IN PARTNERSHIP WITH:
CNRS
Ecole Polytechnique

Activity Report 2014

Project-Team Maxplus

Algèbres max-plus et mathématiques de la décision/Max-plus algebras and mathematics of decision

IN COLLABORATION WITH: Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP)

RESEARCH CENTER
Saclay - Île-de-France

THEME
Optimization and control of dynamic systems

Table of contents

Project-Team Maxplus

Keywords: Optimal Control, Max-Plus Algebra, Game Theory, Operational Research, Discrete Event Systems

Creation of the Project-Team: 2002 December 01*, updated into Team:* 2015 January 01.

1. Members

Research Scientists

Stéphane Gaubert [Chef de projet, Inria, DR/*Team leader, Inria, Senior Researcher*]
Marianne Akian [Responsable permanente, Inria, DR/*Inria, Senior Researcher*, HdR]
Xavier Allamigeon [Ingénieur du corps des Mines accueilli en détachement, Inria/*Corps des mines, under secondment, Inria, Researcher*]
Jean-Pierre Quadrat [Inria, DR Émérite/*Emiritus Senior Researcher*, HdR]
Cormac Walsh [Inria, CR/*Researcher*]

PhD Students

Pascal Benchimol [Ecole Polytechnique, Bourse Monge-DGA, until Sep 2014]
Vianney Boeuf [Ingénieur du corps des Ponts, from Sep 2014]
Eric Fodjo [I-Fihn Consulting, Consultant]
Antoine Hochart [Bourse Hadamard, École Polytechnique, depuis Oct. 2013]
Andrea Marchesini [Bourse EDX, Ecole Polytechnique]
Nikolas Stott [Inria, from Apr 2014]

Post-Doctoral Fellow

Adi Niv [*Chateaubriand fellow from Sep. to Nov. 2014, then Inria*]

Visiting Scientists

Dominique Castella [Univ. Reunion, *until Jun 2014*]
Ricardo Katz [CONICET, Argentina, *from Sep. to Nov. 2014*]

Administrative Assistant

Jessica Gameiro [Inria]

Other

Max Plus [Chercheur imaginaire [1]/*Imaginary researcher* [2]]

2. Overall Objectives

2.1. Présentation et objectifs généraux/Overall objectives

Le projet MAXPLUS développe la théorie, l'algorithmique, et les applications des algèbres de type max-plus ou tropicale, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent: théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique et théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle. On peut distinguer les axes de recherche suivants.

[1] Max Plus est le nom collectif du groupe de travail de l'Inria, réunissant, ou ayant réuni, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, et Pablo Lotito. Le lecteur veillera à ne pas confondre max-plus, Max Plus, et Maxplus: Monsieur Max Plus travaille sur l'algèbre max-plus et fait partie du projet Maxplus.

[2] *Maxplus is the collective name of the Inria working group, having comprised Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Didier Dubois, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Stéphane Gaubert, Marianne Akian, Michael Mc Gettrick, Elina Mancinelli, and Pablo Lotito. Note the difference between max-plus, Max Plus, and Maxplus: Mr Max Plus works on max-plus algebras and is a member of the Maxplus team.*

Commande optimale et théorie des jeux On s'intéresse aux problèmes de décision dans le temps. Nous étudions les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et nous développons des algorithmes pour les résoudre. Les opérateurs de la programmation dynamique à temps discret peuvent être vus comme des cas particuliers de systèmes dynamiques monotones ou contractants, ou d'opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires. Nous étudions les points fixes (qui donnent la valeur de problèmes de décision en horizon infini), les vecteurs propres non linéaires (qui apparaissent dans les problèmes de décision avec critère ergodique), et le comportement asymptotique des orbites de tels opérateurs. Nous étudions aussi les équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, lesquelles sont des équations de la programmation dynamique à temps continu. Notre but est de développer de nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation, à partir des résultats max-plus et de leurs généralisations. On s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

Systèmes à événements discrets On s'intéresse à l'analyse (évaluation de performance), à l'optimisation, et à la commande, de systèmes dynamiques à événements discrets, qui apparaissent dans la modélisation de réseaux (routiers, ferroviaires, télécom) et en productique. On développe des modèles basés sur les systèmes dynamiques max-plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), permettant de représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources). On s'intéresse en particulier : au calcul ou à la maximisation de certaines mesures de performances; à la fabrication de contrôleurs (ou même de "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service.

Théorie des perturbations On étudie les problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type max-plus, tels les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations. On s'intéresse en particulier aux problèmes singuliers pour lesquels les résultats analytiques ou les méthodes numériques ont besoin d'être améliorés.

Recherche opérationnelle Le rôle de l'algèbre max-plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes dijunctives). Notre but est de développer plus avant les méthodes algébriques en recherche opérationnelle.

Algèbre max-plus et domaines reliés Le groupe Maxplus travaille depuis de nombreuses années sur l'algèbre max-plus de base : analogues max-plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc., qui ont souvent joué un rôle décisif dans nos applications précédentes de l'approche max-plus. L'intérêt pour certains problèmes de base max-plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines des mathématiques. Un de nos objectifs est de poursuivre l'étude de problèmes de base max-plus.

Logiciel La boîte à outils max-plus de Scilab implémente le calcul de base max-plus ainsi que quelques algorithmes rapides de résolution de problèmes particuliers. On s'intéresse à développer de tels outils.

English version

The Maxplus project develops theory, algorithms, and applications of algebras of max-plus or tropical type, in relation with the fields where these algebras arise: decision theory (deterministic and stochastic optimal control and game theory), asymptotic analysis and probability theory, modelling and performance analysis of discrete event dynamic systems (transportation or telecommunication networks, manufacturing systems), and Operations Research. The following research topics are particularly developped.

Optimal control and game theory We are interested in decision problems over time. We study the theoretical properties of dynamic programming equations and develop algorithms to solve them. We view discrete time dynamic programming operators as particular cases of monotone or non-expansive dynamical systems, or non-linear Perron-Frobenius operators. We study fixed points (arising in decision problems in infinite horizon), non-linear eigenvectors (arising in problems with ergodic reward), and the asymptotic behaviour of orbits (asymptotics of the value function as the horizon tends to infinity). We also study Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equations, which are continuous time versions of dynamic programming equations. Our aim is to develop new algorithms and discretisations methods, exploiting the max-plus results and their generalisations. We are particularly interested in large size problems, which require to develop fast (graph-type) algorithms or new approximation methods.

Discrete event systems We are interested in analysis (performance evaluation) and control problems for dynamic discrete event systems, which arise in the transportation or telecommunication networks or in manufacturing systems. We develop models based on max-plus linear dynamical systems and their generalisations (automata models, nonexpansive or monotone systems), which represent both synchronisation and concurrency (resource sharing) phenomena. Problems of interest include: computing or maximising some performance measures, like the throughput; designing controls (if possible, feedbacks) that ensure given security or service specifications.

Perturbation theory We study asymptotic problems, like problems of singular perturbations of eigenvalues or large deviation type problems, which are governed by limiting equations having a max-plus type structure. We are particularly interested in singular problems, for which analytical results or numerical methods must be precised or improved.

Operations Research The role of max-plus algebra in some special problems of Operations Research is now well known (dynamic programming, path problems, assignment or transportation problems, certain special scheduling problems, problems with disjunctive constraints). Our goal is to develop further algebraic tools in Operations Research.

Max-plus algebra and related fields The Maxplus team has worked for several years on basic max-plus algebraic objects and constructions, like max-plus analogues of modules and convex polyhedra, max-plus determinants, rank notions, systems of linear equations, max-plus eigenvectors, max-plus polynomial equations, idempotent measures, etc., which often played a decisive role in our earlier applications of the max-plus approach. There is now a growing interest in certain basic max-plus problems which have recently appeared in several other fields. One objective is to pursue the study of basic max-plus problems.

Software The max-plus toolbox of Scilab implements the basic numerical calculus in max-plus algebra, as well as some fast algorithms for specific problems. The extension of this toolbox is one of our goals.

The library TPLib provides several algorithms on tropical polyhedra, and a numerical abstract domain for using tropical polyhedra in the setting of software verification.

3. Research Program

3.1. L'algèbre max-plus/Max-plus algebra

Le semi-corps *max-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente: $a \oplus a = a$. On rencontre parfois des variantes de cette structure: par exemple, le semi-corps *min-plus* est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni des lois $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, et le semi-anneau *tropical* est l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ munis des mêmes lois. L'on peut se poser la question de généraliser les constructions de l'algèbre et de l'analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, au cas de semi-anneaux de type max-plus: tel est l'objet de ce qu'on appelle un peu familièrement “l'algèbre max-plus”.

Il est impossible ici de donner une vue complète du domaine. Nous nous bornerons à indiquer quelques références bibliographiques. L'intérêt pour les structures de type max-plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis [114]. Depuis, les structures de type max-plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d'ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine [103], [134], [183], [187], [188]. Les semi-anneaux de type max-plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole [90]. L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi [173], [171], [157], [141], [130], [176], [150], [131], [117], [65]. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB [156], [157], [141], grandes déviations [170], asymptotiques à température nulle en physique statistique [92]), puisque l'algèbre max-plus apparaît comme limite de l'algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires max-plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes [142], [161], [154], [79], laquelle a de nombreuse motivations, telles l'économie mathématique [159], et la théorie des jeux [174], [54]. Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l'algèbre max-plus a été beaucoup étudiée parce qu'elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux, voir [6]. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux [91], [146], qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l'algèbre max-plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates [178], [137], [179], [143], [163]. Notons finalement, pour information, que l'algèbre max-plus est apparue récemment en géométrie algébrique [129], [182], [158], [181] et en théorie des représentations [118], [82], sous les noms de géométrie et combinatoire tropicales.

Nous décrivons maintenant de manière plus détaillée les sujets qui relèvent directement des intérêts du projet, comme la commande optimale, les asymptotiques, et les systèmes à événements discrets.

English version

The *max-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$. This algebraic structure differs from classical structures, like fields, in that addition is idempotent: $a \oplus a = a$. Several variants have appeared in the literature: for instance, the *min-plus* semifield is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ equipped with the laws $a \oplus b = \min(a, b)$ and $a \otimes b = a + b$, and the *tropical* semiring is the set $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ equipped with the same laws. One can ask the question of extending to max-plus type structures the classical constructions and results of algebra and analysis: this is what is often called in a wide sense "max-plus algebra" or "tropical algebra".

It is impossible to give in this short space a fair view of the field. Let us, however, give a few references. The interest in max-plus type structures is contemporaneous with the early developments of lattice theory [114]. Since that time, max-plus structures have been developed independently by several schools, in relation with several fields. Motivations from Operations Research (dynamic programming, shortest path problems, scheduling problems, discrete optimisation) were central in the development of the field [103], [134], [183], [187], [188]. Of course, max-plus type semirings are related to Boolean algebras [90]. Max-plus algebras arises naturally in optimal control and in the theory of Hamilton-Jacobi partial differential equations [173], [171], [157], [141], [130], [176], [150], [131], [117], [65]. It arises in asymptotic analysis (WKB asymptotics [156], [157], [141], large deviation asymptotics [170], or zero temperature asymptotics in statistical physics [92]), since max-plus algebra appears as a limit of the usual algebra. The theory of max-plus linear operators may be thought of as a part of the non-linear Perron-Frobenius theory, or of the theory of nonexpansive or monotone operators on cones [142], [161], [154], [79], a theory with numerous motivations, including mathematical economy [159] and game theory [174], [54]. In the discrete event systems community, max-plus algebra has been much studied since it allows one to represent linearly the synchronisation phenomena which determine the time behaviour of manufacturing systems and networks, see [6]. Recent developments include the network calculus of [91], [146] which allows one to compute worst case bounds for certain measures of quality of service. In theoretical computer science, max-plus algebra (or rather, the tropical semiring) played a key role in the solution of decision problems in automata theory [178], [137], [179], [143], [163]. We finally note for information that max-plus algebra has recently arisen in algebraic geometry [129], [182], [158], [181] and in representation theory [118], [82], under the names of tropical geometry and combinatorics.

We now describe in more details some parts of the subject directly related to our interests, like optimal control, asymptotics, and discrete event systems.

3.2. Algèbre max-plus, programmation dynamique, et commande optimale/Max-plus algebra, dynamic programming, and optimal control

L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation min-plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à n et dont le coût de l'arc allant du nœud i au nœud j est noté $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Le coût minimal d'un chemin de longueur k, allant de i à j, est donné par la quantité:

$$v_{ij}(k) = \min_{\ell:\ \ell_0=i,\ \ell_k=j} \sum_{r=0}^{k-1} M_{\ell_r \ell_{r+1}} \ , \tag{1}$$

où le minimum est pris sur tous les chemins $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ de longueur k, de nœud initial $\ell_0 = i$ et de nœud final $\ell_k = j$. L'équation classique de la programmation dynamique s'écrit:

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \leq s \leq n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)) \ . \tag{2}$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire min-plus :

$$v(k) = Mv(k-1) \ , \tag{3}$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la structure de l'algèbre min-plus. Le classique *problème de Lagrange* du calcul des variations,

$$v(x,T) = \inf_{X(\cdot),\ X(0)=x} \int_0^T L(X(t), \dot{X}(t)) \mathrm{d}t + \phi(X(T)) \ , \tag{4}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, pour $0 \leq t \leq T$, et $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le Lagrangien, peut être vu comme une version continue de (1), ce qui permet de voir l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie v,

$$v(\cdot,0) = \phi, \quad \frac{\partial v}{\partial T} + H(x, \frac{\partial v}{\partial x}) = 0, \qquad H(x,p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (-p \cdot y - L(x,y)) \ , \tag{5}$$

comme une équation min-plus linéaire. En particulier, les solutions de (5) vérifient un principe de superposition min-plus: si v et w sont deux solutions, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ est encore solution de (5). Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'école d'Analyse Idempotente (voir [157], [141], [150]).

La présence d'une structure algébrique sous-jacente permet de voir les solutions stationnaires de (2) et (5) comme des vecteurs propres de la matrice M ou du semi-groupe d'évolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. La valeur propre associée fournit le coût moyen par unité de temps (coût ergodique). La représentation des vecteurs propres (voir [173], [183], [103], [132], [97], [78], [6] pour la dimension finie, et [157], [141] pour la dimension infinie) est intimement liée au théorème de l'autoroute qui décrit les trajectoires optimales quand la durée ou la longueur des chemins tend vers l'infini. Pour l'équation d'Hamilton-Jacobi, des résultats reliés sont apparus récemment en théorie d'"Aubry-Mather" [117].

English version

The most elementary example of a problem leading to a min-plus linear equation is the classical shortest path problem. Consider a graph with nodes $1, ..., n$, and let $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ denote the cost of the arc from node i to node j. The minimal cost of a path of a given length, k, from i to j, is given by (1), where the minimum is taken over all paths $\ell = (\ell_0, ..., \ell_k)$ of length k, with initial node $\ell_0 = i$ and final node $\ell_k = j$. The classical dynamic programming equation can be written as in (2). We recognise the min-plus linear equation (3), where concatenation denotes the matrix product induced by the min-plus algebraic structure. The classical *Lagrange problem* of calculus of variations, given by (4) where $X(t) \in \mathbb{R}^n$, for $0 \leq t \leq T$, and $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is the Lagrangian, may be thought of as a continuous version of (1), which allows us to see the Hamilton-Jacobi equation (5) satisfied by v, as a min-plus linear equation. In particular, the solutions of (5) satisfy a min-plus superposition principle: if v and w are two solutions, and if $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, then $\inf(\lambda + v, \mu + w)$ is also a solution of (5). This point of view, due to Maslov, led to the developpement of the school of Idempotent Analysis (see [157], [141], [150]).

The underlying algebraic structure allows one to see stationnary solutions of (2) and (5) as eigenvectors of the matrix M or of the evolution semigroup of the Hamilton-Jacobi equation. The associated eigenvalue gives the average cost per time unit (ergodic cost). The representation of eigenvectors (see [173], [183], [132], [97], [103], [78], [6] for the finite dimension case, and [157], [141] for the infinite dimension case) is intimately related to turnpike theorems, which describe optimal trajectories as the horizon, or path length, tends to infinity. For the Hamilton-Jacobi equation, related results have appeared recently in the “Aubry-Mather” theory [117].

3.3. Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l’approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux/Monotone maps and non-linear Perron-Frobenius theory, or the operator approach to optimal control and games

On sait depuis le tout début des travaux en décision markovienne que les opérateurs de la programmation dynamique f de problèmes de contrôle optimal ou de jeux (à somme nulle et deux joueurs), avec critère additif, ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llcl} \text{monotonie}/\textit{monotonicity} & x \leq y & \Rightarrow & f(x) \leq f(y) \ , \\ \text{contraction}/\textit{nonexpansiveness} & \|f(x) - f(y)\|_\infty & \leq & \|x - y\|_\infty \ . \end{array} \tag{6}$$

Ici, l’opérateur f est une application d’un certain espace de fonctions à valeurs réelles dans lui-même, $\leq$ désigne l’ordre partiel usuel, et $\| \cdot \|_\infty$ désigne la norme sup. Dans le cas le plus simple, l’ensemble des états est $\{1, ..., n\}$ et f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Les applications monotones qui sont contractantes pour la norme du sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l’addition d’une constante [102] (celles ci sont parfois appelées fonctions topicales). Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d’opérateurs : l’équation de la programmation dynamique d’un problème de commande optimale à horizon fini s’écrit en effet $x(k) = f(x(k-1))$, où $x(k)$ est la fonction valeur en horizon k et $x(0)$ est donné; la fonction valeur y d’un problème à horizon infini (y compris le cas d’un problème d’arrêt optimal) vérifie $y = f(y)$; la fonction valeur z d’un problème avec facteur d’actualisation $0 < \alpha < 1$ vérifie $z = f(\alpha z)$, etc. Ce point de vue abstrait a été très fructueux, voir par exemple [54]. Il permet d’inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui, depuis l’extension du théorème de Perron-Frobenius par Krein et Rutman, traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d’homogénéité. Les problèmes auxquels on s’intéresse typiquement sont la structure de l’ensemble des points fixes de f, le comportement asymptotique de f^k, en particulier l’existence de la limite de $f^k(x)/k$ lorsque k tends vers l’infini (afin d’obtenir le coût ergodique d’un problème de contrôle optimal ou de jeux), l’asymptotique plus précise de f^k, à une normalisation près (afin d’obtenir le comportement précis de l’itération sur les valeurs), etc. Nous renvoyons le lecteur à [161] pour un panorama. Signalons que dans [123],[7], des algorithmes inspirés de l’algorithme classique d'itérations sur les politiques du contrôle stochastique ont pu être introduits dans le cas des opérateurs monotones contractants généraux, en utilisant des résultats de structure de l'ensemble des points fixes de ces opérateurs. Les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux. En particulier, on utilise la même classe d'applications dans la modélisation des systèmes à événements discrets, voir le §3.5 ci-dessous, et une classe semblable d'applications en analyse statique de programmes, voir §4.4 ci-dessous.

English version

Since the very beginning of Markov decision theory, it has been observed that dynamic programming operators f arising in optimal control or (zero-sum, two player) game problems have Properties (6). Here, the operator f is a self-map of a certain space of real valued functions, equipped with the standard ordering $\leq$ and with the sup-norm $\|\cdot\|_\infty$. In the simplest case, the set of states is $\{1, ..., n\}$, and f is a self-map of $\mathbb{R}^n$. Monotone maps that are nonexpansive in the sup norm may be thought of as nonlinear generalisations of substochastic matrices. A useful subclass, which generalises stochastic matrices, consists of those maps which are monotone and commute with the addition of a constant [102] (these maps are sometimes called topical functions). Dynamic programming problems can be translated in operator terms: the dynamic programming equation for a finite horizon problem can be written as $x(k) = f(x(k-1))$, where $x(k)$ is the value function in horizon k and $x(0)$ is given; the value function y of a problem with an infinite horizon (including the case of optimal stopping) satisfies $y = f(y)$; the value function z of a problem with discount factor $0 < \alpha < 1$ satisfies $z = f(\alpha z)$, etc. This abstract point of view has been very fruitful, see for instance [54]. It allows one to put dynamic programming in the wider perspective of nonlinear Perron-Frobenius theory, which, after the extension of the Perron-Frobenius theorem by Krein and Rutman, studies non-linear self-maps of cones, satisfying various monotonicity, nonexpansiveness, and homogeneity conditions. Typical problems of interests are the structure of the fixed point set of f, the asymptotic behaviour of f^k, including the existence of the limit of $f^k(x)/k$ as k tends to infinity (which yields the ergodic cost in control or games problems), the finer asymptotic behaviour of f^k, possibly up to a normalisation (which yields precise results on value iteration), etc. We shall not attempt to survey this theory here, and will only refer the reader to [161] for more background. In [123],[7], algorithms inspired from the classical policy iterations algorithm of stochastic control have been introduced for general monotone nonexpansive operators, using structural results for the fixed point set of these operators. Applications of monotone or nonexpansive maps are not limited to optimal control and game theory. In particular, we also use the same class of maps as models of discrete event dynamics systems, see §3.5 below, and we shall see in §4.4 that related classes of maps are useful in the static analysis of computer programs.

3.4. Processus de Bellman/Bellman processes

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* [171], [107], [106], [65],[1], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov [156]. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétriser les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi retrouvés en particulier dans le travail de thèse d'Asma Lakhoua [144], [62].

English version

Another point of view on optimal control is the theory of *Bellman processes* [171], [107], [106], [65], [1] which provides a max-plus analogue of probability theory, relying on the theory of *idempotent measures* due to Maslov [156]. This establishes a correspondence between probability and optimisation, in which random variables become cost variables (which allow to parametrise optimisation problems), the notion of conditional expectation is replaced by a notion of conditional cost (taken over a subset of feasible solutions), the Markov property corresponds to the Bellman's dynamic programming principle, and weak convergence corresponds to an epigraph-type convergence. Limit theorems for Bellman processes (law of large numbers, central limit theorems, stable laws) yield asymptotic results in optimal control. Such general results help in particular to understand qualitatively the difficulty of approximation of Hamilton-Jacobi equations found again in particular in the PhD thesis work of Asma Lakhoua [144], [62].

3.5. Systèmes à événements discrets/Discrete event systems

Des systèmes dynamiques max-plus linéaires, de type (2), interviennent aussi, avec une interprétation toute différente, dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, on associe à chaque tâche répétitive, i, une fonction *compteur*, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, telle que $v_i(t)$ compte le nombre cumulé d'occurrences de la tâche i jusqu'à l'instant t. Par exemple, dans un système de production, $v_i(t)$ compte le nombre de pièces d'un certain type produites jusqu'à l'instant t. Dans le cas le plus simple, qui dans le langage des réseaux de Petri, correspond à la sous-classe très étudiée des graphes d'événements temporisés [93], on obtient des équations min-plus linéaires analogues à (2). Cette observation, ou plutôt, l'observation duale faisant intervenir des fonctions dateurs, a été le point de départ [97] de l'approche max-plus des systèmes à événements discrets [6], qui fournit un analogue max-plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc. En particulier, les valeurs propres fournissent des mesures de performance telles que le taux de production. Des généralisations non-linéaires, telles que les systèmes dynamiques min-max [162], [136], ont aussi été étudiées. Les systèmes dynamiques max-plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux [77]. Les modèles d'automates à multiplicités max-plus [121], incluant certains versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces [125], permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités max-plus on été très étudiés par ailleurs en informatique théorique [178], [137], [149], [179], [143], [163]. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement [148].

English version

Dynamical systems of type (2) also arise, with a different interpretation, in the modelling of discrete event systems. In this context, one associates to every repetitive task, i, a counter function, $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, such that $v_i(t)$ gives the total number of occurrences of task i up to time t. For instance, in a manufacturing system, $v_i(t)$ will count the number of parts of a given type produced up to time t. In the simplest case, which, in the vocabulary of Petri nets, corresponds to the much studied subclass of timed event graphs [93], we get min-plus linear equations similar to (2). This observation, or rather, the dual observation concerning dater functions, was the starting point [97] of the max-plus approach of discrete event systems [6], which provides some analogue of the classical linear control theory, including notions of state space representations, stability, transfer series, etc. In particular, eigenvalues yield performance measures like the throughput. Nonlinear generalisations, like min-max dynamical systems [162], [136], have been particularly studied. Random max-plus linear dynamical systems are particularly useful in the modelling of networks [77]. Max-plus automata models [121], which include some timed version of trace or heaps of pieces models [125], allow to represent phenomena of concurrency or resource sharing. Note that max-plus automata have been much studied in theoretical computer science [178], [137], [149], [179], [143], [163]. Such automata models are particularly adapted to the analysis of scheduling problems [148].

3.6. Algèbre linéaire max-plus/Basic max-plus algebra

Une bonne partie des résultats de l'algèbre max-plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes : 1) Nous avons déjà évoqué dans les sections 3.2 et 3.3 le problème spectral max-plus $Ax = \lambda x$ et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets. 2) Le problème $Ax = b$ intervient en commande juste-à-temps (dans ce contexte, le vecteur x représente les dates de démarrage des tâches initiales, b représente certaines dates limites, et on se contente souvent de l'inégalité $Ax \leq b$). Le problème $Ax = b$ est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraites, ou théorie de la résiduation [114], [84], [183], [187],[6]. Les versions dimension infinie du problème $Ax = b$ sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite [180], [175], [60] et de dualité non convexe. 3) Le problème linéaire général $Ax = Bx$ conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres max-plus, déterminants max-plus, symétrisation [135], [164],[6]). Le sujet fait l'objet d'un intérêt récemment renouvelé [108].

English version

An important class of results in max-plus algebra concerns the study of max-plus linear equations. One can distinguish three families of equations, which are handled using different techniques: 1) We already mentioned in Sections 3.2 and 3.3 the max-plus spectral problem $Ax = \lambda x$ and its generalisations, which appears in deterministic optimal control and in performance analysis of discrete event systems. 2) The $Ax = b$ problem arises naturally in just in time problems (in this context, the vector x represents the starting times of initial tasks, b represents some deadlines, and one is often content with the inequality $Ax \leq b$). The $Ax = b$ problem is intimately related with optimal assignment, and more generally, with optimal transportation problems. Its theory relies on abstract Galois correspondences, or residuation theory [114], [84], [183], [187],[6]. Infinite dimensional versions of the $Ax = b$ problem are related to questions of abstract convex analysis [180], [175], [60] and nonconvex duality. 3) The general linear system $Ax = Bx$ leads to interesting combinatorial developments (max-plus polyhedra, determinants, symmetrisation [135], [164],[6]). The subject has attracted recently a new attention [108].

3.7. Algèbre max-plus et asymptotiques/Using max-plus algebra in asymptotic analysis

Le rôle de l'algèbre min-plus ou max-plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on écrit

$$e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon} \asymp e^{-\min(a,b)/\epsilon} \quad , \qquad e^{-a/\epsilon} \times e^{-b/\epsilon} = e^{-(a+b)/\epsilon} \quad , \tag{7}$$

lorsque $\epsilon \to 0^+$. Formellement, l'algèbre min-plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau $\mathbb{R}_\epsilon$, qui est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de l'addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log (e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ et de la multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, mais pour $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ n'est autre que le semi-anneau min-plus. Cette idée a été introduite par Maslov [156], motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre des problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère min-plus linéaire.

Cette déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov. Voir [1], [170], [61], pour les relations entre l'algèbre max-plus et les grandes déviations, voir aussi [57], [56], [55] pour des applications de ces idées aux perturbations singulières de valeurs propres. La même déformation est à l'origine de nombreux travaux actuels en géométrie tropicale, à la suite de Viro [182].

English version

The role of min-plus algebra in asymptotic problems becomes obvious when writing Equations (7) when $\epsilon \to 0^+$. Formally, min-plus algebra may be thought of as the limit of a deformation of classical algebra, by introducing the semi-field $\mathbb{R}_\epsilon$, which is the set $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, equipped with the addition $(a, b) \mapsto -\epsilon \log (e^{-a/\epsilon} + e^{-b/\epsilon})$ and the multiplication $(a, b) \mapsto a + b$. For all $\epsilon > 0$, $\mathbb{R}_\epsilon$ is isomorphic to the semi-field of usual real positive numbers, $(\mathbb{R}_+, +, \times)$, but for $\epsilon = 0^+$, $\mathbb{R}_\epsilon$ coincides with the min-plus semiring. This idea was introduced by Maslov [156], motivated by the study of WKB-type asymptotics of

Schrödinger equations. This point of view allows one to use algebraic results in asymptotics problems, since the limit equations have often some kind of min-plus linear structure.

This deformation appears classically in large deviation theory: in this context, the limiting objects are idempotent measures, in the sense of Maslov. See [1], [170], [61] for the relation between max-plus algebra and large deviations. See also [57], [56], [55] for the application of such ideas to singular perturbation problems for matrix eigenvalues. The same deformation is at the origin of many current works in tropical geometry, in the line initiated by Viro [182].

4. Application Domains

4.1. Systèmes à événements discrets (productique, réseaux)/Discrete event systems (manufacturing systems, networks)

Une partie importante des applications de l'algèbre max-plus provient des systèmes dynamiques à événements discrets [6]. Les systèmes linéaires max-plus, et plus généralement les systèmes dynamiques monotones contractants, fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Relèvent de l'approche max-plus, tout au moins sous forme simplifiée : des problèmes de calcul de temps de cycle pour des circuits digitaux [87], des problèmes de calcul de débit pour des ateliers [138], pour des réseaux ferroviaires [86] ou routiers, et l'évaluation de performance des réseaux de communication [77]. L'approche max-plus a été appliquée à l'analyse du comportement temporel de systèmes concurrents, et en particulier à l'analyse de "high level sequence message charts" [81], [147]. Le projet Maxplus collabore avec le projet Metalau, qui étudie particulièrement les applications des modèles max-plus à la modélisation microscopique du trafic routier [155], [151], [116].

English version

One important part of applications of max-plus algebra comes from discrete event dynamical systems [6]. Max-plus linear systems, and more generally, monotone nonexpansive dynamical systems, provide natural models for which many analytical results can be applied to performance evaluation problems. For instance, problems like computing the cycle time of asynchronous digital circuits [87], or computing the throughput of a workshop [138] or of a transportation network, and performance evaluation problems for communication networks, are often amenable to max-plus algebra, at least in some simplified form, see in particular [86] and [77]. The max-plus approach has been applied to the analysis of the time behaviour of concurrent systems, and in particular, to the analysis of high level sequence message charts [81], [147]. The Maxplus team collaborates with the Metalau team, working particularly on the applications of max-plus models to the microscopic modelling of road traffic [155], [151], [116].

4.2. Commande optimale et jeux/Optimal control and games

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées: économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. En particulier, le projet Mathfi travaille sur les applications à des problèmes de mathématiques financières. Il existe une tradition de collaborations entre les chercheurs des projets Mathfi et Maxplus sur ces questions, voir par exemple [5] qui comprend un résultat exploitant des idées de théorie spectrale non-linéaire, présentées dans [3].

English version

Optimal control and game theory have numerous well established applications fiels: mathematical economy and finance, stock optimization, optimization of networks, decision making, etc. In particular, the Mathfi team works on applications in mathematical finance. There is a tradition of collaboration between researchers of the Maxplus team and of the Mathfi team on these questions, see as an illustration [5] where ideas from the spectral theory of monotone homogeneous maps [3] are applied.

4.3. Recherche opérationnelle/Operations research

L'algèbre max-plus intervient de plusieurs manières en Recherche opérationnelle. Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre max-plus et les problèmes d'optimisation discrète, voir [89]. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum [96]. Certains problèmes combinatoires, comme des problèmes de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type max-plus [186]. Ensuite, le rôle de l'algèbre max-plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, les dates de complétion pouvant souvent être calculées à partir d'équations linéaires max-plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices max-plus : une première représentation a été obtenue dans [125] pour le cas du “jobshop”, une représentation plus simple a été obtenue dans [148] dans le cas du “flowshop”. Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du “flowshop” : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes [148]. Finalement, en regardant l'algèbre max-plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire [145].

English version

Max-plus algebra arise in several ways in Operations Research. First, there are intimate relations between max-plus algebra and discrete optimisation problems, see [89]. Sometimes, these relations lead to new algorithms for classical Operations Research problems, like the maximal circuit mean [96]. There are also special combinatorial problems, like certain problems of disjunctive programming, which can be decomposed by max-plus type methods [186]. Next, the role of max-plus algebra in scheduling problems has been known since the sixties: completion dates can often be computed by max-plus linear equations. Recently, representations of certain scheduling problems using max-plus matrix semigroups have appeared, a first representation was given in [125] for the jobshop case, a simpler representation was given in [148] in the flowshop case. This algebraic point of view turned out to be particularly fruitful in the flowshop case: it allows one to recover old dominance results and to obtain new bounds [148]. Finally, viewing max-plus algebra as a limit of classical algebra allows to use algebraic tools in combinatorial optimisation [145].

4.4. Analyse statique de programmes/Static analysis of computer programs

L'interprétation abstraite est une technique, introduite par P. et R. Cousot [100], qui permet de déterminer des invariants de programmes en calculant des points fixes minimaux d'applications monotones définies sur certains treillis. On associe en effet à chaque point de contrôle du programme un élément du treillis, qui représente une sur-approximation valide de l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables du programme en ce point. Le treillis le plus simple exprimant des propriétés numériques est celui des produits Cartésiens d'intervalles. Des treillis plus riches permettent de mieux tenir compte de relations entre variables, en particulier, des classes particulières de polyèdres sont souvent employées.

Voici, en guise d'illustration, un petit exemple de programme, avec le système de point fixe associé, pour le treillis des intervalles:

```
void main() {
  int x=0;           // 1
  while (x<100) {    // 2
    x=x+1;           // 3
  }                  // 4
     }
```

$$\begin{aligned} x_1 &= [0,0] \\ x_2 &=]-\infty,99]\cap(x_1\cup x_3) \\ x_3 &= x_2+[1,1] \\ x_4 &= [100,+\infty[\cap(x_1\cup x_3) \end{aligned}$$

Si l'on s'intéresse par exemple aux valeurs maximales prise par la variable x au point de contrôle 2, soit $x_2^+ := \max x_2$, après une élimination, on parvient au problème de point fixe:

$$x_2^+ = \min(99, \max(0, x_2^+ + 1)) \ , \tag{8}$$

qui a pour plus petite solution $x_2^+ = 99$, ce qui prouve que x est majoré par 99 au point 2.

On reconnait ici un opérateur de point fixe associé à un problème de jeux à deux joueurs et somme nulle. Cette analogie est en fait générale, dans le cadre d'un collaboration que l'équipe entretient depuis plusieurs années avec l'équipe MeASI d'Eric Goubault (CEA et LIX), spécialiste d'analyse statique, nous avons en effet mis progressivement en évidence une correspondance [99], [122], entre les problèmes de jeux à somme nulle et les problèmes d'analyse statique, qui peut se résumer par le dictionnaire suivant:

Jeux	Interprétation abstraite
système dynamique	programme
opérateur de Shapley	fonctionnelle
espace d'état	(# points de contrôle) $\times$ (# degrés de liberté du treillis)
problème en horizon n	exécution de n pas
limite du problème en horizon fini	invariant optimal (borne)
itération sur les valeurs	itération de Kleene

Pour que le nombre d'états du jeu soit fini, il est nécessaire de se limiter à des treillis d'ensembles ayant un nombre fini de degrés de liberté, ce qui est le cas de domaines communément utilisés (intervalles, ensembles définis par des contraintes de potentiel de type $x_i - x_j \leq$ cst, mais aussi, les "templates" qui sont des sous-classes de polyèdres introduits récemment par Sankaranarayanan, Sipma et Manna [177]). L'ensemble des actions est alors fini si on se limite à une arithmétique affine. Signalons cependant qu'en toute généralité, on aboutit à des jeux avec un taux d'escompte négatif, ce qui pose des difficultés inédites. Cette correspondance entre jeux et analyse statique est non intuitive, au sens où les actions du minimiseur consistent à sélectionner des points extrêmes de certains polyèdres obtenus par un mécanisme de dualité.

Une pathologie bien répertoriée en analyse statique est la lenteur des algorithmes de point fixe, qui peuvent effectuer un nombre d'itérations considérable (99 itérations pour obtenir le plus petit point fixe de (8)). Celle-ci est usuellement traitée par des méthodes d'accélération de convergence dites d'élargissement et rétrécissement [101], qui ont cependant l'inconvénient de conduire à une perte de précision des invariants obtenus. Nous avons exploité la correspondance entre analyse statique et jeux pour développer des algorithmes d'une nature très différente, s'inspirant de nos travaux antérieurs sur l'itération sur les politiques pour les jeux répétés [123], [94], [95],[7]. Une version assez générale de cet algorithme, adaptée au domaine des templates, est décrite dans [122] et a fait l'objet d'une implémentation prototype. Chaque itération combine de la programmation linéaire et des algorithmes de graphes. Des résultats expérimentaux ont montré le caractère effectif de la méthode, avec souvent un gain en précision par rapport aux approches classiques, par exemple pour des programmes comprenant des boucles imbriquées.

Ce domaine se trouve être en pleine évolution, un enjeu actuel étant de traiter d'une manière qui passe à l'échelle des invariants plus précis, y compris dans des situations où l'arithmétique n'est plus affine.

English version

The abstract interpretation method introduced by P. and R. Cousot [100], allows one to determine automatically invariants of programs by computing the minimal fixed point of an order preserving map defined on a complete lattice. To every breakpoint of the program is associated an element of the lattice, which yields a valid overapproximation of the set of reachable values of the vectors of variables of the program, at this breakpoint. The simplest lattice expressing numerical invariants consists of Cartesian products of intervals. More sophisticated lattices, taking into account relations between variables, consisting in particular of subclasses of polyhedra, are often used.

As an illustration, we gave before Eqn (8) a simple example of program, together with the associated fixed-point equation. In this example, the value of the variable x at the breakpoint 2 is bounded by the smallest solution x_2^+ of the fixed point problem (8), which is equal to 99.

The fixed point equation (8) is similar to the one arising in the theory of zero-sum repeated games. This analogy turns out to be general. Un a series of joint works of our team with the MeASI team of Eric Goubault (CEA and LIX), we brought progressively to light a correspondence [99], [122], between the zero-sum game problems and the static analysis problems, which can be summarized by the following dictionnary:

Games	Abstract interpretation
dynamical system	program
Shapley operator	functional
state space	(# breakpoints) $\times$ (# degrees of freedom)
horizon n problem	execution of n logical steps
limit of the value in horizon n	optimal invariant (bound)
value iteration	Kleene iteration

For the game to have a finite state space, we must restrict our attention to lattices of sets with a finite number of degrees of freedom, which is the case of the domains commonly used in static analysis (intervals, sets defined by potentials constraints of the form $x_i - x_j \leq \mathrm{cst}$, and also the subclasses of polyhedra called "templates", introduced recently by Sankaranarayanan, Sipma and Manna [177]). Then, the action space is finite if the arithmetics of the program is affine. However, in full generality, the games we end up with have a negative discount rate, which raises difficulties which are unfamiliar from the game theory point of view. This correspondence between games and static analysis turns out to be non intuitive, in that the action of the minimizer consist of selecting an extreme point of a polyhedron arising from a certain duality construction.

A well known pathology in static analysis is the fact that the standard Kleene fixed point algorithm may have a very slow behavior (99 iterations are needed to get the smallest fixed point of (8)). This is usually solved by using some accelerations of convergence, called widening and narrowing [101], which however lead to a loss of precision. We exploited the correspondence between static analysis and games to develop algorithms of a very different nature, inspired by our earlier work on policy iteration for games [123], [94], [95],[7]. A rather general version of this policy iteration algorithm, adpated to the domain of templates, is described in [122], together with a prototype implementation. Every iteration combines linear programming and combinatorial algorithms. Some experimental results indicate that the method often leads to invariants which are more accurate than the ones obtained by alternative methods, in particular for some programs with nested loops.

This topic of research is currently evolving, a question of current interest being to find accurate invariants, in a scalable way, in situations in which the arithmetics is not affine.

4.5. Autres applications/Other applications

L'algèbre max-plus apparaît de manière naturelle dans le calcul de scores de similitudes dans la comparaison de séquences génétiques. Voir par exemple [98].

English version

Max-plus algebra arises naturally in the computation of similarity scores, in biological sequence comparison. See for instance [98].

5. New Software and Platforms

5.1. Boîte à outil Maxplus de SCILAB/Maxplus toolbox of Scilab

Trois chercheurs du groupe (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, et G. Cohen) ont développé (à partir d'une première version réalisée par M. Mc Gettrick) la *boîte à outils Maxplus* de Scilab, qui est téléchargeable librement parmi les contributions du site Scilab, et qui est maintenant intégrée par défaut dans Scicoslab. Cette boîte à outils implémente l'ensemble du calcul numérique linéaire max-plus, elle comprend en particulier le stockage creux des matrices, et des algorithmes efficaces pour le calcul de la valeur propre basées sur les itérations sur les politiques. Elle a été utilisées par plusieurs chercheurs, voir notamment [76], [147]. Il faut aussi noter que le groupe de L. Hardouin, du LISA/Istia, a complété la boîte à outils Maxplus en interfaçant leur propre librairie C++, qui permet le calcul des séries de transfert de graphes d'événements temporisés.

English version

Three researchers of the team (S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and G. Cohen, building on a preliminary version of M. McGettrick) have developed and released the *Maxplus toolbox* of Scilab, which is freely available among the contributions on the Scilab web site, and which is now included by default in Scicoslab. It implements all basic linear algebra functionalities, with a special attention to large sparse matrices, including efficient algorithms for eigenvalue computation based on policy iteration. The software has been used by several researchers in their work, including [76], [147]. It should be noted that the team of L. Hardouin, from LISA/Istia, has completed the toolbox by interfacing their own C++ library computing the transfer series of a timed event graph.

5.2. Itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle/Policy iterations for zero sum stochastic games

L'algorithme d'itérations sur les politiques pour les jeux stochastiques à somme nulle pour le cas de paiements ergodiques (gain moyen par unité de temps), et dégénérés de type "multi-chaîne" a été introduit dans [95]. Plusieurs stages ont permis l'implémentation partielle en Scilab, C ou C++, et le test de ce type d'algorithmes (voir le travail de Vishesh Dhingra [112]), ou de son couplage avec la résolution de systèmes linéaires par des méthodes multigrilles algébriques (stage de Shantanu Gangal en 2007). Le travail de thèse de Sylvie Detournay a permis le développement d'un programme complet. Le code écrit par Sylvie Detournay (en C) a été déposé sur InriaGForge. Pour le moment il n'est accessible qu'aux membres de l'équipe.

English version

The policy iteration algorithm for zero sum repeated games with ergodic payoff (i.e. mean payoff per time unit), and in degenerate "multichain" cases, has been introduced in [95]. Several internships allowed us to implement in Scilab, C or C++, and to test such algorithms (see the work of Vishesh Dhingra [112]), or its combinaison with the resolution of linear systems by algebraic multigrid methods (internship of Shantanu Gangal in 2007). The PhD thesis work of Sylvie Detournay allowed us to develop a complete program. The program written by Sylvie Detournay (in C language) has been posted on InriaGForge. For the moment it can only be seen by members of the team.

5.3. TPLib: bibliothèque pour la manipulation de polyèdres tropicaux/TPLib: tropical polyhedra library

TPLib est une bibliothèque écrite en OCaml qui permet de manipuler des polyèdres tropicaux. Elle est distribuée sous license LGPL https://gforge.inria.fr/projects/tplib.

Cette bibliothèque implémente notamment des algorithmes permettant de passer d'une représentation externe d'un polyèdre à une représentation interne, ou inversement (voir §6.3.1 pour plus de détails). Elle permet aussi de réaliser d'autres opérations fondamentales, comme le calcul du complexe polyédral associé à un polyèdre donné (au sens de Develin et Sturmfels [108]), ou le calcul de cônes tangents tropicaux. Enfin, elle fournit toutes les primitives permettant d'utiliser les polyèdres tropicaux en tant que domaine abstrait numérique, afin de déterminer des invariants de programmes ou systèmes faisant intervenir les opérations $\min$ et $\max$ (voir [70]).

TPLib est utilisé dans le logiciel Polymake [128], développé à la Technische Universität Berlin (Allemagne). Ce dernier logiciel constitue une boite à outils permettant de manipuler des nombreux objets mathématiques (polytopes convexes, complexes polyédraux, graphes, matroïdes, polytopes tropicaux).

Le développement d'interfaces avec d'autres logiciels est désormais facilité grâce à la présence de *bindings* dans le langage C. Grâce à cela, un prototype d'interface a été réalisé entre TPLib et l'outil Verify-TAPN (https://launchpad.net/verifytapn), qui permet la vérification de réseaux de Pétri avec arcs temporisés (voir §6.6.4). De même, une interface à la bibliothèque de domaines abstraits numériques APRON [140] est également en cours de développement.

English version

TPLib is a library written in OCaml, which allows to manipulate tropical polyhedra. It is distributed under LGPL https://gforge.inria.fr/projects/tplib.

This library implements algorithms allowing to pass from an external representation of a polyhedron to an internal description, or inversely (see §6.3.1 for more details). Besides, the library allows to perform several fundamental operations over tropical polyhedra, such as computing the associated polyhedral complex (see Develin and Sturmfels [108]), or determining the tropical tangent cone at any point. Finally, it provides all the primitives allowing to use tropical polyhedra as an numerical abstract domain, in order to determine program/system invariants involving the operations $\min$ and $\max$ (see [70]).

TPLib is used in the software Polymake [128], developed in Technische Universität Berlin (Germany). Polymake is a toolbox allowing to manipulate mathematic objects such as convex polytopes, polyhedral complexes, graphs, matroids, and tropical polytopes.

The development of further interfaces is now easier thanks to the distribution of bindings in C language. Using these bindings, a prototype of interface has been created between TPLib and the model-checker VerifyTAPN (https://launchpad.net/verifytapn), which allows the verification of timed-arc Petri Nets (see §6.6.4). An interface to the numerical abstract domain APRON [140] is also under development.

6. New Results

6.1. Highlights of the Year

Nous avons donné un contre exemple inattendu à l'analogue continu de la conjecture de Hirsch, proposé par Deza, Terlaky et Zinchenko, voir Section 6.4.4.

English version

We gave a somehow unexpected counter example to the continuous analogue of the Hirsch conjecture proposed by Deza, Terlaky and Zinchenko, see Section 6.4.4.

6.2. Théorie spectrale max-plus et géométrie métrique/Max-plus spectral theory and metric geometry

6.2.1. Introduction

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Cormac Walsh.

Étant donné un noyau $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on peut lui associer le problème spectral max-plus

$$\sup_{y \in S} a(x, y) + u(y) = \lambda + u(x), \quad \forall x \in S, \tag{9}$$

dans lequel on cherche le vecteur propre $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et la valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Comme nous l'avons rappelé dans les §3.2 et 3.3, le problème spectral (9) intervient en contrôle ergodique: l'ensemble S est l'espace des états, et l'application $a(x, y)$ fournit le gain associé à la transition $x \to y$. Le cas où S est fini est classique, l'on a alors un résultat précis de représentation de l'espace propre, à l'aide d'un certain graphe, dit graphe critique. Des résultats existent également lorsque S est compact et que le noyau vérifie certaines propriétés de régularité.

Dans [64], nous avons considéré le cas où S est non compact. Lorsque $\lambda = 0$, l'espace propre est analogue à l'espace des fonctions harmoniques défini en théorie (classique ou probabiliste) du potentiel. En introduisant l'analogue max-plus de la frontière de Martin, nous avons obtenu un analogue de la formule de représentation de Poisson des fonctions harmoniques : toute solution u de (9) peut être représentée sous la forme :

$$u = \sup_{w \in \mathcal{M}_m} w + \mu_u(w) \ , \tag{10}$$

où $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ est l'analogue max-plus de la frontière de Martin minimale (l'ensemble des fonctions harmoniques extrémales normalisées), et où μ_u joue le rôle de la mesure spectrale. Nous avons montré aussi que les éléments de l'espace de Martin minimal peuvent être caractérisés comme les limites de “quasi-géodésiques”. La frontière de Martin max-plus généralise dans une certaine mesure la frontière d'un espace métrique construite à partir des horo-fonctions (fonctions de Busemann généralisées), ou horo-frontière. Ces résultats inspirent les travaux des sections suivantes, qui portent sur des cas remarquables d'espaces métriques (§6.2.3) ou sur des applications en théorie des jeux (§6.2.2).

English version

Let the kernel $a : S \times S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ be given. One may associate the max-plus spectral equation (9), where the eigenvector $u : S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ are unknown. As we recalled in §3.2 and refmonotone, this spectral problem arises in ergodic optimal control: the set S is the *state space*, and the map $a(x, y)$ is the *transition reward*. The case when S is finite is classical, a precise spectral theorem is known, with a characterisation of the eigenspace in terms of a critical graph. Some results have been shown when S is compact, assuming that the kernel a satisfies some regularity properties.

In [64], we considered the case where S is non-compact. When $\lambda = 0$, the eigenspace is analoguous to the set of harmonic functions defined in classical or probabilistic potential theory. By introducing a max-plus analogue of the classical Martin boundary, we obtained an analogue of the Poisson representation of harmonic functions, showing that any solution u of (9) may be represented as in (10) where $\mathcal{M}_m \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^S$ is a max-plus analogue of the minimal Martin boundary (the set of normalised extremal harmonic functions), and μ_u plays the role of the spectral measure. We also showed that the elements of the minimal Martin boundary can be characterised as limits of certain “almost-geodesics”. The max-plus Martin boundary generalises to some extent the boundary of metric spaces defined in terms of horofunctions (generalised Busemann functions), or horoboundary. These results have inspired the work of the next sections, which deal either with interesting examples of metric spaces (§6.2.3) or with applications to zero-sum games (§6.2.2).

6.2.2. Asymptotiques d'itérées d'applications contractantes au sens large et jeux à somme nulle en horizon long/Asymptotics of iterates of nonexpansive mappings and zero-sum games

Participants: Jérôme Bolte, Stéphane Gaubert, Guillaume Vigeral.

On s'est intéressé ici à l'existence du paiement moyen pour les jeux répétés, et plus généralement, à l'existence du vecteur de “taux de fuite” $\lim_k f^k(x)/k$ où f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui même, nonexpansive pour une norme quelconque. Dans le cas particulier des jeux, f est un opérateur de Shapley, qui est nonexpansif pour la norme sup. On a montré dans [15] que la limite existe si l'application f est définissable dans une structure o-minimale. Ceci généralise des résultats de Bewley, Kohlberg, et Neyman, qui montraient que la limite existe si f est semi-algébrique. L'extension au cas o-minimal permet notamment de traiter des opérateurs de type “log-exp” apparaissant en contrôle sensible au risque.

English version

We studied the question of the existence of the mean payoff for repeated games, and more generally, the existence of a vector of “escape rates”, $\lim_k f^k(x)/k$, where f is a self-map of $\mathbb{R}^n$, non-expansive in some norm. In the special case of zero-sum games, f is a Shapley operator, and it is sup-norm nonexpansive. We showed in [15] that this limit does exist as soon as the map f is definable in an o-minimal structure. This generalizes results of Bewley, Kohlberg, and Neyman, who showed that this limit exists if f is semi-algebraic.

The extension to the case of o-minimal structures allows one in particular to deal with log-exp type operators arising in risk sensitive control.

6.2.3. Isométries de la géométrie de Hilbert/Isometries of the Hilbert geometry

Participants: Cormac Walsh, Bas Lemmens [Kent University, UK].

Dans nos travaux précédents, nous avons étudié la géométrie de Hilbert (d'un ensemble convexe) en dimension finie, en particulier son horo-frontière et son groupe des isométries. Le chapitre de livre [44] donne une vue d'ensemble de ces travaux. Le cas de la dimension infinie est aussi intéressant, et a été utilisé depuis de nombreuses années en analyse non linéaire. Malgré cela, la géométrie de ces espaces est très peu connue en dimension infinie. Nous collaborons sur ce sujet avec Bas Lemmens de l'Université de Kent. Nous étudions par exemple le problème suivant. En dimension finie, il est connu que la géométrie de Hilbert est isométrique à un espace normé si et seulement si le convexe est un simplexe. Nous essayons de montrer plus généralement que la géométrie de Hilbert est isométrique à un espace de Banach si et seulement si le convexe est le cône des fonctions positives continues sur un espace topologique compact. Pour cela, nous étudions l'horo-frontière en dimension infinie.

English version

Previously, we have been studying the Hilbert geometry in finite dimensions, especially its horofunction boundary and isometry group. The book chapter [44] contains a survey of this work. However, the infinite dimensional case is also interesting, and has been used as a tool for many years in non-linear analysis. Despite this, very little is known about the geometry of these spaces when the dimension is infinite. We are collaborating on this topic with Bas Lemmens of the University of Kent. An example of a problem we are working on is the following. In finite dimension it is known that a Hilbert geometry is isometric to a normed space if and only if it is a simplex. We are attempting to show that, more generally, a Hilbert geometry is isometric to a Banach space if and only if it is the cross-section of a positive cone, that is, the cone of positive continuous functions on some compact topological space. To tackle this problem we are finding it useful to study the horofunction boundary in the infinite-dimensional case.

6.2.4. Croissance des boules dans la géométrie de Hilbert/Volume growth in the Hilbert geometry

Participants: Cormac Walsh, Constantin Vernicos [Université Montpellier 2].

Avec Constantin Vernicos de l'Université Montpellier 2, nous étudions la croissance du volume de la boule d'une géométrie de Hilbert (d'un ensemble convexe) en fonction du rayon. En particulier, nous étudions l'entropie volumique:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log \mathrm{Vol}\, B(x,r)}{r}, \tag{11}$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r, et Vol est une notion de volume particulière, telle que celle définie par Holmes–Thompson ou celle de Busemann. L'entropie ne dépend pas du choix particulier de x, ni de celui du volume. Il est connu que pour l'espace hyperbolique, ou toute géométrie de Hilbert dont la frontière est C^2 et de courbure strictement positive, l'entropie est égale à $n-1$ lorsque la dimension de l'espace est n, et il a été conjecturé que ceci correspond aussi à l'entropie maximale d'une géométrie de Hilbert en dimension n. Afin de prouver cette conjecture, nous cherchons d'abord à étudier le lien entre l'entropie et l'approximabilité du convexe par des polytopes, et ensuite à borner cette approximabilité. La première étape nécessite d'étudier la croissance du volume dans le cas de polytopes. Dans ce cas, la croissance est polynomiale de degré n, plutôt qu'exponentielle, et il est important de comprendre le lien entre le coefficient dominant du polynôme exprimant le volume et la complexité du polytope. Nous avons obtenu une formule pour ce coefficient, laquelle dépend de la structure combinatoire du polytope.

English version

In a collaboration with Constantin Vernicos of Université Montpellier 2, we are investigating how the volume of a ball in a Hilbert geometry grows as its radius increases. Specifically, we are studing the volume entropy (11) where $B(x, r)$ is the ball with center x and radius r, and Vol denotes some notion of volume, for example, the Holmes–Thompson or Busemann definitions. Note that the entropy does not depend on the particular choice of x, nor on the choice of the volume. It is known that the hyperbolic space, or indeed any Hilbert geometry with a C^2-smooth boundary of stricty positive curvature, has entropy $n-1$, where n is the dimension, and it has been conjectured this is the maximal entropy possible for Hilbert geometries of the given dimension. Our approach to this conjecture is to first relate the entropy to the approximability of the convex domain by polytopes, and then bound this approximability. The first of these steps requires us study the volume growth in the polytopal case. Here the growth is polynomial rather than exponential, of degree n, and it is important to know how the constant on front of the highest term depends on the complexity of the polytope. We have a formula for this constant in terms of the combinatorial structure of the polytope.

6.2.5. Consensus non-commutatif et contraction d'opérateurs de Kraus/Noncommutative consensus and contraction of Kraus maps

Participants: Stéphane Gaubert, Zheng Qu.

Dans le travail [17], on s'est intéressé à la vitesse de convergence vers l'équilibre d'une itération de la forme $x^{k+1} = T(x^k)$, $x^k \in X$, où T est une application linéaire préservant un cône dans un espace de Banach X, telle que $T(e) = e$, pour un certain vecteur e dans l'interieur du cône. On s'intéresse aussi à l'itération dans l'espace dual, $y^{k+1} = T^*(y^k)$, $y^k \in X^*$, lorsque $\langle y^0, e\rangle = 1$.

Le cas classique est celui où $T(x) = Px$ est un opérateur de Markov. L'itération primale traduit alors la convergence vers le "consensus", et l'itération duale traduit la convergence de la distribution de probabilité en temps k vers l'état stationnaire. Dans ce cas, le taux de contraction (en un coup) $\kappa(P)$ d'une itération primale, pour la semi-norme de Hilbert $\|z\|_H := \max_i z_i - \min_j z_j$, ainsi que le taux de contraction d'une itération duale, pour la métrique en variation totale, coïncident et sont caractérisés par une formule dûe à Doeblin et Dobrushin (coefficient d'ergodicité),

$$\kappa(P) := 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^{n} \min(P_{is}, P_{js}).$$

On a donné ici une généralisation de cette formule au cas d'opérateurs abstraits, qui s'applique en particulier aux opérateurs de Kraus qui interviennent en information quantique. Ces derniers opérent sur l'espace des matrices symmétriques, et sont de la forme

$$T(x) = \sum_k a_k x a_k^* \qquad \text{avec} \qquad \sum_k a_k a_k^* = I \ .$$

Dans [53], nous avons étudié des questions de complexité pour les applications de Kraus, montrant en particulier qu'il est NP-dur de vérifier qu'une application de Kraus envoie le cone dans son interieur.

English version

In [17], we studied the speed of convergence to equilibrium of an iteration of the form $x^{k+1} = T(x^k)$, $x^k \in X$, where T is a linear map preserving a cone in a Banach space X, such that $T(e) = e$, for some vector e in the interior of the cone. We also considered the iteration in the dual space X^*, $y^{k+1} = T^*(y^k)$, $y^k \in X^*$, where $\langle y^0, e\rangle = 1$.

The classical application arises when $T(x) = Px$ is a Markov operator. Then, the primal iteration represents the dynamics of consensus, whereas the dual iteration represents the evolution of the probability distribution as a function of time. Then, the (one-shot) contraction rate $\kappa(P)$ of the primal iteration, with respect to Hilbert's seminorm $\|z\|_H := \max_i z_i - \min_j z_j$, and the contraction rate of the dual iteration, with respect to the total variation metric, coincide, and are characterized by a formula of Doeblin and Dobrushin (ergodicity coefficient),

$$\kappa(P) := 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^{n} \min (P_{is}, P_{js}).$$

We gave here a generalization of this formula to an abstract operators on a cone. This covers in particular the Kraus maps arising in quantum information theory. The latter maps act on the space of symmetric matrices. They can be written as

$$T(x) = \sum_k a_k x a_k^* \qquad \text{with} \qquad \sum_k a_k a_k^* = I \enspace .$$

In [53], we studied complexity issues related to Kraus maps, and showed in particular that checking whether a Kraus map sends the cone to its interior is NP-hard.

6.3. Algèbre linéaire max-plus, convexité tropicale et jeux à somme nulle/Max-plus linear algebra, tropical convity and zero-sum games

6.3.1. *Polyèdres tropicaux/Tropical polyhedra*

Participants: Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Ricardo Katz [Conicet, Argentine].

On étudie les analogues max-plus ou tropicaux des ensembles convexes. Ceux-ci sont utiles en particulier pour représenter de manière effective les ensembles d'états accessibles de systèmes à événements discrets [9], ils sont aussi apparus récemment en géométrie tropicale, dans toute une série de travaux à la suite de Sturmfels et Develin [108]. Les polyèdres max-plus peuvent aussi être vus comme des limites de déformations de polyèdres classiques, sur lesquels ils donnent un éclairage de nature combinatoire. Toutes ces motivations ont inspiré la recherche d'analogues des résultats fondamentaux d'analyse convexe classique: séparation, projection, points extrémaux, à la suite en particulier de [8].

Dans un travail de X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault [71], [72], on a mis en évidence un critère combinatoire pour la caractérisation des sommets des polyèdres tropicalement convexes. Celui-ci s'exprime à l'aide d'hypergraphes orientés, et de leurs composantes fortement connexes. Ce critère possède la propriété d'être vérifiable en un temps presque linéaire en la taille de l'hypergraphe.

On en déduit un analogue tropical de la méthode de la double description [72] (méthode très utilisée sur les polyèdres classiques, et dûe à Motzkin *et al.* [160]). Cet algorithme permet de calculer les sommets d'un polyèdre défini de façon externe (intersection de demi-espaces ou d'hyperplans tropicaux). Grâce au critère combinatoire précédent, l'algorithme améliore de plusieurs ordres de grandeur les techniques connues jusqu'alors. Ceci est confirmé par de nombreuses expérimentations. Ce travail est motivé par des applications à l'analyse statique [70] et aux systèmes à événements discrets [113], dans lesquelles la manipulation de tels polyèdres est le goulot d'étranglement.

Il est connu qu'un polyèdre tropical peut être représenté comme l'enveloppe convexe d'un ensemble minimal de points et rayons, donnés par ses sommets et ses rayons extrêmes [124]. Dans un travail réalisé par X. Allamigeon et R. Katz [75], et effectué en partie lors de visites de R. Katz à Inria, on étudie la question duale de la caractérisation des représentations minimales par demi-espaces. On montre qu'un polyèdre tropical possède *essentiellement* une unique représentation minimale par demi-espaces, lorsque leurs apex appartiennent au polyèdre. On montre que les apex de ces demi-espaces non-redondants correspondent à certains sommets du complexe tropical introduit par Develin et Sturmfels [108]. On introduit également un critère combinatoire pour l'élimination de demi-espaces redondants à l'aide d'hypergraphes orientés.

Dans un travail de X. Allamigeon et R. Katz [52], nous étudions la tropicalisation des représentations par demi-espaces des polyèdres convexes sur le corps des séries de Puiseux. Nous démontrons ainsi une conjecture de Develin et Yu [109]. Celle-ci assure qu'étant donné un polytope tropical pur, il existe un polytope *relevé* sur les séries de Puiseux, dont les demi-espaces associés aux faces se "tropicalisent" en une représentation par demi-espaces du polytope tropical initial.

Des applications de ces travaux à l'algorithmique, concernant en particulier les jeux répétés, sont discutées dans la Section 6.5.2. Une application aux systèmes temps réel est discutée dans la Section 6.6.4.

English version

We study the max-plus or tropical analogues of convex sets. These have been used in particular to represent effectively the accessible sets of certain discrete event systems [9]. They also appeared in tropical geometry, following the work of Sturmfels and Develin [108]. Max-plus polyhedra can be thought of as limits of deformations of classical polyhedra, on which they give a combinatorial insight. These motivations have inspired the investigation of analogues of basic results of classical convex analysis: separation, projection, representation by extreme points, following [8].

In a work of X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault [72], we introduce a combinatorial criterion for the characterization of the vertices of tropically convex polyhedra. It is expressed in terms of directed hypergraphs and their strongly connected components. This criterion can be verified in almost linear time in the size of the hypergraph.

This allows to develop a tropical analogue of the double description method [72] (this method is widely used for classical convex polyhedra, and is due to Motzkin *et al.* [160]). This algorithm is able to determine all the vertices of a polyhedron defined externally (intersection of tropical half-spaces of hyperplanes). Thanks to the combinatorial criterion mentioned above, the algorithm improves the existing methods by several orders of magnitude. This is confirmed by several experiments. This is motivated by applications to static analysis [70] and discrete event systems [113], in which computing such polyhedra turns out to be the bottleneck.

It is well-known that a tropical polyhedron can be represented as the convex hull of a minimal set of points and rays, provided by its vertices and extreme rays [124]. In a work of X. Allamigeon and R. Katz [75], partly done during visits of R. Katz at Inria, the dual problem of characterizing the minimal representations by half-spaces is studied. We show that a tropical polyhedron admits *essentially* a unique minimal external representation by half-spaces, provided that their apices belong to the polyhedron. We prove that the apices of these half-spaces correspond to certain vertices of the tropical complex introduced by Develin and Sturmfels [108]. We also establish a combinatorial criterion allowing to eliminate redundant half-spaces using directed hypergraphs.

In a work of X. Allamigeon and R. Katz [52], we study the tropicalization of the representation by half-spaces of convex polyhedra over the field of Puiseux series. In particular, we prove a conjecture of Develin and Yu [109]. It states that, given a pure tropical polytope, there exists a lifting polytope over Puiseux series, such that the facet-defining half-spaces are "tropicalized" into a representation by half-spaces of the initial polytope.

Some algorithmic applications of this work concerning in particular mean payoff games, will be discussed in Section 6.5.2. Applications to real time systems will be discussed in Section 6.6.4.

6.3.2. Systèmes linéaires max-plus/Max-plus linear systems

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Alexander Guterman [Moscow State University].

Dans [42], on montre des formules de Cramer pour des systèmes linéaires sur diverses extensions du semi-anneau max-plus. Les éléments de ces extensions sont des nombres tropicaux enrichis d'une information de multiplicité, de signe ou d'angle par exemple. On obtient ainsi des résultats d'existence et d'unicité qui généralisent plusieurs résultats de [133], [164], [120], [172], [139]. De plus, pour certaines extensions du semi-anneau max-plus, les preuves fournissent des algorithmes de type Jacobi ou Gauss-Seidel pour résoudre les systèmes linéaires.

Nous nous intéressons maintenant à la complexité de la solution de systèmes linéaires tropicaux signés, i.e. de systèmes sur l'extension du semi-anneau max-plus avec signes, ou d'hyperplans sur ce semi-anneau.

English version

In [42], we prove general Cramer type theorems for linear systems over various extensions of the tropical semiring, in which tropical numbers are enriched with an information of multiplicity, sign, or argument. We obtain existence or uniqueness results, which extend or refine earlier results in [133], [164], [120], [172], [139]. Moreover, some of our proofs lead to Jacobi and Gauss-Seidel type algorithms to solve linear systems in suitably extended tropical semirings.

We study now the complexity of the solution of signed tropical linear systems, that is systems on the extension of the tropical semiring with signs, or the one of the nonemptyness of hyperplanes over this semiring.

6.3.3. Convexes tropicaux et théorème de Choquet/Tropical convex sets and Choquet theorem

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Paul Poncet.

La thèse de Paul Poncet [165] concernait essentiellement ce que l'on appelle l'analyse idempotente, c'est-à-dire l'étude des espaces fonctionnels ou linéaires de dimension infinie sur l'algèbre tropicale, ou tout autre semi-anneau idempotent. Paul Poncet a développé pour cela un point de vue treillis continus comme dans [1], ou plus généralement domaines. Depuis la soutenance, plusieurs articles issus du manuscrit de thèse sont publiés [21], [20] ou en cours de soumission, et d'autres travaux pousuivant ceux de la thèse sont en cours avec les membres de l'équipe.

En particulier avec ce point de vue domaines, Paul Poncet a pu établir des théorèmes de type Krein-Milman, réciproque de Milman, et représentation de Choquet dans les semi-treillis [20] ou l'algèbre max-plus [38].

On sait que les résultats sur les convexes tropicaux de dimension infinie de [165] permettent de retrouver partiellement les résultats sur la frontière de Martin max-plus décrits dans la section 6.2.1. Dans un travail commun avec Klaus Keimel (TU-Darmstadt), nous essayons d'obtenir l'extension du théorème de représentation de Choquet tropical dans le cas d'ensembles ordonnés qui ne sont pas forcément des treillis tels que le cône des matrices symmetriques positives muni de l'ordre de Loewner.

English version

The PhD thesis work of Paul Poncet [165] concerned essentially what is called idempotent analysis, that is the study of infinite dimensional functional or linear spaces over tropical algebra, or any other idempotent semiring. For this aim, Paul Poncet developped the point of view of continuous lattices, as in [1], or more generally of domains. Since the defense of his thesis, several papers derived from the thesis manuscript have been published [21], [20] or up to be submitted. Some other works pursuing the thesis work are done with team members.

In particular, using the point of view of domains, Paul Poncet showed results such as a Krein-Milman type theorem, a Milman converse type theorem, and a Choquet representation type theorem over semilattices [20] or over max-plus algebra [38].

We know that the results on infinite dimensional tropical convex sets of [165] allow one to recover at least partially the results on max-plus Martin boundaries described in Section 6.2.1. In a joint work with Klaus Keimel (TU-Darmstadt), we try to obtain the extension of the max-plus Choquet representation theorem in the case of ordered sets that are not necessarily semilattices, such as the cone of nonnegative symmetric matrices endowed with the Loewner order.

6.3.4. Points fixes d'applications monotones homogènes et jeux à somme nulle/Fixed points of order preserving homogeneous maps and zero-sum games

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Antoine Hochart.

Pour les jeux répétés à somme nulle, un problème de base est de savoir si le paiement moyen par unité de temps est indépendant de l'état initial. Ici, on définit le paiement moyen directement au moyen de l'opérateur de Shapley (ou de la programmation dynamique) du jeu, lequel préserve l'ordre et commute avec l'addition d'une constante. Dans le cas particulier des jeux à zero joueur, i.e. de chaînes de Markov avec fonctionnelle additive, la solution du problème ci-dessus est fournie par le théorème ergodique. Dans [46], on généralise ce résultat au cas des jeux répétés à espace d'états fini. Cette généralisation est basée sur l'étude de la sous-classe d'opérateurs de Shapley *sans-paiement* (le paiement a lieu seulement le dernier jour), lesquels commutent avec la multiplication par une constante positive. L'intérêt de cette sous-classe est qu'elle inclue la fonction de récession d'un opérateur de Shapley, lorsqu'elle existe. Nous montrons que le paiement moyen est indépendant de l'état initial pour toutes les perturbations des paiements instantannés dépendantes de l'état si, et seulement si, une condition d'ergodicité est vérifiée. Cette dernière est caractérisée par l'unicité, à constante additive près, du point fixe de la fonction de récession de l'opérateur de Shapley, ou, dans le cas particulier des jeux stochastiques à nombre fini d'actions et information parfaite, par une condition d'accessibilité dans un hypergraphe orienté, entre deux sous-ensembles conjugués d'états. On montre aussi que l'ergodicité d'un jeu ne dépend que de la probabilité de transition et qu'elle peut être vérifiée en temps polynomial lorsque le nombre d'états est fixé.

Lorsque un jeu est ergodique au sens ci-dessus, son paiement moyen est indépendant de l'état initial, et il coincide avec la valeur propre non linéaire de l'opérateur de Shapley. De plus, le vecteur propre associé, appelé biais, permet de déterminer les stratégies stationnaires optimales. Un autre problème est alors de comprendre pour quelles classes de jeux, le biais est unique (à constante additive près). Dans [25], on considère des jeux avec un nombre fini d'états et d'actions, de paiements instantannés variables, mais de probabilités de transition fixées. On montre que le vecteur de biais, considéré comme une fonction des paiements instantannés, est unique génériquement (à constante additive près).

English version

A basic question for zero-sum repeated games consists in determining whether the mean payoff per time unit is independent of the initial state. Here the mean payoff is defined in terms of the Shapley operator (dynamic programming operator) of the game, which is an order preserving map commuting with the addition of a constant. In the special case of "zero-player" games, i.e., of Markov chains equipped with additive functionals, the answer to the above question is provided by the mean ergodic theorem. In [46], we generalize this result to repeated games with a finite state space. This generalization is based on the study of the subclass of *payment-free* Shapley operators (the payment only occurs when the game stops), which are commuting with the multiplication by a positive constant, and which include the recession function of any Shapley operator, when it exists. We show that the mean payoff is independent of the initial state for all state-dependent perturbations of the rewards if and only if an ergodicity condition is satisfied. The latter is characterized by the uniqueness modulo additive constants of the fixed point of the recession function of the Shapley operator, or, in the special case of stochastic games with finite action spaces and perfect information, by a reachability condition involving conjugate subsets of states in directed hypergraphs. We show that the ergodicity condition for games only depends on the support of the transition probability and that it can be checked in polynomial time when the number of states is fixed.

Under the above ergodicity condition, the mean payoff of the game is independent of the initial state, and it is characterized as the nonlinear eigenvalue of the Shapley operator. Moreover, the associated eigenvector, also called the bias, allows one to determine optimal stationary strategies. Then, another basic question is to understand for which classes of games the bias vector is unique (up to an additive constant). In [25], we consider games with finite state and action spaces, thinking of the transition payments as variable parameters, transition probabilities being fixed. We show that the bias vector, thought of as a function of the transition payments, is generically unique (up to an additive constant).

6.4. Algèbre max-plus, déformations et asymptotiques /Max-plus algebra, deformations and asymptotic analysis

6.4.1. Introduction

Comme indiqué dans le §3.7, l'algèbre max-plus est la limite d'une déformation de l'algèbre classique, ou plutôt du semi-corps des réels positifs. Elle peut aussi fournir des estimations de ces déformations, puisque

$$\max(a,b) \leq \epsilon \log(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon}) \leq \epsilon \log(2) + \max(a,b) \quad . \tag{12}$$

L'utilisation de ces propriétés a déjà conduit dans le passé aux travaux sur les perturbations de valeurs propres [57], [56], [55], ou sur les grandes déviations [1], [61]. Dans les travaux qui suivent, nous exploitons ces propriétés dans des contextes reliés ou similaires à ceux de nos travaux précédents.

English version

As detailled in §3.7, max-plus algebra is the limit of a deformation of classical algebra, or more precisely of the semi-field of usual real positive numbers. It can also give estimations for these deformations using for instance (12). By using these properties, we already obtained some works on singular perturbations of matrix eigenvalues [57], [56], [55], or on large deviations [1], [61]. In the works described below, we are exploiting again these properties in contexts that are related or similar to those of our earlier works.

6.4.2. Méthodes tropicales de localisation de valeurs propres de matrices/Tropical methods for the localisation of matrix eigenvalues

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Andrea Marchesini.

Dans un travail avec Meisam Sharify [63], on a comparé les modules des valeurs propres d'un polynôme matriciel au moyen des racines tropicales du polynôme obtenu en appliquant une norme donnée aux coefficients. En particulier, on a obtenu des inégalités de type majorisation qui généralisent les bornes obtenues par Polya et Ostrowski dans le cas de polynômes scalaires.

Dans [12], on montre des inégalités de type majorisation entre les modules des valeurs propres d'une matrice et les valeurs propres tropicales de la matrice de ses modules. En particulier, les majorations généralisent l'inégalité de Friedland [119] concernant le rayon spectral.

Nous avons amélioré et généralisé ces inégalités [37], en appliquant différents changements de variables diagonaux à la matrice complexe initiale, lesquels sont construits à partir des variables duales du problème d'affectation optimale paramètrique construit à partir d'une matrice tropicale associée à la matrice complexe. En particulier, lorsqu'on les applique à une matrice companion par blocs, ces inégalités sont similaires à celles de [63].

English version

In a work with Meisam Sharify [63], we compared the moduli of the eigenvalues of a matrix polynomial to the tropical roots of a polynomial obtained by applying a norm to the coefficients of the original matrix polynomial. In particular, we obtained majorization type inequalities which generalize the bounds of Polya and Ostrowski available for scalar polynomials.

In [12], we show majorization type inequalities between the moduli of the eigenvalues of a complex matrix and the tropical eigenvalues of the matrix obtained by applying the modulus entrywise. In particular, the upper bounds generalize the inequality of Friedland [119] concerning the spectral radius. The above inequalities were obtained by using the permanental and tropical analogues of the exterior power of a matrix and by showing (combinatorially) properties of their eigenvalues similar to the ones of usual exterior powers.

We recently improved and generalized these inequalities, see [37], by applying to the original complex matrix, different diagonal scalings constructed from the dual variables of the parametric optimal assignment constructed from an associated tropical matrix. In particular, when applied to a block companion matrix, our inequalities are similar to the ones in [63].

6.4.3. *Méthodes tropicales pour le calcul numérique de valeurs propres de matrices/Tropical methods for the numerical computation of matrix eigenvalues*

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Andrea Marchesini.

Un des buts de la thèse d'Andrea Marchesini est d'utiliser les résultats de localisation de valeurs propres tels que ceux obtenus ci-dessus pour améliorer la précision des algorithmes de calcul numérique de valeurs propres de matrices ou de polynômes matriciels, en particulier en construisant des changements d'échelle exploitant les calculs tropicaux, à effectuer préalablement à l'appel d'algorithmes classiques comme QZ. Le "changement d'échelle tropical" introduit par Stéphane Gaubert et Meisam Sharify [127] dans le cas de polynôme matriciels quadratiques consiste en un changement de variable multiplicatif de la variable scalaire du polynôme matriciel. Dans un travail en collaboration avec Françoise Tisseur et James Hook de l'Université de Manchester [36], on considère aussi un changement de variables diagonal du polynôme matriciel construit à partir des variables duales du problème d'affectation optimale paramètrique construit dans l'esprit de [55]. On montre l'intérêt de ces changements d'échelle en terme de conditionnement des valeurs propres, et la supériorité du changement de variables diagonal par rapport au changement d'échelle tropical.

English version

One of goals of the PhD thesis of Andrea Marchesini is to use results on the localisation of eigenvalues like the above ones, to improve the accuracy of the numerical compution of the eigenvalues of a complex matrix or matrix polynomial, in particular by applying scaling methods using tropical techniques, which may be used before calling usual algorithms as QZ. The "tropical scaling" introduced by Stéphane Gaubert and Meisam Sharify [127] in the case of quadratic matrix polynomials consists in a multiplicative scaling of the scalar variable of the matrix polynomial. In a work with Françoise Tisseur and James Hook from Manchester University [36], we also consider a diagonal scaling of the matrix polynomial constructed from the dual variables of the parametric optimal assignment constructed in the same spirit as in [55]. We show the interest of these scaling methods on the eigenvalue conditioning, and the superiority of the diagonal scaling with respect to the tropical scaling.

6.4.4. *Tropicalisation du chemin central, et application à la courbure/Tropicalization of the central path and application to the curvature*

Participants: Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, Michael Joswig [TU Berlin].

En optimisation, une classe importante d'algorithmes, dits *de points intérieurs*, consiste à suivre une courbe appelée *chemin central* jusqu'à atteindre la solution optimale. Le chemin central d'un programme linéaire $\mathrm{LP}(A, b, c) \equiv \min\{c \cdot x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ est défini comme l'ensemble des solutions optimales (x^μ, w^μ) des problèmes à barrière logarithmique:

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & c \cdot x - \mu\left(\sum_{j=1}^{n} \log x_j + \sum_{i=1}^{m} \log w_i\right) \\ \text{sous les contraintes} \quad & Ax + w = b,\ x > 0,\ w > 0 \end{aligned}$$

Les performances d'un algorithme de point intérieur sont intimement liées à la forme du chemin central. En particulier, la courbure mesure de combien un chemin diffère d'une ligne droite. Intuitivement, un chemin central à forte courbure devrait être plus difficile à approximer par des segments de droites, ce qui suggère davantage d'itérations des algorithmes de points intérieurs. La courbure totale du chemin central a été étudiée par Dedieu, Malajovich et Shub [105] à travers le théorème de Bezout dans le cas multihomogène, et par De Loera, Sturmfels and Vinzant [104] à l'aide de la théorie des matroïdes. Ces deux travaux fournissent une borne supérieure en $O(n)$ sur la courbure totale moyenne sur l'ensemble des régions formées par l'arrangement d'hyperplans en dimension n. Le cube de Klee-Minty redondant de [111] et le "serpent" de [110] sont des instances qui montrent que la courbure totale peut être de l'ordre de $\Omega(m)$ pour un polytope défini par m inégalités.

Dans un travail de X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert, and M. Joswig, nous avons étudié la tropicalisation du chemin central. Le *chemin central tropical* est défini comme la limite logarithmique des chemins centraux d'une famille paramétrique de programmes linéaires LP$(A(t), b(t), c(t))$, où les entrées $A_{ij}(t)$, $b_i(t)$ and $c_j(t)$ sont des fonctions définissables dans une structure o-minimale appelée *corps de Hardy*.

Une première contribution a été de fournir une caractérisation entièrement géométrique du chemin central tropical. Nous avons montré que le centre analytique est donné par le plus grand élément de l'ensemble des points tropicaux admissibles. De plus, tout point du chemin central tropical coincide avec le plus grand élément de l'ensemble admissible tropical intersecté avec un ensemble de sous-niveau de la fonction de coût tropicale.

Grâce à cette caractérisation, nous avons réfuté l'analogue continu de la conjecture de Hirsch proposé par Deza, Terlaky et Zinchenko. l'analogue continu de la conjecture de Hirsch proposé par Deza, Terlaky et Zinchenko. Ainsi, nous avons construit une famille de programmes linéaires définis par $3r + 4$ inequalities in dimension $2r + 2$, où le chemin central a une courbure totale en $\Omega(2^r/r)$. Cette famille est obtenue en relevant des programmes linéaires tropicaux introduits par Bezem, Nieuwenhuis et Rodríguez-Carbonell [83] pour montrer qu'un algorithme de Butkovič and Zimmermann [88] a une complexité exponentielle. Leur chemin central tropical a une forme de courbe en escalier avec $\Omega(2^r)$ marches.

Ces résultats sont rassemblés dans le document [50]. Ils ont été présentés à la conférence [41].

English version

In optimization, path-following interior point methods are driven to an optimal solution along a trajectory called the central path. The *central path* of a linear program LP$(A, b, c) \equiv \min\{c \cdot x \mid Ax \le b, \ x \ge 0\}$ is defined as the set of the optimal solutions (x^μ, w^μ) of the barrier problems:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c \cdot x - \mu(\sum_{j=1}^{n} \log x_j + \sum_{i=1}^{m} \log w_i) \\ \text{subject to} & Ax + w = b, \ x > 0, \ w > 0 \end{array}$$

The performance of an interior point method is tightly linked to the shape of its central path. In particular, the curvature measures how far a path differs from a straight line. Intuitively, a central path with high curvature should be harder to approximate with line segments, and thus this suggests more iterations of the interior point methods. The total curvature of the central path has been studied by Dedieu, Malajovich and Shub [105] via the multihomogeneous Bézout Theorem and by De Loera, Sturmfels and Vinzant [104] using matroid theory. These two papers provide an upper bound of $O(n)$ on the total curvature averaged over all regions of an arrangement of hyperplanes in dimension n. The redundant Klee-Minty cube of [111] and the "snake" in [110] are instances which show that that the total curvature can be in $\Omega(m)$ for a polytope described by m inequalities. By analogy with the classical Hirsch conjecture, Deza, Terlaky and Zichencko [110] conjectured that $O(m)$ is also an upper bound for the total curvature.

In a work of X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert, and M. Joswig, we have studied the tropicalization of the central path. The *tropical central path* is defined as the logarithmic limit of the central paths of a parametric family of linear programs LP$(A(t), b(t), c(t))$, where the entries $A_{ij}(t)$, $b_i(t)$ and $c_j(t)$ are definable functions in an o-minimal structure called the *Hardy field*.

A first contribution is to provide a purely geometric characterization of the tropical central path. We have shown that the tropical analytic center is the greatest element of the tropical feasible set. Moreover, any point of the tropical central path is the greatest element of the tropical feasible set intersected with a sublevel set of the tropical objective function.

Thanks to this characterization, we disprove the continuous analog of the Hirsch conjecture proposed by Deza, Terlaky and Zinchenko, by constructing a family of linear programs with $3r+4$ inequalities in dimension $2r+2$ where the central path has a total curvature in $\Omega(2^r/r)$. This family arises by lifting tropical linear programs introduced by Bezem, Nieuwenhuis and Rodríguez-Carbonell [83] to show that an algorithm of Butkovič and Zimmermann [88] has exponential running time. The tropical central path looks like a staircase shape with $\Omega(2^r)$ steps.

These results are gathered in the preprint [50]. They have been presented in the conference [41].

6.5. Algorithmes/Algorithms

6.5.1. Itération sur les politiques pour le contrôle stochastique et les jeux répétés à somme nulle/Policy iterations for stochastic control and repeated zero sum games

Participants: Marianne Akian, Stéphane Gaubert.

L'algorithme d'itération sur les politiques est bien connu pour résoudre efficacement les équations de la programmation dynamique associées à des problèmes de contrôle stochastique avec critère à horizon infini (Howard) ou ergodique (Howard, et Denardo et Fox). Il a aussi été développé dans le cas de jeux à deux joueurs et somme nulle actualisés (Denardo) ou ergodiques (Hoffman et Karp).

Des résultats récents de Ye ainsi que Hansen, Miltersen et Zwick montrent que l'algorithme d'itération sur les politiques, restreint à la classe des jeux à somme nulle (à 1 ou 2 joueurs) actualisés de facteur d'actualisation donné, est fortement polynomial. Dans [58], on montre que ceci est le cas aussi pour l'algorithme d'itération sur les politiques pour les jeux à somme nulle et paiement moyen, restreint à la classe des jeux qui ont un temps moyen de retour ou d'arrivée à un état donné borné. La preuve utilise des techniques de théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, permettant de ramener le problème à paiement moyen à un problème actualisé (de facteur d'actualisation dépendant de l'état et des actions). La même technique permet aussi de traiter le cas de jeux à somme nulle actualisés dont le facteur d'actualisation peut dépendre de l'état et des actions et prendre éventuellement des valeurs supérieures à 1. Récemment, on a montré que la borne pour le cas des jeux à somme nulle et paiement moyen s'applique aussi au cas des jeux actualisés de facteur d'actualisation constant [31], [32], [45]. Ce dernier résultat est inspiré par des résultats récents de Post et Ye et de Scherrer concernant les algorithmes du simplexe et d'itération sur les politiques pour les problèmes de contrôle optimal (ou jeux à 1 joueur).

English version

Policy iteration is a powerful and well known algorithm to solve the dynamic programming equation associated to stochatic control (one player game) problems with infinite horizon criterion (Howard) or ergodic criterion (Howard and Denardo and Fox). It has also be developped in the case of zero-sum two player games, either in discounted case (Denardo) or the ergodic one (Hoffman et Karp).

Recent results of Ye and Hansen, Miltersen and Zwick show that policy iteration for one or two player (perfect information) zero-sum stochastic games, restricted to instances with a fixed discount rate, is strongly polynomial. In [58], we show that policy iteration for mean-payoff zero-sum stochastic games is also strongly polynomial when restricted to instances with bounded first mean return time to a given state. The proof is based on methods of nonlinear Perron-Frobenius theory, allowing us to reduce the mean-payoff problem to a discounted problem with state dependent discount rate. Our analysis also shows that policy iteration remains strongly polynomial for discounted problems in which the discount rate can be state dependent (and even negative) at certain states, provided that the spectral radii of the nonnegative matrices associated to all strategies are bounded from above by a fixed constant strictly less than 1. Recently, we have proved that the bound for the case of mean-payoff zero-sum stochastic two-player games also holds for discounted games with a constant discount factor [31], [32], [45]. The latter result was inspired by recent results of Post and Ye, and Scherrer, concerning simplex and policy iteration algorithms for Markov decision processes (1 player games).

6.5.2. Algorithmique des polyèdres tropicaux/Algorithmics of tropical polyhedra

Participants: Xavier Allamigeon, Pascal Benchimol, Stéphane Gaubert, Eric Goubault [CEA], Michael Joswig [TU Berlin].

X. Allamigeon, S. Gaubert, et E. Goubault, ont développé dans [70], [72] plusieurs algorithmes permettant de manipuler des polyèdres tropicaux. Ceux-ci correspondent aux travaux décrits dans §6.3.1. Ils permettent notamment de déterminer les sommets et rayons extrêmes d'un polyèdre tropical défini comme intersection de demi-espaces, ou inversement, de calculer une représentation externe à partir d'un ensemble de générateurs. Ces algorithmes sont implémentés la bibliothèque TPLib (voir §5.3).

Dans un travail de X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert et M. Joswig [51], nous avons défini un analogue tropical de l'algorithme du simplexe qui permet de résoudre les problèmes de *programmation linéaire tropicale*, *i.e.*

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \max\limits_{1\leq j\leq n} c_j + x_j \\ \text{sous les contraintes} & \max\big(\max\limits_{1\leq j\leq n}(a^+_{ij}+x_j), b^+_i\big) \geq \max\big(\max\limits_{1\leq j\leq n}(a^-_{ij}+x_j), b^-_i\big), \quad i=1,\cdots,m \\ & x\in(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n \end{array} \tag{13}$$

où les entrées du programme $a^{\pm}_{ij}$, $b^{\pm}_i$, c_j sont à valeur dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Ces problèmes sont intimement liés à la résolution de jeux répétés à somme nulle, puisque résoudre un jeux à paiement moyen déterministe est équivalent à déterminer si un problème de programmation linéaire admet un point réalisable [59].

Comme son homologue usuel, le simplexe tropical pivote entre des points de base (tropicaux), jusqu'à atteindre l'optimum du programme linéaire. La différence fondamentale avec l'algorithme du simplexe classique est que le pivotage est réalisé de manière purement combinatoire, en s'appuyant sur des descriptions locales du polyèdre tropical défini par les contraintes à l'aide d'(hyper)graphes orientés. Ceci nous a permis de prouver que *l'étape de pivotage (incluant le calcul des coûts réduits) a la même complexité en temps que dans l'algorithme classique, i.e.* $O(n(m+n))$. Ceci est d'autant plus inattendu que la structure des arêtes tropicales entre deux points de base sont géométriquement plus complexes (elles sont constituées de plusieurs segments de droite, jusqu'à n).

Le simplexe tropical a la propriété d'être fortement corrélé avec l'algorithme du simplexe classique. Grâce au principe de Tarski, le simplexe usuel peut être transposé tel quel sur des programmes linéaires dont les coefficients en entrée sont non plus des réels, mais sur le corps $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ des séries de Puiseux généralisées en une certaine indéterminée t, *i.e.* des objets de la forme :

$$c_{\alpha_1}t^{\alpha_1} + c_{\alpha_2}t^{\alpha_2} + \cdots \tag{14}$$

où les α_i sont des réels, les coefficients c_{α_i} sont des réels non-nuls, et où la séquence des $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ est strictement croissante et soit finie, soit non-bornée. L'opposé du plus petit exposant de la série, $-\alpha_1$, est appelé *valuation* de la série. Un programme linéaire tropical est dit *relevé* en un problème linéaire sur $\mathbb{R}\{\{t\}\}$, si la valuation des coefficients en entrée de ce dernier sont égaux aux coefficients du problème tropical. Dans nos travaux, nous avons établi la correspondance suivante entre le simplexe usuel et le simplexe tropical : *pour tout programme linéaire tropical générique, l'algorithme du simplexe tropical trace l'image par la valuation du chemin sur l'algorithme du simplexe usuel sur n'importe quel relèvement du programme tropical dans* $\mathbb{R}\{\{t\}\}$.

Les résultats présentés ci-dessus sont rassemblés dans l'article [51]. Ils ont fait l'objet de plusieurs présentations en conférence [67], [68][27].

Ces résultats ouvrent la possibilité de relier la complexité du l'algorithme du simplexe usuel avec celles des jeux déterministes. Pour ces derniers, on sait seulement que leur résolution est dans la classe de complexité $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$, et on ignore s'il existe un algorithme de complexité polynomiale. De façon similaire, on ne sait pas caractériser de façon précise la complexité de l'algorithme du simplexe usuel. Celle-ci dépend fortement de la règle de pivotage utilisée, et il existe des problèmes sur lesquelles de nombreuses règles de pivotage ont une complexité exponentielle. L'existence d'une règle de pivotage qui permettrait au simplexe de terminer en temps polynomial sur n'importe quelle instance est encore aujourd'hui une question ouverte.

Dans un deuxième travail, nous avons relié les deux problèmes ouverts précédents, grâce à l'algorithme du simplexe tropical. Nous avons en effet exhibé une classe de règles de pivotage, dites *combinatoires*, et avons montré qu'elles satisfont la propriété suivante : *s'il existe une règle de pivotage combinatoire qui permet de résoudre tout problème de programmation linéaire usuel en temps polynomial, alors on peut résoudre les jeux à paiement moyen en temps (fortement) polynomial.* Le terme *combinatoire* fait référence au fait que la règle est définie en fonction du signe des mineurs de la matrice des coefficients du problème linéaire. Ce résultat est décrit dans l'article [49], et a été présenté dans plusieurs conférences [39], [40].

Enfin, dans un travail de X. Allamigeon, P. Benchimol et S. Gaubert [26], nous avons étendu les résultats aux règles de pivotage *semi-algébriques*, classe incluant la règle dite du *shadow-vertex*. Celle-ci est connue pour avoir fourni plusieurs bornes de complexité moyenne et lisse sur l'algorithme du simplexe. Nous avons donc tropicalisé l'algorithme du simplexe shadow-vertex, et nous avons montré que cet algorithme permet de résoudre les jeux à paiement moyen en temps polynomial en moyenne.

English version

X. Allamigeon, S. Gaubert, and E. Goubault, have developed in [70], [72] algorithms allowing one to manipulate tropical polyhedra. They correspond to the contributions described in §6.3.1. In particular, they can be used to determine the vertices and extreme rays of a tropical polyhedron defined as the intersection of half-spaces, or inversely, to compute an external description from a set of generators. These algorithms are implemented in the library TPLib (see §5.3).

In an ongoing work of X. Allamigeon, P. Benchimol, S. Gaubert and M. Joswig, we introduced a tropical analogue of the simplex algorithm, allowing one to solve problems of *tropical linear programming*, which are of the form (13), where the coefficients of the program, $a_{ij}^{\pm}$, $b_i^{\pm}$, c_j take their values in the max-plus semiring $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. These problems are closely related to mean payoff games, as solving a game of this kind is equivalent to determine whether a tropical linear program admits a feasible point [59].

Like the classical simplex algorithm, the tropical simplex algorithm performs pivoting operations between basis points, until it reaches the optimum. The main discrepancy with the classical algorithm is that the pivoting is now a purely combinatorial operation, which is performed by using a local description of the polyhedron by a directed hypergraph. This allowed us to show that *a tropical pivoting step (including computing reduced costs) has the same complexity as in the classical simplex algorithm, i.e.* $O(n(m+n))$. This is all the more surprising as the tropical edge between two given points has a geometrically more complex structure in the tropical case (it is constituted of up to n ordinary line segments).

The tropical simplex algorithm turns out to be closely related to the classical one. Thanks to Tarski's principle, the latter is also valid for linear programs over the field $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ of generalized Puiseux series in an indeterminate t. These series are of the form (14), where the α_i are real numbers, the coefficients c_{α_i} are non-zero reals, and the sequence $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ is strictly increasing and either finite or unbounded. The opposite of the smallest exponent of the series, $-\alpha_1$, is called *valuation*. A tropical linear program is said to be *lifted* to a linear program over $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ if the valuation of the coefficients of the latter are sent to the coefficients of the former by the valuation. We showed the following relation between the classical simplex algorithm and its tropical analogue: *for all generic tropical linear program, the tropical simplex algorithm computes the image by the valuation of the path of the classical simplex algorithm, applied to any lift in* $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ *of the original program.*

These results are gathered in the article [51]. They have been presented in several conferences [67], [68][27].

They allow one to relate the complexity of the classical simplex algorithm with the complexity of mean payoff games. The latter is unsettled, these games are known to be in the class $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$ but it is not known whether they can be solved in polynomial time. Basic complexity issues regarding the classical simplex algorithm are also unsettled: its execution time depends on the pivoting rule, and many pivoting rules have been shown to have exponential worst case behaviors. The existence of a pivoting rule leading the simplex to terminate in polynomial time is still an open question. . In a second work, we related these two open questions, via the tropical simplex algorithm. We identified a class of pivoting rules, which are said to be *combinatorial*, and show that they have the following property: *if there is a combinatorial pivoting rule allowing one to solve every classical linear programming problem in polynomial time, then, mean payoff games can be solved in (strongly) polynomial time.* By *combinatorial*, we mean that the rule depends only of the coefficients of the system through the signs of minors of the coefficients matrix. This result is given in the article [49]. It has been presented to the conferences [39], [40].

Finally, in a work of X. Allamigeon, P. Benchimol and S. Gaubert [26], we extended the latter results to *semi-algebraic* pivoting rules, which include the so-called *shadow-vertex* rule. This rule has been exploited in the literature to establish several average-case and smooth complexity bounds on the simplex algorithm. We tropicalized the shadow-vertex simplex algorithm, and showed that it solves mean payoff games in polynomial time on average.

6.5.3. Problèmes d'accessibilité dans les hypergraphes orientés et leur complexité/Reachability problems in directed hypergraphs and their complexity

Participant: Xavier Allamigeon.

Les hypergraphes orientés sont une généralisation des graphes orientés, dans lesquelles chaque arc relie un ensemble de sommets à un autre. Ils jouent un rôle important dans les travaux récents sur la convexité tropicale (voir §6.3.1), puisqu'ils offrent une représentation naturelle des cônes définis sur le sous-semi-anneau booléen $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\}$.

Dans un travail de X. Allamigeon [66], on étudie la complexité de problèmes d'accessibilité sur les hypergraphes orientés. Nous introduisons un algorithme de complexité presque linéaire permettant de déterminer les composantes fortement connexes terminales (qui n'accèdent à aucune autre composante si ce n'est elles-mêmes) d'un hypergraphe.

Nous établissons également une borne inférieure sur-linéaire sur la taille de la réduction transitive de la relation d'accessibilité dans les hypergraphes. Cela indique que la relation d'accessibilité dans les hypergraphes orientés est combinatoirement plus complexe que celle des graphes orientés. Cela suggère aussi que des problèmes comme le calcul des composantes fortement connexes est plus difficile sur les hypergraphes que sur les graphes. Nous mettons d'ailleurs en évidence une réduction en temps linéaire du problème du calcul des ensembles minimaux dans une famille d'ensembles donnée, vers le problème du calcul de toutes les composantes fortement connexes d'un hypergraphe. Le problème du calcul des ensembles minimaux a été largement étudié dans la littérature [166], [185], [184], [167], [168], [169], [115], [80], et aucune algorithme en temps linéaire n'est connu à ce jour.

English version

Directed hypergraphs are a generalization of directed graphs, in which the tail and the head of the arcs are sets of vertices. It appears that they play an important role in the recent works on tropical convexity (see §6.3.1), since they offer a natural representation of cones defined over the boolean sub-semiring $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\}$.

In a work of X. Allamigeon [66], we study the complexity of reachability problems on directed hypergraphs. We introduce an almost linear-time algorithm allowing to determine the terminal strongly connected components (a component is said to be *terminal* when no other component is reachable from it).

We also establish a super-linear lower bound over the size of the transitive reduction of the reachability relation in directed hypergraphs. This indicates that the reachability relation is combinatorially more complex in directed hypergraphs than in directed graphs. This also suggests that reachability problems such as computing all strongly connected components are likely to be harder in hypergraphs than in graphs. Besides, we show that the minimal set problem can be reduced in linear time to the problem of computing all strongly connected components in hypergraphs. The former problem consists in finding all minimal sets among a given family of sets. It has been well studied in the literature [166], [185], [184], [167], [168], [169], [115], [80], and no linear time algorithm is known.

6.5.4. Approximation max-plus de fonctions valeurs et équations de Riccati généralisées/Max-plus approximation of value functions and generalized Riccati equations

Participants: Stéphane Gaubert, Zheng Qu.

Les méthodes d'approximation max-plus conduisent à approcher la fonction valeur d'un problème de contrôle ou de jeux par un supremum d'un nombre fini de formes quadratiques, voir notamment [126]. On s'intéresse ici à l'analyse théorique (complexité) ainsi qu'à l'amélioration de ces méthodes. Dans certains cas, ces formes quadratiques sont propagées par des flots d'équations de Riccati généralisées. Afin d'effectuer des analyses d'erreur, on exploite les propriétés de contraction du flot de Riccati pour certaines métriques connues sur le cône des matrices positives, et en particulier pour la métrique de Thompson. Celle-ci n'est rien d'autre que $d_T(A,B) = \|\log\mathrm{spec}\,(A^{-1}B)\|_\infty$, où spec désigne la suite des valeurs propres d'une matrice, et $\log$ s'entend composante par composante.

Ceci nous a amené à étudier le problème général du calcul du taux de contraction d'un flot monotone sur un cône, pour la métrique de Thompson. En effet, les propriétés de contraction de l'équation de Riccati standard sont connues (résultats de Bougerol pour la métrique Riemanienne invariante, et de Wojtowski pour la métrique de Thompson), mais les techniques de preuve employées dans ce cadre (semigroupes de matrices symplectiques) ne s'étendent pas aux équations généralisées.

On donne dans [16] une formule explicite générale pour le taux de contraction pour la métrique de Thompson d'un flot monotone, faisant seulement intervenir le générateur du flot et sa dérivée. On a notamment appliqué ce résultat à une équation de Riccati généralisée associé à des problèmes de contrôle stochastique avec critère quadratique, dans lesquels la dynamique comporte un terme bilinéaire en le contrôle et le bruit. On a montré dans ce cas que la métrique de Thompson est la seule métrique de Finsler invariante pour laquelle le flot est nonexpansif, et l'on a caractérisé la constante de contraction locale.

Une application de ces résultats de contraction à l'analyse d'une méthode de réduction de la malédiction de la dimension, dûe à McEneaney, a été donnée dans [22].

Une nouvelle méthode numérique maxplus, de nature randomisée, a été introduite dans [30], elle fait apparaître de très fortes accélérations par rapport aux méthodes précédentes.

La question de l'émondage des représentations max-plus a été abordée dans [29], où il est montré qu'une classe de relaxations convexes introduites par Sridharan et al. pour traiter numériquement un problème de contrôle quantique sont en fait exactes (pas de saut de relaxation).

English version

The max-plus methods lead to approach the value function of an optimal control or zero-sum game problem by a supremum of a finite number of quadratic forms, see in particular [126]. We are interested here in the theoretical analysis (complexity) of this class of methods, as well as of their improvement. In certain cases, the quadratic forms are propagated by the flows of generalized Riccati equations. In order to perform an error analysis, we need to use some contraction properties of the Riccati flow, for certain known metrics on the space of positive matrices, like Thompson's metric. The latter is nothing but $d_T(A,B) = \|\log\mathrm{spec}\,(A^{-1}B)\|_\infty$, where spec denotes the sequence of eigenvalues of a matrix, and $\log$ is understood entrywise.

This led us to study the general problem of computing the contraction rate of an order-preserving flow on a cone, with respect to Thompson's metric. Indeed, the contraction properties of the standard Riccati flow are known (theorem of Bougerol for the invariant Riemanian metric, of Wojtowski for the Thompson's metric), but the proof of these properties (based on symplectic semigroups) does not carry over to generalized Riccati equations.

We gave in [16] a general explicit formula for the contraction rate with respect to Thompson's metric of an order-preserving flow, involving only the generator of the flow and its derivative. We applied in particular this result to a generalized Riccati equation, associated to stochastic optimal control problems with a quadratic cost and a bilinear dynamics (presence of a bilinear term between the control and the noise). We showed that in this case, the Thompson's metric is the only invariant Finsler metric in which the generalized Riccati flow is nonexpansive, and we characterized the local contraction rate of this flow.

Z. Qu has applied these results in [22] to the analysis of a method of reduction of the curse of dimensionality, introduced by McEneaney.

A new max-plus numerical method, of a randomized nature, has been introduced in [30]. It shows an important speedup by by comparison with earlier methods.

The question of trimming max-plus representations was dealt with in [29]. It is shown there that a class of convex relaxations introduced Sridharan et al. to solve numerically some quantum control problem is exact.

6.5.5. Approximation probabiliste d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman et itération sur les politiques

Participants: Marianne Akian, Eric Fodjo.

La thèse d'Eric Fodjo traite de problèmes de contrôle stochastique (de diffusions) avec critère à horizon infini actualisé ou arrêté, ou moyen en temps long, issus en particulier de problèmes de gestion de portefeuille avec coûts de transaction. La programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman, sur un espace de dimension au moins égale au nombre d'actifs risqués. La malédiction de la dimension ne permet pas de traiter numériquement ces équations en dimension grande (supérieure à 5). On se propose d'aborder ces problèmes avec des méthodes numériques associant itération sur les politiques, discrétisations probabilistes, et discrétisations max-plus, afin d'essayer de monter plus en dimension. Une autre piste est de remplacer l'itération sur les politiques par une approximation par des problèmes avec commutations optimales. Ces méthodes devraient aussi s'appliquer au cas de problèmes à horizon fini.

English version

The PhD thesis of Eric Fodjo concerns stochastic control problems with long term discounted or stopped payoff, or with mean-payoff in time, obtained in particular in the modelisation of portfolio selection with transaction costs. The dynamic programming method leads to a Hamilton-Jacobi-Bellman partial differential equation, on a space with a dimension at least equal to the number of risky assets. Curse of dimensionality does not allow one to solve numerically these equations for a large dimension (greater to 5). We propose to tackle these problems with numerical methods combining policy iterations, probabilistic discretisations, max-plus discretisations, in order to increase the possible dimension. Another solution is to replace policy iterations by an approximation with optimal switching problems. These methods should also be useful for finite horizon problems.

6.6. Applications

6.6.1. Introduction

Nous présentons maintenant plusieurs travaux de nature appliquée, touchant à des domaines variés, dans lesquels nous exploitons certaines des techniques mathématiques présentées précédemment, et particulièrement celles qui relèvent de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire et de la convexité tropicale. Ces applications utilisent aussi des techniques d'algèbre linéaire ou d'optimisation convexe.

English version

In this section, we describe several applied works in which we use some of the theoretical tools developed by the team, including non-linear Perron-Frobenius theory and tropical convexity. Some of these applications also make an intensive use of linear algebraic and convex programming methods.

6.6.2. Optimisation de la croissance de populations/Optimizing population growth

Participants: Vincent Calvez [ENS Lyon et Inria, NUMED], Pierre Gabriel [UVSQ], Stéphane Gaubert.

On s'intéresse dans [28] à l'optimisation du taux de croissance d'une population, représentée par un système dynamique $\dot{x}(t) = M(t)x(t)$, où la matrice $M(t)$ appartient à un ensemble compact de matrices de Metzler irréductibles. Ceci est motivé par un problème de biologie mathématique (modélisation de processus de croissance-fragmentation et protocole PMCA). Nous montrons que le taux de croissance est donné par la valeur propre non-linéaire d'un analogue max-plus de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius, ou de manière équivalente, par la constante ergodique d'une EDP d'Hamilton-Jacobi, dont les solutions et sous-solutions fournissent respectivement des normes de Barabanov et des normes extrémales. Nous exploitons les propriétés de contraction des flots monotones, relativement à la métrique projective de Hilbert, pour démontrer que le vecteur propre non-linéaire, qui correspond à une solution "KAM faible" de l'équation d'Hamilton-Jacobi, a bien une solution. Des exemples en petite dimension sont discutés, montrant en particulier que le contrôle optimal peut produire un cycle limite.

English version

We study in [28] a growth maximization problem for a continuous time positive linear system with switches. More precisely, we consider a dynamical system $\dot{x}(t) = M(t)x(t)$, where the matrix $M(t)$ must be chosen in a compact set of irreducible Metzler matrices. This is motivated by a problem of mathematical biology (modeling growth-fragmentation processes and the PMCA protocol). We show that the growth rate is determined by the non-linear eigenvalue of a max-plus analogue of the Ruelle-Perron-Frobenius operator, or equivalently, by the ergodic constant of a Hamilton-Jacobi (HJ) partial differential equation, the solutions or subsolutions of which yield Barabanov and extremal norms, respectively. We exploit contraction properties of order preserving flows, with respect to Hilbert's projective metric, to show that the non-linear eigenvector of the operator, or the "weak KAM" solution of the HJ equation, does exist. Low dimensional examples are presented, showing that the optimal control can lead to a limit cycle.

6.6.3. Preuve formelle d'inégalités non-linéaires/Formal proofs of non-linear inequalities

Participants: Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Victor Magron, Benjamin Werner [LIX].

La thèse de Victor Magron [153], dirigée par Benjamin Werner, codirigée par Stéphane Gaubert et Xavier Allamigeon, a porté sur la certification de bornes inférieures de fonctions multivariées à valeurs réelles, définies par des expressions semi-algébriques ou transcendantes, et sur la preuve de validité de celles-ci au moyen de certificats dans l'assistant de preuves Coq.

De nombreuses inégalités de cette nature apparaissent notamment dans la preuve par Thomas Hales de la conjecture de Kepler. Voici un exemple typique d'inégalité à prouver.

LEMME 9922699028 FLYSPECK. *Soit K, $\Delta\mathbf{x}$, l, t et f définis comme suit:*

$$
\begin{aligned}
K &:= [4, 6.3504]^3 \times [6.3504, 8] \times [4, 6.3504]^2 \ , \\
\Delta\mathbf{x} &:= x_1x_4(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad + x_2x_5(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6) \\
&\quad + x_3x_6(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6) \\
&\quad - x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5 - x_1x_2x_6 - x_4x_5x_6 \ , \\
l(\mathbf{x}) &:= -\pi/2 + 1.6294 - 0.2213(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_5} + \sqrt{x_6} - 8.0) \\
&\quad + 0.913(\sqrt{x_4} - 2.52) + 0.728(\sqrt{x_1} - 2.0) \ , \\
t(\mathbf{x}) &:= \arctan \frac{\partial_4 \Delta\mathbf{x}}{\sqrt{4x_1\Delta\mathbf{x}}} \ , \\
f(\mathbf{x}) &:= l(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x}) \ .
\end{aligned}
$$

Alors, $\forall \mathbf{x} \in K, f(\mathbf{x}) \geq 0$.

On s'est donc intéressé à des fonctions non-linéaires, faisant intervenir des opérations semi-algébriques ainsi que des fonctions transcendantes univariées ($\cos$, $\arctan$, $\exp$, etc).

De manière classique, on peut approcher les fonctions transcendantes qui interviennent de la sorte par des polynômes, ce qui permet de se ramener à des problèmes d'optimisation semi-algébriques, que l'on peut résoudre par des techniques de sommes de carrés creuses conduisant à des problèmes SDP. Cependant, en pratique, cette approche est limitée par la taille des SDP à résoudre, qui croît rapidement avec le degré des approximations polynomiales.

Dans ce travail de thèse, on a développé une méthode alternative, qui consiste a borner certains des constituants de la fonction non-linéaire par des suprema de formes quadratiques dont les Hessiens sont judicieusement choisis. On reprend donc ici l'idée des approximations "max-plus" initialement introduites en contrôle optimal, en s'appuyant sur des techniques d'interprétation abstraite (généralisation non-linéaire de la méthode des gabarits de Manna et al.). Ainsi, on obtient une nouvelle technique d'optimisation globale, basée sur les gabarits, qui exploite à la fois la precision des sommes de carrés et la capacité de passage à l'échelle des méthodes d'abstraction.

L'implémentation de ces méthodes d'approximation a abouti à un outil logiciel : `NLCertify`. Cet outil génère des certificats à partir d'approximations semi-algébriques et de sommes de carrés. Son interface avec Coq permet de bénéficier de l'arithmétique certifiée disponible dans l'assistant de preuves, et ainsi d'obtenir des estimateurs et des bornes valides pour chaque approximation.

Les performances de cet outil de certification ont été démontrées sur divers problèmes d'optimisation globale ainsi que sur des inégalités essentiellement serrées qui interviennent dans la preuve de Hales (projet Flyspeck).

Ce travail est exposé dans [73], [74] et [18], [19].

English version

The PhD work of Victor Magron [153], supervised by Benjamin Werner, and cosupervised by Stéphane Gaubert and Xavier Allamigeon, dealt with the certification of lower bounds for multivariate functions, defined by semi-algebraic or transcendental expressions, and their correctness proof through certificates checked in the Coq proof assistant.

Many inequalities of this kind appear in particular in the proof by Thomas Hales of Kepler's conjecture. Here is a typical example of inequality.

LEMMA 9922699028 FLYSPECK. *Let K, $\Delta\mathbf{x}$, l, t and f be defined as follows:*

$$\begin{aligned}
K &:= [4, 6.3504]^3 \times [6.3504, 8] \times [4, 6.3504]^2 \ , \\
\Delta\mathbf{x} &:= x_1x_4(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad + x_2x_5(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6) \\
&\quad + x_3x_6(x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6) \\
&\quad - x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5 - x_1x_2x_6 - x_4x_5x_6 \ , \\
l(\mathbf{x}) &:= -\pi/2 + 1.6294 - 0.2213(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_5} + \sqrt{x_6} - 8.0) \\
&\quad + 0.913(\sqrt{x_4} - 2.52) + 0.728(\sqrt{x_1} - 2.0) \ , \\
t(\mathbf{x}) &:= \arctan \frac{\partial_4 \Delta\mathbf{x}}{\sqrt{4x_1\Delta\mathbf{x}}} \ , \\
f(\mathbf{x}) &:= l(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x}) \ .
\end{aligned}$$

Then, $\forall \mathbf{x} \in K, f(\mathbf{x}) \geq 0$.

Thus, we considered non-linear functions, defined in terms of semi-algebraic operations and univariate transcendental functions ($\cos$, $\arctan$, $\exp$, etc).

Such transcendental functions can be classically approximated by polynomials, which leads to semi-algebraic optimization problems, which can be solved by sparse sum of squares techniques leading to SDP formulations. However, in practice, this approach is limited by the growth of the size of the SDP instances to be solved, whichs grows quickly with the degree of polynomial approximations.

In this PhD, we developed an alternative method, which consists in bounding some constituents of the non-linear function to be optimized by suprema of quadratic forms with well chosen Hessians. This is based on the idea of "maxplus approximation" initially introduced in optimal control, and also, on abstract interpretation (the template method introduced by Manna et al. in static analysis). In this way, we end up with a new global optimization technique, which takes advantage of the precision of sum of squares and of the scalability of abstraction methods.

These methods have been implemented in a software tool: `NLCertify`. This tool generates certificates from semi-algebraic and sum of square certificates. Its interface with Coq allows one to take benefit of the certified arithmetics available in this proof assistant, and so, to obtain estimators and valid bounds for each approximation.

The performances of this certification tool have been shown on several global optimization problems from the literature, as well as on essentially tight inequalities taken from Hales' proof (Flyspeck project).

This work is presented in [73], [74] and [18], [19].

6.6.4. *Vérification de systèmes temps-réels/Verification of real-time systems*

Participants: Xavier Allamigeon, Uli Fahrenberg [IRISA], Stéphane Gaubert, Ricardo Katz [Conicet], Axel Legay [IRISA].

Dans [152], Lu, Madsen, Milata, Ravn, Fahrenberg et Larsen ont montré que les polyèdres tropicaux peuvent être utilisés dans le cadre de l'analyse d'accessibilité d'automates temporisés. En effet, les polyèdres tropicaux expriment naturellement des invariants non-convexes, qui sont en fait des disjonctions d'invariants fournis par des DBM (*difference bound matrices*). A ce titre, les polyèdres tropicaux devraient permettre de réduire le nombre de disjonctions réalisées pendant l'analyse d'automates temporisés. Une limitation importante de cette approche est cependant que les polyèdres tropicaux sont topologiquement fermés, et qu'ils ne peuvent donc pas exprimer de contraintes d'inégalités strictes. Ces dernières sont néanmoins fondamentales dans l'analyse de systèmes temps-réels.

Nous avons donc développé dans [69] une généralisation des polyèdres tropicaux permettant d'exprimer des contraintes mixtes, *i.e.* strictes ou larges. Notre approche repose sur l'utilisation d'inégalités tropicales linéaires à coefficients dans un (quotient du) semi-anneau de germes affines. Afin de réaliser des opérations sur cette nouvelle classe de polyèdres tropicaux, nous avons défini deux nouveaux algorithmes. Le premier est un analogue tropical de l'élimination de Fourier-Motzkin. Celle-ci s'applique plus généralement à des systèmes d'inégalités linéaires sur des semi-anneaux idempotents et totalement ordonnés. Le second algorithme permet de tester si un système de contraintes mixtes admet une solution. Nous montrons en effet que ce problème est équivalent en temps polynomial à la résolution d'un problème de jeux déterministes à somme nulle. Ces deux contributions nous permettent de définir les primitives requises pour l'analyse d'accessibilité d'automates temporisés.

English version

Lu, Madsen, Milata, Ravn, Fahrenberg and Larsen have shown in [152] that tropical polyhedra can be applied to the reachability analysis of timed automata. Indeed, tropical polyhedra naturally express non-convex invariants, which correspond to disjunctions of invariants provided by DBM (*difference bound matrices*). Consequently, tropical polyhedra should allow to reduce the number of disjunctions arising during the analysis of timed automata. An important limitation of this approach is that tropical polyhedra are topologically closed, and thus they cannot express strict inequality constraints. However, such constraints plays an important role in the analysis of real-time systems.

As a result, we have developed in [69] a generalization of tropical polyhedra, in order to express mixed constraints, *i.e.* strict or loose ones. Our approach relies on tropical linear inequalities with coefficients in a (quotient of) the semiring of affine germs. In order to perform operations on this new class of polyhedra, we have introduced two new algorithms. The first one is a tropical analog of Fourier-Moztkin elimination. In fact, it applies more generally to systems of linear inequalities over totally ordered and idempotent semirings. The second algorithm allows to test the feasability of a mixed constraint system. We indeed show that this problem is polynomial-time equivalent to solving mean payoff games. These two contributions allow to define the primitives required by the reachability analysis of timed automata.

6.6.5. Géométrie de l'ordre de Loewner et application au calcul d'invariants quadratiques en analyse statique de programme/Geometry of the Loewner order and appliction to the synthesis of quadratic invariants in static analysis of program

Participants: Xavier Allamigeon, Stéphane Gaubert, Éric Goubault [LIX], Sylvie Putot [LIX], Nikolas Stott.

Le stage de recherche de l'École des Mines de Nikolas Stott a porté sur la caractérisation de l'ensemble des majorants minimaux de deux matrices symmétriques, relativement à l'ordre de Loewner, et sur l'application de cette caractérisation à la synthèse d'invariants quadratiques en analyse statique de programme.

English version

The research internship of "École des Mines" made by Nikolas Stott dealt with the characterization of the set of minimal upper bounds of two matrices with respect to Loewner order, motivated by the generation of quadratic invariants in static analysis of programs.

6.6.6. Optimisation de l'affectation temps réel des moyens de secours des pompiers/Optimization of the real time assignment of firemen vehicles

Participants: Marianne Akian, Xavier Allamigeon, Vianney Boeuf, Stéphane Gaubert, Stéphane Raclot [BSPP].

La thèse de Vianney Boeuf, qui a démarré en Septembre, est effectuée en partenariat avec la Brigade des Sapeurs Pompiers de Paris (BSPP). Elle est motivée par l'optimisation des moyens de secours, en incluant les questions de dimensionnement et d'affectation temps réel des moyens. On s'intéresse en particulier à l'affectation des engins et véhicules de secours, éventuellement empruntés à différentes casernes. Ce travail intervient en complément du travail de l'équipe au sein du projet ANR Democrite, qui porte sur l'évaluation du risque en milieu urbain.

English version

The PhD work of Vianney Boeuf started in September. It is carried out with the Brigade of Paris Firemen (BSPP). It is motivated by the issue of optimization of emergency resources, including the real time dynamic assignment of engines or emergency vehicles. This work is carried out in complement to the ANR project Democrite, dealing with risk evaluation in urban environment.

7. Bilateral Contracts and Grants with Industry

7.1. Contrats avec l'Industrie/Bilateral Contracts with Industry

- Modélisation et Résolution des problèmes de très grande taille dans les applications du yield management au réseau des télécommunications mobiles: CRE avec Orange Labs (responsable du suivi Orange Labs: Mustapha Bouhtou), signé en août 2013.

8. Partnerships and Cooperations

8.1. Actions nationales/National Initiatives

8.1.1. ANR

- Participation de Cormac Walsh au projet ANR FINSLER (Géométrie de Finsler et applications).
- Projet ANR CAFEIN (Combinaison d'approches formelles pour l'étude d'invariants numériques), responsable P.L. Garoche. Partenaires : ONERA, CEA LIST, ENSTA Paristech, Inria Saclay (Maxplus, Toccata, Parkas), Université de Perpignan, Prover, Rockwell Collins France.
- Projet ANR MALTHY (Méthodes ALgébriques pour la vérification de modèles Temporisés et HYbrides), responsable T. Dang. Partenaires : Verimag, CEA LIST, Inria Rennes, Inria Saclay, VISEO/Object Direct.
- Projet ANR DEMOCRITE ("DEmonstrateur d'un MOteur de Couverture des Risques sur un TErritoire), responsable Emmanuel Lapébie (CEA). Partenaires : CEA-GRAMAT, BSPP, Inria Saclay (Maxplus), Institut PPRIME - UPR3346 (CNRS, Univ. Poitiers, ISAE-ENSMA), IPSIS, SYSTEL, ARMINES-E.M. Alès-ISR, CERDACC (Univ. de Haute-Alsace).

8.1.2. Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation

- Projet intitulé “Méthodes tropicales pour l'optimisation”, responsable X. Allamigeon, faisant intervenir M. Akian, P. Benchimol, S. Gaubert, R. Katz, et Z. Qu.
- Participation de Marianne Akian et Stéphane Gaubert au projet “STORY: Stochastic and Robust Optimization Network and Teaching”, responsables: Laurent El Ghaoui (UC Berkeley) et Michel De Lara(CERMICS).

8.1.3. iCODE (Institut pour le Contrôle et la Décision de l'Idex Paris-Saclay)

Projet “blanc” intitulé “Stabilité et stabilisation des systèmes commutés” (Oct. 2014-fin 2015), faisant intervenir M. Akian, X. Allamigeon, S. Gaubert, et des membres de EPI Geco, L2S, LIX, LSV (ENS Cachan), UVSQ.

8.2. Actions internationales/International Initiatives

8.2.1. Inria International Partners

8.2.1.1. Informal International Partners

Collaborations régulières dans le cadre des programmes internationaux ci-dessous, ainsi qu'avec:

- Ricardo Katz (Conicet et Cifasis, Argentine);
- Alexander Guterman (Moscow State University);
- Françoise Tisseur (Université de Manchester) qui participe à l'encadrement de la thèse d'Andrea Marchesini.

8.2.2. Participation In other International Programs

- La thèse de Pascal Benchimol est financée par une bourse Monge/DGA prévoyant des visites régulières du doctorant dans l'équipe de Michael Joswig (TU Berlin).

8.3. Accueils de chercheurs étrangers/International Research Visitors

8.3.1. Chercheurs étrangers/Visits of International Scientists

- Ricardo Katz (Conicet, Rosario, Argentine), 2 mois entre Septembre et Novembre, financé par Digitéo et PGMO.
- Alexander Guterman (Université d'état de Moscou), 3 jours en Mars, 5 jours en Septembre.
- Visites d'un jour de Francisco Santos, Thorsten Theobald et Michael Joswig (autour de la thèse de Pascal Benchimol).
- Visite de Thomas Hansen, une semaine, Octobre 2014.

8.3.2. Séjours à l'étranger/Visits to International Teams

8.3.2.1. Research stays abroad

- A. Marchesini, visite à l'Université de Manchester, 22-25 avril 2014 et participation a NEP14.
- X. Allamigeon, visite à TU Berlin, 28–30 Avril 2014.
- S. Gaubert, visite à TU Berlin, 28–30 Avril 2014.
- S. Gaubert, visite au CIFASIS, Rosario, Argentina, 8-15 Juin 2014.

9. Dissemination

9.1. Animation de la communauté scientifique/Promoting Scientific Activities

9.1.1. Scientific events organisation

9.1.1.1. Member of the organizing committee

- X. Allamigeon: co-organisateur avec F. Meunier (ENPC, CERMICS) de sessions invitées "Complexity of Linear Programming and Games" à la conférence "Conference on Optimization & Practices in Industry" du Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation, Palaiseau, Octobre 2014.
- X. Allamigeon, co-organisateur des journées du Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation, jointes avec la conférence COPI, Palaiseau, Octobre 2014.
- M. Akian, organisatrice de la session " Max-plus methods for optimal control and zero-sum games", à la "53rd IEEE Conference on Decision and Control", Los Angeles, USA, Dec. 2014.
- S. Gaubert, co-organisateur des journées annuelles du Programme Gaspard Monge d'Optimisation (PGMO), associées à la "Conference on Optimization & Practices in Industry" (COPI), Palaiseau, Octobre 2014, http://www.fondation-hadamard.fr/fr/pgmo-copi-14.
- S. Gaubert, co-organisateur du Séminaire Parisien d'Optimisation.
- S. Gaubert, co-organisateur (avec William McEneaney, San Diego) de deux sessions "Max-Plus Methods in Optimal Control and Game Theory" au "21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems" (MTNS 2014), Groningen, Pays-Bas, Juillet 2014.

9.1.2. Scientific events selection

9.1.2.1. Member of the conference program committee

- S. Gaubert, membre du comité scientifique de "Conference on Optimization & Practices in Industry" (COPI), Palaiseau, Octobre 2014.
- S. Gaubert, membre du comité scientifique de SIAM CT'15 qui se tiendra à Paris en Juillet 2015.

9.1.3. Journal

9.1.3.1. Member of the editorial board

- S. Gaubert est membre du comité éditorial de la collection Mathématiques et Applications, SMAI et Springer.
- S. Gaubert est membre du comité éditorial du journal RAIRO Operations research.

9.1.4. Other

- M. Akian :
  - Membre élue du conseil du laboratoire du CMAP.
- S. Gaubert :
  - Directeur du PGMO (Programme Gaspard Monge d'optimisation, programme de mécénat d'EDF administré par la FMJH).

  - Vice-président du comité des projets du Centre de Recherche Inria de Saclay – Île-de-France depuis Janvier 2008, et membre nommé de la commission d'évaluation de l'Inria.
  - Membre du conseil scientifique du CMAP.
  - Membre du CNU en 26ième section.

9.2. Enseignement - Encadrement - Jurys /Teaching - Supervision - Juries

9.2.1. Enseignement/Teaching

- X. Allamigeon
  - Petites classes et encadrement d'enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (programme d'approndissement de Mathématiques Appliquées) (niveau M1).
- S. Gaubert
  - Cours "Systèmes à Événements Discrets", option MAREVA, ENSMP.
  - Cours "Algèbre max-plus pour le contrôle optimal et les jeux" du Parcours Optimisation et Théorie des Jeux - Modélisation en Économie (OJME) du M2 Mathématiques et Applications de l'Université de Paris 6 et de l'École Polytechnique.
  - Cours magistral, petites classes et organisation des enseignements d'approfondissement de Recherche Opérationnelle en troisième année à l'École Polytechnique (programme d'approndissement de Mathématiques Appliquées), avec polycopié [85].
- A. Hochart
  - Cours niveau L1 à l'Univ. Paris Diderot (Paris VII), 18h, dans le cadre d'un monitorat.

9.2.2. Encadrement/Supervision

- PhD : Pascal Benchimol, inscrit à l'École Polytechnique à partir de septembre 2011, directeur de thèse: S. Gaubert, coencadrement: X. Allamigeon, avec une participation à l'encadrement de M. Joswig (TU Berlin) dans le cadre du programme bourse Monge (bourses données pour des doctorants avec un partenaire étranger), soutenue le 2 décembre 2014.
- PhD in progress : Andrea Marchesini, inscrit à l'École Polytechnique, depuis septembre 2012, directeur de thèse: Marianne Akian, codirection: S. Gaubert, avec une participation à l'encadrement de Françoise Tisseur (U. Manchester).
- PhD in progress : Antoine Hochart, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2013, directeur de thèse: Stéphane Gaubert, codirection: Marianne Akian.
- PhD in progress : Eric Fodjo, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2013, directeur de thèse: Marianne Akian.
- PhD in progress : Nikolas Stott, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2014, directeur de thèse: Stéphane Gaubert, codirection: Xavier Allamigeon et Éric Goubault.
- PhD in progress : Vianney Boeuf, inscrit à l'École Polytechnique, depuis octobre 2014, directeur de thèse: Stéphane Gaubert, codirection: Stéphane Raclot (BSPP), Marianne Akian, Xavier Allamigeon.
- M2 internship: Nikolas Stott, Mines Paristech, option MAREVA, avril–juillet 2014. Sujet : "Invariants semi-algébriques pour la vérification". Directeurs: Stéphane Gaubert, codirection: Xavier Allamigeon et Éric Goubault.
- Enseignement d'approndissement de l'École Polytechnique (élèves de troisième année) d'Alexandre Hannebelle, Armelle Patault, Pierre-Yves Queault et Jean-Nicolas Roussel, cosupervisé avec le Cdt Stéphane Raclot (BSPP), Régis Reboul (Préfecture de Police) et Philippe Robert (projet Inria RAP), avec le concours de Marianne Akian, Xavier Allamigeon, et Vianney Boeuf. Étude préliminaire d'évaluation de performance de l'évolution projetée de la chaîne de réponse aux appels d'urgence.

9.2.3. Jurys/Committees

- X. Allamigeon
  - Examinateur dans le jury de soutenance de thèse de Pascal Benchimol (Décembre 2014).
- S. Gaubert
  - Membre de la commission de recrutement en informatique à l'École Polytechnique.
  - Membre du jury de concours Inria CR2 de l'Inria Rhône-Alpes.
  - Membre du jury de concours Inria CR2 de l'Inria Saclay – Île-de-France.
  - Jury de thèse de Thomas Nowak (président), École Polytechnique, 5 Septembre 2014.
  - Jury de thèse de Pablo Maldonado, UPMC, 4 Novembre 2014.
  - Jury de thèse de Vinicus Mariano Goncalvez, Mina Gerais, Rapporteur, 28 Novembre 2014.
  - Jury de thèse de Pascal Benchimol, École Polytechnique, 2 Décembre 2014.

9.3. Popularization

J.P. Quadrat : administre le site d'intérêt général http://www.maxplus.org, dédié à l'algèbre max-plus.

9.4. Participation à des colloques, séminaires/Conférences, Seminars

- M. Akian
  - Séminaire Parisien d'Optimisation, IHP, 7 avril 2014. Titre de l'exposé: "Complexité de l'itération sur les politiques pour les jeux à somme nulle".
  - Structured Matrix Days, Limoges, May 2014. Invited talk: "Log-majorization of eigenvalues of matrix polynomials and tropical scaling".
  - Conference on "New trends in optimal control" (NETCO), Tours, June 2014. Titre de l'exposé: "Policy iteration for stochastic zero-sum games".
  - 19th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), August 2014, Seoul. Titre de l'exposé: "Tropical bounds for eigenvalues of matrices using Hungarian dual variables".
  - Conference on Optimization & Practices in Industry, session invitée "Complexity of Linear Programming and Games", Palaiseau, Octobre 2014. Titre de l'exposé: "Complexity of policy iteration for stochastic zero-sum games".
  - 53nd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, décembre 2014, session invitée "Max-plus methods for optimal control and zero-sum games". Titre de l'exposé: "Generic uniqueness of the bias vector of mean payoff zero-sum games".
- X. Allamigeon
  - Séminaire donné dans le cadre du Research Training Group "Methods for Discrete Structures", TU Berlin, Avril 2014. Titre de l'exposé : "Tropicalizing semialgebraic pivoting rules".
  - Séminaire SIESTE, ENS Lyon, Mai 2014. Titre de l'exposé : "Relations entre la complexité de la programmation linéaire et celle des jeux à paiement moyen".
  - 41st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP), Copenhagen, Juillet 2014. Titre de l'exposé : "The Tropical Shadow-Vertex Algorithm Solves Mean Payoff Games in Polynomial Time On Average".
  - Conférence "Recent Advances in Linear Optimization", Paris, Juillet 2014. Titre de l'exposé : "The Tropical Shadow-Vertex Algorithm Solves Mean Payoff Games in Polynomial Time On Average".

- Conference on Optimization & Practices in Industry, session invitée “Complexity of Linear Programming and Games”, Palaiseau, Octobre 2014. Titre de l’exposé : “The Tropical Shadow-Vertex Algorithm Solves Mean Payoff Games in Polynomial Time On Average”.

- P. Benchimol
  - Séminaire au laboratoire CERMICS (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées), Champs sur Marne, France, Février 2014. Titre de l’exposé : “La méthode du simplexe tropical”.
  - ROADEF - 15ème congrès annuel de la Société française de recherche opérationnelle et d’aide à la décision, Bordeaux, Février 2014. Titre de l’exposé : “La méthode du simplexe tropical”.
  - 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014), Groningen, Pays-Bas, Juillet 2014, session invitée “Max-Plus Methods in Optimal Control and Game Theory”. Titre de l’exposé : “Combinatorial Simplex Algorithms Can Solve Mean Payoff Games”.
  - 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS 2014), Barcelone, Espagne, Juillet 2014. Titre de l’exposé : “Combinatorial Simplex Algorithms Can Solve Mean Payoff Games”.
  - Conférence “Recent Advances in Linear Optimization”, Paris, Juillet 2014. Titre de l’exposé : “Long and winding central paths”.
  - Conference on Optimization & Practices in Industry, session invitée “Complexity of Linear Programming and Games”, Palaiseau, Octobre 2014. Titre de l’exposé : “Long and winding central paths”.
- S. Gaubert
  - Séminaire Université de Metz, Département de Matheématiques, Janvier 2014: “Tropical convexity applied to dynamic programming: a guided tour”.
  - Séminaire ENS Ulm, Département d’informatique, Janvier 2014: “De la convexité tropicale aux jeux répétés”.
  - Séminaire donné dans le cadre du Research Training Group “Methods for Discrete Structures”, TU Berlin, Avril 2014. Titre de l’exposé : “Non-linear Perron-Frobenius theory applied to zero-sum games”.
  - Séminaire au département de Mathématiques de Chambery, Mai 2015: “The central path can be tortuous”.
  - Séminaire au CIFASIS, Rosario, Argentina, June 2015: “The central path can be tortuous”.
  - Workshop Mathematical Aspects of Game Theory and Applications (MAGTA 2014), Roscoff, June 2014. Titre de l’exposé : “Solving mean payoff games by tropical linear programming”.
  - MTNS conference, Groningen, July 2013, session invitée “Max-Plus Methods in Optimal Control and Game Theory”: “Bundle-based pruning in the max-plus curse of dimensionality free method”.
  - ILAS conference (Satellite of ICM), Seoul, August 2014. Invited plenary talk: “From tropical linear algebra to zero-sum games”.
  - Séminaire SIESTE, ENS Lyon, Décembre 2014, “Non-linear Perron-Frobenius theory applied to zero-sum games”.
  - 53nd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, décembre 2014, session invitée “Max-plus methods for optimal control and zero-sum games”. Titre de l’exposé: “Non-linear eigenvalue problems arising from growth maximization of positive linear dynamical systems”.
- A. Hochart

- Conference MODE 2014 (Mathématiques de l'Optimisation et de la décision), Rennes, , Mars 2014. Titre de l'exposé : "Points fixes d'opérateur de Shapley sans paiement et propriétés structurelles des jeux à paiement moyen".
- Conference on "New trends in optimal control" (NETCO), Tours, June 2014. Poster: "Fixed point of payment-free Shapley operators and structural properties of mean payoff games".
- Workshop Mathematical Aspects of Game Theory and Applications (MAGTA 2014), Roscoff, June 2014. Poster: "Fixed point of payment-free Shapley operators and structural properties of mean payoff games".
- MTNS conference, Groningen, July 2013, session invitée "Max-Plus Methods in Optimal Control and Game Theory": "Fixed Point Sets of Payment-Free Shapley Operators and Structural Properties of Mean Payoff Games".
- Conference on Optimization & Practices in Industry, Palaiseau, Octobre 2014. Titre de l'exposé : "Generic uniqueness of the bias vector of mean-payoff zero-sum games".

- A. Marchesini
  - 19th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), August 2014, Seoul. Titre de l'exposé: "Asymptotic eigenvalue problems".
  - Séminaire des doctorants (CMAP), 12 décembre 2014. Titre de l'exposé: "Valeurs propres tropicales".
- C. Walsh
  - Séminaire, Titre de l'exposé: "The Tropical Martin boundary", 16 avril 2014, Séminaire de Géométrie Tropicale, Ecole Polytechnique.
  - Conférence, Titre de l'exposé: "Hilbert isometries", 16–20 juin 2014, Géométrie et dynamiques des espaces de Finsler, CIRM, Marseille.

10. Bibliography

Major publications by the team in recent years

[1] M. AKIAN. *Densities of idempotent measures and large deviations*, in "Transactions of the American Mathematical Society", 1999, vol. 351, n^{o} 11, pp. 4515–4543

[2] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Max-plus algebras*, in "Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications)", L. HOGBEN (editor), Chapman & Hall/CRC, 2006, vol. 39, Chapter 25

[3] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Spectral Theorem for Convex Monotone Homogeneous Maps, and ergodic Control*, in "Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications", 2003, vol. 52, n^{o} 2, pp. 637-679, http://hal.inria.fr/inria-00000201/en/

[4] M. AKIAN, S. GAUBERT, B. LEMMENS, R. NUSSBAUM. *Iteration of order preserving subhomogeneous maps on a cone*, in "Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.", 2006, vol. 140, n^{o} 1, pp. 157–176, http://www.arxiv.org/abs/math.DS/0410084

[5] M. AKIAN, A. SULEM, M. TAKSAR. *Dynamic optimisation of long term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, in "Mathematical Finance", 2001, vol. 11, n^{o} 2, pp. 153–188

[6] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER, J.-P. QUADRAT. *Synchronisation and Linearity*, Wiley, 1992

[7] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *A constructive fixed point theorem for min-max functions*, in "Dynamics and Stability of Systems", 1999, vol. 14, n^o 4

[8] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Duality and Separation Theorems in Idempotent Semimodules*, in "Linear Algebra and Appl.", 2004, vol. 379, pp. 395–422, http://arxiv.org/abs/math.FA/0212294

[9] G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT. *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now*, in "Annual Reviews in Control", 1999, vol. 23, pp. 207–219

[10] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Perron-Frobenius Theorem for Homogeneous, Monotone Functions*, in "Trans. of AMS", 2004, vol. 356, n^o 12, pp. 4931-4950, http://www.ams.org/tran/2004-356-12/S0002-9947-04-03470-1/home.html

Publications of the year

Articles in International Peer-Reviewed Journals

[11] A. ADJÉ, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the smallest fixed point of order-preserving nonexpansive mappings arising in positive stochastic games and static analysis of programs*, in "Journal of Mathematical Analysis and applications", February 2014, vol. 410, n^o 1, pp. 227-240, Also arXiv:0806.1160 [*DOI :* 10.1016/J.JMAA.2013.07.076], https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00940804

[12] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. MARCHESINI. *Tropical bounds for eigenvalues of matrices*, in "Linear Algebra and its Applications", April 2014, vol. 446, pp. 281–303, See also arXiv:1309.7319 [*DOI :* 10.1016/J.LAA.2013.12.021], https://hal.inria.fr/hal-00881205

[13] X. ALLAMIGEON, A. LEGAY, U. FAHRENBERG, R. KATZ, S. GAUBERT. *Tropical Fourier–Motzkin elimination, with an application to real-time verification*, in "International Journal of Algebra and Computation (IJAC)", 2014, vol. 24, n^o 5, pp. 569 - 607 [*DOI :* 10.1142/S0218196714500258], https://hal.inria.fr/hal-01087367

[14] F. BILLY, J. CLAIRAMBAULT, O. FERCOQ, S. GAUBERT, T. LEPOUTRE, T. OUILLON, S. SAITO. *Synchronisation and control of proliferation in cycling cell population models with age structure*, in "Mathematics and Computers in Simulation", February 2014, vol. 96, pp. 66-94 [*DOI :* 10.1016/J.MATCOM.2012.03.005], https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00662885

[15] J. BOLTE, S. GAUBERT, G. VIGERAL. *Definable Zero-Sum Stochastic Games*, in "Mathematics of Operations Research", 2014, pp. 1-29, Published online [*DOI :* 10.1287/MOOR.2014.0666], https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00777707

[16] S. GAUBERT, Z. QU. *The contraction rate in Thompson part metric of order-preserving flows on a cone - application to generalized Riccati equations*, in "Journal of Differential Equations", April 2014, vol. 256, n^o 8, pp. 2902-2948, Also arXiv:1206.0448 [*DOI :* 10.1016/J.JDE.2014.01.024], https://hal.inria.fr/hal-00783972

[17] S. GAUBERT, Z. QU. *Dobrushin ergodicity coefficient for Markov operators on cones*, in "Integral Equations and Operator Theory", January 2015, vol. 1, n^o 81, pp. 127-150, Also arXiv:1307.4649 [*DOI :* 10.1007/S00020-014-2193-2], https://hal.inria.fr/hal-01099179

[18] V. MAGRON, X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, B. WERNER. *Certification of real inequalities: templates and sums of squares*, in "Mathematical Programming B", November 2014, 30 p. , Also arXiv:1403.5899 [*DOI :* 10.1007/S10107-014-0834-5], https://hal.inria.fr/hal-01096485

[19] V. MAGRON, X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, B. WERNER. *Formal Proofs for Nonlinear Optimization*, in "Journal of Formalized Reasoning", January 2015, vol. 8, n^{o} 15, pp. 1-24, Also ArXiv:1404.7282, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00985675

[20] P. PONCET. *Convexities on ordered structures have their Krein–Milman theorem*, in "Journal of Convex Analysis", 2014, vol. 21, n^{o} 1, pp. 89–120, See also arXiv:1301.0760, https://hal.inria.fr/hal-00922374

[21] P. PONCET. *The idempotent Radon–Nikodym theorem has a converse statement*, in "Information Sciences", July 2014, n^{o} 271, pp. 115–124, See also arXiv:1301.0140 [*DOI :* 10.1016/J.INS.2014.02.074], https://hal.inria.fr/hal-00922377

[22] Z. QU. *Contraction of Riccati flows applied to the convergence analysis of a max-plus curse of dimensionality free method*, in "SIAM Journal on Control and Optimization", September 2014, vol. 52, n^{o} 5, pp. 2677-2709, Also arXiv:1301.4777 [*DOI :* 10.1137/130906702], https://hal.inria.fr/hal-01112251

Invited Conferences

[23] M. AKIAN. *Log-majorization of eigenvalues of matrix polynomials and tropical scaling*, in "Structured Matrix Days", Limoges, France, May 2014, https://hal.inria.fr/hal-01104386

[24] S. GAUBERT. *From tropical linear algebra to zero-sum games*, in "The 19th International Linear Algebra Society Conference", Seoul, South Korea, August 2014, Invited Plenary Talk, https://hal.inria.fr/hal-01112709

International Conferences with Proceedings

[25] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Generic uniqueness of the bias vector of mean payoff zero-sum games*, in "53rd IEEE Conference on Decision and Control", Los Angeles, United States, December 2014, See also arXiv:1411.1211, https://hal.inria.fr/hal-01095930

[26] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT. *The tropical shadow-vertex algorithm solves mean payoff games in polynomial time on average*, in "ICALP 2014", Copenhagen, France, J. ESPARZA, P. FRAIGNIAUD, T. HUSFELDT, E. KOUTSOUPIAS (editors), 41st International Colloquium, ICALP 2014, Copenhagen, Denmark, July 8-11, 2014, Proceedings, Part I, Springer, July 2014, vol. 8572, 12 p. [*DOI :* 10.1007/978-3-662-43948-7_8], https://hal.inria.fr/hal-01096447

[27] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *La méthode du simplexe tropical*, in "ROADEF - 15ème congrès annuel de la Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision", Bordeaux, France, Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision (ROADEF), February 2014, arxiv 1308.0454, https://hal.inria.fr/hal-01097726

[28] V. CALVEZ, P. GABRIEL, S. GAUBERT. *Non-linear eigenvalue problems arising from growth maximization of positive linear dynamical systems*, in "IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC 2014)", Los Angeles, United States, December 2014, pp. 1600–1607, Also arXiv:1404.1868, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00974749

[29] S. GAUBERT, Z. QU, S. SRIDHARAN. *Bundle-based pruning in the max-plus curse of dimensionality free method*, in "Proceedings of the 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems", Groningen, Netherlands, July 2014, See also arXiv:1402.1436, https://hal.inria.fr/hal-01099175

[30] Z. QU. *A max-plus based randomized algorithm for solving a class of HJB PDEs*, in "53rd IEEE Conference on Decision and Control", Los Angeles, United States, Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, December 2014, pp. 1575–1580, https://hal.inria.fr/hal-01112264

Conferences without Proceedings

[31] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Complexity of policy iteration for stochastic zero-sum games*, in "PGMO-COPI'14", Paris-Saclay, France, October 2014, https://hal.inria.fr/hal-01104409

[32] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Policy iteration for stochastic zero-sum games*, in "NETCO", Tours, France, June 2014, https://hal.inria.fr/hal-01104405

[33] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Fixed Point Sets of Payment-Free Shapley Operators and Structural Properties of Mean Payoff Games*, in "MTNS 2014", Groningen, Netherlands, July 2014, https://hal.inria.fr/hal-01112278

[34] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Generic uniqueness of the bias vector of mean-payoff zero-sum games*, in "PGMO-COPI'14", Palaiseau, France, October 2014, https://hal.inria.fr/hal-01112285

[35] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Points fixes d'opérateur de Shapley sans paiement et propriétés structurelles des jeux à paiement moyen*, in "MODE 2014", Rennes, France, March 2014, https://hal.inria.fr/hal-01112301

[36] M. AKIAN, S. GAUBERT, J. HOOK, A. MARCHESINI, F. TISSEUR. *Asymptotic eigenvalue problems*, in "ILAS", Seoul, South Korea, August 2014, https://hal.inria.fr/hal-01112260

[37] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. MARCHESINI. *Tropical bounds for eigenvalues of matrices using Hungarian dual variables*, in "ILAS", Seoul, South Korea, August 2014, https://hal.inria.fr/hal-01104401

[38] M. AKIAN, P. PONCET. *Krein–Milman's and Choquet's theorems in the max-plus world*, in "Domains XI (International workshop on domain theory and applications)", PARIS, France, September 2014, https://hal.inria.fr/hal-01112248

[39] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Combinatorial Simplex Algorithms Can Solve Mean Payoff Games*, in "The 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014)", Groningen, Netherlands, July 2014, https://hal.inria.fr/hal-01097727

[40] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Combinatorial simplex algorithms can solve mean payoff games*, in "20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies", Barcelone, Spain, July 2014, https://hal.inria.fr/hal-01097728

[41] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Long and winding central paths*, in "Recent Advances in Linear Optimization", Champs sur marne, France, July 2014, https://hal.inria.fr/hal-01097729

Scientific Books (or Scientific Book chapters)

[42] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical Cramer Determinants Revisited*, in "Tropical and Idempotent Mathematics and Applications", G. LITVINOV, S. SERGEEV (editors), Contemporary Mathematics, AMS, 2014, vol. 616, 45 p. , See also arXiv:1309.6298, https://hal.inria.fr/hal-00881203

[43] C. WALSH. *The horoboundary and isometry group of Thurston's Lipschitz metric*, in "Handbook of Teichmüller Theory, Volume IV", A. PAPADOPOULOS (editor), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Mathematical Society, May 2014, vol. 19, 838 p. , https://hal.inria.fr/hal-01098838

[44] C. WALSH. *The horofunction boundary and isometry group of the Hilbert geometry*, in "Handbook of Hilbert Geometry", A. PAPADOPOULOS, M. TROYANOV (editors), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, European Mathematical Society, 2014, vol. 22, https://hal.inria.fr/hal-00782827

Scientific Popularization

[45] M. AKIAN. *Policy iteration for stochastic zero-sum games*, 2014, NETCO 2014, Parallel session/ slides, https://hal.inria.fr/hal-01024097

Other Publications

[46] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Ergodicity conditions for zero-sum games*, May 2014, Preprint arXiv: 1405.4658, 30 pages, https://hal.inria.fr/hal-01096206

[47] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Fixed point of payment-free Shapley operators and structural properties of mean payoff games*, June 2014, NETCO 2014, Poster, https://hal.inria.fr/hal-01112271

[48] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. HOCHART. *Fixed point of payment-free Shapley operators and structural properties of mean payoff games*, June 2014, Mathematical Aspects of Game Theory and Applications (MAGTA 2014), Poster, https://hal.inria.fr/hal-01112660

[49] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Combinatorial simplex algorithms can solve mean payoff games*, 2014, Preprint arXiv:1309.5925, 15 pages, 3 figures. To appear in SIAM Journal on Optimization, https://hal.inria.fr/hal-00930915

[50] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Long and winding central paths*, May 2014, Preprint arXiv:1405.4161, https://hal.inria.fr/hal-01096452

[51] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Tropicalizing the simplex algorithm*, 2014, Preprint arXiv:1308.0454, 35 pages, 7 figures, 4 algorithms. To appear in SIAM Journal on Discrete Mathematics, https://hal.inria.fr/hal-00930913

[52] X. ALLAMIGEON, R. D. KATZ. *Tropicalization of facets of polytopes*, August 2014, Preprint arXiv:1408.6176, https://hal.inria.fr/hal-01096435

[53] S. GAUBERT, Z. QU. *Checking the strict positivity of Kraus maps is NP-hard*, February 2014, Preprint arXiv:1402.1429, https://hal.inria.fr/hal-01097942

References in notes

[54] A. NEYMAN, S. SORIN (editors). *Stochastic games and applications*, NATO Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic PublishersDordrecht, 2003, vol. 570, x+473 p.

[55] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Perturbation of eigenvalues of matrix pencils and optimal assignment problem*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Série I", 2004, vol. 339, pp. 103–108, http://www.arxiv.org/abs/math.SP/0402438

[56] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskii-Vishik-Ljusternik theorem*, 2005, http://arxiv.org/abs/math.SP/0402090

[57] M. AKIAN, R. BAPAT, S. GAUBERT. *Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector using Max Algebra*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 327, Série I, pp. 927–932, http://hal.inria.fr/inria-00073240

[58] M. AKIAN, S. GAUBERT. *Policy iteration for perfect information stochastic mean payoff games with bounded first return times is strongly polynomial*, 2013, Preprint arXiv:1310.4953, 17 pages, http://hal.inria.fr/hal-00881207

[59] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. GUTERMAN. *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games*, in "Internat. J. Algebra Comput.", 2012, vol. 22, n^{o} 1, 1250001, 43 p. [*DOI :* 10.1142/S0218196711006674], http://arxiv.org/abs/0912.2462

[60] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Set coverings and invertibility of functional Galois connections*, in "Idempotent Mathematics and Mathematical Physics", G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2005, pp. 19-51, http://arxiv.org/abs/math.FA/0403441

[61] M. AKIAN, S. GAUBERT, V. KOLOKOLTSOV. *Solutions of max-plus linear equations and large deviations*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005, http://arxiv.org/abs/math.PR/0509279

[62] M. AKIAN, S. GAUBERT, A. LAKHOUA. *The max-plus finite element method for solving deterministic optimal control problems: basic properties and convergence analysis*, in "SIAM J. Control Optim.", 2008, vol. 47, n^{o} 2, pp. 817–848 [*DOI :* 10.1137/060655286], http://www.arxiv.org/abs/math.OC/0603619

[63] M. AKIAN, S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Log-majorization of the moduli of the eigenvalues of a matrix polynomial by tropical roots*, 2013, Preprint arXiv:1304.2967, 29 pages, 5 figures, http://hal.inria.fr/hal-00881196

[64] M. AKIAN, S. GAUBERT, C. WALSH. *The max-plus Martin boundary*, in "Doc. Math.", 2009, vol. 14, pp. 195–240, http://arxiv.org/abs/math/0412408

[65] M. AKIAN, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Duality between probability and optimization*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998

[66] X. ALLAMIGEON. *On the Complexity of Strongly Connected Components in Directed Hypergraphs*, in "Algorithmica", January 2013, Published on line [*DOI :* 10.1007/s00453-012-9729-0], http://hal.inria.fr/hal-00782846

[67] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Tropicalizing the simplex algorithm*, in "ILAS 2013 - 18th Conference of the International Linear Algebra Society", Providence, RI, United States, June 2013, http://hal.inria.fr/hal-00930959

[68] X. ALLAMIGEON, P. BENCHIMOL, S. GAUBERT, M. JOSWIG. *Tropicalizing the Simplex Algorithm*, in "SMAI 2013 - 6ème biennale des mathématiques appliquées et industrielles", Seignosse, France, May 2013, Poster présentant l'article arXiv:1308.0454, http://hal.inria.fr/hal-00930941

[69] X. ALLAMIGEON, U. FAHRENBERG, S. GAUBERT, R. D. KATZ, A. LEGAY. *Tropical Fourier-Motzkin elimination, with an application to real-time verification*, 2013, Preprint arXiv:1308.2122, http://hal.inria.fr/hal-00935072

[70] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Inferring Min and Max Invariants Using Max-plus Polyhedra*, in "Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)", Springer, 2008, vol. 5079, Valencia, Spain, 16-18 July 2008

[71] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *The tropical double description method*, in "Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2010)", Nancy, France, March 4-6 2010, http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2010/2443/pdf/1001.AllamigeonXavier.2443.pdf

[72] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, E. GOUBAULT. *Computing the Vertices of Tropical Polyhedra using Directed Hypergraphs*, in "Discrete and Computational Geometry", February 2013, vol. 49, n^{o} 2, pp. 247-279 [*DOI :* 10.1007/S00454-012-9469-6], http://hal.inria.fr/hal-00782862

[73] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, V. MAGRON, B. WERNER. *Certification of Bounds of Non-linear Functions: the Templates Method*, in "Conferences on Intelligent Computer Mathematics (CICM 2013)", Bath, United Kingdom, J. CARETTE, D. ASPINALL, C. LANGE, P. SOJKA, W. WINDSTEIGE (editors), Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, July 2013, vol. 7961, pp. 51-65 [*DOI :* 10.1007/978-3-642-39320-4_4], http://hal.inria.fr/hal-00932333

[74] X. ALLAMIGEON, S. GAUBERT, V. MAGRON, B. WERNER. *Certification of inequalities involving transcendental functions: combining SDP and max-plus approximation*, in "European Control Conference (ECC'13)", Zurich, Switzerland, 2013, pp. 2244 - 2250, http://hal.inria.fr/hal-00932348

[75] X. ALLAMIGEON, R. KATZ. *Minimal external representations of tropical polyhedra*, in "Journal of Combinatorial Theory, Series A", 2013, vol. 120, n^{o} 4, pp. 907-940 [*DOI :* 10.1016/J.JCTA.2013.01.011], http://hal.inria.fr/hal-00782837

[76] N. BACAËR. *Perturbations singulières et théorie spectrale min-plus*, Université Paris 6, January 2002

[77] F. BACCELLI, D. HONG. *TCP is max-plus linear and what it tells us on its throughput*, in "Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication", 2000, pp. 219-230

[78] R. BAPAT. *A max version of the Perron-Frobenius theorem*, in "Linear Algebra Appl.", 1998, vol. 275/276, pp. 3–18

[79] R. BAPAT, T. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*, Cambridge university press, 1997, n^{o} 64, XIII+336 p.

[80] R. J. BAYARDO, B. PANDA. *Fast Algorithms for Finding Extremal Sets*, in "Proceedings of the SIAM International Conference on Data Mining, SDM 2011", SIAM, 2011

[81] A. BENVENISTE, S. GAUBERT, C. JARD. *Monotone rational series and max-plus algebraic models of real-time systems*, in "Proc. of the Fourth Workshop on Discrete Event Systems (WODES98)", Cagliari, Italy, IEE, 1998

[82] A. BERENSTEIN, A. N. KIRILLOV. *The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices, and piece-wise linear combinatorics*, in "Proceedings of FPSAC'01", 2001

[83] M. BEZEM, R. NIEUWENHUIS, E. RODRÍGUEZ-CARBONELL. *Exponential behaviour of the Butkovič-Zimmermann algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra*, in "Discrete Appl. Math.", 2008, vol. 156, n^{o} 18, pp. 3506–3509, http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2008.03.016

[84] T. BLYTH, M. JANOWITZ. *Residuation Theory*, Pergamon press, 1972

[85] F. BONNANS, S. GAUBERT. *Recherche opérationnelle: aspects mathématiques et applications*, École Polytechnique, 2012, Huitième édition, 180 pages

[86] H. BRAKER. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Delft University of Technology, Dec 1993

[87] S. BURNS. *Performance analysis and optimization of asynchronous circuits*, Caltech, 1990

[88] P. BUTKOVIČ, K. ZIMMERMANN. *A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra*, in "Discrete Applied Mathematics", March 2006, vol. 154, n^{o} 3, pp. 437–446 [*DOI :* 10.1016/J.DAM.2005.09.008], http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0166218X0500291X

[89] P. BUTKOVIČ. *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?*, in "Linear Algebra and Appl.", 2003, vol. 367, pp. 313-335

[90] Z. CAO, K. KIM, F. ROUSH. *Incline algebra and applications*, Ellis Horwood, 1984

[91] C.-S. CHANG. *Performance guarantees in Communication networks*, Springer, 2000

[92] W. CHOU, R. GRIFFITHS. *Ground states of one dimensional systems using effective potentials*, in "Phys. Rev. B", 1986, vol. 34, pp. 6219–34

[93] P. CHRETIENNE. *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)Paris, 1983

[94] J. COCHET-TERRASSON. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*, École des Mines, Dec. 2001

[95] J. COCHET-TERRASSON, S. GAUBERT. *A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff*, in "C. R. Math. Acad. Sci. Paris", 2006, vol. 343, n^{o} 5, pp. 377–382

[96] J. COCHET-TERRASSON, G. COHEN, S. GAUBERT, M. MC GETTRICK, J.-P. QUADRAT. *Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra*, in "Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control", Nantes, July 1998

[97] G. COHEN, D. DUBOIS, J.-P. QUADRAT, M. VIOT. *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes*, InriaLe Chesnay, France, 1983, n^{o} 191, http://hal.inria.fr/inria-00076367

[98] J.-P. COMET. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparison*, in "Theor. Comput. Sci., Special issue on max-plus algebras", 2003, vol. 293, pp. 189–217

[99] A. COSTAN, S. GAUBERT, E. GOUBAULT, M. MARTEL, S. PUTOT. *A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs*, in "Proceedings of the 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05)", Edinburgh, LNCS, Springer, July 2005, pp. 462–475

[100] P. COUSOT, R. COUSOT. *Abstract Interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction of approximations of fixed points*, in "Principles of Programming Languages 4", 1977, pp. 238–252

[101] P. COUSOT, R. COUSOT. *Comparison of the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. JTASPEFL '91, Bordeaux*, in "BIGRE", October 1991, vol. 74, pp. 107–110

[102] M. CRANDALL, L. TARTAR. *Some relations between non expansive and order preserving maps*, in "Proceedings of the AMS", 1980, vol. 78, n^{o} 3, pp. 385–390

[103] R. CUNINGHAME-GREEN. *Minimax Algebra*, Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, 1979, n^{o} 166

[104] J. DE LOERA, B. STURMFELS, C. VINZANT. *The central curve in linear programming*, in "Foundations of Computational Mathematics", 2012, vol. 12, n^{o} 4, pp. 509–540

[105] J.-P. DEDIEU, G. MALAJOVICH, M. SHUB. *On the Curvature of the Central Path of Linear Programming Theory*, in "Foundations of Computational Mathematics", 2005, vol. 5, n^{o} 2, pp. 145–171

[106] P. DEL MORAL. *Maslov optimization theory: topological aspects*, in "Idempotency (Bristol, 1994)", Cambridge, Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press, 1998, vol. 11, pp. 354–382

[107] P. DEL MORAL, T. THUILLET, G. RIGAL, G. SALUT. *Optimal versus random processes : the nonlinear case*, LAAS, 1990

[108] M. DEVELIN, B. STURMFELS. *Tropical convexity*, in "Doc. Math.", 2004, vol. 9, pp. 1–27

[109] M. DEVELIN, J. YU. *Tropical polytopes and cellular resolutions*, in "Experimental Mathematics", 2007, vol. 16, n^{o} 3, pp. 277–292, http://arxiv.org/abs/math/0605494

[110] A. DEZA, T. TERLAKY, Y. ZINCHENKO. *Polytopes and arrangements: diameter and curvature*, in "Operations Research Letters", 2008, vol. 36, n^o 2, pp. 215–222

[111] A. DEZA, T. TERLAKY, Y. ZINCHENKO. *Central path curvature and iteration-complexity for redundant Klee-Minty cubes*, in "Advances in applied mathematics and global optimization", New York, Adv. Mech. Math., Springer, 2009, vol. 17, pp. 223–256, http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75714-8_7

[112] V. DHINGRA, S. GAUBERT. *How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration*, in "Valuetools '06: Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools", New York, NY, USA, ACM Press, 2006, 12 p. , http://doi.acm.org/10.1145/1190095.1190110

[113] M. DI LORETO, S. GAUBERT, R. KATZ, J.-J. LOISEAU. *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, in "SIAM J. Control Optim.", 2010, vol. 48, n^o 8, pp. 5606-5628, http://arxiv.org/abs/0901.2915

[114] M. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, Gauthier VillarsParis, 1953, vol. XXI

[115] A. ELMASRY. *Computing the subset partial order for dense families of sets*, in "Information Processing Letters", 2009, vol. 109, n^o 18, pp. 1082 - 1086

[116] N. FARHI, M. GOURSAT, J.-P. QUADRAT. *Derivation of the Fundamental Diagram for Two Circular Roads and a Crossing Using Minplus Algebra and Petri Net Modeling*, in "Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)", Seville, Espagne, 2005

[117] A. FATHI. *Solutions KAM faibles et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, in "C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.", 1997, vol. 324, n^o 9, pp. 1043–1046

[118] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY. *Cluster algebras. I. Foundations*, in "J. Amer. Math. Soc.", 2002, vol. 15, n^o 2, pp. 497–529, http://arxiv.org/abs/math.RT/0104151

[119] S. FRIEDLAND. *Limit eigenvalues of nonnegative matrices*, in "Linear Algebra and Its Applications", 1986, vol. 74, pp. 173–178, http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(86)90120-5

[120] S. GAUBERT. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, École des Mines de Paris, July 1992

[121] S. GAUBERT. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Dec 1995, vol. 40, n^o 12, pp. 2014–2025

[122] S. GAUBERT, E. GOUBAULT, A. TALY, S. ZENNOU. *Static Analysis by Policy Iteration in Relational Domains*, in "Proceedings of the Proc. of the 16th European Symposium on Programming (ESOP'07)", Braga (Portugal), LNCS, Springer, 2007, vol. 4421, pp. 237–252, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71316-6_17

[123] S. GAUBERT, J. GUNAWARDENA. *The Duality Theorem for min-max functions*, in "C. R. Acad. Sci. Paris.", 1998, vol. 326, Série I, pp. 43–48

[124] S. GAUBERT, R. KATZ. *The Minkowski Theorem for Max-plus Convex Sets*, in "Linear Algebra and Appl.", 2007, vol. 421, pp. 356–369, http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0605078

[125] S. GAUBERT, J. MAIRESSE. *Modeling and analysis of timed Petri nets using heaps of pieces*, in "IEEE Trans. Automat. Control", 1999, vol. 44, n^{o} 4, pp. 683–697

[126] S. GAUBERT, W. MCENEANEY, Z. QU. *Curse of dimensionality reduction in max-plus based approximation methods: theoretical estimates and improved pruning algorithms*, in "Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 11)", Orlando, FL, USA, December 2011, pp. 1054-1061, http://arxiv.org/abs/1109.5241

[127] S. GAUBERT, M. SHARIFY. *Tropical scaling of polynomial matrices*, in "Positive systems", Berlin, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, 2009, vol. 389, pp. 291–303, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02894-6_28

[128] E. GAWRILOW, M. JOSWIG. *polymake: a Framework for Analyzing Convex Polytopes*, in "Polytopes — Combinatorics and Computation", G. KALAI, G. M. ZIEGLER (editors), Birkhäuser, 2000, pp. 43-74

[129] I. GELFAND, M. KAPRANOV, A. ZELEVINSKY. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994

[130] M. GONDRAN. *Analyse MINPLUS*, in "C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.", 1996, vol. 323, n^{o} 4, pp. 371–375

[131] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes, Dioïdes et semi-anneaux*, TEC & DOCParis, 2002

[132] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes*, in "EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique", 1977, vol. 2, pp. 25-41

[133] M. GONDRAN, M. MINOUX. *L'indépendance linéaire dans les dioïdes*, in "E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et recherches, Série C, Mathématiques, Informatique", 1978, vol. 1, pp. 67-90

[134] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, EyrollesParis, 1979, Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984

[135] M. GONDRAN, M. MINOUX. *Linear algebra in dioids: a survey of recent results*, in "Algebraic and combinatorial methods in operations research", Amsterdam, North-Holland Math. Stud., North Holland, 1984, vol. 95, pp. 147–163

[136] J. GUNAWARDENA. *From max-plus algebra to nonexpansive maps: a nonlinear theory for discrete event systems*, in "Theoretical Computer Science", 2003, vol. 293, pp. 141–167

[137] K. HASHIGUCHI. *Improved limitedness theorems on finite automata with distance functions*, in "Theoret. Comput. Sci.", 1990, vol. 72, pp. 27–38

[138] H. HILLION, J. PROTH. *Performance Evaluation of Job-shop Systems using Timed Event-Graphs*, in "IEEE Trans. on Automatic Control", Jan 1989, vol. 34, n^{o} 1, pp. 3-9

[139] Z. IZHAKIAN. *Tropical arithmetic and matrix algebra*, in "Comm. Algebra", 2009, vol. 37, n^o 4, pp. 1445–1468, http://dx.doi.org/10.1080/00927870802466967

[140] B. JEANNET, A. MINÉ. *Apron: A Library of Numerical Abstract Domains for Static Analysis*, in "Proc. of the 21th Int. Conf. on Computer Aided Verification (CAV 2009)", Lecture Notes in Computer Science, Springer, June 2009, vol. 5643, pp. 661–667

[141] V. KOLOKOLTSOV, V. MASLOV. *Idempotent analysis and applications*, Kluwer Acad. Publisher, 1997

[142] M. KREĬN, M. RUTMAN. *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in "Amer. Math. Soc. Translation", 1950, vol. 1950, n^o 26, 128 p.

[143] D. KROB. *The equality problem for rational series with multiplicities in the tropical semiring is undecidable*, in "Int. J. of Algebra and Comput.", 1993, vol. 3

[144] A. LAKHOUA. *Méthode des éléments finis max-plus pour la résolution numérique de problèmes de commande optimale déterministe*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Université de Tunis El Manar, 2007

[145] J.-B. LASSERRE. *Generating functions and duality for integer programs*, in "Discrete Optimization", 2004, pp. 167–187

[146] J.-Y. LE BOUDEC, P. THIRAN. *Network calculus*, LNCS, Springer, 2001, n^o 2050

[147] P. LE MAIGAT. *Techniques algébriques Max-Plus pour l'analyse des performances temporelles de systèmes concurrents*, Université Rennes 1, September 2002

[148] C. LENTÉ. *Analyse max-plus des problèmes d'ordonnancement de type flowshop*, Université de Tours, November 2001

[149] H. LEUNG. *Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof*, in "Theoret. Comput. Sci", 1991, vol. 81, pp. 137–145

[150] G. LITVINOV, V. MASLOV, G. SHPIZ. *Idempotent functional analysis: an algebraic approach*, in "Math. Notes", 2001, vol. 69, n^o 5, pp. 696–729, http://arxiv.org/abs/math.FA/0009128

[151] P. LOTITO, E. MANCINELLI, J.-P. QUADRAT. *A minplus derivation of the fundamental car-traffic law*, in "IEEE TAC", 2005, vol. 50, n^o 5, pp. 699-705, http://hal.inria.fr/inria-00072263

[152] Q. LU, M. MADSEN, M. MILATA, S. RAVN, U. FAHRENBERG, K. G. LARSEN. *Reachability analysis for timed automata using max-plus algebra*, in "J. Log. Algebr. Program.", 2012, vol. 81, n^o 3, pp. 298-313

[153] V. MAGRON. *Preuves formelles pour l'optimisation globale – Méthodes de gabarits et sommes de carrés*, Ecole Polytechnique X, December 2013, http://hal.inria.fr/pastel-00917779

[154] J. MALLET-PARET, R. NUSSBAUM. *Eigenvalues for a Class of Homogeneous Cone Maps Arising from Max-Plus Operators*, in "Discrete and Continuous Dynamical Systems", July 2002, vol. 8, n^o 3, pp. 519–562

[155] E. MANCINELLI, G. COHEN, S. GAUBERT, J.-P. QUADRAT, E. ROFMAN. *On Traffic Light Control*, in "MathematicæNotæ, Boletin del Instituto de Matematica "Beppo Levi"", 2005, vol. XLIII, pp. 51-62, http://hal.inria.fr/inria-00072311

[156] V. MASLOV. *Méthodes Operatorielles*, Edition MirMoscou, 1987

[157] V. MASLOV, S. SAMBORSKIĬ. *Idempotent analysis*, Advances In Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc.Providence, 1992, vol. 13

[158] G. MIKHALKIN. *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry*, in "Different faces of geometry", Int. Math. Ser. (N. Y.), Kluwer/Plenum, New York, 2004, vol. 3, pp. 257–300, http://arxiv.org/abs/math.AG/0403015

[159] M. MORISHIMA. *Equilibrium, stability, and growth: A multi-sectoral analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964, xii+227 p.

[160] T. MOTZKIN, H. RAIFFA, G. THOMPSON, R. THRALL. *The double description method*, in "Contributions to the Theory of Games", H. KUHN, A. TUCKER (editors), 1953, vol. II, pp. 51-73

[161] R. NUSSBAUM. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, in "Memoirs of the AMS", 1988, vol. 75, n^o^ 391

[162] G. OLSDER. *Eigenvalues of dynamic max-min systems*, in "Discrete Event Dyn. Syst.", 1991, vol. 1, n^o^ 2, pp. 177-207

[163] J.-E. PIN. *Tropical Semirings*, in "Idempotency", J. GUNAWARDENA (editor), Publications of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, 1998

[164] M. PLUS. *Linear systems in* $(\max, +)$*-algebra*, in "Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control", Honolulu, Dec. 1990

[165] P. PONCET. *Infinite-dimensional idempotent analysis: the role of continuous posets*, École Polytechnique (France), November 2011

[166] P. PRITCHARD. *Opportunistic algorithms for eliminating supersets*, in "Acta Informatica", 1991, vol. 28, pp. 733-754

[167] P. PRITCHARD. *A simple sub-quadratic algorithm for computing the subset partial order*, in "Information Processing Letters", 1995, vol. 56, n^o^ 6, pp. 337 - 341

[168] P. PRITCHARD. *A Fast Bit-Parallel Algorithm for Computing the Subset Partial Order*, in "Algorithmica", 1999, vol. 24, pp. 76-86

[169] P. PRITCHARD. *On Computing the Subset Graph of a Collection of Sets*, in "Journal of Algorithms", 1999, vol. 33, n^o^ 2, pp. 187 - 203

[170] A. PUHALSKIĬ. *Large Deviations and Idempotent Probability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall, 2001, n^o^ 119

[171] J.-P. QUADRAT. *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique*, in "Comptes Rendus Acad. Sci.", 1990, n^{o} 311, pp. 745-748

[172] J. RICHTER-GEBERT, B. STURMFELS, T. THEOBALD. *First steps in tropical geometry*, in "Idempotent mathematics and mathematical physics", Providence, RI, G. LITVINOV, V. MASLOV (editors), Contemp. Math., Amer. Math. Soc., 2005, vol. 377, pp. 289–317

[173] I. ROMANOVSKIĬ. *Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming*, in "Kibernetika", 1967, vol. 3, n^{o} 2, pp. 66-78

[174] D. ROSENBERG, S. SORIN. *An operator approach to zero-sum repeated games*, in "Israel J. Math.", 2001, vol. 121, pp. 221–246

[175] A. RUBINOV. *Abstract convexity and global optimization*, Kluwer, 2000

[176] S. SAMBORSKIĬ. *Extensions of differential operators and nonsmooth solutions of differential equations*, in "Kibernet. Sistem. Anal.", 2002, n^{o} 3, pp. 163–180, 192

[177] S. SANKARANARAYANAN, H. SIPMA, Z. MANNA. *Scalable Analysis of Linear Systems using Mathematical Programming*, in "VMCAI", LNCS, 2005, vol. 3385

[178] I. SIMON. *Limited subsets of the free monoid*, in "Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science", IEEE, 1978, pp. 143–150

[179] I. SIMON. *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, in "Theor. Infor. and Appl.", 1994, vol. 28, n^{o} 3-4, pp. 277–294

[180] I. SINGER. *Abstract convex analysis*, Wiley, 1997

[181] D. SPEYER, B. STURMFELS. *The tropical Grassmannian*, in "Adv. Geom.", 2004, vol. 4, n^{o} 3, pp. 389–411

[182] O. VIRO. *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, in "European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)", Basel, Progr. Math., Birkhäuser, 2001, vol. 201, pp. 135–146, http://arxiv.org/abs/math.AG/0005163

[183] N. VOROBYEV. *Extremal algebra of positive matrices*, in "Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik", 1967, vol. 3, pp. 39–71, in russian

[184] D. M. YELLIN, C. S. JUTLA. *Finding extremal sets in less than quadratic time*, in "Information Processing Letters", 1993, vol. 48, n^{o} 1, pp. 29 - 34

[185] D. M. YELLIN. *Algorithms for subset testing and finding maximal sets*, in "Proceedings of the third annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms", Philadelphia, PA, USA, SODA '92, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, pp. 386–392

[186] K. ZIMMERMANN. *Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras*, in "Theoret. Comput. Sci.", 2003, vol. 293, n^{o} 1, pp. 45–54, Max-plus algebras

[187] K. ZIMMERMANN. *Extremální Algebra*, Ekonomický ùstav C ˇSAVPraha, 1976, (in Czech)

[188] U. ZIMMERMANN. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*, North Holland, 1981