IN PARTNERSHIP WITH:
CNRS

Ecole Polytechnique

Activity Report 2013

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

IN COLLABORATION WITH: Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP)

RESEARCH CENTER
Saclay - Île-de-France

THEME
Optimization and control of dynamic systems

Table of contents

Project-Team Maxplus

Keywords: Optimal Control, Max-Plus Algebra, Game Theory, Operational Research, Discrete Event Systems

Creation of the Project-Team: 2002 December 01.

1. Members

Research Scientists
Stéphane Gaubert [Chef de projet, Inria, DR/*Team leader, Inria, Senior Researcher*]
Marianne Akian [Responsable permanente, Inria, DR/*Inria, Senior Researcher*, HdR]
Xavier Allamigeon [Ingénieur du corps des Mines accueilli en détachement, Inria/*Corps des mines, under secondment, Inria, Researcher*]
Jean-Pierre Quadrat [Inria, DR Émérite/*Emiritus Senior Researcher*, HdR]
Cormac Walsh [Inria, CR/*Researcher*]

PhD Students
Pascal Benchimol [Bourse Monge-DGA, École Polytechnique]
Antoine Hochart [Bourse Hadamard, École Polytechnique, depuis Oct. 2013]
Victor Magron [Inria]
Andrea Marchesini [Bourse EDX, Ecole Polytechnique]
Zheng Qu [Bourse AMX, École Polytechnique jusqu'à Sept. 2013, puis Inria]

Visiting Scientists
Dominique Castella [Univ. Reunion, de Janvier à Juin 2013]
Ricardo Katz [CONICET, Avril-Mai 2013]

Administrative Assistants
Wallis Chaussebourg [Inria, jusqu'à Août 2013]
Jessica Gameiro [Inria, depuis Oct 2013]

Other
Max Plus [Chercheur imaginaire [1]/*Imaginary researcher* [2]]

2. Overall Objectives

2.1. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

[1] Max Plus est le nom collectif du groupe de travail de l'Inria, réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2] *Maxplus is the collective name of the Inria working group, having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes dijunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

The library TPLib provides several algorithms on tropical polyhedra, and a numerical abstract domain for using tropical polyhedra in the setting of software verification.

3. Research Program

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement "l'algèbre max-plus".

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [100]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [92], [122], [173], [177], [178]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [79]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [162], [160], [145], [129], [118], [165], [139], [119], [103], [62]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [144], [145], [129], grandes déviations [159], asymptotiques à température nulle en physique statistique [81]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [130], [150], [142], [68], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [147], et la théorie des jeux [163], [52]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [80], [134], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [168], [125], [169], [131], [152]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [117], [172], [146], [171] et en théorie des représentations [105], [71], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [100]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [92], [122], [173], [177], [178]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [79]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [162], [160], [145], [129], [118], [165], [139], [119], [103], [62]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [144], [145], [129], large deviation asymptotics [159], or zero temperature asymptotics in statistical physics [81]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [130], [150], [142], [68], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [147] and game theory [163], [52]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [80], [134] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [168], [125], [169], [131], [152]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [117], [172], [146], [171] and in representation theory [105], [71], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0=i,\ \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \quad , \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \leq s \leq n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \quad . \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \quad , \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ \ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \quad , \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \leq t \leq T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot, 0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad H(x,p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x,y)) \quad , \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [145], [129], [139]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [162], [173], [92], [120], [86], [67], [6] pour la dimension finie, et [145], [129] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [103].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, ..., n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \leq t \leq T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [145], [129], [139]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [162], [173], [120], [86], [92], [67], [6] for the finite dimension case, and [145], [129] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the “Aubry-Mather” theory [103].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l’approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lccc} \text{monotonie}/\textit{monotonicity} & x \leq y & \Rightarrow & f(x) \leq f(y) \ , \\ \text{contraction}/\textit{nonexpansiveness} & \|f(x) - f(y)\|_\infty & \leq & \|x - y\|_\infty \ . \end{array} \tag{6}$$

Ici, l’opérateur f est une application d’un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\leq$ désigne l’ordre partiel usuel, et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l’ensemble des états est $\{1, ..., n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l’addition d’une constante [91] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d’opérateurs : l’équation de la programmation dynamique d’un problème de commande optimale à horizon fini s’écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d’un problème à horizon infini (y compris le cas d’un problème d’arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d’un problème avec facteur d’actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [52]. Il permet d’inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l’extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d’homogénéité. Les problèmes auxquels on s’intéresse typiquement sont la structure de l’ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l’existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l’infini (afin d’obtenir le coût ergodique d’un problème de contrôle optimal ou de jeux), l’asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d’obtenir le comportement précis de l’itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [150] pour un panorama. Signalons que dans [110],[7], des algorithmes inspirés de l’algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir §4.4 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1, ..., n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [91] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [52]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [150] for more background. In [110],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §4.4 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [160], [94], [93], [62],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [144]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi retrouvés en particulier dans le travail de thèse d'Asma Lakhoua [132], [60].

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [160], [94], [93], [62], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [144]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations found again in particular in the PhD thesis work of Asma Lakhoua [132], [60].

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [82], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [86] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [151], [124], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [66]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [108], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [112], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [168], [125], [138], [169], [131], [152]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [137].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [82], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [86] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [151], [124], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [66]. Max-plus automata models [108], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [112], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [168], [125], [138], [169], [131], [152]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [137].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [100], [74], [173], [177],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [170], [164], [58] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [123], [153],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [96].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in Sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [100], [74], [173], [177],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [170], [164], [58] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyedra, determinants, symmetrisation [123], [153],[6]). The subject has attracted recently a new attention [96].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon} \asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon} \quad , \qquad e^{-a/\epsilon} \times e^{-b/\epsilon} = e^{-(a+b)/\epsilon} \quad , \tag{7}$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log (e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [144], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [159], [59], pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [55], [54], [53] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [172].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log (e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [144], motivated by the study of WKB-type asymptotics of

Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [159], [59] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [55], [54], [53] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [172].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [77], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [126], pour des réseaux ferroviaires [76] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [66]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [70], [135]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [143], [140], [102].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [77], or computing the throughput of a workshop [126] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [76] and [66]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [70], [135]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [143], [140], [102].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [78]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [85]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [176]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [112] pour le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans [137] dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [137]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [133].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [78]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [85]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [176]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [112] for the jobshop case, a simpler representation was given in [137] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [137]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [133].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par P. et R. Cousot [89], qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. On associe en effet à chaque point de contrôle du programme un élément du treillis, qui représente une sur-approximation valide de l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables du programme en ce point. Le treillis le plus simple exprimant des propriétés numériques est celui des produits Cartésiens d'intervalles. Des treillis plus riches permettent de mieux tenir compte de relations entre variables, en particulier, des classes particulières de polyèdres sont souvent employées.

Voici, en guise d'illustration, un petit exemple de programme, avec le système de point fixe associé, pour le treillis des intervalles:

```
void main() {
  int x=0;          // 1
  while (x<100) {   // 2
    x=x+1;          // 3
  }                 // 4
     }
```

$$\begin{aligned} x_1 &= [0,0] \\ x_2 &=]-\infty,99]\cap(x_1\cup x_3) \\ x_3 &= x_2+[1,1] \\ x_4 &= [100,+\infty[\cap(x_1\cup x_3) \end{aligned}$$

Si l'on s'intéresse par exemple aux valeurs maximales prise par la variable x au point de contrôle 2, soit $x_2^+ := \max x_2$, après une élimination, on parvient au problème de point fixe:

$$x_2^+ = \min\left(99, \max\left(0, x_2^+ + 1\right)\right) \ , \tag{8}$$

qui a pour plus petite solution $x_2^+ = 99$, ce qui prouve que x est majoré par 99 au point 2.

On reconnait ici un opérateur de point fixe associé à un problème de jeux à deux joueurs et somme nulle. Cette analogie est en fait générale, dans le cadre d'un collaboration que l'équipe entretient depuis plusieurs années avec l'équipe MeASI d'Eric Goubault (CEA et LIX), spécialiste d'analyse statique, nous avons en effet mis progressivement en évidence une correspondance [88], [109], entre les problèmes de jeux à somme nulle et les problèmes d'analyse statique, qui peut se résumer par le dictionnaire suivant:

Jeux	Interprétation abstraite
système dynamique	programme
opérateur de Shapley	fonctionnelle
espace d'état	(# points de contrôle) $\times$ (# degrés de liberté du treillis)
problème en horizon n	exécution de n pas
limite du problème en horizon fini	invariant optimal (borne)
itération sur les valeurs	itération de Kleene

Pour que le nombre d'états du jeu soit fini, il est nécessaire de se limiter à des treillis d'ensembles ayant un nombre fini de degrés de liberté, ce qui est le cas de domaines communément utilisés (intervalles, ensembles définis par des contraintes de potentiel de type $x_i - x_j \leq$ cst, mais aussi, les "templates" qui sont des sous-classes de polyèdres introduits récemment par Sankaranarayanan, Sipma et Manna [166]). L'ensemble des actions est alors fini si on se limite à une arithmétique affine. Signalons cependant qu'en toute généralité, on aboutit à des jeux avec un taux d'escompte négatif, ce qui pose des difficultés inédites. Cette correspondance entre jeux et analyse statique est non intuitive, au sens où les actions du minimiseur consistent à sélectionner des points extrêmes de certains polyèdres obtenus par un mécanisme de dualité.

Une pathologie bien répertoriée en analyse statique est la lenteur des algorithmes de point fixe, qui peuvent effectuer un nombre d'itérations considérable (99 itérations pour obtenir le plus petit point fixe de (8)). Celle-ci est usuellement traitée par des méthodes d'accélération de convergence dites d'élargissement et rétrécissement [90], qui ont cependant l'inconvénient de conduire à une perte de précision des invariants obtenus. Nous avons exploité la correspondance entre analyse statique et jeux pour développer des algorithmes d'une nature très différente, s'inspirant de nos travaux antérieurs sur l'itération sur les politiques pour les jeux répétés [110], [83], [84],[7]. Une version assez générale de cet algorithme, adaptée au domaine des templates, est décrite dans [109] et a fait l'objet d'une implémentation prototype. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec souvent un gain en précision par rapport aux approches classiques, par exemple pour des programmes comprenant des boucles imbriquées.

Ce domaine se trouve être en pleine évolution, un enjeu actuel étant de traiter d'une manière qui passe à l'échelle des invariants plus précis, y compris dans des situations où l'arithmétique n'est plus affine.

English version

The abstract interpretation method introduced by P. and R. Cousot [89], allows one to determine automatically invariants of programs by computing the minimal fixed point of an order preserving map defined on a complete lattice. To every breakpoint of the program is associated an element of the lattice, which yields a valid overapproximation of the set of reachable values of the vectors of variables of the program, at this breakpoint. The simplest lattice expressing numerical invariants consists of Cartesian products of intervals. More sophisticated lattices, taking into account relations between variables, consisting in particular of subclasses of polyhedra, are often used.

As an illustration, we gave before Eqn (8) a simple example of program, together with the associated fixed-point equation. In this example, the value of the variable x at the breakpoint 2 is bounded by the smallest solution x_2^+ of the fixed point problem (8), which is equal to 99.

The fixed point equation (8) is similar to the one arising in the theory of zero-sum repeated games. This analogy turns out to be general. Un a series of joint works of our team with the MeASI team of Eric Goubault (CEA and LIX), we brought progressively to light a correspondence [88], [109], between the zero-sum game problems and the static analysis problems, which can be summarized by the following dictionnary:

Games	Abstract interpretation
dynamical system	program
Shapley operator	functional
state space	(# breakpoints) $\times$ (# degrees of freedom)
horizon n problem	execution of n logical steps
limit of the value in horizon n	optimal invariant (bound)
value iteration	Kleene iteration

For the game to have a finite state space, we must restrict our attention to lattices of sets with a finite number of degrees of freedom, which is the case of the domains commonly used in static analysis (intervals, sets defined by potentials constraints of the form $x_i - x_j \leq \mathrm{cst}$, and also the subclasses of polyhedra called "templates", introduced recently by Sankaranarayanan, Sipma and Manna [166]). Then, the action space is finite if the arithmetics of the program is affine. However, in full generality, the games we end up with have a negative discount rate, which raises difficulties which are unfamiliar from the game theory point of view. This correspondence between games and static analysis turns out to be non intuitive, in that the action of the minimizer consist of selecting an extreme point of a polyhedron arising from a certain duality construction.

A well known pathology in static analysis is the fact that the standard Kleene fixed point algorithm may have a very slow behavior (99 iterations are needed to get the smallest fixed point of (8)). This is usually solved by using some accelerations of convergence, called widening and narrowing [90], which however lead to a loss of precision. We exploited the correspondence between static analysis and games to develop algorithms of a very different nature, inspired by our earlier work on policy iteration for games [110], [83], [84],[7]. A rather general version of this policy iteration algorithm, adpated to the domain of templates, is described in [109], together with a prototype implementation. Every iteration combines linear programming and combinatorial algorithms. Some experimental results indicate that the method often leads to invariants which are more accurate than the ones obtained by alternative methods, in particular for some programs with nested loops.

This topic of research is currently evolving, a question of current interest being to find accurate invariants, in a scalable way, in situations in which the arithmetics is not affine.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [87].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [87].

5. Software and Platforms

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab, et qui est maintenant intégrée par défaut dans Scicoslab. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [65], [135]. Il faut aussi noter que le groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site, and which is now included by default in Scicoslab. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [65], [135]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games

L'algorithme d'itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle pour le cas de paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), et dégénérés de type "multi-chaîne" a été introduit dans [84]. Plusieurs stages ont permis l'implémentation partielle en Scilab, C ou C++, et le test de ce type d'algorithmes (voir le travail de Vishesh Dhingra [98]), ou de son couplage avec la résolution de systèmes linéaires par des méthodes multigrilles algébriques (stage de Shantanu Gangal en 2007). Le travail de thèse de Sylvie Detournay a permis le développement d'un programme complet. Le code écrit par Sylvie Detournay (en C) a été déposé sur InriaGForge. Pour le moment il n'est accessible qu'aux membres de l'équipe.

English version

The policy iteration algorithm for zero sum repeated games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), and in degenerate "multichain" cases, has been introduced in [84]. Several internships allowed us to implement in Scilab, C or C++, and to test such algorithms (see the work of Vishesh Dhingra [98]), or its combinaison with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods (internship of Shantanu Gangal in 2007). The PhD thesis work of Sylvie Detournay allowed us to develop a complete program. The program written by Sylvie Detournay (in C language) has been posted on InriaGForge. For the moment it can only be seen by members of the team.

5.3. TPLib: bibliothèque pour la manipulation de polyèdres tropicaux/TPLib: tropical polyhedra library

TPLib est une bibliothèque écrite en OCaml qui permet de manipuler des polyèdres tropicaux. Elle est distribuée sous license LGPL https://gforge.inria.fr/projects/tplib.

Cette bibliothèque implémente notamment des algorithmes permettant de passer d'une représentation externe d'un polyèdre à une représentation interne, ou inversement (voir §6.2.1 pour plus de détails). Elle permet aussi de réaliser d'autres opérations fondamentales, comme le calcul du complexe polyédral associé à un polyèdre donné (au sens de Develin et Sturmfels [96]), ou le calcul de cônes tangents tropicaux. Enfin, elle fournit toutes les primitives permettant d'utiliser les polyèdres tropicaux en tant que domaine abstrait numérique, afin de déterminer des invariants de programmes ou systèmes faisant intervenir les opérations $\min$ et $\max$ (voir [63]).

TPLib est aujourd'hui utilisé dans le logiciel Polymake [116], développé à la Technische Universität Darmstadt (Allemagne). Ce dernier logiciel constitue une boite à outils permettant de manipuler des nombreux objets mathématiques (polytopes convexes, complexes polyédraux, graphes, matroïdes, polytopes tropicaux).

Le développement d'interfaces avec d'autres logiciels est désormais facilité grâce à la présence de *bindings* dans le langage C. Grâce à cela, un prototype d'interface a été réalisé entre TPLib et l'outil Verify-TAPN (https://launchpad.net/verifytapn), qui permet la vérification de réseaux de Pétri avec arcs temporisés (voir §6.5.4). De même, une interface à la bibliothèque de domaines abstraits numériques APRON [128] est également en cours de développement.

English version

TPLib is a library written in OCaml, which allows to manipulate tropical polyhedra. It is distributed under LGPL https://gforge.inria.fr/projects/tplib.

This library implements algorithms allowing to pass from an external representation of a polyhedron to an internal description, or inversely (see §6.2.1 for more details). Besides, the library allows to perform several fundamental operations over tropical polyhedra, such as computing the associated polyhedral complex (see Develin and Sturmfels [96]), or determining the tropical tangent cone at any point. Finally, it provides all the primitives allowing to use tropical polyhedra as an numerical abstract domain, in order to determine program/system invariants involving the operations $\min$ and $\max$ (see [63]).

TPLib is now used in the software Polymake [116], developed in Technische Universität Darmstadt (Germany). Polymake is a toolbox allowing to manipulate mathematic objects such as convex polytopes, polyhedral complexes, graphs, matroids, and tropical polytopes.

The development of further interfaces is now easier thanks to the distribution of bindings in C language. Using these bindings, a prototype of interface has been created between TPLib and the model-checker VerifyTAPN (https://launchpad.net/verifytapn), which allows the verification of timed-arc Petri Nets (see §6.5.4). An interface to the numerical abstract domain APRON [128] is also under development.

6. New Results

6.1. Théorie spectrale max-plus et géométrie métrique/Max-plus spectral theory and metric geometry

6.1.1. Introduction

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Cormac Walsh.

Étant donné un noyau $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on peut lui associer le problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x,y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{9}$$

dans lequel on cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme nous l'avons rappelé dans les §3.2 et 3.3, le problème spectral (9) intervient en contrôle ergodique: l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x,y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité.

Dans [61], nous avons considéré le cas où S est non compact. Lorsque $\lambda = 0$, l'espace propre est analogue à l'espace des fonctions harmoniques défini en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. En introduisant l'analogue max-plus de la frontière de Martin, nous avons obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (9) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) \ , \tag{10}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u joue le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré aussi que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de "quasi-géodésiques". La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des horo-fonctions (fonctions de Busemann généralisées), ou horo-frontière. Ces résultats inspirent les travaux des sections suivantes, qui portent sur des cas remarquables d'espaces métriques (§6.1.3) ou sur des applications en théorie des jeux (§6.1.2).

English version

Let the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ be given. One may associate the max-plus spectral equation (9), where the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. As we recalled in §3.2 and refmonotone, this spectral problem arises in ergodic optimal control: the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties.

In [61], we considered the case where S is non-compact. When $\lambda = 0$, the eigenspace is analoguous to the set of harmonic functions defined in classical or probabilistic potential theory. By introducing a max-plus analogue of the classical Martin boundary, we obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (9) may be represented as in (10) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u plays the role of the spectral measure. We also showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain "almost-geodesics". The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions), or horoboundary. These results have inspired the work of the next sections, which deal either with interesting examples of metric spaces (§6.1.3) or with applications to zero-sum games (§6.1.2).

6.1.2. Asymptotiques d'itérées d'applications contractantes au sens large et jeux à somme nulle en horizon long/Asymptotics of iterates of nonexpansive mappings and zero-sum games

Participants: Jérôme Bolte, Stéphane Gaubert, Guillaume Vigeral.

On s'intéresse ici à l'existence du paiement moyen pour les jeux répétés, et plus généralement, à l'existence du vecteur de "taux de fuite" $\lim_k f^k(x)/k$ où f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui même, nonexpansive pour une norme quelconque. Dans le cas particulier des jeux, f est un opérateur de Shapley, qui est nonexpansif pour la norme sup. On montre dans [45] que la limite existe si l'application f est définissable dans une structure o-minimale. Ceci généralise des résultats de Bewley, Kohlberg, et Neyman, qui montraient que la limite existe si f est semi-algébrique. L'extension au cas o-minimal permet notamment de traiter des opérateurs de type "log-exp" apparaissant en contrôle sensible au risque. Ce travail traite aussi de la question de savoir si un jeu dont les fonctions de paiement et de transition sont définissables dans une structure o-minimale admet un opérateur de Shapley f définissable. Un contre exemple montre que f n'est pas forcément définissable dans la même structure, mais l'on montre qu'il en est ainsi dès que les probabilités de transition ont une structure séparable.

English version

We study the question of the existence of the mean payoff for repeated games, and more generally, the existence of a vector of "escape rates", $\lim_k f^k(x)/k$, where f is a self-map of $\mathbb{R}^n$, non-expansive in some norm. In the special case of zero-sum games, f is a Shapley operator, and it is sup-norm nonexpansive. We showed in [45] that this limit does exist as soon as the map f is definable in an o-minimal structure. This generalizes results of Bewley, Kohlberg, and Neyman, who showed that this limit exists if f is semi-algebraic. The extension to the case of o-minimal structures allows one in particular to deal with log-exp type operators arising in risk sensitive control. This work also adresses the question of knowing whether a game with definable payment and transition functions has a Shapley operator that is definable in the same structure. We gave a counter example showing that this may not be the case, but showed that the Shapley operator is definable as soon as the transition probabilities have a separable structure.

6.1.3. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry

Participants: Cormac Walsh, Bas Lemmens [Kent University, UK].

L'un des intérêts de l'horo-frontière est de renseigner sur le groupe des isométries d'un espace métrique. En effet, ce groupe agit naturellement sur l'horo-frontière, et cette action peut parfois être mieux comprise que l'action du groupe sur l'espace d'origine.

Nous avons utilisé ces idées pour étudier le groupe des isométries pour la métrique de Hilbert. De La Harpe [179] a donné plusieurs conjectures relatives à ce groupe. Nous avons montré dans [51], en utilisant l'horo-frontière, que le groupe des isométries est exactement le groupe des transformations linéaires projectives à moins que le domaine ne soit une coupe d'un cône symmétrique non-Lorentzien. Dans ce dernier cas, le groupe linéaire projectif est d'index 2 dans le groupe des isométries. Le cas particulier où le domaine est un polytope a été traité précédemment dans [136].

Dans [51] nous déterminons aussi le groupe des isométries pour une métrique fortement reliée à la métrique de Hilbert, à savoir la métrique de Thompson sur un cone.

English version

One use for the horofunction boundary is to study the group of isometries of a metric space. This is because this group has a well defined action on the horoboundary and it is likely that in many cases this action will be easier to understand than the action on the space itself.

We have been applying these ideas to investigate the isometries of the Hilbert geometry. De La Harpe [179] has previously made several conjectures about the isometry group of this space. We have shown [51] using the horofunction boundary that the isometry group is exactly the group of projective linear transformations unless the domain on which the geometry is defined is a cross section of a non-Lorentzian symmetric cone, in which case the projective linear group is of index two in the isometry group.

The special case when the domain is a polytope was previously considered in [136].

In the paper [51], we also determine the isometry group of closely related metric, the Thompson geometry on a cone.

6.1.4. Consensus non-commutatif et contraction d'opérateurs de Kraus/Noncommutative consensus and contraction of Kraus maps

Participants: Stéphane Gaubert, Zheng Qu.

Dans le travail [47], on s'est intéressé à la vitesse de convergence vers l'équilibre d'une itération de la forme $x^{k+1} = T(x^k)$, $x^k \in X$, où T est une application linéaire préservant un cône dans un espace de Banach X, telle que $T(e) = e$, pour un certain vecteur e dans l'interieur du cône. On s'intéresse aussi à l'itération dans l'espace dual, $y^{k+1} = T^*(y^k)$, $y^k \in X^*$, lorsque $\langle y^0, e\rangle = 1$.

Le cas classique est celui où $T(x) = Px$ est un opérateur de Markov. L'itération primale traduit alors la convergence vers le "consensus", et l'itération duale traduit la convergence de la distribution de probabilité en temps k vers l'état stationnaire. Dans ce cas, le taux de contraction (en un coup) $\kappa(P)$ d'une itération primale, pour la semi-norme de Hilbert $\|z\|_H := \max_i z_i - \min_j z_j$, ainsi que le taux de contraction d'une itération duale, pour la métrique en variation totale, coïncident et sont caractérisés par une formule dûe à Doeblin et Dobrushin (coefficient d'ergodicité),

$$\kappa(P) := 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^{n} \min(P_{is}, P_{js}).$$

On a donné ici une généralisation de cette formule au cas d'opérateurs abstraits, qui s'applique en particulier aux opérateurs de Kraus qui interviennent en information quantique. Ces derniers opérent sur l'espace des matrices symmétriques, et sont de la forme

$$T(x) = \sum_k a_k x a_k^* \qquad \text{avec} \qquad \sum_k a_k a_k^* = I \enspace .$$

Dans [34], nous avons étendu ces résultats aux flots non-linéaires sur les cones.

English version

In a recent work [27], we studied the speed of convergence to equilibrium of an iteration of the form $x^{k+1} = T(x^k)$, $x^k \in X$, where T is a linear map preserving a cone in a Banach space X, such that $T(e) = e$, for some vector e in the interior of the cone. We also considered the iteration in the dual space X^*, $y^{k+1} = T^*(y^k)$, $y^k \in X^*$, where $\langle y^0, e\rangle = 1$.

The classical application arises when $T(x) = Px$ is a Markov operator. Then, the primal iteration represents the dynamics of consensus, whereas the dual iteration represents the evolution of the probability distribution as a function of time. Then, the (one-shot) contraction rate $\kappa(P)$ of the primal iteration, with respect to Hilbert's seminorm $\|z\|_H := \max_i z_i - \min_j z_j$, and the contraction rate of the dual iteration, with respect to the total variation metric, coincide, and are characterized by a formula of Doeblin and Dobrushin (ergodicity coefficient),

$$\kappa(P) := 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^{n} \min{(P_{is}, P_{js})}.$$

We gave here a generalization of this formula to an abstract operators on a cone. This covers in particular the Kraus maps arising in quantum information theory. The latter maps act on the space of symmetric matrices. They can be written as

$$T(x) = \sum_k a_k x a_k^* \qquad \text{with} \qquad \sum_k a_k a_k^* = I \enspace .$$

In [34], we generalized these results to non-linear flows over cones.

6.2. Algèbre linéaire max-plus et convexité abstraite/Max-plus linear algebra and abstract convex analysis

6.2.1. Convexité max-plus ou tropicale/Max-plus or tropical convexity

Participants: Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Ricardo Katz [Conicet, Argentine].

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d'états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, dans toute une série de travaux à la suite de Sturmfels et Develin [96]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d'analogues des résultats fondamentaux d'analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8].

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault [64], [16], on a mis en évidence un critère combinatoire pour la caractérisation des sommets des polyèdres tropicalement convexes. Celui-ci s'exprime à l'aide d'hypergraphes orientés, et de leurs composantes fortement connexes. Ce critère possède la propriété d'être vérifiable en un temps presque linéaire en la taille de l'hypergraphe.

On en déduit un analogue tropical de la méthode de la double description [16] (méthode très utilisée sur les polyèdres classiques, et dûe à Motzkin *et al.* [148]). Cet algorithme permet de calculer les sommets d'un polyèdre défini de façon externe (intersection de demi-espaces ou d'hyperplans tropicaux). Grâce au critère combinatoire précédent, l'algorithme améliore de plusieurs ordres de grandeur les techniques connues jusqu'alors. Ceci est confirmé par de nombreuses expérimentations. Ce travail est motivé par des applications à l'analyse statique [63] et aux systèmes à événements discrets [99], dans lesquelles la manipulation de tels polyèdres est le goulot d'étranglement.

Il est connu qu'un polyèdre tropical peut être représenté comme l'enveloppe convexe d'un ensemble minimal de points et rayons, donnés par ses sommets et ses rayons extrêmes [111]. Dans un travail réalisé par X. Allamigeon et R. Katz [17], et effectué en partie lors de visites de R. Katz à Inria, on étudie la question duale de la caractérisation des représentations minimales par demi-espaces. On montre qu'un polyèdre tropical possède *essentiellement* une unique représentation minimale par demi-espaces, lorsque leurs apex appartiennent au polyèdre. On montre que les apex de ces demi-espaces non-redondants correspondent à certains sommets du complexe tropical introduit par Develin et Sturmfels [96]. On introduit également un critère combinatoire pour l'élimination de demi-espaces redondants à l'aide d'hypergraphes orientés.

Dans un travail en cours de X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert et R. Katz, nous étudions la tropicalisation des représentations par demi-espaces des polyèdres convexes sur le corps des séries de Puiseux. Nous démontrons ainsi une conjecture de Develin et Yu [97]. Celle-ci assure qu'étant donné un polytope tropical pur, il existe un polytope *relevé* sur les séries de Puiseux, dont les demi-espaces associés aux faces se "tropicalisent" en une représentation par demi-espaces du polytope tropical initial.

Des applications de ces travaux à l'algorithmique, concernant en particulier les jeux répétés, sont discutées dans la Section 6.4.2. Une application aux systèmes temps réel est discutée dans la Section 6.5.4.

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectively the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [96]. Max-plus polyhedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following [8].

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault [16], we introduce a combinatorial criterion for the characterization of the vertices of tropically convex polyhedra. It is expressed in terms of directed hypergraphs and their strongly connected components. This criterion can be verified in almost linear time in the size of the hypergraph.

This allows to develop a tropical analogue of the double description method [16] (this method is widely used for classical convex polyhedra, and is due to Motzkin *et al.* [148]). This algorithm is able to determine all the vertices of a polyhedron defined externally (intersection of tropical half-spaces of hyperplanes). Thanks to the combinatorial criterion mentioned above, the algorithm improves the existing methods by several orders of magnitude. This is confirmed by several experiments. This is motivated by applications to static analysis [63] and discrete event systems [99], in which computing such polyhedra turns out to be the bottleneck.

It is well-known that a tropical polyhedron can be represented as the convex hull of a minimal set of points and rays, provided by its vertices and extreme rays [111]. In a work of X. Allamigeon and R. Katz [17], partly done during visits of R. Katz at Inria, the dual problem of characterizing the minimal representations by half-spaces is studied. We show that a tropical polyhedron admits *essentially* a unique minimal external representation by half-spaces, provided that their apices belong to the polyhedron. We prove that the apices of these half-spaces correspond to certain vertices of the tropical complex introduced by Develin and Sturmfels [96]. We also establish a combinatorial criterion allowing to eliminate redundant half-spaces using directed hypergraphs.

In an ongoing work of X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert and R. Katz, we study the tropicalization of the representation by half-spaces of convex polyhedra over the field of Puiseux series. In particular, we prove a conjecture of Develin and Yu [97]. It states that, given a pure tropical polytope, there exists a lifting polytope over Puiseux series, such that the facet-defining half-spaces are "tropicalized" into a representation by half-spaces of the initial polytope.

Some algorithmic applications of this work concerning in particular mean payoff games, will be discussed in Section 6.4.2. Applications to real time systems will be discussed in Section 6.5.4.

6.2.2. Systèmes linéaires max-plus/Max-plus linear systems

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Alexander Guterman [Moscow State University].

Dans [37], on montre des formules de Cramer pour des systèmes linéaires sur diverses extensions du semi-anneau max-plus. Les éléments de ces extensions sont des nombres tropicaux enrichis d'une information de multiplicité, de signe ou d'angle par exemple. On obtient ainsi des résultats d'existence et d'unicité qui généralisent plusieurs résultats de [121], [153], [107], [161], [127]. De plus, pour certaines extensions du semi-anneau max-plus, les preuves fournissent des algorithmes de type Jacobi ou Gauss-Seidel pour résoudre les systèmes linéaires.

English version

In [37], we prove general Cramer type theorems for linear systems over various extensions of the tropical semiring, in which tropical numbers are enriched with an information of multiplicity, sign, or argument. We obtain existence or uniqueness results, which extend or refine earlier results in [121], [153], [107], [161], [127]. Moreover, some of our proofs lead to Jacobi and Gauss-Seidel type algorithms to solve linear systems in suitably extended tropical semirings.

6.3. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis

6.3.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.7, l'algèbre max-plus est la limite d'une déformation de l'algèbre classique, ou plutôt du semi-corps des réels positifs. Elle peut aussi fournir des estimations de ces déformations, puisque

$$\max(a,b) \le \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) \le \epsilon \log(2) + \max(a,b) \quad . \tag{11}$$

L'utilisation de ces propriétés a déjà conduit dans le passé aux travaux sur les perturbations de valeurs propres [55], [54], [53], ou sur les grandes déviations [1], [59]. Dans les travaux qui suivent, nous exploitons ces propriétés dans des contextes reliés ou similaires à ceux de nos travaux précédents.

English version

As detailled in §3.7, max-plus algebra is the limit of a deformation of classical algebra, or more precisely of the semi-field of usual real positive numbers. It can also give estimations for these deformations using for instance (11). By using these properties, we already obtained some works on singular perturbations of matrix eigenvalues [55], [54], [53], or on large deviations [1], [59]. In the works described below, we are exploiting again these properties in contexts that are related or similar to those of our earlier works.

6.3.2. Aspects tropicaux des algorithmes de scaling matriciel/Tropical aspects of matrix scaling problems

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Meisam Sharify Najafabadi [Univ. Manchester].

Une partie du travail de thèse de M. Sharify [167] portait sur les méthodes de mise à l'échelle pour améliorer la précision du calcul de valeurs propres. En appliquant les techniques de [53], [54], on montrait notamment que l'ordre de grandeur des valeurs propres d'un faisceau matriciel est donné (sous des conditions de non-dégénerescence) par les valeurs propres tropicales, qui peuvent être calculées de manière robuste, et fournissent ainsi une mise à l'échelle pour calculer les valeurs propres classiques.

Nous avons poursuivi ce travail dans [41]. On calcule cette fois l'ordre de grandeur des valeurs propres d'un polynôme matriciel au moyen des racines tropicales du polynôme obtenu en appliquant une norme donnée aux coefficients. Les racines dépendent de la norme choisie, et la norme de Frobenius est optimale en un certain sens. On obtient des bornes générales pour les ratios entre modules des valeurs propres et racines tropicales qui généralisent les bornes obtenues par Polya et Ostrowski dans le cas de polynômes scalaires. On raffine aussi ces bornes, en particulier lorsque les racines tropicales sont bien séparées les unes des autres.

English version

A part of the PhD work of M. Sharify [167] dealt with scaling methods to improve the accuracy of eigenvalue numerical computions. Applying the techniques of [53], [54], we showed in particular that the order of magnitude of the eigenvalues of a matrix pencil can be determined (under nondegeracy conditions) by computing tropical eigenvalues. The latter can always be computed accurately and provide a scaling which can be combined with standard numerical methods for matrix pencils.

We have pursued this work in [41]. Now, we compute the order of magnitude of the eigenvalues of a matrix polynomial by using the tropical roots of a polynomial obtained by applying a norm to the coefficients of the original matrix polynomial. The tropical roots depend on the chosen norm, and the Frobenius turns out to be optimal in a certain sense. We obtain indeed general bounds on the ratios between the modulus of the eigenvalues of the matrix polynomial and the tropical roots which generalize the bounds of Polya and Ostrowski available for scalar polynomials. We also improve these bounds, in particular when the tropical roots are well separated.

6.3.3. Méthodes tropicales de localisation de valeurs propres de matrices/Tropical methods for the localisation of matrix eigenvalues

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Andrea Marchesini.

Le travail de stage de M2 d'Andrea Marchesini a conduit à la publication [14] dans laquelle on montre des inégalités de type majorisation entre les valeurs propres d'une matrice et les valeurs propres tropicales de la matrice de ses modules. En particulier, la majoration est une généralisation de l'inégalité de Friedland [106] concernant le rayon spectral.

La thèse d'Andrea Marchesini s'inscrit dans le prolongement de son stage de M2 dans l'équipe et certains des travaux de la thèse de Meisam Sharify [167]. Le but est d'obtenir des inégalités de type majorisation permettant d'estimer a priori les valeurs propres de matrices ou de faisceaux de matrices, en faisant éventuellement intervenir des hypothèses de bon conditionnements. En particulier on recherche la localisation de ces valeurs propres en fonction de valeurs propres de matrices agrégées ou simplifiées. On cherchera aussi à obtenir le même type de localisation ou d'estimation dans le cas des vecteurs propres associés, par exemple en utilisant les techniques de compléments de Schur de [54] ou les idées de Murota [149].

L'idée est ensuite d'utiliser ces résultats de localisation pour améliorer la précision des algorithmes de calcul numérique de valeurs propres de matrices, en particulier en construisant des changements d'échelle exploitant les calculs tropicaux, à effectuer préalablement à l'appel d'algorithmes classiques comme QZ. Les travaux de Stéphane Gaubert et Meisam Sharify [115] ont montré l'intérêt de cette approche, notamment pour les problèmes de faisceaux quadratiques de valeurs propres issus de systèmes mécaniques pour lesquels on dispose de nombreux exemples pathologiques pour les algorithmes existants. Dans un travail en collaboration avec Françoise Tisseur et James Hook de l'Université de Manchester, on montre l'intérêt des changements d'échelle en termes de le conditionnement des valeurs propres.

English version

The M2 internship of Andrea Marchesini led to the publication [14], in which we show majorization type inequalities between the eigenvalues of a matrix and the tropical eigenvalues of the matrix obtained by applying the modulus entrywise. In particular, the bound is a generalization of the inequality of Friedland [106] concerning the spectral radius.

The PhD thesis follows his M2 internship and some of the works of Meisam Sharify's PhD thesis [167]. The aim is to obtain majorization type inequalities allowing one to estimate the eigenvalues of matrices or matrix polynomials, using possibly assumptions on condition numbers. In particular, one may look for estimates of these eigenvalues using the eigenvalues of aggregated or simplified matrices. One may also try to find the same type of estimates for the associated eigenvectors, for instance by using techniques of Schur complements from [54] or ideas of Murota [149].

One would like to use these estimation results to improve the accuracy of eigenvalue numerical computions, in particular by constructing scaling methods using tropical techniques, which may be used before calling usual algorithms as QZ. The works of Stéphane Gaubert and Meisam Sharify [115] showed the interest of this approach, in particular for quadratic matrix polynomials issued from mechanical systems for which there exists several pathological examples for existing algorithms. In a work with Françoise Tisseur and James Hook from Manchester University, we show the interest of these scaling methods on the eigenvalue conditioning.

6.3.4. Mesures et applications maxitives/Maxitive measures and maps

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Paul Poncet.

La thèse de Paul Poncet [154] concernait essentiellement ce que l'on appelle l'analyse idempotente, c'est-à dire l'étude des espaces fonctionnels ou linéaires de dimension infinie sur l'algèbre tropicale, ou tout autre semi-anneau idempotent. Paul Poncet a développé pour cela un point de vue treillis continus comme dans [1], ou plus généralement domaines. Depuis la soutenance, plusieurs articles issus du manuscrit de thèse sont en cours de publication ou de soumission, et d'autres travaux pousuivant ceux de la thèse sont en cours avec les membres de l'équipe.

La première partie de la thèse traitait des mesures maxitives, en particulier de l'existence d'une densité cardinale ou d'une densité d'une mesure par rapport à une autre (théorème de Radon-Nikodym), et de la régularité d'une mesure maxitive. Ces travaux sont publiés ou en cours de publication dans [49] et [23] respectivement.

La deuxième partie concernait les convexes dans les semi-treillis ou l'algèbre max-plus, pour lesquels Paul Poncet a pu établir des théorèmes de type Krein-Milman, réciproque de Milman, et représentation de Choquet. [48] traite du cas des semi-treillis.

On sait que les résultats sur les convexes tropicaux de dimension infinie de [154] permettent de retrouver partiellement les résultats sur la frontière de Martin max-plus décrits dans la section 6.1.1. Dans un travail commun nous essayons d'obtenir d'autres applications et extensions du théorème de représentation de Choquet tropical. En particulier on considère le cas d'ensembles ordonnés qui ne sont pas forcément des treillis tels que le cône des matrices symmetriques positives muni de l'ordre de Loewner.

English version

The PhD thesis work of Paul Poncet [154] concerned essentially what is called idempotent analysis, that is the study of infinite dimensional functional or linear spaces over tropical algebra, or any other idempotent semiring. For this aim, Paul Poncet developped the point of view of continuous lattices, as in [1], or more generally of domains. Since the defense of his thesis, several papers derived from the thesis manuscript have been submitted and some are published or up to be published. Some other works pursuing the thesis work are done with team members.

The first part of the Paul Poncet's thesis concerned maxitive measures, in particular the existence of a cardinal density of a measure, or that of a density of a measure with respect to another (Radon-Nikodym theorem), and the regularity of a maxitive measure. These works are now published or accepted for publication in [49] and [23] respectively.

A second part concerned convex sets in lattices or max-plus algebra, for which Paul Poncet showed results such as a Krein-Milman type theorem, a Milman converse type theorem, and a Choquet representation type theorem. [48] concerns the case of semilattices.

We know that the results on infinite dimensional tropical convex sets of [154] allow one to recover at least partially the results on max-plus Martin boundaries described in Section 6.1.1. In a joint work, we try to obtain other applications and extensions of the max-plus Choquet representation theorem. In particular, we consider the case of ordered sets that are not necessarily semilattices, such as the cone of nonnegative symmetric matrices endowed with the Loewner order.

6.4. Algorithmes/Algorithms

6.4.1. Itération sur les politiques pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Policy iterations for stochastic control and repeated zero sum games

Participants: Marianne Akian, Jean Cochet-Terrasson [CGA], Sylvie Detournay, Stéphane Gaubert.

L'algorithme d'itération sur les politiques est bien connu pour résoudre efficacement les équations de la programmation dynamique associées à des problèmes de contrôle stochastique avec critère à horizon infini (Howard) ou ergodique (Howard, et Denardo et Fox). Récemment, il a été généralisé au cas de problèmes de jeux à deux joueurs et somme nulle dégénérés (avec paiements ergodiques et de type "multi-chaîne"), au moyen de techniques d'algèbre max-plus et de théorie du potentiel non linéaire [84]. Chaque itération de base de cet algorithme utilise la résolution d'un système d'équations linéaires dont l'opérateur est monotone, mais dont la taille peut être grande, soit parce qu'il provient d'une discrétisation fine d'une équation aux dérivées partielles, soit parce qu'il est associé à un problème discret de grande taille comme le graphe du Web.

La thèse de Sylvie Detournay [95] a permis de développer et d'étudier un algorithme associant une méthode d'itération sur les politiques du type de celle introduite par Cochet-Terrasson et Gaubert dans [84] et une méthode multigrille algèbrique, afin de résoudre des problèmes de jeux à somme nulle dégénérés, éventuellement posés directement sous forme discrète. L'ensemble des codes nouveaux associés, écrits en C, est déposé sur le projet "pigames" de la gforge et sera disponible librement.

Sylvie Detournay a en particulier implémenté et raffiné l'algorithme proposé dans [84], en l'associant soit à des méthodes de résolution exacte de systèmes linéaires, soit à des méthodes multigrilles algébriques, en utilisant aussi des méthodes multigrilles multiplicatives pour le calcul de la mesure invariante de chaînes de Markov irréductibles, comme celles introduites par De Sterck. Ceci a permis l'obtention de résultats numériques dans le cas de discrétisations d'équations d'Isaacs associées à des jeux de poursuite déterministes ou aléatoires. Cela a aussi permis de tester de manière systématique l'algorithme sur des instances aléatoires de jeux de type Richman. Certains de ces résultats, ainsi que la présentation de l'algorithme (de manière plus concrète que dans [84], et avec les détails d'implémentation) sont présentés dans [24]. Des details supplémentaires ainsi que la preuve de convergence de l'algorithme peuvent être trouvés dans [56].

Des résultats récents de Ye ainsi que Hansen, Miltersen et Zwick montrent que l'algorithme d'itération sur les politiques, restreint à la classe des jeux à somme nulle (à 1 ou 2 joueurs) actualisés de facteur d'actualisation donné, est fortement polynomial. Dans [40], [29], on montre que ceci est le cas aussi pour l'algorithme d'itération sur les politiques pour les jeux à somme nulle et paiement moyen, restreint à la classe des jeux qui ont temps moyen de retour ou d'arrivée à un état donné borné. La preuve utilise des techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, permettant de ramener le problème à paiement moyen à un problème actualisé (de facteur d'actualisation dépendant de l'état et des actions). La même technique permet aussi de traiter le cas de jeux à somme nulle actualisés dont le facteur d'actualisation peut dépendre de l'état et des actions et prendre éventuellement des valeurs supérieures à 1.

English version

Policy iteration is a powerful and well known algorithm to solve the dynamic programming equation associated to stochatic control (one player game) problems with infinite horizon criterion (Howard) or ergodic criterion (Howard and Denardo and Fox). It has recently been extended to degenerate two players problems (with ergodic payoff and in "multichain" cases) using ideas from max-plus algebra and nonlinear potential theory [84]. One basic iteration of the algorithm consists in solving a linear system the operator of which is monotone, but with a size which may be large since it comes from the discretization of a partial differential equation or since it is associated to a large size discrete problem arising from instance from the Web graph.

The PhD thesis of Sylvie Detournay [95] developped and studied an algorithm for degenerate two player games (that may come from a discrete time and finite state space model) combining a policy iteration such as the one introduced in [84] by Cochet-Terrasson et Gaubert, and an algebraic multigrid method (AMG). All new corresponding algorithms, coded in C, belong to the gforge project "pigames" and will be distributed openly.

In particular, Sylvie Detournay has implemented and refined the algorithm proposed in [84], while associating it either to direct linear solvers, or to the AMG methods already used in the nondegenerate case, and using also multiplicative AMG methods for computing invariant measures of Markov chains, such as the one introduced by De Sterck. This allowed her to obtain numerical results in the case of discretisations of Isaacs equations associated to deterministic or stochastic pursuit games. This also allowed her to test systematically the algorithm on random instances of Richman type games.

Some of these results, together with the presentation of the algorithm (in a more practical manner than in [84], with implementation details) are gathered in [24]. Additional details and the convergence proof of the algorithm can be found in [56].

Recent results of Ye and Hansen, Miltersen and Zwick show that policy iteration for one or two player (perfect information) zero-sum stochastic games, restricted to instances with a fixed discount rate, is strongly polynomial. In [40], [29], we show that policy iteration for mean-payoff zero-sum stochastic games is also strongly polynomial when restricted to instances with bounded first mean return time to a given state. The proof is based on methods of nonlinear Perron-Frobenius theory, allowing us to reduce the mean-payoff problem to a discounted problem with state dependent discount rate. Our analysis also shows that policy iteration remains strongly polynomial for discounted problems in which the discount rate can be state dependent (and even negative) at certain states, provided that the spectral radii of the nonnegative matrices associated to all strategies are bounded from above by a fixed constant strictly less than 1.

6.4.2. Algorithmique des polyèdres tropicaux/Algorithmics of tropical polyhedra

Participants: Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Michael Joswig [TU Darmstadt].

X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault, ont développé dans [63], [16] plusieurs algorithmes permettant de manipuler des polyèdres tropicaux. Ceux-ci correspondent aux travaux décrits dans §6.2.1. Ils permettent notamment de déterminer les sommets et rayons extrêmes d'un polyèdre tropical défini comme intersection de demi-espaces, ou inversement, de calculer une représentation externe à partir d'un ensemble de générateurs. Ces algorithmes sont implémentés la bibliothèque TPLib (voir §5.3).

Dans un travail en cours de X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert et M. Joswig, nous avons défini un analogue tropical de l'algorithme du simplexe qui permet de résoudre les problèmes de *programmation linéaire tropicale*, *i.e.*

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \max\limits_{1\leq j\leq n} c_j + x_j \\ \text{sous les contraintes} & \max\big(\max\limits_{1\leq j\leq n}(a^+_{ij}+x_j), b^+_i\big) \geq \max\big(\max\limits_{1\leq j\leq n}(a^-_{ij}+x_j), b^-_i\big), \quad i=1,\cdots,m \\ & x\in(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n \end{array} \tag{12}$$

où les entrées du programme $a_{ij}^{\pm}$, $b_i^{\pm}$, c_j sont à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ces problèmes sont intimement liés à la résolution de jeux répétés à somme nulle, puisque résoudre un jeux à paiement moyen déterministe est équivalent à déterminer si un problème de programmation linéaire admet un point réalisable [57].

Comme son homologue usuel, le simplexe tropical pivote entre des points de base (tropicaux), jusqu'à atteindre l'optimum du programme linéaire. La différence fondamentale avec l'algorithme du simplexe classique est que le pivotage est réalisé de manière purement combinatoire, en s'appuyant sur des descriptions locales du polyèdre tropical défini par les contraintes à l'aide d'(hyper)graphes orientés. Ceci nous a permis de prouver que *l'étape de pivotage (incluant le calcul des coûts réduits) a la même complexité en temps que dans l'algorithme classique, i.e.* $O(n(m+n))$. Ceci est d'autant plus inattendu que la structure des arêtes tropicales entre deux points de base sont géométriquement plus complexes (elles sont constituées de plusieurs segments de droite, jusqu'à n).

Le simplexe tropical a la propriété d'être fortement corrélé avec l'algorithme du simplexe classique. Grâce au principe de Tarski, le simplexe usuel peut être transposé tel quel sur des programmes linéaires dont les coefficients en entrée sont non plus des réels, mais sur le corps $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ des séries de Puiseux généralisées en une certaine indéterminée t, *i.e.* des objets de la forme :

$$c_{\alpha_1} t^{\alpha_1} + c_{\alpha_2} t^{\alpha_2} + \cdots \tag{13}$$

où les α_i sont des réels, les coefficients c_{α_i} sont des réels non-nuls, et où la séquence des $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ est strictement croissante et soit finie, soit non-bornée. L'opposé du plus petit exposant de la série, $-\alpha_1$, est appelé *valuation* de la série. Un programme linéaire tropical est dit *relevé* en un problème linéaire sur $\mathbb{R}\{\{t\}\}$, si la valuation des coefficients en entrée de ce dernier sont égaux aux coefficients du problème tropical. Dans nos travaux, nous avons établi la correspondance suivante entre le simplexe usuel et le simplexe tropical : *pour tout programme linéaire tropical générique, l'algorithme du simplexe tropical trace l'image par la valuation du chemin sur l'algorithme du simplexe usuel sur n'importe quel relèvement du programme tropical dans* $\mathbb{R}\{\{t\}\}$.

Les résultats présentés ci-dessus sont rassemblés dans le preprint [43]. Ils ont fait l'objet de plusieurs présentations en conférence [32], [33].

Ces résultats ouvrent la possibilité de relier la complexité du l'algorithme du simplexe usuel avec celles des jeux déterministes. Pour ces derniers, on sait seulement que leur résolution est dans la classe de complexité $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$, et on ignore s'il existe un algorithme de complexité polynomiale. De façon similaire, on ne sait pas caractériser de façon précise la complexité de l'algorithme du simplexe usuel. Celle-ci dépend fortement de la règle de pivotage utilisée, et il existe des problèmes sur lesquelles de nombreuses règles de pivotage ont une complexité exponentielle. L'existence d'une règle de pivotage qui permettrait au simplexe de terminer en temps polynomial sur n'importe quelle instance est encore aujourd'hui une question ouverte.

Dans un deuxième travail, nous avons relié les deux problèmes ouverts précédents, grâce à l'algorithme du simplexe tropical. Nous avons en effet exhibé une classe de règles de pivotage, dites *combinatoires*, et avons montré qu'elles satisfont la propriété suivante : *s'il existe une règle de pivotage combinatoire qui permet de résoudre tout problème de programmation linéaire usuel en temps polynomial, alors on peut résoudre les jeux à paiement moyen en temps (fortement) polynomial.* Le terme *combinatoire* fait référence au fait que la règle est définie en fonction du signe des mineurs de la matrice des coefficients du problème linéaire.

Ce dernier résultat est décrit dans le preprint [42].

English version

X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault, have developed in [63], [16] algorithms allowing one to manipulate tropical polyhedra. They correspond to the contributions described in §6.2.1. In particular, they can be used to determine the vertices and extreme rays of a tropical polyhedron defined as the intersection of half-spaces, or inversely, to compute an external description from a set of generators. These algorithms are implemented in the library TPLib (see §5.3).

In an ongoing work of X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert and M. Joswig, we introduced a tropical analogue of the simplex algorithm, allowing one to solve problems of *tropical linear programming*, which are of the form (12), where the coefficients of the program, $a^{\pm}_{ij}$, $b^{\pm}_i$, c_j take their values in the max-plus semiring $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. These problems are closely related to mean payoff games, as solving a game of this kind is equivalent to determine whether a tropical linear program admits a feasible point [57].

Like the classical simplex algorithm, the tropical simplex algorithm performs pivoting operations between basis points, until it reaches the optimum. The main discrepancy with the classical algorithm is that the pivoting is now a purely combinatorial operation, which is performed by using a local description of the polyhedron by a directed hypergraph. This allowed us to show that *a tropical pivoting step (including computing reduced costs) has the same complexity as in the classical simplex algorithm, i.e.* $O(n(m + n))$. This is all the more surprising as the tropical edge between two given points has a geometrically more complex structure in the tropical case (it is constituted of up to n ordinary line segments).

The tropical simplex algorithm turns out to be closely related to the classical one. Thanks to Tarski's principle, the latter is also valid for linear programs over the field $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ of generalized Puiseux series in an indeterminate t. These series are of the form (13), where the α_i are real numbers, the coefficients c_{α_i} are non-zero reals, and the sequence $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ is strictly increasing and either finite or unbounded. The opposite of the smallest exponent of the series, $-\alpha_1$, is called *valuation*. A tropical linear program is said to be *lifted* to a linear program over $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ if the valuation of the coefficients of the latter are sent to the coefficients of the former by the valuation. We showed the following relation between the classical simplex algorithm and its tropical analogue: *for all generic tropical linear program, the tropical simplex algorithm computes the image by the valuation of the path of the classical simplex algorithm, applied to any lift in* $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ *of the original program.*

These results are gathered in the preprint [43]. They have been presented in several conferences [32], [33].

They allow one to relate the complexity of the classical simplex algorithm with the complexity of mean payoff games. The latter is unsettled, these games are known to be in the class NP $\cap$ coNP but it is not known whether they can be solved in polynomial time. Basic complexity issues regarding the classical simplex algorithm are also unsettled: its execution time depends on the pivoting rule, and many pivoting rules have been shown to have exponential worst case behaviors. The existence of a pivoting rule leading the simplex to terminate in polynomial time is still an open question.

In a second work, we related these two open questions, via the tropical simplex algorithm. We identified a class of pivoting rules, which are said to be *combinatorial*, and show that they have the following property: *if there is a combinatorial pivoting rule allowing one to solve every classical linear programming problem in polynomial time, then, mean payoff games can be solved in (strongly) polynomial time.* By *combinatorial*, we mean that the rule depends only of the coefficients of the system through the signs of minors of the coefficients matrix.

This result is given in the preprint [42].

6.4.3. Problèmes d'accessibilité dans les hypergraphes orientés et leur complexité/Reachability problems in directed hypergraphs and their complexity

Participant: Xavier Allamigeon.

Les hypergraphes orientés sont une généralisation des graphes orientés, dans lesquelles chaque arc relie un ensemble de sommets à un autre. Ils jouent un rôle important dans les travaux récents sur la convexité tropicale (voir §6.2.1), puisqu'ils offrent une représentation naturelle des cônes définis sur le sous-semi-anneau booléen $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\}$.

Dans un travail de X. Allamigeon [15], on étudie la complexité de problèmes d'accessibilité sur les hypergraphes orientés. Nous introduisons un algorithme de complexité presque linéaire permettant de déterminer les composantes fortement connexes terminales (qui n'accèdent à aucune autre composante si ce n'est elles-mêmes) d'un hypergraphe.

Nous établissons également une borne inférieure sur-linéaire sur la taille de la réduction transitive de la relation d'accessibilité dans les hypergraphes. Cela indique que la relation d'accessibilité dans les hypergraphes orientés est combinatoirement plus complexe que celle des graphes orientés. Cela suggère aussi que des problèmes comme le calcul des composantes fortement connexes est plus difficile sur les hypergraphes que sur les graphes. Nous mettons d'ailleurs en évidence une réduction en temps linéaire du problème du calcul des ensembles minimaux dans une famille d'ensembles donnée, vers le problème du calcul de toutes les composantes fortement connexes d'un hypergraphe. Le problème du calcul des ensembles minimaux a été largement étudié dans la littérature [155], [175], [174], [156], [157], [158], [101], [69], et aucune algorithme en temps linéaire n'est connu à ce jour.

English version

Directed hypergraphs are a generalization of directed graphs, in which the tail and the head of the arcs are sets of vertices. It appears that they play an important role in the recent works on tropical convexity (see §6.2.1), since they offer a natural representation of cones defined over the boolean sub-semiring $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\}$.

In a work of X. Allamigeon [15], we study the complexity of reachability problems on directed hypergraphs. We introduce an almost linear-time algorithm allowing to determine the terminal strongly connected components (a component is said to be *terminal* when no other component is reachable from it).

We also establish a super-linear lower bound over the size of the transitive reduction of the reachability relation in directed hypergraphs. This indicates that the reachability relation is combinatorially more complex in directed hypergraphs than in directed graphs. This also suggests that reachability problems such as computing all strongly connected components are likely to be harder in hypergraphs than in graphs. Besides, we show that the minimal set problem can be reduced in linear time to the problem of computing all strongly connected components in hypergraphs. The former problem consists in finding all minimal sets among a given family of sets. It has been well studied in the literature [155], [175], [174], [156], [157], [158], [101], [69], and no linear time algorithm is known.

6.4.4. Approximation max-plus de fonctions valeurs et équations de Riccati généralisées/Max-plus approximation of value functions and generalized Riccati equations

Participants: Stéphane Gaubert, Zheng Qu, Shanjian Tang [Fudan University, Shanghai].

La thèse de Zheng Qu, supervisée par S. Gaubert et S. Tang, a porté sur le développement de méthodes tropicales en programmation dynamique approchée [12].

Les méthodes d'approximation max-plus conduisent à approcher la fonction valeur d'un problème de contrôle ou de jeux par un supremum d'un nombre fini de formes quadratiques, voir notamment [113]. On s'intéresse ici à l'analyse théorique (complexité) ainsi qu'à l'amélioration de ces méthodes. Dans certains cas, ces formes quadratiques sont propagées par des flots d'équations de Riccati généralisées. Afin d'effectuer des analyses d'erreur, on exploite les propriétés de contraction du flot de Riccati pour certaines métriques connues sur le cône des matrices positives, et en particulier pour la métrique de Thompson. Celle-ci n'est rien d'autre que $d_T(A, B) = \| \log \operatorname{spec} (A^{-1}B)\|_\infty$, où spec désigne la suite des valeurs propres d'une matrice, et log s'entend composante par composante.

Ceci nous a amené à étudier le problème général du calcul du taux de contraction d'un flot monotone sur un cône, pour la métrique de Thompson. En effet, les propriétés de contraction de l'équation de Riccati standard sont connues (résultats de Bougerol pour la métrique Riemanienne invariante, et de Wojtowski pour la métrique de Thompson), mais les techniques de preuve employées dans ce cadre (semigroupes de matrices symplectiques) ne s'étendent pas aux équations généralisées.

On donne dans [114], [28] une formule explicite générale pour le taux de contraction pour la métrique de Thompson d'un flot monotone, faisant seulement intervenir le générateur du flot et sa dérivée. On a notamment appliqué ce résultat à une équation de Riccati généralisée associé à des problèmes de contrôle stochastique avec critère quadratique, dans lesquels la dynamique comporte un terme bilinéaire en le contrôle et le bruit.

On a montré dans ce cas que la métrique de Thompson est la seule métrique de Finsler invariante pour laquelle le flot est nonexpansif, et l'on a caractérisé la constante de contraction locale.

Une application de ces résultats à l'analyse d'une méthode de réduction de la malédiction de la dimension, dûe à McEneaney, a été donnée dans [28], [50].

English version

The PhD work of Zheng Qu, supervised by S. Gaubert and S. Tang, dealt with the development of tropical methods in approximate dynamic programming [12].

The max-plus methods lead to approach the value function of an optimal control or zero-sum game problem by a supremum of a finite number of quadratic forms, see in particular [113]. We are interested here in the theoretical analysis (complexity) of this class of methods, as well as of their improvement. In certain cases, the quadratic forms are propagated by the flows of generalized Riccati equations. In order to perform an error analysis, we need to use some contraction properties of the Riccati flow, for certain known metrics on the space of positive matrices, like Thompson's metric. The latter is nothing but $d_T(A, B) = \| \log \operatorname{spec}(A^{-1}B)\|_\infty$, where spec denotes the sequence of eigenvalues of a matrix, and $\log$ is understood entrywise.

This led us to study the general problem of computing the contraction rate of an order-preserving flow on a cone, with respect to Thompson's metric. Indeed, the contraction properties of the standard Riccati flow are known (theorem of Bougerol for the invariant Riemanian metric, of Wojtowski for the Thompson's metric), but the proof of these properties (based on symplectic semigroups) does not carry over to generalized Riccati equations.

We gave in [114],[28] a general explicit formula for the contraction rate with respect to Thompson's metric of an order-preserving flow, involving only the generator of the flow and its derivative. We applied in particular this result to a generalized Riccati equation, associated to stochastic optimal control problems with a quadratic cost and a bilinear dynamics (presence of a bilinear term between the control and the noise). We showed that in this case, the Thompson's metric is the only invariant Finsler metric in which the generalized Riccati flow is nonexpansive, and we characterized the local contraction rate of this flow.

Z. Qu has applied these results in [28], [50] to the analysis of a method of reduction of the curse of dimensionality, introduced by McEneaney.

6.4.5. *Points fixes d'applications monotones homogènes et jeux à somme nulle/Fixed points of order preserving homogeneous maps and zero-sum games*

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Antoine Hochart.

Les opérateurs de Shapley sont les opérateur de programmation dynamique pour des jeux à somme nulle, ce sont précisément les opérateurs qui préservent l'ordre et commutent avec l'addition d'une constante. Le travail de M2 d'Antoine Hochart a traité d'une sous-classe d'opérateurs de Shapley, qui commutent en outre avec la multiplication par une constante positive. Nous les appellerons ici *sans-paiement*, car ils apparaissent dans des classes de jeux où les paiements instantanés sont nuls - le paiement a lieu seulement le dernier jour (*recursive games*). Ils apparaissent aussi dans l'étude structurelle de familles paramétriques de jeux répétés avec espace d'état fini et information parfaite, si l'on suppose par exemple que les probabilités de transitions sont fixées, mais que les paiements sont des paramètres. À toute famille paramétrique de jeux est associée un opérateur sans paiements et les points fixes de ce dernier sont précisément les vecteurs de paiement moyen réalisables. Un problème de base consiste à vérifier si un opérateur sans paiement n'a que des points fixes triviaux (réduits à des multiples du vecteur unité), et si possible, de déterminer des caractéristiques plus précises de l'ensemble des points-fixes, par exemple, savoir s'il existe un point fixe d'argmin donné. Le premier problème est connu être co-NP-complet, même pour des jeux déterministes. Nous montrons cependant que le second problème (point fixe d'argming prescrit) peut être résolu en temps polynomial. La preuve repose sur la construction d'une correspondance de Galois entre les faces d'un hypercube qui sont invariantes par l'opérateur, ainsi que sur une réduction à un problème d'accessibilité dans un hypergraphe orienté.

English version

Shapley operators are the dynamic programming operators of zero-sum stochastic games, they can be characterized as order preserving maps commuting with the addition of a constant. The M2 work of Antoine Hochart has dealt with a subclass of Shapley operators which are characterized by the property of commuting with the multiplication by a positive constant. We call them *payment-free*, as they arise in the study of *recursive games*, in which the payment only occurs when the game stops. They also arise in the study of structural properties of parametric mean payoff games (the transition probabilities are fixed, not the transition payoffs) with finite action spaces and perfect information: their fixed point set can be shown to give all the possible mean payoff vectors of such games. A basic problem is to check whether the fixed point set of such an operator is trivial (reduced to the multiples of the unit vector), and more precisely to determine its characteristics, for instance decide whether there is a fixed point with a prescribed argmin. The former problem is already known to be co-NP-complete, even for deterministic games. We showed however that the latter can be solved in polynomial time. The proof relies on the construction of a Galois connection between faces of the hypercube that are invariant by the operator, and on a reduction to a reachability problem in a directed hypergraph.

6.5. Applications

6.5.1. Introduction

Nous présentons maintenant plusieurs travaux de nature appliquée, touchant à des domaines variés, dans lesquels nous exploitons certaines des techniques mathématiques présentées précédemment, et particulièrement celles qui relèvent de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la convexité tropicale. Ces applications utilisent aussi des techniques d'algèbre linéaire ou d'optimisation convexe.

English version

In this section, we describe several applied works in which we use some of the theoretical tools developed by the team, including non-linear Perron-Frobenius theory and tropical convexity. Some of these applications also make an intensive use of linear algebraic and convex programming methods.

6.5.2. Propriétés des valeurs propres de Perron et de Floquet, et application en chronothérapeutique/Properties of Perron and Floquet eigenvalue, with an application to chronotherapeutics

Participants: Frédérique Billy [Projet BANG, Inria], Jean Clairambault [Projet BANG, Inria], Olivier Fercoq, Stéphane Gaubert, Thomas Lepoutre [Projet BANG puis DRACULA, Inria].

On s'intéresse à des modèles de systèmes dynamiques monotones structurés en âge représentant la croissance de populations de cellules (saines ou tumorales), à la suite de travaux de Clairambault et Perthame. Il s'agit de comprendre l'influence du contrôle circardien sur la croissance des cellules. Dans le cas stationnaire, le taux de croissance est représenté par une valeur propre de Perron. Dans le cas périodique, il s'agit d'une valeur propre de Floquet. Les travaux [39], [73], [72] portent sur l'identification de ces modèles ainsi que sur un problème de contrôle thérapeutique, consistant à minimiser le taux de croissance des cellules tumorales sous une contrainte de non-toxicité du traitement (maintien d'une population de cellules saines). Ce travail s'appuie en particulier sur un algorithme d'optimisation de la valeur propre de Perron d'une matrice développé par Fercoq dans un autre contexte [104].

Un développement récent de ce travail peut être trouvé dans [39]. Un travail théorique sur ce type de modèles est présenté dans [46].

English version

We study monotone dynamical systems representing the growth of cells (healthy or tumoral), following a work of Clairambault and Perthame. The goal is to understand how the circadian control influences the growth of cells. In the case of stationnary monotone systems, this growth is measured by the Perron root. In the time periodic case, this Perron root is replaced by a Floquet multiplier.

The works [39], [73], [72] deal with the identification of these models, together with a therapeutic control problem, consisting in minimizing the growth rate of tumoral cells, under a non-toxicity constraint (preserving the population of healthy cells). This works relies in particular on a fast algorithm to optimize the Perron eigenvalue of a matrix, developed by Fercoq in a different context [104].

A recent development of this work can be found in [39]. A theoretical work on this kind of models has been presented in [46].

6.5.3. Preuve formelle d'inégalités non-linéaires/Formal proofs of non-linear inequalities

Participants: Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Victor Magron, Benjamin Werner [LIX].

La thèse de Victor Magron [11], dirigée par Benjamin Werner, codirigée par Stéphane Gaubert et Xavier Allamigeon, a porté sur la certification de bornes inférieures de fonctions multivariées à valeurs réelles, définies par des expressions semi-algébriques ou transcendantes, et sur la preuve de validité de celles-ci au moyen de certificats dans l'assistant de preuves Coq.

De nombreuses inégalités de cette nature apparaissent notamment dans la preuve par Thomas Hales de la conjecture de Kepler. Voici un exemple typique d'inégalité à prouver.

LEMME 9922699028 FLYSPECK. *Soit K, $\Delta\mathbf{x}$, l, t et f définis comme suit:*

$$\begin{aligned}
K &:= [4, 6.3504]^3 \times [6.3504, 8] \times [4, 6.3504]^2 \ , \\
\Delta\mathbf{x} &:= x_1x_4(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_2x_5(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6) \\
&\quad +x_3x_6(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6) \\
&\quad -x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5 - x_1x_2x_6 - x_4x_5x_6 \ , \\
l(\mathbf{x}) &:= -\pi/2 + 1.6294 - 0.2213(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_5} + \sqrt{x_6} - 8.0) \\
&\quad +0.913(\sqrt{x_4} - 2.52) + 0.728(\sqrt{x_1} - 2.0) \ , \\
t(\mathbf{x}) &:= \arctan \frac{\partial_4 \Delta\mathbf{x}}{\sqrt{4x_1\Delta\mathbf{x}}} \ , \\
f(\mathbf{x}) &:= l(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x}) \ .
\end{aligned}$$

Alors, $\forall \mathbf{x} \in K, f(\mathbf{x}) \geq 0$.

On s'est donc intéressé à des fonctions non-linéaires, faisant intervenir des opérations semi-algébriques ainsi que des fonctions transcendantes univariées ($\cos$, $\arctan$, $\exp$, etc).

De manière classique, on peut approcher les fonctions transcendantes qui interviennent de la sorte par des polynômes, ce qui permet de se ramener à des problèmes d'optimisation semi-algébriques, que l'on peut résoudre par des techniques de sommes de carrés creuses conduisant à des problèmes SDP. Cependant, en pratique, cette approche est limitée par la taille des SDP à résoudre, qui croît rapidement avec le degré des approximations polynomiales.

Dans ce travail de thèse, on a développé une méthode alternative, qui consiste a borner certains des constituants de la fonction non-linéaire par des suprema de formes quadratiques dont les Hessiens sont judicieusement choisis. On reprend donc ici l'idée des approximations "max-plus" initialement introduites en contrôle optimal, en s'appuyant sur des techniques d'interprétation abstraite (généralisation non-linéaire de la méthode des gabarits de Manna et al.). Ainsi, on obtient une nouvelle technique d'optimisation globale, basée sur les gabarits, qui exploite à la fois la precision des sommes de carrés et la capacité de passage à l'échelle des méthodes d'abstraction.

L'implémentation de ces méthodes d'approximation a abouti à un outil logiciel : `NLCertify`. Cet outil génère des certificats à partir d'approximations semi-algébriques et de sommes de carrés. Son interface avec Coq permet de bénéficier de l'arithmétique certifiée disponible dans l'assistant de preuves, et ainsi d'obtenir des estimateurs et des bornes valides pour chaque approximation.

Les performances de cet outil de certification ont été démontrées sur divers problèmes d'optimisation globale ainsi que sur des inégalités essentiellement serrées qui interviennent dans la preuve de Hales (projet Flyspeck).

Ce travail est exposé dans [25], [26].

English version

The PhD work of Victor Magron [11], supervised by Benjamin Werner, and cosupervised by Stéphane Gaubert and Xavier Allamigeon, dealt with the certification of lower bounds for multivariate functions, defined by semi-algebraic or transcendental expressions, and their correctness proof through certificates checked in the Coq proof assistant.

Many inequalities of this kind appear in particular in the proof by Thomas Hales of Kepler's conjecture. Here is a typical example of inequality.

LEMMA 9922699028 FLYSPECK. *Let K, $\Delta\mathbf{x}$, l, t and f be defined as follows:*

$$\begin{aligned}
K &:= [4, 6.3504]^3 \times [6.3504, 8] \times [4, 6.3504]^2 \ , \\
\Delta\mathbf{x} &:= x_1x_4(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_2x_5(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6) \\
&\quad +x_3x_6(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6) \\
&\quad -x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5 - x_1x_2x_6 - x_4x_5x_6 \ , \\
l(\mathbf{x}) &:= -\pi/2 + 1.6294 - 0.2213(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_5} + \sqrt{x_6} - 8.0) \\
&\quad +0.913(\sqrt{x_4} - 2.52) + 0.728(\sqrt{x_1} - 2.0) \ , \\
t(\mathbf{x}) &:= \arctan \frac{\partial_4 \Delta\mathbf{x}}{\sqrt{4x_1\Delta\mathbf{x}}} \ , \\
f(\mathbf{x}) &:= l(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x}) \ .
\end{aligned}$$

Then, $\forall \mathbf{x} \in K, f(\mathbf{x}) \geq 0$.

Thus, we considered non-linear functions, defined in terms of semi-algebraic operations and univariate transcendental functions ($\cos$, $\arctan$, $\exp$, etc).

Such transcendental functions can be classically approximated by polynomials, which leads to semi-algebraic optimization problems, which can be solved by sparse sum of squares techniques leading to SDP formulations. However, in practice, this approach is limited by the growth of the size of the SDP instances to be solved, whichs grows quickly with the degree of polynomial approximations.

In this PhD, we developed an alternative method, which consists in bounding some constituents of the non-linear function to be optimized by suprema of quadratic forms with well chosen Hessians. This is based on the idea of "maxplus approximation" initially introduced in optimal control, and also, on abstract interpretation (the template method introduced by Manna et al. in static analysis). In this way, we end up with a new global optimization technique, which takes advantage of the precision of sum of squares and of the scalability of abstraction methods.

These methods have been implemented in a software tool: `NLCertify`. This tool generates certificates from semi-algebraic and sum of square certificates. Its interface with Coq allows one to take benefit of the certified arithmetics available in this proof assistant, and so, to obtain estimators and valid bounds for each approximation.

The performances of this certification tool have been shown on several global optimization problems from the litterature, as well as on essentially tight inequalities taken from Hales' proof (Flyspeck project).

This work is presented in [25], [26].

6.5.4. *Vérification de systèmes temps-réels/Verification of real-time systems*

Participants: Xavier Allamigeon, Uli Fahrenberg [IRISA], Stéphane Gaubert, Ricardo Katz [Conicet], Axel Legay [IRISA].

Dans [141], Lu, Madsen, Milata, Ravn, Fahrenberg et Larsen ont montré que les polyèdres tropicaux peuvent être utilisés dans le cadre de l'analyse d'accessibilité d'automates temporisés. En effet, les polyèdres tropicaux expriment naturellement des invariants non-convexes, qui sont en fait des disjonctions d'invariants fournis par des DBM (*difference bound matrices*). A ce titre, les polyèdres tropicaux devraient permettre de réduire le nombre de disjonctions réalisées pendant l'analyse d'automates temporisés. Une limitation importante de cette approche est cependant que les polyèdres tropicaux sont topologiquement fermés, et qu'ils ne peuvent donc pas exprimer de contraintes d'inégalités strictes. Ces dernières sont néanmoins fondamentales dans l'analyse de systèmes temps-réels.

Nous avons donc développé dans [44] une généralisation des polyèdres tropicaux permettant d'exprimer des contraintes mixtes, *i.e.* strictes ou larges. Notre approche repose sur l'utilisation d'inégalités tropicales linéaires à coefficients dans un (quotient du) semi-anneau de germes affines. Afin de réaliser des opérations sur cette nouvelle classe de polyèdres tropicaux, nous avons défini deux nouveaux algorithmes. Le premier est un analogue tropical de l'élimination de Fourier-Motzkin. Celle-ci s'applique plus généralement à des systèmes d'inégalités linéaires sur des semi-anneaux idempotents et totalement ordonnés. Le second algorithme permet de tester si un système de contraintes mixtes admet une solution. Nous montrons en effet que ce problème est équivalent en temps polynomial à la résolution d'un problème de jeux déterministes à somme nulle. Ces deux contributions nous permettent de définir les primitives requises pour l'analyse d'accessibilité d'automates temporisés.

English version

Lu, Madsen, Milata, Ravn, Fahrenberg and Larsen have shown in [141] that tropical polyhedra can be applied to the reachability analysis of timed automata. Indeed, tropical polyhedra naturally express non-convex invariants, which correspond to disjunctions of invariants provided by DBM (*difference bound matrices*). Consequently, tropical polyhedra should allow to reduce the number of disjunctions arising during the analysis of timed automata. An important limitation of this approach is that tropical polyhedra are topologically closed, and thus they cannot express strict inequality constraints. However, such constraints plays an important role in the analysis of real-time systems.

As a result, we have developed in [44] a generalization of tropical polyhedra, in order to express mixed constraints, *i.e.* strict or loose ones. Our approach relies on tropical linear inequalities with coefficients in a (quotient of) the semiring of affine germs. In order to perform operations on this new class of polyhedra, we have introduced two new algorithms. The first one is a tropical analog of Fourier-Moztkin elimination. In fact, it applies more generally to systems of linear inequalities over totally ordered and idempotent semirings. The second algorithm allows to test the feasability of a mixed constraint system. We indeed show that this problem is polynomial-time equivalent to solving mean payoff games. These two contributions allow to define the primitives required by the reachability analysis of timed automata.

7. Bilateral Contracts and Grants with Industry

7.1. Contrats avec l'Industrie/Bilateral Contracts with Industry

- Modélisation et Résolution des problèmes de très grande taille dans les applications du yield management au réseau des télécommunications mobiles: CRE avec Orange Labs (responsable du suivi Orange Labs: Mustapha Bouhtou), signé en août 2013.

8. Partnerships and Cooperations

8.1. Actions nationales/National Initiatives

8.1.1. ANR

- Projet ANR Arpège ASOPT (Analyse statique et Optimisation), responsable B. Jeannet. Partenaires: équipe-projet Popart (Inria Grenoble), équipe MeASI, EADS, et Maxplus. Ce projet a été labellisé par le pôle de compétitivité System@tic.
- Participation de Cormac Walsh au projet ANR FINSLER (Géométrie de Finsler et applications).
- Projet ANR CAFEIN (Combinaison d'approches formelles pour l'étude d'invariants numériques), responsable P.L. Garoche. Partenaires: ONERA, CEA LIST, ENSTA Paristech, Inria Saclay (Maxplus, Toccata, Parkas), Université de Perpignan, Prover, Rockwell Collins France.

8.1.2. Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation

Projet intitulé "Méthodes tropicales pour l'optimisation", responsable X. Allamigeon, faisant intervenir M. Akian, P. Benchimol, S. Gaubert, R. Katz, et Z. Qu.

8.2. Actions internationales/International Initiatives

8.2.1. Inria International Partners

8.2.1.1. Informal International Partners

Collaborations régulières dans le cadre des programmes internationaux ci-dessous, ainsi qu'avec:

- Ricardo Katz (Conicet et Cifasis, Argentine);
- Alexander Guterman (Moscow State University);
- Françoise Tisseur (Université de Manchester) qui participe à l'encadrement de la thèse d'Andrea Marchesini.

8.2.2. Participation In other International Programs

- La thèse de Pascal Benchimol est financée par une bourse Monge/DGA prévoyant des visites régulières du doctorant dans l'équipe de Michael Joswig (TU-Darmstadt).
- La thèse de Zheng Qu est co-encadrée par Shanjian Tang de l'Université Fudan (Shanghai), dans l'équipe duquel la doctorante effectue une partie de son travail de recherche.
- Les membres de l'équipe sont partenaires du Grant RFBR–CNRF 11-01-93106 "Tropical Mathematics and Mathematical Physics", porté par l'équipe de Grigori Litvinov (Moscou independent University).

8.3. Accueils de chercheurs étrangers/International Research Visitors

8.3.1. Chercheurs étrangers/Visits of International Scientists

- Zur Izhakian, 2 jours en Fevrier.
- Srinivas Sridharan (University of California San Diego), 1 semaine en Mai.
- Ricardo Katz (Conicet, Rosario, Argentine), 2 mois en mars-avril, financé par PGMO.
- Alexander Guterman (Université d'état de Moscou), 5 jours en Septembre.
- Françoise Tisseur (Univ. Manchester), 4 jours en Janvier.
- James Hook (Univ. Manchester), 4 jours en Janvier et 4 jours en Octobre.
- Visite d'un jour de Maurizio Falcone (autour de la thèse de Zheng Qu).
- Visites d'un jour d'Yves Bertot, Didier Henrion, Monique Laurent, Markus Schweighofer, et de 4 jours de Thomas Hales (autour de la thèse de Victor Magron).

8.3.2. Séjours à l'étranger/Visits to International Teams

- P. Benchimol, visite à TU Darmstadt, décembre 2013 (1 semaine).
- A. Marchesini, séjour à l'Université de Manchester, avril 2013 (5 jours).

- M. Akian, séjour à l'Université de Manchester, avril 2013 (2 jours).
- X. Allamigeon, visite à TU Berlin, décembre 2013 (2 jours).

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique/Scientific Animation

- M. Akian :
  - Membre élue du conseil du laboratoire du CMAP.
- S. Gaubert :
  - Vice-président du comité des projets du Centre de Recherche Inria de Saclay – Île-de-France depuis Janvier 2008, et membre nommé de la commission d'évaluation de l'Inria.
  - Membre du comité éditorial de la collection Mathématiques et Applications, SMAI et Springer.
  - Membre du comité éditorial du journal RAIRO Operations research.
  - Membre du conseil scientifique du CMAP.
  - Membre du CNU en 26ième section.
  - Membre du comité de pilotage du PGMO (programme Gaspard Monge d'optimisation, FMJH et EDF), nommé directeur de ce programme depuis le 1er Novembre.
  - Coorganisateur du Séminaire Parisien d'Optimisation.

9.2. Enseignement - Encadrement - Jurys /Teaching - Supervision - Juries

9.2.1. Enseignement/Teaching

- X. Allamigeon
  - Master: Petites classes et encadrement d'enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées) (niveau M1).
- P. Benchimol
  - Monitorat en L1 à l'Univ. Paris VI, 72h.
- S. Gaubert
  - Cours "Systèmes à Événements Discrets", option MAREVA, ENSMP.
  - Cours "Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux" du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l'Université de Paris 6 et de l'École Polytechnique.
  - Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (majeure de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [75].
- Z. Qu
  - Petites classes d'Automatique (AO102) en première année à l'ENSTA (14h).

9.2.2. Encadrement/Supervision

- PhD: Zheng Qu, inscrite à l'École Polytechnique, depuis septembre 2010, directeur de thèse: S. Gaubert, coencadrement: S. Tang (Université Fudan, Shanghai, Chine), soutenue le 21 Octobre 2013.

- PhD in progress : Pascal Benchimol, inscrit à l'École Polytechnique à partir de septembre 2011, directeur de thèse: S. Gaubert, coencadrement: X. Allamigeon, avec une participation à l'encadrement de M. Joswig (TU-Darmstadt) dans le cadre du programme bourse Monge (bourses données pour des doctorants avec un partenaire étranger).
- PhD : Victor Magron, inscrit à l'École Polytechnique, depuis septembre 2010, directeur de thèse: Benjamin Werner (Inria et LIX), coencadrement: S. Gaubert et X. Allamigeon, soutenue le 9 décembre 2013.
- PhD in progress : Andrea Marchesini, inscrit à l'École Polytechnique, depuis septembre 2012, directeur de thèse: Marianne Akian, codirection: S. Gaubert, avec une participation à l'encadrement de Françoise Tisseur (U. Manchester).
- PhD in progress : Antoine Hochart, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2013, directeur de thèse: Stéphane Gaubert, codirection: Marianne Akian.
- PhD in progress : Eric Fodjo, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2013, directeur de thèse: Marianne Akian.

9.2.3. Jurys/Committees

- M. Akian
  - Jury (rapporteur) de thèse de Jean-Christophe Alais (16 décembre 2013).
- X. Allamigeon
  - Membre du jury du prix de thèse Gilles Kahn de la Société Informatique de France (septembre-décembre 2013).
  - Examinateur dans le jury de soutenance de thèse de Victor Magron (Décembre 2013).
- S. Gaubert
  - Membre de la commission de recrutement en informatique à l'École Polytechnique.
  - Membre du jury de concours Inria CR2 Grenoble.
  - Jury de thèse de Richard Combes (rapporteur), Université Pierre et Marie Curie, Février 2013.
  - Jury de thèse de Jean-Robin Medori (rapporteur), Université Pierre et Marie Curie, Juin 2013.
  - Jury de thèse de Rabah Boukra (rapporteur), Université d'Angers, Novembre 2013.
  - Jury de thèse de Matthew Bourque, University of Illinois at Chicago, Juillet 2013.
  - Jury de thèse de Daniel Hoehener, Université Pierre et Marie Curie, 17 Septembre 2013.
  - Jury de thèse de Zheng Qu, École Polytechnique, 21 Octobre 2013.
  - Jury de thèse de Dario Prandi, École Polytechnique, 23 Octobre 2013.
  - Jury de thèse de Victor Magron, École Polytechnique, 9 Décembre 2013.

9.3. Popularization

- J.P. Quadrat :
  - Administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

9.4. Participation à des colloques, séminaires/Conférences, Seminars

- M. Akian
  - Tropical Mathematics Seminar and Reading Group, Univ. Manchester, 30 avril 2013. Titre de l'exposé: “Majorisation inequalities for valuations of eigenvalues”

  - Tropical Mathematics and its Applications Meeting (Workshop) of the LMS Joint Research Group, Univ. Birmingham, 16 mai 2013. Titre de l'exposé: "Majorisation inequalities for valuations of eigenvalues"
  - 18th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Providence, June 3-7, 2013. Minisymposium "Linear and Nonlinear Perron-Frobenius Theory". Titre de l'exposé: "Policy iteration algorithm for zero-sum two player stochastic games: complexity bounds involving nonlinear spectral radii"
  - Seminario di Modellistica Differenziale Numerica, Mathematics Dept., Univ. La Sapienza, Rome, 10 décembre 2013. Titre de l'exposé: "Policy iteration for stochastic games"
  - 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Florence, 10 décembre 2013. Titre de l'exposé: "Solving multichain stochastic games with mean payoff by policy iteration"
- X. Allamigeon
  - SIAM Conference on Control and its Applications, San Diego (Etats-Unis), du 8 au 10 juillet 2013, dans le cadre du mini-symposium "Max-Plus/Tropical Analysis in Control and Systems Theory". Titre de l'exposé: "Tropicalizing the simplex algorithm".
- P. Benchimol
  - Séminaire des thésards, CMAP, Ecole Polytechnique, Mars 2013. Titre de l'exposé: "Petite visite sous les tropiques".
  - SMAI 2013 - 6ème biennale des mathématiques appliquées et industrielles (2013), Seignosse (Landes), 27-31 mai 2013. Titre du Poster: "Tropicalizing the Simplex Algorithm"
  - 18th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Providence, June 3-7, 2013. Minisymposium "Applications of Tropical Mathematics". Titre de l'exposé: "Tropicalizing the simplex algorithm".
  - Journée des doctorants, CMAP, Ecole Polytechnique, Juin 2013
  - Institut für Mathematik, TU Berlin, Décembre 2013
  - Séminaire parisien de théorie des jeux, IHP, Décembre 2013
- S. Gaubert
  - Séminaire de calcul formel, Université de Limoges, 7 Février 2013.
  - Séminaire pluridisciplinaire d'optimisation de Toulouse, May 6, 2013.
  - Control and Games Workshop May 7-10, 2013, Warwick.
  - Conférence plénière à SMAI 2013, Seignosse (Landes), 27-31 mai 2013.
  - Conférence SIAM CT'2013, Juillet, San Diego.
  - Conférence ECC'2013, Juillet, Zurich.
  - Minicours (3h00) aux Journées de Géométrie Algorithmique, Marseille, Décembre 2013.
- A. Marchesini
  - 18th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Providence, June 3-7, 2013. Minisymposium "Applications of Tropical Mathematics". Titre de l'exposé: "Tropical bounds for eigenvalues of matrices"
- Z. Qu
  - Séminaire PGMO, le 19/02/2013. Titre de l'exposé: "Maxplus basis methods for high dimensional optimal control problem: introduction and perspectives"
  - SMAI 2013, Seignosse (Landes), 27-31 mai 2013. Titre de l'exposé: "Taux de contraction de flots croissants sur un cône et application au contrôle stochastique"

  - 18th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), Providence, June 3-7, 2013. Titre de l'exposé: "Dobrushin ergodicity coefficient for Markov operators on cones, and beyond"
  - SIAM conference on control and its applications (SIAM CT 13), San Diego, du 8 au 10 juillet 2013. Titre de l'exposé: "Contraction of Riccati flows applied to the convergence analysis of a max-plus curse of dimensionality free method"
  - European control conference 2013 (ECC 13), Zurich, du 17 au 19 juillet 2013. Titre des 2 exposés: "Markov Operators on Cones and Non-Commutative Consensus", "Contraction of Riccati Flows Applied to the Convergence Analysis of the Max-Plus Curse of Dimensionality Free Method"
  - Journée PGMO, le 04/10/2013. Titre de l'exposé: "Max-plus numerical methods for Hamilton-Jacobi equations: attenuation of the curse of dimensionality"
- C. Walsh
  - Séminaire de téorie ergodique á l'Université de Rennes 1, le 8 april 2013. Titre de l'exposé: "The horofunction boundary of Teichmuller space".
  - Series de trois exposés au "Special Program on Teichmüller Theory" á l'institut Erwin Schrödinger, Vienne, Autriche, du 10 au 12 avril 2013. Titre des exposés: "The horofunction boundary of Teichmüller space".
  - Séminaire de géométrie différentielle á l'Université de Nancy 1, le 21 mai 2013. Titre de l'exposé: "Horofunctions and isometries of Hilbert geometries".
  - Workshop "Journée dynamique et géométrie de Hilbert" á Jussieu (Université Paris VI), le 3 mai 2013. Titre de l'exposé: "Horofunctions and isometries of Hibert geometries".

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. Akian. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", 1999, vol. 351, n^{o} 11, pp. 4515–4543

[2] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. Hogben (editor), Chapman & Hall/CRC, 2006, vol. 39, Chapter 25

[3] M. Akian, S. Gaubert. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", 2003, vol. 52, n^{o} 2, pp. 637-679, http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/

[4] M. Akian, S. Gaubert, B. Lemmens, R. Nussbaum. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", 2006, vol. 140, n^{o} 1, pp. 157–176, http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084

[5] M. Akian, A. Sulem, M. Taksar. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", 2001, vol. 11, n^{o} 2, pp. 153–188

[6] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, J.-P. Quadrat. , *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992

[7] J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, J. Gunawardena. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", 1999, vol. 14, n^{o} 4

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", 2004, vol. 379, pp. 395–422, http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", 1999, vol. 23, pp. 207–219

[10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", 2004, vol. 356, n° 12, pp. 4931-4950, http://www.ams.org/tran/2004-356-12/S0002-9947-04-03470-1/home.html, http://arxiv.org/abs/math.FA/0105091

Publications of the year

Doctoral Dissertations and Habilitation Theses

[11] V. MAGRON. , *Preuves formelles pour l'optimisation globale – Méthodes de gabarits et sommes de carrés*, Ecole Polytechnique X, December 2013, http://hal.inria.fr/pastel-00917779

[12] Z. QU. , *Théorie de Perron-Frobenius non linéaire et méthodes numériques max-plus pour la résolution d'équations d'Hamilton-Jacobi*, Ecole Polytechnique X, October 2013, http://hal.inria.fr/pastel-00927122

Articles in International Peer-Reviewed Journals

[13] A. ADJÉ, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the smallest fixed point of order-preserving nonexpansive mappings arising in positive stochastic games and static analysis of programs*, in "Journal of Mathematical Analysis and applications", February 2014, vol. 410, n° 1, pp. 227-240, Preprint arXiv:0806.1160 [*DOI :* 10.1016/J.JMAA.2013.07.076], http://hal.inria.fr/hal-00940804

[14] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. MARCHESINI. *Tropical bounds for eigenvalues of matrices*, in "Linear Algebra and its Applications", January 2014, 17 p. , See also arXiv:1309.7319 [*DOI :* 10.1016/J.LAA.2013.12.021], http://hal.inria.fr/hal-00881205

[15] X. ALLAMIGEON. *On the Complexity of Strongly Connected Components in Directed Hypergraphs*, in "Algorithmica", January 2013, Published on line [*DOI :* 10.1007/S00453-012-9729-0], http://hal.inria.fr/hal-00782846

[16] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the Vertices of Tropical Polyhedra using Directed Hypergraphs*, in "Discrete and Computational Geometry", February 2013, vol. 49, n° 2, pp. 247-279 [*DOI :* 10.1007/S00454-012-9469-6], http://hal.inria.fr/hal-00782862

[17] X. ALLAMIGEON, R. KATZ. *Minimal external representations of tropical polyhedra*, in "Journal of Combinatorial Theory, Series A", 2013, vol. 120, n° 4, pp. 907-940 [*DOI :* 10.1016/J.JCTA.2013.01.011], http://hal.inria.fr/hal-00782837

[18] O. FERCOQ, M. AKIAN, M. BOUHTOU, S. GAUBERT. *Ergodic Control and Polyhedral approaches to PageRank Optimization*, in "IEEE Transactions on Automatic Control", 2013, vol. 58, n° 1, pp. 134–148, See also arXiv:1011.2348 [*DOI :* 10.1109/TAC.2012.2226103], http://hal.inria.fr/hal-00782749

[19] S. FRIEDLAND, S. GAUBERT. *Submodular spectral functions of principal submatrices of a hermitian matrix, extensions and applications*, in "Linear Algebra and its Applications", May 2013, vol. 438, n° 10, pp. 3872-3884 [*DOI :* 10.1016/J.LAA.2011.11.021], http://hal.inria.fr/hal-00940794

[20] S. FRIEDLAND, S. GAUBERT, L. HAN. *Perron–Frobenius theorem for nonnegative multilinear forms and extensions*, in "Linear Algebra Appl.", 2013, vol. 438, n^o 2, pp. 738–749 [*DOI :* 10.1016/J.LAA.2011.02.042], http://hal.inria.fr/hal-00782755

[21] S. GAUBERT, Z. QU. *The contraction rate in Thompson metric of order-preserving flows on a cone - application to generalized Riccati equations*, in "Journal of Differential Equations", February 2014, vol. published on line [*DOI :* 10.1016/J.JDE.2014.01.024], http://hal.inria.fr/hal-00783972

[22] S. GAUBERT, S. SERGEEV. *The level set method for the two-sided eigenproblem*, in "Discrete Event Dynamic Systems", June 2013, vol. 23, n^o 2, pp. 105-134 [*DOI :* 10.1007/S10626-012-0137-Z], http://hal.inria.fr/hal-00940791

[23] P. PONCET. *How regular can maxitive measures be?*, in "Topology and its Applications", March 2013, vol. 160, n^o 4, pp. 606-619 [*DOI :* 10.1016/J.TOPOL.2013.01.007], http://hal.inria.fr/hal-00922372

International Conferences with Proceedings

[24] M. AKIAN, J. COCHET-TERRASSON, S. DETOURNAY, S. GAUBERT. *Solving multichain stochastic games with mean payoff by policy iteration*, in "52nd IEEE Conference on Decision and Control", Florence, Italy, IEEE, December 2013, http://hal.inria.fr/hal-00933689

[25] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, V. MAGRON, B. WERNER. *Certification of Bounds of Non-linear Functions: the Templates Method*, in "Conferences on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2013)", Bath, United Kingdom, J. CARETTE, D. ASPINALL, C. LANGE, P. SOJKA, W. WINDSTEIGE (editors), Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, July 2013, vol. 7961, pp. 51-65 [*DOI :* 10.1007/978-3-642-39320-4_4], http://hal.inria.fr/hal-00932333

[26] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, V. MAGRON, B. WERNER. *Certification of inequalities involving transcendental functions: combining SDP and max-plus approximation*, in "European Control Conference (ECC'13)", Zurich, Switzerland, 2013, pp. 2244 - 2250, http://hal.inria.fr/hal-00932348

[27] S. GAUBERT, Z. QU. *Markov Operators on Cones and Non-Commutative Consensus*, in "European control conference 2013", Zurich, Switzerland, July 2013, http://hal.inria.fr/hal-00935312

[28] Z. QU. *Contraction of Riccati Flows Applied to the Convergence Analysis of the Max-Plus Curse of Dimensionality Free Method*, in "European control conference 2013", Zurich, Switzerland, July 2013, http://hal.inria.fr/hal-00935313

Conferences without Proceedings

[29] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Policy iteration algorithm for zero-sum two player stochastic games: complexity bounds involving nonlinear spectral radii*, in "ILAS", Providence, United States, June 2013, http://hal.inria.fr/hal-00933261

[30] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. MARCHESINI. *Tropical bounds for eigenvalues*, in "ILAS - 18th Conference of the International Linear Algebra Society", Providence, United States, June 2013, http://hal.inria.fr/hal-00932813

[31] X. ALLAMIGEON. *Tropicalizing the simplex algorithm*, in "SIAM Conference on Control and its Applications (SIAM CT'13)", San Diego, United States, July 2013, http://hal.inria.fr/hal-00932350

[32] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Tropicalizing the simplex algorithm*, in "ILAS 2013 - 18th Conference of the International Linear Algebra Society", Providence, RI, United States, June 2013, http://hal.inria.fr/hal-00930959

[33] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Tropicalizing the Simplex Algorithm*, in "SMAI 2013 - 6ème biennale des mathématiques appliquées et industrielles", Seignosse, France, May 2013, Poster présentant l'article arXiv:1308.0454, http://hal.inria.fr/hal-00930941

[34] S. GAUBERT, Z. QU. *Dobrushin ergodicity coefficient for Markov operators on cones, and beyond*, in "International Linear Algebra Society", Providence, United States, June 2013, http://hal.inria.fr/hal-00935284

[35] S. GAUBERT, Z. QU. *Taux de contraction de flots croissants sur un cône et application au contrôle stochastique*, in "SMAI", Seignosse, France, May 2013, preprint Arxiv: 1206.0448, http://hal.inria.fr/hal-00935291

[36] Z. QU. *Contraction of Riccati flows applied to the convergence analysis of a max-plus curse of dimensionality free method*, in "SIAM conference on control and its applications", San diego, United States, July 2013, Presentation of the article Arxiv:1301:4777, http://hal.inria.fr/hal-00935300

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

[37] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical Cramer Determinants Revisited*, in "International Workshop on Tropical/Idempotent Mathematics and Applications", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, AMS, 2013, 41 p. , To appear, see also arXiv:1309.6298, http://hal.inria.fr/hal-00881203

[38] N. BEEKER, S. GAUBERT, C. GLUSA, L. LIBERTI. *Is the Distance Geometry Problem in NP?*, in "Distance Geometry: Theory, Methods, and Applications", A. MUCHERINO, C. LAVOR, L. LIBERTI, N. MACULAN (editors), Springer, 2013, pp. 85-93 [*DOI :* 10.1007/978-1-4614-5128-0_5], http://hal.inria.fr/hal-00782869

[39] F. BILLY, J. CLAIRAMBAULT, O. FERCOQ. *Optimisation of cancer drug treatments using cell population dynamics*, in "Mathematical Methods and Models in Biomedicine", U. LEDZEWICZ, H. SCHÄTTLER, A. FRIEDMAN, E. KASHDAN (editors), Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, Springer New York, January 2013, 265 p. [*DOI :* 10.1007/978-1-4614-4178-6_10], http://hal.inria.fr/hal-00770366

Other Publications

[40] M. AKIAN, S. GAUBERT. , *Policy iteration for perfect information stochastic mean payoff games with bounded first return times is strongly polynomial*, 2013, 17 p. , Preprint arXiv:1310.4953, http://hal.inria.fr/hal-00881207

[41] M. AKIAN, S. GAUBERT, M. SHARIFY. , *Log-majorization of the moduli of the eigenvalues of a matrix polynomial by tropical roots*, 2013, 29 p. , Preprint arXiv:1304.2967, http://hal.inria.fr/hal-00881196

[42] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. , *Combinatorial simplex algorithms can solve mean payoff games*, 2013, 15 p. , http://hal.inria.fr/hal-00930915

[43] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. , *Tropicalizing the simplex algorithm*, 2013, 35 p. , http://hal.inria.fr/hal-00930913

[44] X. ALLAMIGEON, U. FAHRENBERG, S. GAUBERT, R. D. KATZ, A. LEGAY. , *Tropical Fourier-Motzkin elimination, with an application to real-time verification*, 2013, Preprint arXiv:1308.2122, http://hal.inria.fr/hal-00935072

[45] J. BOLTE, S. GAUBERT, G. VIGERAL. , *Definable zero-sum stochastic games*, 2013, 29 p. , http://hal.inria.fr/hal-00777707

[46] S. GAUBERT, T. LEPOUTRE. , *Discrete limit and monotonicity properties of the Floquet eigenvalue in an age structured cell division cycle model*, 2013, 30 p. , http://hal.inria.fr/hal-00773211

[47] S. GAUBERT, Z. QU. , *Dobrushin ergodicity coefficient for Markov operators on cones, and beyond*, 2013, Arxiv: 1302:5226, http://hal.inria.fr/hal-00935272

[48] P. PONCET. , *Convexities on ordered structures have their Krein–Milman theorem*, 2013, 34 p. , Accepted for publication in Journal of Convex Analysis, http://hal.inria.fr/hal-00922374

[49] P. PONCET. , *The idempotent Radon–Nikodym theorem has a converse statement*, 2013, 13 p. , Accepted for publication in Information Sciences, http://hal.inria.fr/hal-00922377

[50] Z. QU. , *Contraction of Riccati flows applied to the convergence analysis of a max-plus curse of dimensionality free method*, 2013, http://hal.inria.fr/hal-00935270

[51] C. WALSH. , *Gauge-reversing maps on cones, and Hilbert and Thompson isometries*, 2013, 36 p. , http://hal.inria.fr/hal-00930929

References in notes

[52] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). , *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic PublishersDordrecht, 2003, vol. 570, x+473 p.

[53] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", 2004, vol. 339, pp. 103–108, http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438

[54] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. , *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090

[55] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 327, Série I, pp. 927–932, http://hal.inria.fr/inria-00073240

[56] M. AKIAN, J. COCHET-TERRASSON, S. DETOURNAY, S. GAUBERT. , *Policy iteration algorithm for zero-sum multichain stochastic games with mean payoff and perfect information*, 2012, Submitted, http://fr.arxiv.org/abs/1208.0446, http://hal.inria.fr/hal-00773080

[57] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games*, in "Internat. J. Algebra Comput.", 2012, vol. 22, n^{o} 1, 1250001, 43 p. [*DOI :* 10.1142/S0218196711006674], http://arxiv.org/abs/0912.2462

[58] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, pp. 19-51, http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441

[59] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Solutions of max-plus linear equations and large deviations*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005, http://arxiv.org/abs/math.PR/0509279, http://hal.inria.fr/inria-00000218/en/

[60] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control Optim.", 2008, vol. 47, n^{o} 2, pp. 817–848 [*DOI :* 10.1137/060655286], http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0603619

[61] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Doc. Math.", 2009, vol. 14, pp. 195–240, http://arxiv.org/abs/math/0412408

[62] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998

[63] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Inferring Min and Max Invariants Using Max-plus Polyhedra*, in "Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)", Springer, 2008, vol. 5079, Valencia, Spain, 16-18 July 2008

[64] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *The tropical double description method*, in "Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2010)", Nancy, France, March 4-6 2010, http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2010/2443/pdf/1001.AllamigeonXavier.2443.pdf

[65] N. BACAËR. , *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Université Paris 6, January 2002

[66] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, pp. 219-230

[67] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", 1998, vol. 275/276, pp. 3–18

[68] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. , *Nonnegative matrices and applications*, Cambridge university press, 1997, n^{o} 64, XIII+336 p.

[69] R. J. BAYARDO, B. PANDA. *Fast Algorithms for Finding Extremal Sets*, in "Proceedings of the SIAM International Conference on Data Mining, SDM 2011", SIAM, 2011

[70] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98)", Cagliari, Italy, IEE, 1998

[71] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001

[72] F. BILLY, J. CLAIRAMBAULT, O. FERCOQ, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE, T. OUILLON. *Proliferation in Cell Population Models with Age Structure*, in "AIP Conf. Proc.", 2011, vol. 1389, pp. 1212-1215, http://dx.doi.org/10.1063/1.3637834

[73] F. BILLY, J. CLAIRAMBAULT, O. FERCOQ, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE, T. OUILLON, S. SAITO. *Synchronization and control of proliferation in cycling cell population models with age structure*, in "Mathematics and Computers in Simulation", 2012, Published on line, http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2012.03.005, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00662885

[74] T. BLYTH, M. JANOWITZ. , *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972

[75] F. BONNANS, S. GAUBERT. , *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, École Polytechnique, 2012, Huitième édition, 180 pages

[76] H. BRAKER. , *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Delft University of Technology, Dec 1993

[77] S. BURNS. , *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, Caltech, 1990

[78] P. BUTKOVIČ. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", 2003, vol. 367, pp. 313-335

[79] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. , *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984

[80] C.-S. CHANG. , *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000

[81] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", 1986, vol. 34, pp. 6219–34

[82] P. CHRETIENNE. , *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)Paris, 1983

[83] J. COCHET-TERRASSON. , *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, École des Mines, Dec. 2001

[84] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", 2006, vol. 343, n^{o} 5, pp. 377–382

[85] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. MC GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control", Nantes, July 1998

[86] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. , *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, InriaLe Chesnay, France, 1983, n^{o} 191, http://hal.inria.fr/inria-00076367

[87] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", 2003, vol. 293, pp. 189–217

[88] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05)", Edinburgh, LNCS, Springer, July 2005, pp. 462–475

[89] P. COUSOT, R. COUSOT. *Abstract Interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points*, in "Principles of Programming Languages 4", 1977, pp. 238–252

[90] P. COUSOT, R. COUSOT. *Comparison of the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. JTASPEFL '91, Bordeaux*, in "BIGRE", October 1991, vol. 74, pp. 107–110

[91] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", 1980, vol. 78, n° 3, pp. 385–390

[92] R. CUNINGHAME-GREEN. , *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, 1979, n° 166

[93] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994)", Cambridge, Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press, 1998, vol. 11, pp. 354–382

[94] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. , *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, LAAS, 1990

[95] S. DETOURNAY. , *Multigrid methods for zero-sum two player stochastic games*, École Polytechnique (France), September 2012

[96] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", 2004, vol. 9, pp. 1–27

[97] M. DEVELIN, J. YU. *Tropical polytopes and cellular resolutions*, in "Experimental Mathematics", 2007, vol. 16, n° 3, pp. 277–292, http://arxiv.org/abs/math/0605494

[98] V. DHINGRA, S. GAUBERT. *How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration*, in "Valuetools '06: Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools", New York, NY, USA, ACM Press, 2006, 12 p. , http://doi.acm.org/10.1145/1190095.1190110

[99] M. DI LORETO, S. GAUBERT, R. KATZ, J.-J. LOISEAU. *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, in "SIAM J. Control Optim.", 2010, vol. 48, n° 8, pp. 5606-5628, http://arxiv.org/abs/0901.2915, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00411243/en/

[100] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. , *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, Gauthier VillarsParis, 1953, vol. XXI

[101] A. ELMASRY. *Computing the subset partial order for dense families of sets*, in "Information Processing Letters", 2009, vol. 109, n° 18, pp. 1082 - 1086

[102] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005

[103] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", 1997, vol. 324, n^{o} 9, pp. 1043–1046

[104] O. FERCOQ. , *Perron vector optimization applied to search engines*, 2011, http://arxiv.org/abs/1111.2234

[105] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", 2002, vol. 15, n^{o} 2, pp. 497–529, http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151

[106] S. FRIEDLAND. *Limit eigenvalues of nonnegative matrices*, in "Linear Algebra and Its Applications", 1986, vol. 74, pp. 173–178, http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(86)90120-5

[107] S. GAUBERT. , *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, École des Mines de Paris, July 1992

[108] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Dec 1995, vol. 40, n^{o} 12, pp. 2014–2025

[109] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the Proc. of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07)", Braga (Portugal), LNCS, Springer, 2007, vol. 4421, pp. 237–252, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71316-6_17

[110] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 326, Série I, pp. 43–48

[111] S. GAUBERT, R. KATZ. *The Minkowski Theorem for Max-plus Convex Sets*, in "Linear Algebra and Appl.", 2007, vol. 421, pp. 356–369, http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0605078

[112] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", 1999, vol. 44, n^{o} 4, pp. 683–697

[113] S. GAUBERT, W. MCENEANEY, Z. QU. *Curse of dimensionality reduction in max-plus based approximation methods: theoretical estimates and improved pruning algorithms*, in "Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 11)", Orlando, FL, USA, December 2011, pp. 1054-1061, http://arxiv.org/abs/1109.5241

[114] S. GAUBERT, Z. QU. , *The contraction rate in Thompson metric of order-preserving flows on a cone - application to generalized Riccati equations*, 2012, http://fr.arxiv.org/abs/1206.0448

[115] S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Tropical scaling of polynomial matrices*, in "Positive systems", Berlin, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, 2009, vol. 389, pp. 291–303, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02894-6_28, http://arxiv.org/abs/0905.0121

[116] E. GAWRILOW, M. JOSWIG. *polymake: a Framework for Analyzing Convex Polytopes*, in "Polytopes — Combinatorics and Computation", G. KALAI, G. M. ZIEGLER (editors), Birkhäuser, 2000, pp. 43-74

[117] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. , *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994

[118] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", 1996, vol. 323, n^{o} 4, pp. 371–375

[119] M. GONDRAN, M. MINOUX. , *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOCParis, 2002

[120] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", 1977, vol. 2, pp. 25-41

[121] M. GONDRAN, M. MINOUX. *L'indépendance linéaire dans les dioïdes*, in "E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et recherches, Série C, Mathématiques, Informatique", 1978, vol. 1, pp. 67-90

[122] M. GONDRAN, M. MINOUX. , *Graphes et algorithmes*, EyrollesParis, 1979, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984

[123] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Algebraic and combinatorial methods in operations research", Amsterdam, North-Holland Math. Stud., 1984, vol. 95, pp. 147–163

[124] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", 2003, vol. 293, pp. 141–167

[125] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", 1990, vol. 72, pp. 27–38

[126] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Jan 1989, vol. 34, n^{o} 1, pp. 3-9

[127] Z. IZHAKIAN. *Tropical arithmetic and matrix algebra*, in "Comm. Algebra", 2009, vol. 37, n^{o} 4, pp. 1445–1468, http://dx.doi.org/10.1080/00927870802466967

[128] B. JEANNET, A. MINÉ. *Apron: A Library of Numerical Abstract Domains for Static Analysis*, in "Proc. of the 21th Int. Conf. on Computer Aided Verification (CAV 2009)", Lecture Notes in Computer Science, Springer, June 2009, vol. 5643, pp. 661–667

[129] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. , *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997

[130] M. KREĬN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", 1950, vol. 1950, n^{o} 26, 128 p.

[131] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", 1993, vol. 3

[132] A. LAKHOUA. , *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007

[133] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, pp. 167–187

[134] J.-Y. LE BOUDEC, P. THIRAN. , *Network calculus*, LNCS, Springer, 2001, n^{o} 2050

[135] P. LE MAIGAT. , *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Université Rennes 1, September 2002

[136] B. LEMMENS, C. WALSH. *Isometries of polyhedral Hilbert geometries*, in "J. Topol. Anal.", 2011, vol. 3, n^{o} 2, pp. 213–241, http://dx.doi.org/10.1142/S1793525311000520

[137] C. LENTÉ. , *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Université de Tours, November 2001

[138] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", 1991, vol. 81, pp. 137–145

[139] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", 2001, vol. 69, n^{o} 5, pp. 696–729, http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128

[140] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J.-P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", 2005, vol. 50, n^{o} 5, pp. 699-705, http://hal.inria.fr/inria-00072263

[141] Q. LU, M. MADSEN, M. MILATA, S. RAVN, U. FAHRENBERG, K. G. LARSEN. *Reachability analysis for timed automata using max-plus algebra*, in "J. Log. Algebr. Program.", 2012, vol. 81, n^{o} 3, pp. 298-313

[142] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", July 2002, vol. 8, n^{o} 3, pp. 519–562

[143] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", 2005, vol. XLIII, pp. 51-62, http://hal.inria.fr/inria-00072311

[144] V. MASLOV. , *Méthodes Operatorielles*, Edition MirMoscou, 1987

[145] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĬ. , *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc.Providence, 1992, vol. 13

[146] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), Kluwer/Plenum, New York, 2004, vol. 3, pp. 257–300, http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015

[147] M. MORISHIMA. , *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964, xii+227 p.

[148] T. MOTZKIN, H. RAIFFA, G. THOMPSON, R. THRALL. *The double description method*, in "Contributions to the Theory of Games", H. KUHN, A. TUCKER (editors), 1953, vol. II, pp. 51-73

[149] K. MUROTA. *Computing Puiseux-series solutions to determinantal equations via combinatorial relaxation*, in "SIAM J. Comput.", 1990, vol. 19, n^o 6, pp. 1132–1161

[150] R. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", 1988, vol. 75, n^o 391

[151] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", 1991, vol. 1, n^o 2, pp. 177-207

[152] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998

[153] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control", Honolulu, Dec. 1990

[154] P. PONCET. , *Infinite-dimensional idempotent analysis: the role of continuous posets*, École Polytechnique (France), November 2011

[155] P. PRITCHARD. *Opportunistic algorithms for eliminating supersets*, in "Acta Informatica", 1991, vol. 28, pp. 733-754

[156] P. PRITCHARD. *A simple sub-quadratic algorithm for computing the subset partial order*, in "Information Processing Letters", 1995, vol. 56, n^o 6, pp. 337 - 341

[157] P. PRITCHARD. *A Fast Bit-Parallel Algorithm for Computing the Subset Partial Order*, in "Algorithmica", 1999, vol. 24, pp. 76-86

[158] P. PRITCHARD. *On Computing the Subset Graph of a Collection of Sets*, in "Journal of Algorithms", 1999, vol. 33, n^o 2, pp. 187 - 203

[159] A. PUHALSKIĬ. , *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall, 2001, n^o 119

[160] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", 1990, n^o 311, pp. 745-748

[161] J. RICHTER-GEBERT, B. STURMFELS, T. THEOBALD. *First steps in tropical geometry*, in "Idempotent mathematics and mathematical physics", Providence, RI, G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemp. Math., Amer. Math. Soc., 2005, vol. 377, pp. 289–317

[162] I. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", 1967, vol. 3, n^o 2, pp. 66-78

[163] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", 2001, vol. 121, pp. 221–246

[164] A. RUBINOV. , *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000

[165] S. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", 2002, n^{o} 3, pp. 163–180, 192

[166] S. SANKARANARAYANAN, H. SIPMA, Z. MANNA. *Scalable Analysis of Linear Systems using Mathematical Programming*, in "VMCAI", LNCS, 2005, vol. 3385

[167] M. SHARIFY. , *Scaling Algorithms and Tropical Methods in Numerical Matrix Analysis*, École Polytechnique (France), September 2011

[168] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, pp. 143–150

[169] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", 1994, vol. 28, n^{o} 3-4, pp. 277–294

[170] I. SINGER. , *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997

[171] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", 2004, vol. 4, n^{o} 3, pp. 389–411

[172] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)", Basel, Progr. Math., Birkhäuser, 2001, vol. 201, pp. 135–146, http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163

[173] N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", 1967, vol. 3, pp. 39–71, in russian

[174] D. M. YELLIN, C. S. JUTLA. *Finding extremal sets in less than quadratic time*, in "Information Processing Letters", 1993, vol. 48, n^{o} 1, pp. 29 - 34

[175] D. M. YELLIN. *Algorithms for subset testing and finding maximal sets*, in "Proceedings of the third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms", Philadelphia, PA, USA, SODA '92, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, pp. 386–392

[176] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", 2003, vol. 293, n^{o} 1, pp. 45–54, Max-plus algebras

[177] K. ZIMMERMANN. , *Extremální Algebra*, Ekonomický ùstav C ˇSAVPraha, 1976, (in Czech)

[178] U. ZIMMERMANN. , *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981

[179] P. DE LA HARPE. *On Hilbert's metric for simplices*, in "Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)", Cambridge, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1993, vol. 181, pp. 97–119