Oriented mesh adaptation for vortex shedding flows*, in "ECCOMAS 2012", 2012.
- [37] D. MARCUM, F. ALAUZET, L. MARÉCHAL. *Unstructured mesh generation using advancing layers and metric-based transition for viscous flowfields*, in "ECCOMAS 2012", 2012.
- [38] E. MBINKY, F. ALAUZET, A. LOSEILLE. *High-order interpolation for mesh adaptation*, in "Research Note of the 21th International Meshing Roundtable", 2012.
- [39] E. MBINKY, F. ALAUZET, A. LOSEILLE. *Interpolation d'ordre élevé et adaptation de maillages*, in "CANUM 2012", 2012.
- [40] E. MBINKY, A. DERVIEUX, A. LOSEILLE, F. ALAUZET. *Multiscale anisotropic mesh adaptation for a third-order accurate approximation of Euler flow*, in "ECCOMAS 2012", 2012.

### Scientific Books (or Scientific Book chapters)

- [41] F. ALAUZET, B. MOHAMMADI, O. PIRONNEAU. *Mesh adaptivity and optimal shape design for aerospace*, in "Variational Analysis and Aerospace Engineering: Mathematical Challenges for Aerospace Design", Springer Optimization and Its Applications, Vol. 66, Edited by G. Buttazzo and A. Frediani, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2012, chap. 14, p. 323-338.
- [42] B. KOOBUS, F. ALAUZET, A. DERVIEUX. *Numerical algorithms for unstructured meshes*, in "Computational Fluid Dynamics", Chapman and Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computation Series, Edited by F. Magoules, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 2012, chap. 7.

### Research Reports

- [43] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI. *Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2*, Inria, August 2012, n<sup>o</sup> RR-8039, 37, <http://hal.inria.fr/hal-00722512>.
- [44] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI. *Sur les éléments finis pentaédriques de degré 1 et 2*, Inria, June 2012, n<sup>o</sup> RR-7992, 47, <http://hal.inria.fr/hal-00707184>.
- [45] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI. *Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2*, Inria, March 2012, n<sup>o</sup> RR-7909, 39, <http://hal.inria.fr/hal-00680434>.
- [46] P.-L. GEORGE, H. BOROUCAKI. *Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2*, Inria, May 2012, <http://hal.inria.fr/hal-00697868>.

## References in notes

- [47] P.-G. CIARLET. *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, Ciarlet, P. G. and Lions, J. L., North Holland, 1991, vol. II.
- [48] P.-J. FREY, P.-L. GEORGE. *Maillages. Applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris, 1999.